UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES-INFORMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etude
Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Cycle LMD
Spécialité : Modélisation Contrôle et Optimisation

Thème :
PROBLEMES AUX LIMITES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Présenté par :
Mme ROUDJANE SENOUCI Samira

Soutenu le 12/06/2013.

Devant le jury

M.	OULD ALI	**Président**	MCB	**U. MOSTAGANEM.**
M.	SAIDANI	**Examinateur**	MAA	**U. MOSTAGANEM.**
Z.	DAHMANI	**Encadreur**	MCA	**U. MOSTAGANEM.**

Dédicace

Traditionnellement les dédicaces sont faites pour les personnes aide à la réalisation d'un objectif, pour une fois je transgresse cette tradition pour remercier Dieu Le Tout Puissant, Dieu qui ma crée et qui a crée en moi cette assiduité et cet amour pour les études.

Viennent ensuite :

Mes très chers parents qui n'arrêtent de m'encourager, ma mère la prunelle de mes yeux, le symbole de l'affection, mon père qui m'a appris à aimer les études depuis mon enfance.

Mon mari "Roudjane Charef" qui ma encouragée.

Mon frère "Yacine".

Mes sœurs "Daouya, Faiza et Manel".

A toutes mes amies spécialement "Amen et Kheira" et à ceux et celles qui m'ont aidés pour réalisée ce modeste travail.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah, le Tout Puissant, de m'avoir donné la santé , la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.

Je remercie du fond de mon coeur, mes parents et mon mari qui m'ont soutenue, encouragée et motivée tout au long de mes études.

je remercie Monsieur Z.DAHMANI qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et m'a guidée avec ses précieux conseils et suggestions, et la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de ce travail.

Je remercie vivement M.OUD Ali de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury. Je remercie également Mme M.SAIDANI membre de jury pour l'honneur qu'elle m'a accordé en acceptant de juger mon travail.

Table des matières

INTRODUCTION

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Cette théorie a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements dans le monde réel. Par exemple, les équations différentielles fractionnaires sont souvent applicables dans l'ingénierie, la physique, la chimie, la biologie, ...etc [1, 2, 3].

Dans ce mémoire, nous allons nous inspirer des articles de [5, 6, 4, 7] pour faire le point sur toutes ces études en donnant plusieurs résultats d'existence des solutions pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire, moyennant la dérivée fractionnaire de Caputo. Cette étude se fera principalement à l'aide de théorème de point fixe de Banach, théorème de point fixe de Schaefer et de Krasnoselski.

Le principe de contraction de Banach, qui garantit l'existence d'un point fixe d'une contraction définie sur un espace métrique complet et à valeur dans lui même, a été énoncé par Banach en 1922. Ce principe est le plus simple des théorèmes de point fixe et il a de nombreuses applications dans la théorie des équations différentielles.

Le théorème du point fixe de Schaefer, est particulièrement utile pour prouver l'existence des solutions d'équations différentielles non linéaires. Ce théorème est en fait un cas particulier d'un théorème de plus grande portée découvert auparavant par Schauder.

En 1955, et pour la première fois, Krasnoselski a élaboré son théorème du point fixe qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractante et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires, il apporte des réponses aux problèmes d'existence et d'unicité.

Objectifs de ce travail

L'objectif principal de ce travail est l'étude de l'existence et de l'unicité des solutions de certaines équations différentielles fractionnaires.

Dans la première partie, on présente quelques définitions et quelques propriétés des intégrales et des dérivées fractionnaires.

Dans la deuxième partie, on abordera quelques théorèmes assurant l'existence et l'unicité des solutions pour les équations différentielles.

La troisième partie est consacrée à l'étude de quelques résultats d'existence et d'unicité des équations différentielles fractionnaire. Quelques exemples illustratifs seront aussi présentés dans cette partie.

Chapitre 1

Calcul Fractionnaires

Le but de ce chapitre est de présenter, d'une manière synthétique et unifiée, les éléments sur la théorie du calcul fractionnaire sur lesquels s'appuient nos travaux décrits dans le chapitre 2.

1.1 Intégrales Fractionnaires

1.1.1 Définition

Définition 1.1 : "Fonction Gamma d'Euler"

On appelle fonction Gamma eulérienne (ou intégrale eulérienne de seconde espèce) la fonction notée Γ *définie par*

$$\mathit{\Gamma}(z) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \ , \ z > 0. \tag{1.1}$$

Propriétés

Pour tout $z \in \mathbb{R} \backslash \{0, -1, -2, ...\}$, *et* $m \in \mathbb{N}$, *on a*

1. $\mathit{\Gamma}(z+1) = z\mathit{\Gamma}(z)$
2. $\mathit{\Gamma}(z+m) = z(z+1)\ldots(z+m-1)\,\mathit{\Gamma}(Z)$
3. $\mathit{\Gamma}(m+1) = m!.$

Définition 1.2 : "La fonction Bêta"

On définit la fonction Bêta par [4] :

$$B(\alpha,\ \beta) := \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du, \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0. \tag{1.2}$$

Les fonctions Gamma et Bêta sont reliées par la relation :

$$B(\alpha,\ \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{1.3}$$

Propriétés :

1. $B(\alpha,\ \beta) = B(\beta, \alpha)$.
2. $\alpha B(\alpha,\ \beta+1) = \beta B(\alpha+1,\ \beta)$.
3. *Si* $n = \beta + 1$ *alors, on obtient :* $\quad B(\alpha,\ n) = \dfrac{n-1}{\alpha} B(\alpha+1,\ n-1)$.
4. $B(\alpha,\ 1) = \dfrac{1}{\alpha+1}$.

Définition 1.3 [5][6] :

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$. On définit l'opérateur de l'intégrale fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville par la formule :

$$\begin{aligned} J^{\alpha} f(t) \quad : &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau; \qquad \alpha > 0,\ t > 0. \\ J^{0} f(t) \quad : &= f(t). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Et si la fonction est définie sur un intervelle quelconque $[a, b]$, alors :

Définition 1.4 :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On définit l'opérateur de l'intégrale fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville par la formule :

$$J_a^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau; \qquad \alpha > 0,\ t > 0. \tag{1.5}$$

1.1.2 Propriétés

Proposition 1.1 :

Soit J^{α} l'opérateur de l'intégrale fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville. On a :

$$J^{\alpha}t^{\beta}=\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}t^{\alpha+\beta},\ \alpha>0,\ \beta>-1,\ t>0. \tag{1.6}$$

Preuve :

Par définition, on a

$$J^{\alpha}t^{\beta}=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}\tau^{\beta}d\tau.$$

Alors

$$J^{\alpha}t^{\beta}=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{0}^{t}\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1}\tau^{\beta}d\tau.$$

Grâce au changement de variable $\frac{\tau}{t}=y$, on obtient :

$$\begin{aligned}
J^{\alpha}t^{\beta} &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{0}^{t}\left(1-y\right)^{\alpha-1}t^{\beta+1}y^{\beta}d\tau \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{0}^{1}\left(1-y\right)^{\alpha-1}y^{\beta}d\tau \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma\left(\alpha\right)}B\left(\alpha,\ \beta+1\right) \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{t^{\alpha+\beta}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}.
\end{aligned}$$

Exemple : Considérons la fonction $f\left(x\right)=\left(t-a\right)^{\beta}$; $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$. Alors :

$$J^{\alpha}\left(t-a\right)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}\left(\tau-a\right)^{\beta}d\tau.$$

Pour évaluer cette intégrale, on pose le changement $\tau=a+\left(t-a\right)s$. D'où

$$\begin{aligned} J^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha}. \end{aligned}$$

On voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$ où on a :

$$J^1 (t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} (t-a)^{\beta+1} = \frac{(t-a)^{\beta+1}}{\beta+1}$$

à cause de la relation $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Proposition 1.2 :

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *et soient* $\alpha > 0$, $\beta > 0$. *On a :*

$$\left(J^{\alpha} \circ J^{\beta}\right) f(t) = \left(J^{\beta} \circ J^{\alpha}\right) f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t). \tag{1.7}$$

Preuve : Par définition, on a :

$$\begin{aligned} J^{\alpha} \circ J^{\beta} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left[\int_0^{\tau} (\tau-\rho)^{\beta-1} f(\rho)\, d\rho\right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \left[\int_0^{\tau} (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\rho)^{\beta-1} f(\rho)\, d\rho\right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^{\tau} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\rho)^{\beta-1} f(\rho)\, d\tau. \end{aligned}$$

En utilisant la formule(1.4), on obtient :

$$\begin{aligned} J^{\alpha} \circ J^{\beta} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\tau} \left(J^{\alpha} (\tau-\rho)^{\beta-1} f(\rho)\right) d\rho \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\tau} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (\tau-\rho)^{\alpha+\beta-1} f(\rho)\, d\rho \\ &= J^{\alpha+\beta} f(t) \\ &= J^{\beta+\alpha} f(t). \end{aligned}$$

Proposition 1.3 :

Soient $c > 0$, $\alpha > 0$, *on a alors :*

$$J_{-\infty}^{\alpha} e^{ct} = c^{-\alpha} e^{ct}. \tag{1.8}$$

Preuve : Avec les mêmes arguments que précédemment, on obtient :

$$J_{-\infty}^{\alpha} e^{ct} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} e^{c\tau} d\tau.$$

On pose $(t-\tau) = y$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} J_{-\infty}^{\alpha} e^{ct} &= -\frac{e^{ct}}{\Gamma(\alpha)} \int_{+\infty}^{0} y^{\alpha-1} e^{-cy} dy \\ &= \frac{e^{ct}}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-cy} dy . \end{aligned}$$

Le changement de variable $t = cy$ transforme cette dernière intégrale en :

$$J_{-\infty}^{\alpha} e^{ct} = \frac{e^{ct}}{c^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

D'où

$$J_{-\infty}^{\alpha} e^{ct} = \frac{e^{ct}\Gamma(\alpha)}{c^{\alpha}\Gamma(\alpha)} = \frac{e^{ct}}{c^{\alpha}},\ c > 0.$$

1.2 Dérivées Fractionnaires :

1.2.1 Opérateur de Dérivée n^{ème} :

Définition 1.5 :

L'opérateur de la dérivée d'ordre n; $n \in \mathbb{N}^*$ *est noté par* D^n.

$$D^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t)$$

où D^n, *vérifie les propriétés suivantes :*

$$D^n J^n f = f,\ J^n D^n f \neq f,\ f \in C^n(\mathbb{R}_+). \tag{1.9}$$

$$J^n D^n f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!},\ t > 0. \tag{1.10}$$

Preuve :

On passe à démontrer (1.10), on a le dévellopement limités de f au point 0

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)t + f^{(2)}(0)\frac{t^2}{2!} + ... + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau)d\tau.$$

D'où,

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau)d\tau = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}.$$

1.2.2 Dérivée au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.6 [5][6] :

Soit $f \in C^1([a,\ b])$, la dérivée fractionnaire d'ordre $(0 < \alpha < 1)$ au sens de Riemann-Liouville est

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau)\, d\tau. \tag{1.12}$$

Définition 1.7 :

Soit $f \in C^n([a,\ b])$, *on définit la dérivée d'ordre α $(0 \leq n-1 < \alpha < n)$ au sens de Riemann-Liouville par :*

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \tag{1.13}$$

$$= D^n J^{n-\alpha} f(t).$$

Propriétés :

Soient α, β deux paramètres réels et $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$. Alors, on a :

1. $D^\alpha J^\alpha f(x) = f(x),\ \alpha > 0.$
2. $D^\beta J^\alpha f(x) = D^{\beta-\alpha} f(x),\ \beta < 0, \alpha > 0.$
3. $J^\alpha D^\alpha f(x) \neq f(x), \alpha > 0.$

4. $D^n D^\alpha f(x) = D^{n+\alpha} f(x), \alpha > 0, n \in \mathbb{N}$.
5. $D^\alpha D^\beta f(x) \neq D^\beta D^\alpha f(x)$.
6. $D^\beta D^\alpha f(x) \neq D^{\alpha+\beta} f(x)$.

Démonstration :

1-On commence par démontrer la propriété 1.

$$\begin{aligned} D^\alpha J^\alpha f(x) &= D^n J^{n-\alpha} J^\alpha f(x), \ \alpha > 0 \\ &= D^n J^{n-\alpha+\alpha} f(x) \\ &= D^n J^n f(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

2-Pour la démonstration de la propriété 3, on prend $f(t) = (t-a)^{\alpha-1}$, $t > a$.

Alors,

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= D^\alpha (t-a)^{\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-1+1-\alpha)}(t-a)^{\alpha-1-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(0)}(t-a)^1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc,

$$J^\alpha(0) = 0 \neq f(t).$$

1.2.3 Dérivée au sens de Caputo

Définition 1.8 [5][6] :

Soit $f \in C^n([a,\ b])$. On définit la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction f comme suit :

$$
\begin{aligned}
D_*^{\alpha} f(t) &= \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau; & n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N}^* \\ \dfrac{d^n}{dt^n} f(t); & \alpha = n,\ a<t\leq b \end{cases} \\
&= J^{n-\alpha} D^n f(t)
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Exemple : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$; $f(t) = (t-a)^{\beta}$ et soit α non entier $0 \leq n-1 < \alpha < n$ avec $\beta > n-1$, alors on a :

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n}.$$

Donc,

$$D_*^{\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n}\, d\tau.$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient :

$$
\begin{aligned}
D_*^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n}\, d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1) B(n-\alpha,\ \beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Propriétés :

1. $D_*^\alpha c = 0$; *c est une constante.*
2. $D_*^\alpha t^\beta = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)} t^{\beta-\alpha}; & \beta > \alpha - 1 \\ 0; & \beta \leq \alpha - 1. \end{cases}$.

1.2.4 Lien entre Caputo et Rieman-Liouville :

Pour tout $t > 0, n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$, *on a :*

$$D^\alpha f\ (t) = D_*^\alpha f\,(t) + \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \tag{1.15}$$

Démonstration :

Par définition, on a :

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)d\tau\right).$$

Une simple intégration par partie donne :

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^n}{\Gamma(n-\alpha)dt^n}\left(\frac{t^{n-\alpha}}{n-\alpha}f(0) + \frac{t^{n-\alpha+1}}{n-\alpha}f^{(1)}(0) + ... + \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha+n-1} f^{(n)}(\tau)d\tau\right).$$

Et donc,

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{d^n}{\Gamma(n-\alpha)dt^n}\left(\int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha+n-1} f^{(n)}(\tau)d\tau\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)d\tau\right). \end{aligned}$$

1.3 Quelques Théorèmes du Point Fixe :

Les théorèmes du point fixe jouent un rôle crucial dans le domaine des applications. Il intervient dans les résultats d'existence et d'unicité. Par conséquent on énonce quelques définitions liées à ce paragraphe et certain nombre des résultats du point fixe.

1.3.1 Définitions :

Définition 1.9 : ***(Espace vectoriel normé)***

Soit E un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle norme sur l'espace E toute application notée $||.||$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, vérifiant pour tout x, y dans E et γ dans K

1. $||x|| = 0$ si seulement si $x = 0$.
2. $||\gamma x|| = |\gamma| ||x||$ (homogènéité).
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (inégalité triangulaire).

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Définition 1.10 : (Espace de Banach)

Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

Exemple :

$((C([a, b], \mathbb{R}), ||.||_\infty)$ est un espace de Banach.

Définition 1.11 : ***(Suites de Cauchy)***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de K. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la norme $||.||_K$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N, \forall p \geq 0, ||u_{n+p} - u_n|| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.12 : ***(Espace complet)***

Un $\mathbb{R} - ev$ K est dit complet pour la norme $||.||_K$ si toute suite de Cauchy(pour cette norme) est convergente (pour cette norme). Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.

Définition 1.13 :

On dit que $K \subset X$ est un ensemble convexe si :

$$\forall (x, y) \in K \times K, \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x + (1 - \lambda) y \in K.$$

Autrement dit, K est convexe s'il contient tout "segment" reliant deux quelconques de ses points.

Définition 1.14 :

Soit E un espace de Banach. Un sous ensemble $F \subset E$ est dit compact si de tout recrouvrement ouvert de F on peut extraire un sous recouvrement fini. Cela veut dire que, toute famille $\{V_j,\ j \in J\}$ d'ensembles ouverts dont la rénuion contient F admet une sous-famille finie :

$$\{V_j,\ j(k) \in J,\ k = 1, 2, ..., n\} \text{ dont la rénuion contient } F.$$

Définition 1.15 :

Soient E et F deux espaces de Banach. Une application linéaire continue T est dite compacte si l'image $T(B_E)$ par l'application T de la boule unité fermée B_E de l'espace E est relativement compacte (en norme) dans F. On note $C(E, F)$ l'ensemble des applicatons linéaires compactes de E dans F.

Définition 1.16 :

Pou tout élément x de K l'ensemble $A(x) = \{f(x),\ f \in A\}$ est équicontinue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists v \in \vartheta(x), \forall f \in A, \forall y \in v, d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Définition 1.17 :

L'opérateur T est dite complètement continue, si elle est continue et compacte.

Théorème d'Ascoli-Arzila [4] :

Soient X et Y deux espaces de Banach. Si X est compact, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *L'ensemble A est relativement compact dans $C(X, Y)$.*
2. $\begin{cases} i) \text{ l'ensemble } A \text{ est équicontinue en tout point de } X \\ ii) \ A(x) := \{f(x),\ f \in A\} \text{ est borné.} \end{cases}$

1.3.2 Théorème du point fixe de Banach :

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver et qui s'applique aux espaces complets et possède de nombreuses applications. Ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution pour les équations différentielles ou les équations intégrales.

Théorème 1.1 :

Soient X un espace de Banach et $f : X \to X$ une application contractante sur X. Alors f admet un unique point fixe dans X.

1.3.3 Théorème du point fixe de Schaefer

Théorème 1.2 :

Soient X un espace de Banach et $Q : X \to X$ une application continue et compact sur X. Si l'ensemble $B = \{x \in X;\, x = \lambda Q,\, 0 < \lambda < 1\}$ est bornée, alors l'application admet au moins un point fixe.

1.3.4 Théorème du point fixe de Krasnoselski

Théorème 1.3 :

Soit B un ensemble non vide fermé convexe dans un espace de Banach X. On suppose que $Q_1, Q_2 : B \to X$ telles que :

(1)- $\forall x, y \in B$, *alors* $Q_1x + Q_2y \in B$.

(2)- Q_1 *est une application contractante*

(3)- Q_2 *est continue et* $Q_2(B)$ *est relativement compact.*

Sous ces trois conditions, alors on peut dire qu'il existe $Z \in B$, telle que $Z = Q_1Z + Q_2Z$.

Chapitre 2

Equations différentielles fractionnaires

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaires.

2.1 Existence et unicité

2.1.1 Problème 1 :

Soit α un réel positif vérifiant $m-1<\alpha<m$, $m\in\mathbb{N}^*$, D_*^α désigne l'opérateur de dérivation au sens de Caputo et I^α *l'opérateur de l'intégrale fractionnaire d'ordre* α.

On se donne le problème aux conditions initiales suivant :

$$\begin{cases} D_*^\alpha x(t)=f(t,x(t)) \ ,t\in J=[0,T] \ \ ,1<\alpha<2 \\ x(0)-x^{'}(0)=I^\alpha g(T) \\ x(T)-x^{'}(T)=I^\beta h(T)\,;\ \beta>0 \end{cases} \tag{2.1}$$

tel que $h,g:J\to E$ soient deux fonctions continues.

Pour trouver la solution intégrale on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.1 [7,8] :

Soit $\alpha>0$, *alors l'équation différentielle fractionnaire suivante :*

$$D_*^\alpha x(t)=0$$

admet comme solution

$$x(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + ... + C_{m-1} t^{m-1} \quad , m = [\alpha] + 1 \quad , C_j \in \mathbb{R} \quad , j = 0, ..., m-1.$$

***Preuve* :** Soit

$$x(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + ... + C_{m-1} t^{m-1}.$$

Alors, on a

$$D_*^\alpha x(t) = D_*^\alpha (C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + ... + C_{m-1} t^{m-1})$$

D'aprèt la proprposition 1.2, on a alors :

$$D_*^\alpha x(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)} C_{m-1} t^{m-1-\alpha} = 0.$$

Lemme 2.2 [7,8] :

Soit $\alpha > 0$. *Alors,*

$$I^\alpha D_*^\alpha f(t) = f(t) + C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + ... + C_{m-1} t^{m-1},$$

où $m = [\alpha] + 1$ *et* $C_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, ..., m-1$.

***Preuve* :** On a,

$$D_*^\alpha f(t) = I^{m-\alpha} D^m f(t).$$

Et donc,

$$\begin{aligned} I^\alpha D_*^\alpha f(t) &= I^\alpha I^{m-\alpha} D^m f(t) \\ &= I^m D^m f(t) \\ &= f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0) \\ &= f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} C_j t^j, \text{où } \; C_j = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}. \end{aligned}$$

Lemme 2.3 :

La solution intégrale de problème (2.1) est :

$$\begin{aligned} x(t) &= I^{\alpha}f(t,x(t)) - \frac{1+t}{T}I^{\alpha}f(t,x(t))|_{t=T} + \frac{1+t}{T}I^{\alpha-1}f(t,x(t))|_{t=T} \\ &+\frac{1+t}{T}I^{\beta}h(T) + \frac{T-1-t}{T}I^{\alpha}g(T). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Preuve :

1-Supposons que (2.2) est vérifié. Alors

$$\begin{aligned} D_*^{\alpha}x(t) &= D_*^{\alpha}\Big[I^{\alpha}f(t,x(t)) - \frac{1+t}{T}I^{\alpha}f(t,x(t))|_{t=T} + \frac{1+t}{T}I^{\alpha-1}f(t,x(t))|_{t=T} + \frac{1+t}{T}I^{\beta}h(T) \\ &+\frac{T-1-t}{T}I^{\alpha}g(T) + \frac{1+t}{T}I^{\beta}h(T) + \frac{T-1-t}{T}I^{\alpha}g(T)\Big] \\ &= D_*^{\alpha}I^{\alpha}f(t,x(t)) \\ &= f(t,x(t)). \end{aligned}$$

2−Supposons que (2.1) est vérifié et par application de lemme 2.1 on trouve :

$$\begin{aligned} I^{\alpha}D_*^{\alpha}x(t) &= x(t) \\ &= I^{\alpha}f(t,x(t)) - C_0 - C_1 t. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Pour trouver C_0 et C_1, on utilise les conditions initiales de (2.1). On obtient

$$\begin{aligned} x(0) &= I^{\alpha}f(t,x(t))|_{t=0} - C_0 - C_1 0 \\ x(0) &= -C_0 \end{aligned}$$

et

$$x(T) = I^{\alpha}f(t,x(t))|_{t=T} - C_0 - C_1 T.$$

Et comme,

$$y^{'}(t) = -C_1 + I^{\alpha-1}f(t,x(t)),$$

alors on obtient,

$$\begin{aligned} x^{'}(0) &= -C_1 + I^{\alpha-1}f(t,x(t))|_{t=0} \ , \\ x^{'}(0) &= -C_1, \end{aligned}$$

et

$$x^{'}(T) = -C_1 + I^{\alpha-1}f(t,x(t))|_{t=T} \ .$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} x(0) - x^{'}(0) &= -C_0 + C_1 \\ &= I^{\alpha}g(T) \\ x(T) - x^{'}(T) &= I^{\alpha}f(t,x(t))|_{t=T} - C_0 - C_1T + C_1 - I^{\alpha-1}f(t,x(t))|_{t=T} \\ &= I^{\beta}h(T). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} C_1 - C_0 = I^{\alpha}g(T) & ...(1) \\ (T-1)C_1 + C_0 = I^{\alpha}f(t,x(t))|_{t=T} - I^{\alpha-1}f(t,x(t))|_{t=T} \ - I^{\beta}h(T) \ . & ...(2) \end{cases}.$$

Pour (1)-(2) on obtient :

$$TC_1 = \ I^{\alpha}g(T) + I^{\alpha}f(t,x(t))|_{t=T} - I^{\alpha-1}f(t,x(t))|_{t=T} \ - I^{\beta}h(T).$$

D'où

$$C_1 = \frac{1}{T} \ I^{\alpha}g(T) + \frac{1}{T}I^{\alpha}f(t,x(t))|_{t=T} - \frac{1}{T}I^{\alpha-1}f(t,x(t))|_{t=T} \ - \frac{1}{T}I^{\beta}h(T).$$

En remplaçant C_1 dans l'équation (2.3) on obtient :

$$C_0 = \frac{1}{T}I^{\alpha}f(t,x(t))|_{t=T} - \frac{1}{T}I^{\alpha-1}f(t,x(t))|_{t=T} \ - \frac{1}{T}I^{\beta}h(T) + \frac{1-T}{T}I^{\alpha}g(T).$$

En conclusion, on a :

$$\begin{aligned} x(t) &= I^{\alpha}f(t,x(t)) - \frac{1+t}{T}I^{\alpha}f(t,x(t))|_{t=T} + \frac{1+t}{T}I^{\alpha-1}f(t,x(t))|_{t=T} \\ &+\frac{1+t}{T}I^{\beta}h(T) + \frac{T-1-t}{T}I^{\alpha}g(T). \end{aligned}$$

2.1.2 Premier Résultat :

Théorème 2.1 :

Supposons que :

(A_1) : Il existe une constante $L>0$ telle que :

$$|f(t,x)-f(t,y)| \leq L|x-y|\,;\; x,y\in\mathbb{R},\; t\in[0,T]$$

et

$$||h|| = \sup_{t\in[0,T]}|h(t)| \leq k_1,\; k_1>0$$

et

$$||g|| = \sup_{t\in[0,T]}|g(t)| \leq k_2,\; k_2>0$$

et

$$H = \frac{2T^{\alpha}+\alpha T^{\alpha-2}+(1+\alpha)T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{2.4}$$

Si $LH<1$, alors le problème (2.1) admet une solution unique dans $C([0,T],\mathbb{R})$.

Preuve : Considérons l'opérateur $\phi : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{aligned} \phi x(t) &= I^{\alpha}f(t,x(t)) - \frac{1+t}{T}I^{\alpha}f(t,x(t))|_{t=T} + \frac{1+t}{T}I^{\alpha-1}f(t,x(t))|_{t=T} \\ &+\frac{1+t}{T}I^{\beta}h(T) + \frac{T-1-t}{T}I^{\alpha}g(T). \end{aligned}$$

Pour montrer que ϕ admet un unique point fixe il suffit de montrer que ϕ est contractante.

En effet :

Soient $x,y\in C(J,\mathbb{R})$ et $t\in J$, alors :

$$
\begin{aligned}
|\phi x(t)-\phi y(t)| &= |I^{\alpha}f(t,x(t)-\frac{1+t}{T}I^{\alpha}f(t,x(t))|_{t=T}+\frac{1+t}{T}I^{\alpha-1}f(t,x(t))|_{t=T}+\frac{1+t}{T}I^{\beta}h(T)\\
&+\frac{T-1-t}{T}I^{\alpha}g(T)-I^{\alpha}f(t,y(t))+\frac{1+t}{T}I^{\beta}h(T)+\frac{T-1-t}{T}I^{\alpha}g(T)\\
&-I^{\alpha}f(t,y(t))+\frac{1+t}{T}I^{\alpha}f(t,y(t))|_{t=T}-\frac{1+t}{T}I^{\alpha-1}f(t,y(t))|_{t=T}\\
&-\frac{1+t}{T}I^{\beta}h(T)-\frac{T-1-t}{T}I^{\alpha}g(T)|\\
&\leq |I^{\alpha}f(t,x(t)-I^{\alpha}f(t,y(t))|+|\frac{1+t}{T}||I^{\alpha}f(t,x(t))|_{t=T}-I^{\alpha}f(t,y(t))|_{t=T}|\\
&+|\frac{1+t}{T}||I^{\alpha-1}f(t,x(t))|_{t=T}-I^{\alpha-1}f(t,y(t))|_{t=T}|\\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}L|x-y|d\tau+\frac{1+t}{T\;\Gamma(\alpha)}\int_0^T(T-\tau)^{\alpha-1}L|x-y|d\tau\\
&+\frac{1+t}{T\;\Gamma(\alpha-1)}\int_0^T(T-\tau)^{\alpha-2}L|x-y|d\tau\\
&\leq \frac{L|x-y|}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{t^{\alpha}}{\alpha}+\frac{T^{\alpha}(1+t)}{\alpha T}+\frac{T^{\alpha-1}(1+t)}{T}\right].
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
||\phi x-\phi y|| &\leq \frac{L||x-y||}{\Gamma(\alpha+1)}\left[T^{\alpha}+T^{\alpha-1}+T^{\alpha}+\alpha T^{\alpha-2}+\alpha T^{\alpha-1}\right]\\
&\leq \frac{L||x-y||}{\Gamma(\alpha+1)}[2T^{\alpha}+(1+\alpha)T^{\alpha-1}+\alpha T^{\alpha-2}].
\end{aligned}
$$

D'où, ϕ est contractant et d'après le théorème de point fixe Banach, ϕ admet un seul point fixe qui est une solution du problème (2.1).

2.1.3 Deuxiéme Résultat :

On va utiliser le théorème de point fixe de Schaefer pour démontrer que ϕ admet au moins un point fixe.

Théorème 2.2 :

Supposons que
(A_2) : f : $[0,T] \times \mathbb{R}$ est une fonction continue.
(A_3) : Il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$|f(t,y)| \leq M \quad t \in [0,T] \ , \ y \in \mathbb{R}.$$

Alors le problème (2.1) admet au moins une solution sur J.

Preuve : Pour démontrer que ϕ admet au moins un point fixe il faut passer par 4 étapes :

Etape 1 : "ϕ est continue"
Soit $(x_n)_{n\in N}$ est une suite telle que x_n converge vers x dans $C(J,\mathbb{R})$.
Donc, $\forall t \in J$ on a :

$$\begin{aligned} |\phi x_n(t) - \phi x(t)| \ &\leq \ |I^\alpha f(t, x_n(t) - I^\alpha f(t, x(t))| + \left|\frac{1+t}{T}\right| |I^\alpha f(t, x_n(t))|_{t=T} - I^\alpha f(t, x(t))|_{t=T}| \\ &+ \left|\frac{1+t}{T}\right| \left|I^{\alpha-1} f(t, x_n(t))|_{t=T} \ - I^{\alpha-1} f(t, x(t))|_{t=T} \ \right|. \end{aligned}$$

Comme f est une fonction continue on a :

$$|\phi x_n(t) - \phi x(t)| \to 0, \text{ quand } n \to \infty$$

Etape 2 : "ϕ est borné dans $C(J,\mathbb{R})$ "

ϕ est borné dans $C(J,\ \mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall r > 0,\ \exists N > 0,\ \forall x \in B_r = \{x \in C([0,T],\mathbb{R}), ||x|| \leq r\}\ ,\ ||\phi x|| \leq N$

Pour tout $t \in J$, $x \in B_r$, on a :

$$
\begin{aligned}
|\phi x(t)| &= \left| I^{\alpha} f(t,x(t)) - \frac{1+t}{T} I^{\alpha} f(t,x(t))|_{t=T} + \frac{1+t}{T} I^{\alpha-1} f(t,x(t))|_{t=T} + \frac{1+t}{T} I^{\beta} h(T) \right. \\
&\quad \left. + \frac{T-1-t}{T} I^{\alpha} g(T) \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau,x(\tau))| \, d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \frac{1+t}{T} \right| \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau,x(\tau))| \, d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \left| \frac{1+t}{T} \right| \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-2} |f(\tau,x(\tau))| \, d\tau + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left| \frac{1+t}{T} \right| \int_0^T (T-\tau)^{\beta-1} |h(\tau)| \, d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \frac{1-T+t}{T} \right| \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} |g(\tau)| \, d\tau \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} + \frac{M(1+t)}{T\,\Gamma(\alpha+1)} T^{\alpha} + \frac{M(1+t)}{T\,\Gamma(\alpha)} T^{\alpha-1} + \frac{k_1(1+t)}{T\,\Gamma(\beta+1)} T^{\beta} + \frac{k_2(1-T+t)}{T\,\Gamma(\alpha+1)} T^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
||\phi x|| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} T^{\alpha} + \frac{M(1+T)}{\Gamma(\alpha+1)} T^{\alpha-1} + \frac{M(1+T)}{\Gamma(\alpha)} T^{\alpha-2} + \frac{k_1(1+T)}{\Gamma(\beta+1)} T^{\beta-1} + \frac{k_2(1-T+T)}{\Gamma(\alpha+1)} T^{\alpha-1} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} \left[T^{\alpha} + T^{\alpha-1} + T^{\alpha} + \alpha T^{\alpha-2} + \alpha T^{\alpha-1} \right] + \frac{k_1(1+T)}{\Gamma(\beta+1)} T^{\beta-1} + \frac{k_2}{\Gamma(\alpha+1)} T^{\alpha-1} \\
&\leq \frac{\Gamma(\beta+1) M \left[2T^{\alpha} + (1+\alpha) T^{\alpha-1} + \alpha T^{\alpha-2} \right] + \Gamma(\alpha+1) \left[k_1(1+T) T^{\beta-1} \right] + k_2 T^{\alpha-1}}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+1)} \\
&\leq N \quad < \infty.
\end{aligned}
$$

D'où ϕ est borné sur $C(J,\mathbb{R})$.

Etape 3 : "ϕ est équicontinue"

Soient $t_1, t_2 \in J$, $t_1 < t_2$, $x \in B_k$, on a alors :

$$\begin{aligned}
|\phi x(t_2)-\phi x(t_1)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}(t_2-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau,x(\tau))|\,d\tau - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-\tau)^{\alpha-1}]\,|f(\tau,x(\tau))|\,d\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_2-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau,x(\tau))|\,d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau,x(\tau))|\,d\tau \\
&\quad -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau,x(\tau))|\,d\tau \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-\tau)^{\alpha-1}-(t_1-\tau)^{\alpha-1}\right]|f(\tau,x(\tau))|\,d\tau \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-\tau)^{\alpha-1}|f(\tau,x(\tau))|\,d\tau \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left[(t_2-\tau)^{\alpha-1}-(t_1-\tau)^{\alpha-1}\right]d\tau + \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-\tau)^{\alpha-1} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^{\alpha} - \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}t_2^{\alpha} + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}t_1^{\alpha} + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_2-t_1)^{\alpha} \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha}) + \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_1-t_2)^{\alpha}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$|\phi x(t_2)-\phi x(t_1)| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_1^{\alpha}-t_2^{\alpha}) + \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)}(t_1-t_2)^{\alpha}.$$

Quand $t_1 \to t_2$, le second membre de cette dernière inégalité tend vers zéro. Ainsi les étapes 1 à 3 et d'aprés le théorème d'Ascoli-Arzela, d'où ϕ est complètement continu.

Etape 4 : "Ω est borné"

Maintenant, il faut démontrer que l'ensemble :

$$\Omega = \{x \in C(J,\mathbb{R}) : x = \lambda\phi(x),\ 0<\lambda<1\}$$

est borné.

Soit $x \in \Omega$, alors $x = \lambda\phi(x)$ pour $0<\lambda<1$. Donc, pour chacun $t \in J$, on obtient :

$$\begin{aligned}
x(t) &= \lambda I^{\alpha} f(t,x(t)) - \lambda \frac{1+t}{T} I^{\alpha} f(t,x(t))|_{t=T} + \lambda \frac{1+t}{T} I^{\alpha-1} f(t,x(t))|_{t=T} + \lambda \frac{1+t}{T} I^{\beta} h(T) \\
&\quad + \lambda \frac{T-1-t}{T} I^{\alpha} g(T) \\
&= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau,x(\tau))d\tau + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \frac{1+t}{T} \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} f(\tau,x(\tau))d\tau \\
&\quad + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1+t}{T} \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-2} f(\tau,x(\tau))d\tau + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \frac{1+t}{T} \int_0^T (T-\tau)^{\beta-1} h(\tau)d\tau \\
&\quad + \frac{\lambda-\lambda T+\lambda t}{\Gamma(\alpha)T} \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} g(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Ceci implique par (A_3) que pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|x(t)| &= \lambda|\phi x(t)| \\
&\leq \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau,x(\tau))| d\tau + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \frac{1+t}{T} \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau,x(\tau))| d\tau \\
&\quad + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1+t}{T} \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-2} |f(\tau,x(\tau))| d\tau + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta)} \frac{1+t}{T} \int_0^T (T-\tau)^{\beta-1} \left|h(\tau)\right| d\tau \\
&\quad + \frac{\lambda-\lambda T+\lambda t}{\Gamma(\alpha)T} \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} |g(\tau)| d\tau \\
&\leq \frac{\lambda M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau + \frac{\lambda M}{\Gamma(\alpha)} \frac{1+t}{T} \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} d\tau + \frac{\lambda M}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{1+t}{T} \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-2} d\tau \\
&\quad + \frac{\lambda k_1}{\Gamma(\beta)} \frac{1+t}{T} \int_0^T (T-\tau)^{\beta-1} d\tau + k_2 \frac{\lambda-\lambda T+\lambda t}{\Gamma(\alpha)T} \int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1} d\tau \\
&\leq \frac{\lambda M}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} + \frac{\lambda M}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1+t}{T} T^{\alpha} + \frac{\lambda M}{\Gamma(\alpha)} \frac{1+t}{T} T^{\alpha-1} + \frac{\lambda k_1}{\Gamma(\beta+1)} \frac{1+t}{T} T^{\beta} \\
&\quad + k_2 \frac{\lambda-\lambda T+\lambda t}{\Gamma(\alpha)T} T^{\alpha}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$
\begin{aligned}
||x|| &\leq \lambda \frac{\Gamma(\beta+1)M\left[2T^{\alpha}+(1+\alpha)T^{\alpha-1}+\alpha T^{\alpha-2}\right]+\Gamma(\alpha+1)\left[k_1(1+T)T^{\beta-1}\right]+k_2T^{\alpha-1}}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+1)} \\
&\leq \lambda N \ <\infty.
\end{aligned}
$$

D'où, l'ensemble Ω est borné et donc, d'aprés le théorème du point fixe de Schaefer, nous déduisons que ϕ admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (2.1).

Exemple 2.1 :

Considérons le probième aux limites suivant :

$$
\begin{cases}
D_{*}^{\alpha}x(t)=\dfrac{e^{-2t}}{(3+e^{2t})(1+|x(t)|)},\ t\epsilon[0,T],\ 1<\alpha<2 \\
x(0)+x^{'}(0)=I^{\alpha}g(T) \\
x(T)+x^{'}(T)=I^{\beta}h(T),\ \beta>0.
\end{cases}
\tag{2.5}
$$

On prend :

$$
\begin{aligned}
f(t,x) &= \frac{e^{-2t}}{(3+e^{2t})(1+x)},\ (t,x)\epsilon[0,1]\times[0,+\infty[\\
g(t) &= \frac{1}{2+t},\ t\epsilon[0,T] \\
h(t) &= \frac{t}{1+t^2},\ t\epsilon[0,T]
\end{aligned}
$$

1-Pour $T=1$, on a

$$
\begin{aligned}
||g|| &\leq \frac{1}{3} \\
||h|| &\leq \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

2-Soient $x,y\in[0,+\infty[$ et $t\in[0,1]$. Alors, on obtient :

$$
\begin{aligned}
|f(t,x)-f(t,y)| &= \left|\frac{e^{-2t}}{(3+e^{2t})(1+x)}-\frac{e^{-2t}}{(3+e^{2t})(1+y)}\right| \\
&= \left|\frac{e^{-2t}(1+y)-e^{-2t}(1+x)}{(3+e^{2t})(1+y)(1+x)}\right| \\
&= \left|\frac{(1+y)-(1+x)}{e^{2t}(3+e^{2t})(1+y)(1+x)}\right| \\
&\leq \frac{|x-y|}{e^{2t}(3+e^{2t})} \\
&\leq \frac{1}{4}\,|x-y|\,.
\end{aligned}
$$

Donc, d'aprés le théorème 2.1, la condition de (A_1) est vérifiée avec $k_1=\dfrac{1}{2}$, $k_2=\dfrac{1}{3}$, $L=\dfrac{1}{4}$.
On vérifie la condition (2.4) pour $T=1$. En effet,

$$
\begin{aligned}
L\frac{2T^{\alpha}+\alpha T^{\alpha-2}+(1+\alpha)T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} &< 1 \Longleftrightarrow \frac{3+2\alpha}{4\Gamma(\alpha+1)}<1 \\
&\Longleftrightarrow \Gamma(\alpha+1)\leq 1.74.
\end{aligned}
$$

D'où le problème (2.5) admet une solution unique sur $[0,1]$.

On passe maintenant à vérifier les conditions du deuxième résultat :

(A_2) : f est continue sur $[0,1]\times[0,+\infty[$.

(A_3) : f est bornée.

On a,

$$
\begin{aligned}
|f(t,x)| &= \left|\frac{e^{-2t}}{(3+e^{2t})(1+x)}\right| \\
&\leq \frac{1}{e^{2t}(3+e^{2t})}\left|\frac{1}{1+x}\right| \\
&\leq \frac{1}{4}\leq M.
\end{aligned}
$$

Donc f est bornée.

D'où, le problème (2.6) admet au moins une solution sur $[0,1]$.

2.1.4 Problème 2 :

Considérons le problème aux limites suivant [9] :

$$\begin{cases} D_*^\alpha x(t) = f(t, x(t)),\ t \in J = [0, T],\ 0 < \alpha < 1 \\ ax(0) + bx(T) = \int\limits_0^T G(s)x(s)ds \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R},\ a + b \neq 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Lemme 2.4 :

La solution du problème aux limites (3.1) est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{a+b}\int\limits_0^T G(s)x(s)ds - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))ds && (3.2) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))ds. && (2.1.1) \end{aligned}$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} D_*^\alpha x(t) &= D_*^\alpha \left(\frac{1}{a+b}\int\limits_0^T G(s)x(s)ds - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))ds \right) \\ &= D_*^\alpha \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s))ds \right) \\ &= f(s, x(s)). \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 2.2, on obtient :

$$x(t) = I^\alpha f(t, x(t)) - C_0. \tag{3.3}$$

En utilisant la condition intégrale du problème (3.1), on obtient :

$$\begin{aligned} x(0) &= -C_0 \\ x(T) &= I^\alpha f(T, x(T)) - C_0 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$ax(0) = -aC_0$

$bx(T) = \dfrac{b}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds - bC_0.$

D'où,

$$\begin{aligned} ax(0) + bx(T) &= -(a+b)C_0 + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds \\ &= \int_0^T G(s)x(s) ds. \end{aligned}$$

Donc la valeur de C_0 est donnée par :

$$-C_0 = \frac{1}{a+b} \int_0^T G(s)x(s) ds - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds.$$

En remplaçant C_0 dans (3.3), on obtient :

$$x(t) = \frac{1}{a+b} \int_0^T G(s)x(s) ds - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + I^\alpha f(t, x(t)).$$

Passons maintenant à définir l'opérateur :

$$\begin{aligned} \Psi \quad &: \quad C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R}) \\ \Psi x(t) \quad &= \quad \frac{1}{a+b} \int_0^T G(s)x(s) ds - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds + I^\alpha f(t, x(t)). \end{aligned}$$

2.1.5 Troisième Résultat

Théorème 3.1 :

(B_1) : *Supposons qu'il existe une constant* $k > 0$ *telle que :*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k|x-y|;\ k > 0,\ x, y \in \mathbb{R},\ t \in J$$

et $N > 0$, telle que :

$$|f(t,y)| \leq N,\ \forall t \in J,\ y \in \mathbb{R}$$

(B_2) : *Soient* l *et* r *telle que :*

$$\frac{MrT}{a+b} + \frac{bNT^{\alpha}}{(a+b)\Gamma(\alpha+1)} + \frac{NT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \leq l < r.\text{pour tout } r > 0$$

où $M = \sup\limits_{t \in J}|G(t)|$ et $TM < (a+b)$.

(B_3) : Soit δ un réel positif tel que : $0 < \delta < 1$

$$\frac{MT\Gamma(\alpha+1) + bkT^{\alpha} + (a+b)kT^{\alpha}}{(a+b)\Gamma(\alpha+1)} \leq \delta$$

Alors le problème (3.1) admet une unique solution sur J.

Preuve :

Pour prouver ce théorème, il suffit de montrer que l'opérateur Ψ admet un point fixe dans $B_r = \{x \in C(J, \mathbb{R}),\ ||x|| \leq r\}$, $r > 0$ (voir B_2)

1) Soit $x \in B_r$, alors on a :

$$
\begin{aligned}
|\Psi x(t)| &= \left| \frac{1}{a+b}\int_0^T G(s)x(s)ds - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))ds + I^\alpha f(t,x(t)) \right| \\
&\leq \frac{1}{a+b}\int_0^T |G(s)||x(s)|ds + \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))|ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))|ds \\
&\leq \frac{Mr}{a+b}\int_0^T ds + \frac{bN}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds + \frac{N}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds.
\end{aligned}
$$

En utilisant la condition (B_2), on trouve :

$$||\Psi x|| \leq \frac{MrT}{a+b} + \frac{bNT^\alpha}{(a+b)\Gamma(\alpha+1)} + \frac{NT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq l < r.$$

D'où $\Psi B_r \in B_r$.

2) Maintenant, on montre que Ψ est contractant sur B_r.

Soient $x, y \in B_r$, $t \in J$. On a,

$$
\begin{aligned}
|\Psi x(t) - \Psi y(t)| &= \Bigg| \frac{1}{a+b}\int_0^T G(s)x(s)ds - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))ds + I^\alpha f(t,x(t)) \\
&\quad - \frac{1}{a+b}\int_0^T G(s)y(s)ds + \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds - I^\alpha f(t,y(t)) \Bigg| \\
&\leq \frac{1}{a+b}\int_0^T |G(s)||x(s)-y(x)|ds \\
&\quad + \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s)) - f(t,y(t))|ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(t,x(t)) - f(t,y(t))|ds.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$\begin{aligned}
||\Psi x - \Psi y|| &\leq \frac{MT||x-y||}{a+b} + \frac{bkT^\alpha||x-y||}{(a+b)\Gamma(\alpha+1)} + \frac{kT^\alpha||x-y||}{\Gamma(\alpha+1)} \\
&\leq \frac{MT\Gamma(\alpha+1) + bkT^\alpha + (a+b)kT^\alpha}{(a+b)\Gamma(\alpha+1)}||x-y|| \\
&\leq \delta||x-y||.
\end{aligned}$$

D'où Ψ est contractant sur B_r, et d'aprés le théorème de point fixe Banach, Ψ admet un unique point fixe.

2.1.6 Quatrième Résultat

Le résultat suivant est basé sur le théorème de point fixe de Krasnoselski.

Théorème 2.4 :

Soient (B_4) :

$$|f(t,y)| \leq \varphi(t);\ (t,y) \in J \times \mathbb{R}.$$

φ *fonction continue sur* $[0,T]$.
(B_5) *: la fonction* $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue et bornée telle que :*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \delta|x-y|;\ 0 < \delta < 1.$$

Supposons que les conditions $(B_4), (B_5)$ *sont vérifiées, alors le problème (3.1) admet au moins une solution sur* J.

Preuve Soit $\mu > 0$ tel que :

$$\frac{MrT}{a+b} + \frac{bT^\alpha}{(a+b)\Gamma(\alpha+1)}\|\varphi\| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\|\varphi\| \leq \mu < r$$

avec $\|\varphi\| = \sup\limits_{t\in J}|\varphi(t)|$.
Dans B_r, on définit les deux opérateurs R et S, comme suit :

$$
\begin{aligned}
Rx(t) &= \frac{1}{a+b}\int_0^T G(s)x(s)ds - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds. \\
&+\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds \\
Sy(t) &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds.
\end{aligned}
$$

Etap1 : "$R+S$ est borné"

Pour $x, y \in B_r$, on a :

$$
\begin{aligned}
|Rx(t)+Sy(t)| &= \Bigg|\frac{1}{a+b}\int_0^T G(s)x(s)ds - \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds \\
&+\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds + \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds\Bigg| \\
&\leq \frac{1}{a+b}\int_0^T |G(s)||x(s)|ds + \frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))|ds \\
&+\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))|ds + \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
\|R+S\| &\leq \frac{MrT}{a+b} + \frac{bT^\alpha}{(a+b)\Gamma(\alpha+1)}\|\varphi\| + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}||\varphi|| \\
&\leq \mu < r.
\end{aligned}
$$

D'où $Rx(t)+Sy(t) \in B_r$.

Etap2 : "R est contractant"

Il est facile de voir que R est contractant, alors on a

$$
\begin{aligned}
|Rx(t)-Ry(t)| &= \Bigg|\frac{1}{a+b}\int_0^T G(s)x(s)ds-\frac{1}{a+b}\int_0^T G(s)y(s)ds-\frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\\
&\quad+\frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds+\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))ds\\
&\quad-\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds\Bigg|\\
&\leq \frac{1}{a+b}\int_0^T |G(s)||x(s)-y(s)|ds+\frac{b}{(a+b)\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds\\
&\quad+\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,x(s))-f(s,y(s))||ds.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
||Rx-Ry|| &\leq \frac{MT}{a+b}||x-y||+\frac{bkT^\alpha}{(a+b)\Gamma(\alpha+1)}||x-y||+\frac{T^\alpha k}{2\Gamma(\alpha+1)}||x-y||\\
&\leq \delta||x-y||.
\end{aligned}
$$

D'où R est contractant.

Etap3 : "S est continu"

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que y_n converge vers y dans $C(J,\mathbb{R})$. Donc pour toute $t\in J$, on a :

$$
\begin{aligned}
|S(y_n)(t)-S(y)(t)| &= \left|\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y_n(s))ds-\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s,y(s))ds\right|\\
&\leq \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|ds.
\end{aligned}
$$

Comme f est une fonction continue, on obtient :

$|S(y_n)(t)-S(y)(t)|\to 0$, quand $n\to\infty$.

Etap4 : "la relative compacité de $S(B_r)$"

1-On a :

$$\begin{aligned}|Sy(t)| &= \left|\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds\right| \\ &\leq \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds.\end{aligned}$$

D'où,

$$||Sy|| \leq \frac{T^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)}||\varphi||.$$

Donc S est uniformément borné dans B_r .

2- Soient $t_1, t_2 \in J$, $t_1 < t_2$ et $y \in B_r$. On a :

$$\begin{aligned}|Sy(t_1) - Sy(t_2)| &= \left|\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds - \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds\right| \\ &\leq \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds - \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds \\ &\leq \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds - \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds \\ &\quad -\frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|ds \\ &\leq \frac{(t_2-t_1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}|\varphi| + \frac{t_1^\alpha - t_2^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)}|\varphi|.\end{aligned}$$

Donc,

$$\|Sy_{t_1} - Sy_{t_2}\| \leq \frac{(t_2-t_1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}||\varphi|| + \frac{t_1^\alpha - t_2^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)}||\varphi||$$

D'où, S est équicontinu dans B_r. Quand $t_1 \to t_2$, le second membre de cette dernière inégalit tend vers zéro, ainsi $S(B_r)$ est relativement compact et d'aprés le théorème d'Ascoli-Arzela, d'où S est un opérateur compact.

D'aprés le théorème de Krasnoselskii, le problème (3.1) admet au moins un point fixe.

CONCLUSION

Notre but principal est de présenter quelques résultats d'existence pour certaines équations différentielles d'ordre fractionnaire. Nous nous somme basés sur le théorème de point fixe de Banach, le théorème de Schauder et le théorème de Krasnoselski.

Bibliographie

[1] K. Diethelm and A.D. Freed : On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity. Scientifice Computing in Chemical Engineering. Springer- Verlag, Heidelberg, (1999).

[2] V. Gafiychuk, B. Datsun, V. Meleshko : Mathematical modeling of time fractional reactiondiffusion systems. J. Comp. Appl. Math. 220, 215-225, (2008).

[3] R. Hilfer : Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore, World Scientific, (2000).

[4] J. Cronin : Fixed points and topological degree in nonlinear analysis. AMS, (1964).

[5] J. Dixmier : Topologie générale collection Puf. Presses Universitaires de France, Paris (1981).

[6] J. Dugundji and A.Granas : Fixed point theory, Monographie Math, Warsaw, (1982).

[7] S. Szufla : On the application of measure of noncompactness to existence theorems. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 75 , pp 1-14, (1986).

[8] S. Zhang : Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations, Electron. J. Differential Equations, No. 36, pp12 (2006) .

[9] M.A. BENGRINE and Z. DAHMANI : Boundary Value Problems For Fractional Di erential Equations, Accepted in IJOPCM Journal, (2012).