REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM (UMAB)

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude

pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Thème

Polynôme différentiel généré par les solutions de l'équation $f'' + A(z)f = F(z)$

Présenté par

BENDEHIBA Aboubakr

Soutenu le 19/06/2013.

Devant le jury

Président :	AZIZ Hamani Karima	MC	UMAB
Examinateur :	HAMOUDA Saâda	MC	UMAB
Encadreur :	BELAÏDI Benharrat	Pr	UMAB

Table des matières

INTRODUCTION

Les équations différentielles linéaires dans le domaine complexe sont un secteur des Mathématiques admettant plusieurs approches. Parmi ces approches, la théorie locale est peut-être la plus étudiée. Ses résultats de base : Le Théorème d'existence et d'unicité, la structure linéaire de base des solutions, la singularité, etc. qui se trouve dans la théorie des fonctions. C'est l'application de la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes qui nous donne un aperçu sur les propriétés des solutions des équations différentielles. Cette direction, fondée par le célèbre mathématicien Rolph Nevanlinna, qui apparue à partir de 1929. Le premier qui a effectué des études systématiques sur les applications de la théorie de Nevanlinna sur les équations complexes est H. Wittich\dès 1942 .Actuellement, la théorie globale des équations différentielles complexes en liaison avec la théorie de Nevanlinna est devenue beaucoup plus utilisée. Pendant les trois dernières décennies plusieurs groupes actifs de mathématiciens dans divers pays ont joué un rôle remarquable dans ce domaine. Des résultats importants ont été établis. Cette théorie représente un outil indispensable dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes. Notre travail de recherche portera sur l'ordre de croissance et l'exposant de convergence pour les solutions et le polynôme différentiel généré par les solutions de l'équation différentielle du deuxième ordre

$$f'' + A(z)f = F(z) \tag{0.0.1}$$

où $A(z), F(z)$ sont fonctions méromorphes transcendantes d'ordre fini.
Ce mémoire est composé d'une introduction et deux chapitres.
Le premier chapitre contient des définitions et propriétés sur la fonction caractéristique de R\Nevanlinna et sur l'ordre de croissance et l'exposant de convergence d'une fonction méromorphe et entière.
Le deuxième chapitre est consacré à étudier l'ordre de croissance et l'exposant de convergence des solutions et de polynôme différentiel généré par les solutions de l'équation différentielle linéaire (0.0.1).

Chapitre 1

Quelques éléments de la théorie de R\Nevanlinna

1.1 Fonction caractéristique de R\Nevanlinna

Notations

1. Pour tout $x > 0$ réel on définit
$$\ln^+ x = \max\{\ln x, 0\}.$$
2. Pour tout fonction méromorphe f on définit $n(t, a, f)$ le nombre des pôles de la fonction
$$h(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$
dans le disque $|z| \leq t$, chacun des pôles étant compté un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et par $n(t, \infty, f)$ le nombre des pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$.

Définition 1.1.1 *([7]) Soit f une fonction méromorphe non constante. Posons*
$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \ln r,$$
et
$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta.$$
On définit la fonction caractéristique de R.Nevanlinna de la fonction f par
$$T(r, f) = N(r, f) + m(r, f).$$

Remarque 1.1.1 *Si f est une fonction entière non constante alors*
$$T(r, f) = m(r, f).$$

Exemple 1.1.1 *Pour la fonction $f(z) = e^{p(z)}$ où $p(z)$ est un polynôme de degré n , on a*
$$T(r, f) = m(r, f) = O(r^n).$$

1.2 Propriétés de la fonction caractéristique

Théorème 1.2.1 (Théoreme de Jensen) *([7]) Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0, \infty$. $a_1, ..., a_n$. Des zéros, et $b_1, ..., b_n$. Des pôles dans le disque $|z| \leq r$, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta + \sum_{0<|b_j|\leq r} \ln\frac{r}{|b_j|} - \sum_{0<|a_j|\leq r} \ln\frac{r}{|a_j|}.$$

Lemme 1.2.1 *([7]) Soit f une fonction méromorphe avec $a_1, ..., a_n$ sont des pôles de f dans le disque $|z| \leq r$, tel que $0 < |a_1| \leq ... \leq |a_n| \leq r$, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité et $f(0) \neq \infty$. Alors*

$$N(r, f) = \sum_{0<|a_j|\leq r} \ln\frac{r}{|a_j|}.$$

Proposition 1.2.1 *([7]) Soit f une fonction méromorphe avec le développement de Laurent*

$$f(z) = \sum_{i=m}^{\infty} c_k z^k, \ \ c_m \neq 0, \ \ z \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$T(r, f) - T(r, \frac{1}{f}) = \ln|c_m| = O(1). \tag{1.2.1}$$

Preuve. *On considère la fonction $h(z) = f(z)z^{-m}$.*
Il est clair que $h(0) = c_m \neq 0, \infty$, et si $z_0 \neq 0$ est un pôle (ou zéro) de la fonction f de multiplicité k, alors z_0 est un pôle (ou zéro) de la fonction h de multiplicité k.
Donc on a

$$N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}) = N(r, h) - N(r, \frac{1}{h}) - m\ln r.$$

On applique Théorème de Jensen et Lemme 1.2.1 on trouve

$$\begin{aligned}
\ln|c_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(re^{i\theta})r^{-m}\right| d\theta + \sum_{0<|b_j|\leq r} \ln\frac{r}{|b_j|} - \sum_{0<|a_j|\leq r} \ln\frac{r}{|a_j|} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta - m\ln r + N(r, h) - N(r, \frac{1}{h}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})|} d\theta + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}) \\
&= m(r, f) + N(r, f) - m(r, \frac{1}{f}) - N(r, \frac{1}{f}) \\
&= T(r, f) - T(r, \frac{1}{f}).
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.2.2 *([7]) Soit f,g deux fonctions méromorphes. Alors*

$$T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g), \tag{1.2.2}$$

et

$$T(r, f+g) \leq T(r, f) + T(r, g) + \ln 2. \tag{1.2.3}$$

Preuve. 1) *On a* $T(r, fg) = N(r, fg) + m(r, fg)$, *où*

$$\begin{aligned} m(r, fg) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f(re^{i\theta})g(re^{i\theta})\right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|g(re^{i\theta})\right| d\theta \\ &= m(r, f) + m(r, g), \end{aligned}$$

et

$$N(r, fg) \leq N(r, f) + N(r, g).$$

Donc

$$T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g).$$

2) *On a* $T(r, f+g) = N(r, f+g) + m(r, f+g)$, *où*

$$\begin{aligned} m(r, f+g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f(re^{i\theta}) + g(re^{i\theta})\right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f(re^{i\theta})\right| d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|g(re^{i\theta})\right| d\theta + \ln 2 \\ &= m(r, f) + m(r, g) + \ln 2, \end{aligned}$$

et

$$N(r, f+g) \leq N(r, f) + N(r, g).$$

Donc

$$T(r, f+g) \leq T(r, f) + T(r, g).$$

□

Lemme 1.2.2 (lemme de la dériveé logarithmique) *([7]) Soit f une fonction méromorphe transcendante. Alors*

$$m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) = S(r, f), \tag{1.2.4}$$

où $S(r, f) = O(\ln T(r, f) + \ln r)$ à l'extérieur d'un ensemble $E \subset (0, \infty)$ de mesure linéaire fini, et si f est d'ordre finie alors

$$m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) = O(\ln r).$$

1.3 L'ordre de croissance et l'exposant de convergence d'une fonction méromorphe et entière

Définition 1.3.1 (l'ordre de croissance) *([1], [14], [15]) Soient f une fonction méromorphe et $p \in \mathbb{N}$ $(p \geq 1)$, on définit l'ordre p-itératif $(\sigma_p(f))$ par*

$$\sigma_p(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\ln_p T(r,f)}{\ln r},$$

où

$$\ln_p T(r,f) = \overbrace{\ln \ln ... \ln}^{p\ fois} T(r,f).$$

Remarque 1.3.1

1. *Si f une fonction entière alors*

$$\sigma_p(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\ln_p m(r,f)}{\ln r}. \tag{1.3.1}$$

2. *Si f une fonction méromorphe avec $\sigma_p(f) < \infty$. Alors*

$$\sigma_{p+1}(f) = 0. \tag{1.3.2}$$

3. *([9, Remarque 1.3]) Si f est une fonctions méromorphe. Alors*

$$\sigma_p(f') = \sigma_p(f). \tag{1.3.3}$$

Exemple 1.3.1 *Pour la fonction $f(z) = e^{p(z)}$ où $p(z)$ est un polynôme de degré n , on a*

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\ln m(r,f)}{\ln r} = n,$$

et

$$\sigma_2(f) = 0.$$

Proposition 1.3.1 *Soit f,g deux fonctions méromorphes non constantes. Alors*

$$\sigma_p(fg) \leq \max\{\sigma_p(f), \sigma_p(g)\}, \tag{1.3.4}$$

et

$$\sigma_p(f+g) \leq \max\{\sigma_p(f), \sigma_p(g)\}. \tag{1.3.5}$$

Si $\sigma_p(g) < \sigma_p(f)$, alors

$$\sigma_p(f+g) = \sigma_p(fg) = \sigma_p(f). \tag{1.3.6}$$

Preuve. 1) *On a d'après la Proposition* 1.2.2

$$T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g) \leq 2\max\{T(r, f), T(r, g)\},$$

et

$$T(r, f+g) \leq T(r, f) + T(r, g) + \ln 2 \leq 2\max\{T(r, f), T(r, g)\}.$$

Donc

$$\sigma_p(fg) \leq \max\{\sigma_p(f), \sigma_p(g)\},$$

et

$$\sigma_p(f+g) \leq \max\{\sigma_p(f), \sigma_p(g)\}.$$

2) *Supposons* $\sigma_p(f) > \sigma_p(g)$. *Alors d'après la Proposition* 1.2.2 *on a*

$$\sigma_p(f) = \sigma_p((gf)\frac{1}{g}) \leq \max\left\{\ \sigma_p(gf),\ \sigma_p(\frac{1}{g})\right\}),$$

et

$$\sigma_p(f) = \sigma_p(g + f - g) \leq \max\{\ \sigma_p(g+f),\ \sigma_p(g)\}).$$

Comme $\sigma_p(f) > \sigma_p(g)$, alors

$$\sigma_p(f) \leq\ \sigma_p(gf),$$

et

$$\sigma_p(f) \leq\ \sigma_p(g+f).$$

Alors

$$\sigma_p(f+g) = \sigma_p(fg) = \sigma_p(f).$$

□

Exemple 1.3.2 *Pour la fonction* $f(z) = D(z)e^{p(z)}$, *où* $p(z)$ *est un polynôme de degré* n *et* $D(z)$ *une fonction méromorphe d'ordre* $< n$, *on a*

$$\sigma(f) = \sigma(e^p) = n.$$

Théorème 1.3.1 *([5, Théorème 1, p 199]) Soient* $f_1, f_2, ..., f_n (n \geq 2)$ *des fonctions méromorphes et* $g_1, g_2, ..., g_n$ *des fonctions entières vérifiant*

1) $\sum_{j=1}^{n} f_j e^{g_j} \equiv 0$,

2) *et pour* $1 \leq j < k \leq n$, $g_j - g_k$ *fonction non constante,*

3) *et pour* $1 \leq j \leq n$, $1 \leq h < k \leq n$, $\sigma(f_j) < \sigma(e^{g_h - g_k})$.

Alors $f_j \equiv 0 (j = 1, 2, ..., n)$.

Corollaire 1.3.1 *Pour la fonction* $A(z) = D_1(z)e^{p_1(z)} + D_2(z)e^{p_2(z)}$ *tel que* $D_1, D_2 (\not\equiv 0)$ *deux fonctions méromorphes d'ordre* $< n$, $p_1(z) = a_n z^n + \ . \ . \ . + a_1 z + a_0$, $p_2(z) = b_n z^n + \ . \ . \ . + b_1 z + b_0$ *deux polynômes non constantes et* $a_n \neq b_n$ $(a_n, b_n \in \mathbb{C})$, *on a*

$$\sigma(A) = \sigma(e^{p_1 - p_2}) = \max\{\sigma(e^{p_1}), \sigma(e^{p_2})\} = n. \tag{1.3.7}$$

Preuve. *Si $n = \sigma(e^{p_1}) > \sigma(e^{p_2})$ (où $\sigma(e^{p_1}) < \sigma(e^{p_2})$). Alors $\sigma(A) = n$.*
Si $\sigma(e^{p_1}) = \sigma(e^{p_2}) = n$. Donc d'après Théorème 1.3.1 on a $\sigma(A) \geq n$.
Alors $\sigma(A) = n$. □

Définition 1.3.2 (L'exposant de convergence) *([1], [13], [10], [9]) Soient f une fonction méromorphe et $p \in \mathbb{N}$ $(p \geq 1)$, on définit l'exposant de convergence p-itératif des zéros distincts ($\overline{\lambda}_p(f)$) par*

$$\overline{\lambda}_p(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\ln_p \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\ln r}$$

où

$$\overline{N}(r, f) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t, \infty, f) - \overline{n}(0, \infty, f)}{t} dt + \overline{n}(0, \infty, f) \ln r$$

avec $\overline{n}(t, \infty, f)$ nombre de pôles distincts de f dans le disque $|z| < t$.

Et l'exposant de convergence p-itératif des points fixes distincts ($\overline{\tau}_p(f)$) est défini par

$$\overline{\tau}_p(f) = \overline{\lambda}_p(f - z).$$

Remarque 1.3.2 *Si f une fonction méromorphe avec $M\overline{N}(r, f) \geq T(r, f)$ $(M > 0)$, alors*

$$\sigma_p(f) = \overline{\lambda}_p(f). \tag{1.3.8}$$

Définition 1.3.3 *([7]) Soit f une fonction méromorphe. Alors le défaut ($\delta(\infty, f)$) est défini par*

$$\delta(\infty, f) = \underline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{m(r, f)}{T(r, f)}.$$

Remarque 1.3.3 *Si f une fonction méromorphe tel que $\delta(\infty, f) > 0$, alors*

$$\sigma_p(f) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\ln_p m(r, f)}{\ln r}. \tag{1.3.9}$$

Exemple 1.3.3 *Pour la fonction $A(z) = D_1(z)e^{p_1(z)} + D_2(z)e^{p_2(z)}$ tel que $D_1, D_2(\not\equiv 0)$ deux fonctions méromorphes d'ordre $< n$, $p_1(z) = a_n z^n + \ldots$, $p_2(z) = \rho a_n z^n + \ldots$ deux polynômes non constantes et $0 < \rho < 1$ $(a_n(\neq 0) \in \mathbb{C})$, on a*

$$\delta(\infty, A) = \underline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{m(r, A)}{T(r, A)} \geq \underline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{(1 - \varepsilon)m(r, e^{p_1})}{4m(r, e^{p_1})} > 0 \ (0 < \varepsilon < 1).$$

Chapitre 2

L'ordre de croissance et l'exposant de convergence de polynôme différentiel généré par les solutions de l'équation $f'' + A(z)f = F(z)$

2.1 Introduction et résultats

En 2000, Chen ([1]) est le premier qui a étudié les points fixes des solutions de l'équation différentielle

$$f'' + A(z)f = 0, \tag{2.1.1}$$

avec $A(z)$ est une fonction entiére. Après cette étude en 2004 Wang et Lü ([13]) ont obtenu les résultats suivants.

Théorème A *Soient $A(z)$ une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini ($\sigma(A) = \sigma < +\infty$) et $\delta(\infty, f) > 0$. Alors toute solution méromorphe non triviale f de l'équation*

$$f'' + A(z)f = 0 \tag{2.1.2}$$

tel que *tous les pôles de f sont de multiplicité uniformément borné, vérifie*

$$\begin{cases} \overline{\tau}(f) = \overline{\tau}(f') = \overline{\tau}(f'') = \sigma(f) = +\infty, \\ \overline{\tau}_2(f) = \overline{\tau}_2(f') = \overline{\tau}_2(f'') = \sigma_2(f) = \sigma. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

Théorème B *Soient $A(z)$ et $F(z)$ deux fonctions méromorphes d'ordre fini vérifiant*

i) $\delta(\infty, A) > 0$,

ii) $\exists z \in \mathbb{C} : F(z) \not\equiv 0, F(z) \neq zA(z)$, $A'(z)(1 - F(z)) - A(z)F'(z) - zA^2(z) \not\equiv 0$, $A(z)A''(z)(z - F(z)) + 2A(z)A'(z)(1 - F'(z)) - 2(A'(z))^2(z - F(z)) - zA^3(z) \not\equiv 0$.

Alors il existe au plus une solution méromorphe f_2 *de l'équation*

$$f'' + A(z)f = F(z) \tag{2.1.4}$$

tel que toute solution méromorphe $f \not\equiv f_2$ *de l'équation* (2.1.4) *et tous les pôles de* f *sont de multiplicité uniformément borné, vérifie* (2.1.3).

Théorème 2.1.1 *Supposons que*

$$A(z) = D_1(z)e^{p_1(z)} + D_2(z)e^{p_2(z)} + Q(z) \tag{2.1.5}$$

tel que $D_i \not\equiv 0$ $(i = 1, 2\ )$, $p_1(z) = a_n z^n + \ . \ . \ . + a_1 z + a_0$, $p_2(z) = b_n z^n + \ . \ . \ . + b_1 z + b_0$ *deux polynômes non constantes et* $a_n \neq b_n$ $(a_n, b_n \in \mathbb{C})$ *et soient* $Q(z)$, $F(z)$ *et* $D_i(z)$ $(i = 1, 2\ )$ *des fonctions méromorphes d'ordre* $< n$. *Alors toute solution méromorphe* f *de l'équation* (2.1.4) *tel que tous les pôles de* f *sont de multiplicité uniformément borné, est d'ordre infini* ($\sigma(f) = +\infty$).

Théorème 2.1.2 *Soient* $A(z)$ *et* $F(z)$ *deux fonctions définies dans le Théorème 2.1.1 avec* $\dfrac{a_n}{b_n} = \rho$ $(0 < \rho < 1)$ *et* $\psi(z) \not\equiv 0$ *une fonction méromorphe d'ordre* $< n$. *Alors il existe au plus une solution méromorphe* f_2 *de l'équation* 2.1.4 *tel que toute solution méromorphe* $f \not\equiv f_2$ *de l'équation* (2.1.4) *et tous les pôles de* f *sont de multiplicité uniformément borné, vérifie*

i) $\overline{\lambda}(f - \psi) = +\infty$ *et* $\overline{\lambda}_2(f - \psi) = \sigma(A)$,
ii) $\overline{\lambda}(f' - \psi) = +\infty$ *et* $\overline{\lambda}_2(f' - \psi) = \sigma(A)$,
iii) $\overline{\lambda}(f'' - \psi) = +\infty$ *et* $\overline{\lambda}_2(f'' - \psi) = \sigma(A)$.

En 2006, Chen and Shon ([4]) ont étudié la relation entre les solutions de l'équation

$$f'' + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0 \tag{2.1.6}$$

et les fonctions de petit croissance, et ont prouvé le théorème suivant.

Théorème C *Soient* $A_j \not\equiv 0$ $(j = 0\ ,\ 1)$ *deux fonctions entieres d'ordre* < 1 $(\sigma(A_j) < 1)$ *et* $a \neq 0$, $b \neq 0$ *deux nombres complexes tels que* $\arg a \neq \arg b$ *ou* $a = cb$ $(0 < c < 1)$, *soient* $\psi(z) \not\equiv 0$, *une fonction entiere d'ordre fini et* $d_0(z)$, $d_1(z)$, $d_2(z)$ *des polynômes tel qu'il existe* $d_i \not\equiv 0$ $(0 \leq i \leq 2)$, *et on pose* $L(f) = d_0 f + d_1 f' + d_2 f''$. *Alors toute solution non triviale* f *de l'équation*

$$f'' + A_0(z)e^{az}f' + A_1(z)e^{bz}f'' = 0 \tag{2.1.7}$$

tel que *tous les pôles de* f *sont de multiplicité uniformément borné, vérifie*

$$\overline{\lambda}(f - \psi) = \overline{\lambda}(f' - \psi) = \overline{\lambda}(f'' - \psi) = +\infty,$$

et

$$\overline{\lambda}(L(f) - \psi) = \quad +\infty \qquad \text{si } (\sigma(\psi) < 1).$$

Théorème 2.1.3 *Soient $A(z)$, $F(z)$ deux fonctions définies dans le Théorème 2.1.1, et soit $d_0(z)$, $d_1(z)$, $d_2(z)$ des fonctions méromorphes d'ordre $\leq n$, tel qu'il existe $d_i \not\equiv 0$ $(0 \leq i \leq 2)$, et supposons que $\psi(z) \not\equiv 0$ une fonction méromorphe d'ordre fini. Alors toute solution méromorphe non triviale f de l'équation* (2.1.4) *tel que tous les pôles de f sont de multiplicité uniformément borné, vérifie*

$$\overline{\lambda}(L(f) - \psi) = +\infty.$$

Remarque 2.1.1 *Si tous les pôles de f sont de multiplicité uniformément borné, alors*

$$\exists M > 0 : N(r, f) \leq M\overline{N}(r, f). \tag{2.1.8}$$

2.2 Lemmes préliminaires

Notation *Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ on défini*

$$\delta(P, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta,\ \overline{\delta}(P, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$$

avec $p(z) = (\alpha + i\beta)z^n + ...$ un polynôme de dégré n et α, β deux constantes réelles, et notons

$$S^+ = \{\theta : \delta(P, \theta) > 0\},\ S^- = \{\theta : \delta(P, \theta) < 0\}.$$

Lemme 2.2.1 *([6]) Soit f une fonction méromorphe et transcendante avec $\sigma(f) = \sigma < \infty$, $H = \{(k_{1,}j_1), (k_{2,}j_2), ..., (k_{q,}j_q)\}$ un ensemble fini de paires d'entiers distinctes vérifiant $ki \geq j_i \geq 0$, pour $i = 1, ..., q$. Et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors*
(i) Il exist un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ ayant une mesure linéaire nulle, tel que si $\psi \in [0, 2\pi)\backslash E$, alors il existe une constante $R_0 = R_0(\psi) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \psi$ et $|z| \geq R_0$ et pour tout $(k, j) \in H$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z_n)}{f^{(j)}(z_n)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)} \tag{2.2.1}$$

(ii) il exist un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout z vérifiant $|z| \notin E \cup [0, 1]$ pour et tout $(k, j) \in H$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z_n)}{f^{(j)}(z_n)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}. \tag{2.2.2}$$

(iii) il exist un ensemble $E \subset [1, +\infty)$ de mesure linéaire finie,tel que pour tout z vérifiant $|z| \notin E \cup [0, 1]$ et pour tout $(k, j) \in H$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z_n)}{f^{(j)}(z_n)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma+\varepsilon)}. \tag{2.2.3}$$

Lemme 2.2.2 *([11]) Soient $p(z) = (\alpha + i\beta) z^n + ...$ un polynôme de degré n et W une fonction méromorphe d'ordre $\leq n$ et $g(z) = W(z)e^{p(z)}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un* *ensemble de mesure linéaire nulle* $H_1 \subset [0, 2\pi]$ *tel que pour tout* $\arg(z) = \theta \in [0, 2\pi] \diagdown (H_1 \cup H_2)$ *et pour* $|z| = r$ *assez grand on a*

$$1) \text{ si } \delta(p,\theta) < 0, \text{ alors } \exp((1+\varepsilon)\delta(p,\theta)r^n) \leq |g(z)| \leq \exp((1-\varepsilon)\delta(p,\theta)r^n), \quad (2.2.4)$$

$$2) \text{ si } \delta(p,\theta) > 0, \text{ alors } \exp((1-\varepsilon)\delta(p,\theta)r^n) \leq |g(z)| \leq \exp((1+\varepsilon)\delta(p,\theta)r^n), \quad (2.2.5)$$

avec $H_2 = \{\theta : \delta(p,\theta) = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ (H_2 *de mesure linéaire nulle*).

Preuve. *Supposons que* $g(z) = h(z) e^{(\alpha+i\beta)z^n}$ *où* $h(z) = W(z) e^{P_{n-1}(z)}$, $P_{n-1}(z) = P(z) - (\alpha + i\beta) z^n$, *alors* $\sigma(h) = s < n$. *Du Lemme* 2.2.1, *pour tout* ε *donné* $0 < 2\varepsilon < n - s, H_2 = \{\theta \in [0, 2\pi] ; \delta(P, \theta) = 0\}$, *il existe un* $H_1 \subset [0, 2\pi]$ *de mesure linéaire nulle telle que pour tout* $z = re^{i\theta}$ *avec* $|z|$ *suffisamment grand et,* $\theta \in [0, 2\pi] \diagdown H_1$, *on a pour* $R_0 > 1$ *et* $|z| > R_0$

$$\left| \frac{h'\left(re^{i\theta}\right)}{h\left(re^{i\theta}\right)} \right| \leqslant r^{(s-1+\varepsilon/2)}. \quad (2.2.6)$$

En intégrant le long de la courbe $C = \{z : \arg z = \theta, R_0 \leq |z| < r\}$, *nous avons*

$$\log h\left(re^{i\theta}\right) = \int_{R_0}^{r} \frac{h'\left(te^{i\theta}\right)}{h\left(te^{i\theta}\right)} e^{i\theta} dt + \log h\left(R_0 e^{i\theta}\right). \quad (2.2.7)$$

De(2.2.6) *et* (2.2.7) *nous obtenons*

$$\left|\log h\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq r^{s+\varepsilon/2} + M \leq r^{s+\varepsilon},$$

où $M > 0$ *est une constante, et*

$$\left|\log\left|h\left(re^{i\theta}\right)\right|\right| \leq \left|\log h\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq r^{s+\varepsilon}.$$

D'où

$$\exp\left\{-r^{s+\varepsilon}\right\} \leq \left|h\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\left\{r^{s+\varepsilon}\right\}. \quad (2.2.8)$$

De $\left|\exp\left\{(\alpha+i\beta)\left(re^{i\theta}\right)^n\right\}\right| = e^{\delta(P,\theta)r^n}$ *et*(2.2.8), *nous avons*

$$exp\left\{\delta(P,\theta)r^n - r^{s+\varepsilon}\right\} \leq \left|g\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq exp\left\{\delta(P,\theta)r^n + r^{s+\varepsilon}\right\}. \quad (2.2.9)$$

Comme $s + \varepsilon < n$ *donc* $r^{s+\varepsilon} \leq \varepsilon\delta(p,\theta)r^n$ *si* $\delta(p,\theta) > 0$ *ou* $r^{s+\varepsilon} \leq -\varepsilon\delta(p,\theta)r^n$ *si* $\delta(p,\theta) < 0$. *D'où on a (2.2.5), (2.2.4).* □

Lemme 2.2.3 *([12, lemme 2.5]) Soit* $f(z)$ *une fonction entière d'ordre égal* $\sigma > 0$ *et supposons que*

$$G(z) = \frac{\ln^+ \left|f^{(k)}(z)\right|}{|z|^\rho} \quad (2.2.10)$$

est non borneé pour un certain $\arg z = \theta$ *avec* $0 < \rho < \sigma$ *une constante. Alors il existe une suite infinie de points* $z_n = r_n e^{i\theta} (n = 1, 2, ...)$, *où* $r_n \to \infty$, *telle que* $G(z_n) \to \infty$ *et*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(k)}(z_n)}\right| \leq \frac{1}{(k-j)!} |z_n|^{k-j} (1 + \circ(1)) (j = 0, ..., k-1) \quad (2.2.11)$$

Preuve. *On pose* $M(r,\theta,G)=\max\{|G(z)|:|z|\leq r,\arg z=\theta\}$.
On a

$$m(r,f^{(k)})\leq \log^{+}\left|f^{(k)}(re^{i\theta}\right| \tag{2.2.12}$$

pour $\arg z=\theta\in E$ *où* $E\subset[0,2\pi]$ *un ensemble non vide.*
Alors *il existe une suite infinie de points* $z_n=r_ne^{i\theta}$, $r_n\to\infty$, *telle que pour tout* n, *on a* $M(r_n,\theta,G)=G(z_n)\to\infty$ *quand* $n\to+\infty$.
Pour tout n *on a par* $(k-j)$ *intégrations itérées le long du segment* $L_1:\left\{z=re^{i\theta},\ 0<\ r<|z_n|\right\}$

$$\begin{aligned}f^{(j)}(z_n) &= f^{(j)}(0)+f^{(j+1)}(0)\frac{z_n}{1!}+...+\frac{1}{(k-j-1)!}f^{(k-1)}(0)z_n^{k-j-1}\\ &+\overbrace{\int_0^{z_n}\int_0^{t_{k-j-1}}...\int_0^{t_1}}^{(k-j)\text{ fois}}f^{(k)}(t)dtdt_1...dt_{k-j-1}.\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Par suite, en utilisant l'inégalité triangulaire et l'estimation

$$\frac{\ln^{+}\left|f^{(k)}(z)\right|}{|z|^{\rho}}\leq\frac{\ln^{+}\left|f^{(k)}(z_n)\right|}{|z_n|^{\rho}}\Longrightarrow\left|f^{(k)}(z)\right|\leq\left|f^{(k)}(z_n)\right| \tag{2.2.14}$$

sur le segment L_1.*On obtient*

$$\begin{aligned}\left|f^{(j)}(z_n)\right| &\leq \left|f^{(j)}(0)\right|+\left|f^{(j+1)}(0)\right||z_n|+...+\frac{1}{(k-j-1)!}\left|f^{(k-1)}(0)\right||z_n|^{k-j-1}\\ &+\frac{1}{(k-j)!}\left|f^{(k)}(z_n)\right||z_n|^{k-j}.\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

D'où, on aura pour $z_n\to\infty$,

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(k)}(z_n)}\right|\leq\frac{1}{(k-j)}(1+\circ(1))\,|z_n|^{k-j}\ (j=0,...,k-1). \tag{2.2.16}$$

□

Lemme 2.2.4 *([2]) Soient* $A_0,...,A_{k-1},F\not\equiv 0$ *des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si* f *une solution méromorphe d'ordre infini de l'équation*

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+...+A_0f=F, \tag{2.2.17}$$

alors $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty$.

Preuve. *Si* z_0 *est un zéro de* f *de multiplicité* m *et n'est pas un pôle de* A_j $(j=0,...,k-1)$, *alors* z_0 *est un zéro de* F *de multiplicité* $\geq m-k$. *Donc*

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)\leq k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{F}\right)+\sum_{0}^{k-1}N\left(r,A_j\right),$$

et

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leq\sum_{1}^{k}m\left(r,\frac{f^{(j)}}{f}\right)+\sum_{0}^{k-1}m\left(r,A_j\right)+m\left(r,\frac{1}{F}\right).$$

Donc

$$T\left(r,f\right)\leq k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\sum_{0}^{k-1}T\left(r,A_j\right)+T\left(r,F\right)+S\left(r,f\right)$$

D'où $\overline{\lambda}(f)=\lambda(f)=\sigma(f)=\infty.$ □

Lemme 2.2.5 *([3]) Soit f une fonction méromorphe d'ordre fini σ. Alors pour tout $\varepsilon>0$ il existe un ensemble de mesure linéaire nulle $E_1\subset[0,2\pi]$ tel que pour tout* $\arg(z)=\theta\in[0,2\pi]\diagdown E_1$ *et pour $|z|=r$ assez grand on a*

$$\exp(-r^{\sigma+\varepsilon})\leq|f(z)|\leq\exp(r^{\sigma+\varepsilon}). \tag{2.2.18}$$

Preuve. *Du Lemme* 2.2.1*, pour tout $\varepsilon>0$ donné, il existe un $E_1\subset[0,2\pi]$ de mesure linéaire nulle telle que pour tout $z=re^{i\theta}$ avec $|z|$ suffisamment grand et, $\theta\in[0,2\pi]\diagdown E_1$, on a pour $R_0>1$ et $|z|>R_0$,*

$$\left|\frac{f'\left(re^{i\theta}\right)}{f\left(re^{i\theta}\right)}\right|\leqslant r^{(\sigma-1+\varepsilon/2)}. \tag{2.2.19}$$

En intégrante le long de la courbe $C=\{z:\arg z=\theta,R_0\leq|z|<r\}$, nous avons

$$\log f\left(re^{i\theta}\right)=\int_{R_0}^{r}\frac{f'\left(te^{i\theta}\right)}{f\left(te^{i\theta}\right)}e^{i\theta}dt+\log f\left(R_0e^{i\theta}\right). \tag{2.2.20}$$

De(2.2.19) *et* (2.2.20) *nous obtenons*

$$\left|\log f\left(re^{i\theta}\right)\right|\leq r^{\sigma+\varepsilon/2}+M\leq r^{\sigma+\varepsilon},$$

où $M>0$ est une constante, et

$$\left|\log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\right|\leq\left|\log h\left(re^{i\theta}\right)\right|\leq r^{\sigma+\varepsilon}.$$

D'où

$$\exp\left\{-r^{\sigma+\varepsilon}\right\}\leq\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|\leq\exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\}.$$

□

Le *lemme suivant est un corollaire de ([8, lemma 2.2]).*

Lemme 2.2.6 *Soit*

$$p_1(z)=a_nz^n+...,\ p_2(z)=\rho a_nz^n+...,\ n\geq1$$

deux polynômes tel que $a_n=\alpha+i\beta,\alpha,\beta\in\mathbb{R},|\alpha|+|\beta|\neq0,0<\rho<1,$ et $D_i(z)$ $(i=1,2\ )$ deux fonctions méromorphes d'ordre $\leq n$. Alors pour tout $\varepsilon>0$ avec $|z|$ suffisamment grand on a

$$m(r,D_1e^{p_1}+D_2e^{p_2})\geq m(r,e^{p_1})+O(r^{\zeta}), \tag{2.2.21}$$

où $\max\{\zeta_1,\sigma(D_1)\}<\zeta<n$ *tel que* $m(r,e^{p_1-a_nz^n})=O(r^{\zeta_1})$.

Preuve. *Supposons que* $\theta_0 (0 \leq \theta_0 \leq \frac{2\pi}{n})$ *tel que* $\delta(p, \theta_0) = 0$ $(\arg(a_n) = \pm\frac{\pi}{2} - n\theta_0)$, *et* $\theta_k = \theta_0 + \frac{k\pi}{n}(k = 0, 1, .., 2n-1)$. *Soit* $0 < \eta < \frac{\pi}{2n}$. *On définit l'ensemble*

$$S(\eta) = S^+ \bigcap \left(\bigcup_{k=0}^{2n-1} \left[\theta_k - \frac{\eta}{n}, \theta_k + \frac{\eta}{n} \right] \right). \tag{2.2.22}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \exp(a_n (re^{i\theta})^n) \right| d\theta &= \int_{S^+} \ln^+ \left| \exp(a_n (re^{i\theta})^n) \right| d\theta \\ &= r^n |a_n| \int_{S^+} \cos(n\theta + \arg(a_n)) d\theta \\ &= r^n \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \\ &= 2r^n \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{S(\eta)} \ln^+ \left| \exp(a_n (re^{i\theta})^n) \right| d\theta &= r^n |a_n| \int_{S(\eta)} \cos(n\theta + \arg(a_n)) d\theta \\ &= r^n \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sum_{k=0}^{2n-1} \int_{\theta_k - \frac{\eta}{n}}^{\theta_k + \frac{\eta}{n}} \cos^+(n\theta - n\theta_0 \pm \frac{\pi}{2}) d\theta \\ &= r^n \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\frac{1}{n} \int_{k\pi - \eta}^{k\pi + \eta} \cos^+(\varphi \pm \frac{\pi}{2}) d\varphi \right) \\ &= r^n \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \int_{2k\pi - \eta}^{2k\pi + \eta} \cos^+(\varphi \pm \frac{\pi}{2}) d\varphi \right) \\ &\quad + r^n \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \int_{(2k+1)\pi - \eta}^{(2k+1)\pi + \eta} \cos^+(\varphi \pm \frac{\pi}{2}) d\varphi \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|\exp(a_n(re^{i\theta})^n)\right| d\theta &= r^n\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\int_{-\eta}^{\eta}\cos^+(\varphi \pm \frac{\pi}{2})d\varphi\right) \\
&\quad + r^n\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\int_{\pi-\eta}^{\pi+\eta}\cos^+(\varphi \pm \frac{\pi}{2})d\varphi\right) \\
&= r^n\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\sin(\eta - \frac{\pi}{2})\right) \\
&\quad + r^n\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\sin(\eta - \frac{\pi}{2})\right) \\
&= 2r^n\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\eta. \qquad (2.2.24)
\end{aligned}$$

Comme on a $\forall\varepsilon > 0, \exists 0 < \eta < \dfrac{\pi}{2n}$ *tel que* $\cos\eta \geq 1-\varepsilon$. *Donc*

$$(1-\varepsilon)m(r, e^{a_n z^n}) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{S(\eta)} \ln^+ \left|\exp(a_n(re^{i\theta})^n)\right| d\theta. \qquad (2.2.25)$$

On a

$$m(r, e^{a_n z^n}) - m(r, e^{p_1 - a_n z^n}) \leq m(r, e^{p_1}) \leq m(r, e^{a_n z^n}) + m(r, e^{p_1 - a_n z^n}).$$

Alors

$$m(r, e^{p_1}) = m(r, e^{a_n z^n}) + O(r^{\zeta_1}) \ (\zeta_1 < n). \qquad (2.2.26)$$

Soit $p_3(z) = p_2(z) - p_1(z) = (\rho - 1)a_n z^n + \dots,$ *alors on a* $\delta(p_3, \theta) < 0$ *pour tout* $\theta \in S(\eta)$, *et on a*

$$m(r, D_1 e^{p_1} + D_2 e^{p_2}) \geq \frac{1}{2\pi}\int_{S(\eta)} \ln^+\left(\left|\exp(p_1(re^{i\theta}))\right|\left|D_1(re^{i\theta}) + D_2(re^{i\theta})\exp(p_3(re^{i\theta}))\right|\right) d\theta. \qquad (2.2.27a)$$

D'après le Lemme 2.2.5 il existe un ensemble de mesure linéaire nulle E_0 *tel que pour tout* $\theta \notin E_0$ *et pour* r *assez grand on a*

$$\begin{aligned}
\left|D_1(re^{i\theta})\right| &\geq \exp(-r^{\sigma(D_1)+\varepsilon}), \ \left|D_2(re^{i\theta})\exp(p_3(re^{i\theta}))\right| \\
&\leq \exp((\delta(p_3, \theta) + \varepsilon(r))r^n) \ (\varepsilon(r) \to 0). \qquad (2.2.28)
\end{aligned}$$

Donc d'après (2.2.28) *il existe* $\max\{\zeta_1, \sigma(D_1) + \varepsilon\} < \zeta < n$ *tel que*

$$\begin{aligned}
\left|D_1(re^{i\theta}) + D_2(re^{i\theta})\exp(p_3(re^{i\theta}))\right| &\geq \left|\left|D_1(re^{i\theta})\right| - \left|D_2(re^{i\theta})\exp(p_3(re^{i\theta}))\right|\right| \\
&\geq (1-\varepsilon)\exp(-r^{\zeta}). \qquad (2.2.29)
\end{aligned}$$

De$(2.2.25)\,,(2.2.26)\,,(2.2.27a)$ *et* $(2.2.29)$ *nous obtenons*

$$\begin{aligned} m(r, D_1e^{p_1} + D_2e^{p_2}) &\geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S(\eta)} \ln^+ \left|\exp(a_n(re^{i\theta})^n)\right| d\theta + O(r^{\zeta}) \\ &\geq (1-\varepsilon)m(r, e^{a_n z^n}) + O(r^{\zeta}) \\ &\geq (1-\varepsilon)m(r, e^{p_1}) + O(r^{\zeta}). \end{aligned}$$

□

Lemme 2.2.7 *([12, Lemme 2.6]) Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre $< \infty$. Supposons qu'elle existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi]$ de mesure linéaire nulle, tel que $\ln^+ \left|f(re^{i\theta})\right| \leq Mr^{\sigma}$ pour tout $\arg z = \theta \in [0, 2\pi] \diagdown E$, avec M une constante positive dépendant de θ,et σ un constante positive indépendante de θ. Alors $\sigma(f) \leq \sigma$.*

Lemme 2.2.8 *([10, lemme 2.2]) Soit $A(z)$ une fonction méromorphe transcendante d'ordre finie ($\sigma(A) = \sigma < +\infty$) et $\delta(\infty, A) > 0$. Alors tout solution méromorphe non trivial f de l'équation $(2.1.2)$tel que tous les pôles de f sont de multiplicité uniformément borné, vérifie $\sigma_2(f) = \sigma(A)$.*

Preuve. *1) On a*

$$-A(z) = \frac{f''(z)}{f(z)}.$$

*Alors d'après Lemme*1.2.2 *on a*

$$\sigma(A) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln m(r, A)}{\ln r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln m(r, \frac{f''}{f})}{\ln r} \leq \sigma_2(f).$$

2) Supposons que

$$G(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Donc

$$-A(z) = G'(z) + G^2(z).$$

On a

$$N(r, A) \geq N(r, G),$$

et

$$m(r, G) - m(r, G') \geq -m(r, \frac{G'}{G}).$$

Alors

$$\begin{aligned} m(r, A) &\geq 2m(r, G) - m(r, G') \\ &\geq m(r, G) - m(r, \frac{G'}{G}). \end{aligned}$$

*D'après Lemme*1.2.2 *on obtient*

$$\begin{aligned} T(r,A) &\geq m(r,A) + N(r,G) \\ &\geq T(r,G) + o(T(r,G)). \end{aligned}$$

Montrons que $\sigma_2(f) \leq \sigma(G)$. *Comme* $N(r,A) \geq \overline{N}(r,f)$, *alors* $\exists M > 0 : MN(r,A) \geq N(r,f)$.

Alors $f(z) = \dfrac{g(z)}{d(z)}$ *avec* $g(z)$, $d(z)$ *sont deux fonctions entières tel que tous les pôles de* f *sont des zéros de* d *de même multiplicité et* $\sigma(d) \leq \sigma(A)$. *Soit*

$$H(z) = \ln(g(z)).$$

Il est clair que $\sigma_2(g) = \sigma_2(f)$ *et* $\sigma(G) = \sigma(\ln f) = \sigma(H)$. *On a*

$$\begin{aligned} m(r,H) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|\ln g(re^{i\theta})\right| d\theta \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \ln^+ \left|g(re^{i\theta})\right| d\theta \\ &\geq \frac{1}{2\pi}\int_E \ln^+ m(r,g) d\theta = m(E)\ln^+ m(r,g), \end{aligned}$$

avec $E = \left\{\theta \in [0,2\pi] : \ln^+ \left|g(re^{i\theta})\right| \geq m(r,g)\right\}$ *de mesure linéaire non nulle.*
Donc $\sigma(A) \geq \sigma(G) = \sigma(H) \geq \sigma_2(g) = \sigma_2(f)$.
Alors

$$\sigma_2(f) = \sigma(A).$$

□

Le *lemme suivant est un corollaire de Lemme 2.2.8.*

Lemme 2.2.9 *Soit* $A(z)$ *une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini* ($\sigma(A) = \sigma < +\infty$) *et* $\delta(\infty, A) > 0$ *et soit* $F(z)$ *une fonction méromorphe d'ordre* $< \sigma$. *Alors il existe ou plus une solution méromorphe* f_2 *de l'équation* (2.1.4) *tel que toute solution méromorphe* $f \not\equiv f_2$*de l'équation* (2.1.4) *tel que tous les pôles de* f *sont de multiplicité uniformément borné, vérifie* $\sigma_2(f) = \sigma(A)$ *et* $\sigma_2(f_2) \leq \sigma(A)$.

Preuve. *Soit* $g(z)$ *une solution méromorphe non triviale de l'équation* (2.1.2), *et soit* $f(z)$ *une solution méromorphe de l'équation* (2.1.4). *Supposons que* $f(z) = h(z)g(z)$. *Alors*

$$2h'(z)g'(z) + h''(z)g(z) = F(z).$$

Posons $h'(z) = C(z)B(z)$ *avec* $B(z)$ *une solution non trivial de l'équation*

$$2B(z)g'(z) + B'(z)g(z) = 0.$$

Alors $B(z) = \dfrac{M}{g^2(z)}$ $(M \in \mathbb{R}^*)$. *Donc*

$$2h'(z)g'(z) + h''(z)g(z) = 2C'(z)B(z) = 2C'(z)\frac{M}{g^2(z)} = F(z).$$

Alors $\sigma_2(C) = \sigma_2(C') = \sigma_2(B) = \sigma_2(g)$, *et* $\sigma_2(h) = \sigma_2(h') \leq \max\{\sigma_2(C), \sigma_2(B)\} = \sigma_2(g)$.
Donc $\sigma_2(f) \leq \max\{\sigma_2(h), \sigma_2(g)\} = \sigma_2(g)$.
D'après le Lemme 2.2.8 *on a* $\sigma_2(f) \leq \sigma_2(g) = \sigma(A)$.
Donc toutes les solutions méromorphes de l'équation (2.1.4) *vérifient* $\sigma_2(f) \leq \sigma(A)$.
Alors il existe ou plus une solution méromorphe f_2 *de l'équation* (2.1.4) *tel que toute solution méromorphe* $f \not\equiv f_2$ *de l'équation* (2.1.4) *vérifiant* $\sigma_2(f) = \sigma(A)$, *car si* $\sigma_2(f_2) < \sigma(A)$, *alors d'après le Lemme* 2.2.8

$$\sigma_2(f) = \sigma_2((f - f_2) + f_2) = \sigma_2(f - f_2) = \sigma(A)$$

($f - f_2$ *une solution méromorphe non trivial de l'équation* (2.1.2)). □

2.3 Preuve de Théorème 2.1.1 :

Preuve. *Pour démontrer cette théorème on suppose le contraire et on obtient une contradiction.*
Soit f *une solution méromorphe d'ordre fini de l'équation (*2.1.4*). Alors* $\sigma(f) \geq \sigma(A) = n$ *car si* $\sigma(f) < n$, *alors on obtient* $\sigma(f'') = \sigma(A) > \sigma(f)$, *ce qui est impossible.*
On a

$$2\overline{N}(r, f) \leq N(r, F) + N(r, A) \leq N(r, F) + N(r, D_1) + N(r, D_2).$$

Donc

$$\exists M > 0 : N(r, f) \leq M(N(r, F) + N(r, D_1) + N(r, D_2)).$$

Alors $f(z) = \dfrac{g(z)}{d(z)}$ *avec* $g(z)$, $d(z)$ *sont deux fonctions entières tel que tous les pôles de* f *sont des zéros de* d *de même multiplicité et* $\sigma(d) < \sigma(A)$. *Il est clair que* $\sigma(g) = \sigma(f)$. *On a*

$$f'' = \frac{g''}{d} - 2\frac{g'}{d}\left(\frac{d'}{d}\right) + \frac{g}{d}\left[2\left(\frac{d'}{d}\right)^2 - \frac{d''}{d}\right]. \tag{2.3.1}$$

Comme f *est une solution de l'équation* (2.1.4), *alors on a*

$$\frac{dF}{g} \equiv \frac{g''}{g} - 2\frac{g'}{g}\left(\frac{d'}{d}\right) + \left[D_1(z)e^{p_1(z)} + D_2(z)e^{p_2(z)} + Q(z) + 2\left(\frac{d'}{d}\right)^2 - \frac{d''}{d}\right]. \tag{2.3.2}$$

On pose $\beta = \max\{\sigma(F)\ ,\ \sigma(d)\ ,\ \sigma(Q)\}$, *donc d'après le Lemme* 2.2.5 *et le Lemme* 2.2.1 *on a pour tout* $0 < \varepsilon < n - \beta$, *il existe une ensemble* $E_0 \in [0\ ,\ 2\pi]$ *de mesure linéaire nulle et pour tout* $\arg z = \psi \in [0\ ,\ 2\pi] \setminus E_0$ *et pour* $|z| = r$ *assez grand*

$$|Q(z)| \leq \exp(r^{\beta+\varepsilon}), |F(z)| \leq \exp(r^{\beta+\varepsilon}), |d(z)| \leq \exp(r^{\beta+\varepsilon}), \tag{2.3.3}$$

et

$$\left|\frac{g^{(i)}(z)}{g(z)}\right| \leq |z|^{2(\sigma-1+\varepsilon)} \quad , \quad \left|\frac{d^{(i)}(z)}{d(z)}\right| \leq |z|^{2(\beta-1+\varepsilon)} \leq |z|^{2(\sigma-1+\varepsilon)} \quad , i = 1, 2. \tag{2.3.4}$$

Comme g *est une fonction entiere d'ordre* $= \sigma > \beta + \varepsilon$ *, alors d'après le Lemme* 2.2.3 *il existe un ensemble* $E \subset [0, 2\pi]$ *non vide tel que* $\arg z = \theta \in E$*, et une suite infinie de points* $z_m = r_m e^{i\theta}(n = 1, 2, ...)$*, où* $r_m \underset{m\to\infty}{\to} \infty$ *tel que*

$$\frac{\log^+ \left|g(r_m e^{i\theta})\right|}{r_m^{\beta+\varepsilon}} \underset{m\to\infty}{\to} \infty. \tag{2.3.5}$$

D'après (2.3.5) *on a*

$$\frac{|d(z_m)|\,|F(z_m)|}{|g(z_m)|} \underset{m\to\infty}{\to} 0 \ , (z_m = r_m e^{i\theta}). \tag{2.3.6}$$

On divise la preuve en deux cas.
Cas1 : *Supposons que* $\arg a_n \neq \arg b_n$ *. Alors il existe* $\theta \in [0\ ,\ 2\pi] \diagdown (E_0 \cup H_1 \cup H_2)$ *avec* H_1 *et* H_2 *deux ensembles définis en Lemme*2.2.2 *tel que*

$$\delta(p_1, \theta) > 0\ ,\ \ \delta(p_2, \theta) < 0\ . \tag{2.3.7}$$

On applique le Lemme 2.2.2 *pour* m *assez grand et* $0 < \varepsilon < 1$*, on trouve*

$$\left|D_1(z_m)e^{p_1(z_m)}\right| \geq \exp((1-\varepsilon)\delta(p_1,\theta)r_m^n), \tag{2.3.8}$$

$$\left|D_2(z_m)e^{p_2(z_m)}\right| \leq \exp((1-\varepsilon)\delta(p_2,\theta)r_m^n). \tag{2.3.9}$$

On utilise (2.3.2) , (2.3.3) , (2.3.4) , (2.3.6) , (2.3.7) , (2.3.8) *et* (2.3.9) *on obtient*

$$\begin{aligned} \exp((1-\varepsilon)\delta(p_1,\theta)r_m^n) &\leq \left|\frac{dF}{g}\right| + \exp(r_m^{\beta+\varepsilon}) + \exp((1-\varepsilon)\delta(p_2,\theta)r_m^n) + 6\,|z_m|^{4(\sigma-1+\varepsilon)} \\ &\leq \left|\frac{dF}{g}\right| + c\exp(r_m^{\beta+\varepsilon})\ (c>0)\quad . \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Considérons (2.3.7) *et* $n > \beta + \varepsilon$*, de* (2.3.10) *on obtient*

$$\frac{|g(z_m)|}{|d(z_m)|\,|F(z_m)|} \leq M,$$

où $M > 0$ *une constante réelle.*
De (2.3.3) *nous obtenons*

$$|g(z_m)| \leq M\exp(r_m^{\beta+\varepsilon}).$$

Donc on obtient une contradiction avec Lemme 2.2.7 *et l'équation* (2.3.5).
Cas2 : *Supposons que* $\arg a_n = \arg b_n$ *.*
Dans ce cas on pose $a_n = cb_n$ *,* $(c > 1)$*. Donc il existe* $\theta \in [0\ ,\ 2\pi] \setminus (E_0 \cup H_1 \cup H_2)$ *tel que*

$$\delta(p_1, \theta) = c\ \delta(p_2, \theta) > 0. \tag{2.3.11}$$

On applique le Lemme 2.2.2 *pour* m *assez grand et* $\varepsilon > 0$ *on trouve*

$$\left|D_1(z_m)e^{p_1(z_m)}\right| \geq \exp((1-\varepsilon)\delta(p_1,\theta)r_m^n) = \ \exp((1-\varepsilon)c\delta(p_2,\theta)r_m^n)\ , \tag{2.3.12}$$

$$\left|D_2(z_m)e^{p_2(z_m)}\right| \leq \exp((1+\varepsilon)\delta(p_2,\theta)r_m^n). \tag{2.3.13}$$

On utilise (2.3.2) , (2.3.3) , (2.3.4) , (2.3.6) , (2.3.11) , (2.3.12) *et* (2.3.13) *on obtient*

$$\begin{aligned} \exp((1-\varepsilon)c\delta(p_2,\theta)r_m^n) &\leq \left|\frac{dF}{g}\right| + \exp(r_m^{\beta+\varepsilon}) + \exp((1+\varepsilon)\delta(p_2,\theta)r_m^n) + 6\left|z_m\right|^{4(\sigma-1+\varepsilon)} \\ &\leq \left|\frac{dF}{g}\right| + k\exp((1+\varepsilon)\delta(p_2,\theta)r_m^n) \quad (k>0)\ . \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Considérons $\varepsilon < \dfrac{c-1}{2(c+1)}$, $n > \beta + \varepsilon$, *de* (2.3.11) *et* (2.3.14) *on obtient*

$$\frac{|g(z_m)|}{|d(z_m)|\,|F(z_m)|} \leq M,$$

où $M > 0$ *une constante réelle. De* (2.3.3) *nous obtenons*

$$|g(z_m)| \leq M\exp(r_m^{\beta+\varepsilon}).$$

Donc on obtient une contradiction avec le Lemme 2.2.7 *et l'équation* (2.3.5).
D'où $\sigma(f) = \infty$. □

2.4 Preuve de Théorème 2.1.2 :

Preuve. Soit $f \not\equiv f_2$ une solution méromorphe de l'équation (2.1.4) tel que f_2 une solution méromorphe de l'équation (2.1.4) et $\sigma_2(f_2) \leq \sigma_2(f)$.
1) *On montre que* $\sigma_2(f) = \sigma_2(f') = \sigma_2(f'') = \sigma(A) = n$.
On a $\sigma_2(f) = \sigma_2(f') = \sigma_2(f'')$.
D'après le Lemme 2.2.9 *on a*

$$\sigma_2(f) = \sigma(A).$$

D'où

$$\sigma_2(f) = \sigma_2(f') = \sigma_2(f'') = \sigma(A). \tag{2.4.1}$$

2)i) *Supposons que* $g_0 = f - \psi$, *Alors d'après le Théorème* 2.1.1 *et l'équation* (2.4.1) *on a*

$$\sigma(g_0) = \sigma(f) = \infty \quad , \sigma_2(g_0) = \sigma_2(f) = \sigma(A). \tag{2.4.2}$$

D'après l'équation (2.1.4) *on a*

$$g_0'' + A(z)g_0 = F - (\psi'' + A(z)\psi). \tag{2.4.3}$$

La fonction $F - (\psi'' + A(z)\psi) \not\equiv 0$ *car si on suppose* $F - (\psi'' + A(z)\psi) \equiv 0$ *on obtient d'après théorème* 2.1.1 $\sigma(\psi) = \infty$ *ce qui est impossible.*
Alors d'après le Lemme 2.2.4 *et l'équation* (2.4.2) *on trouve*

$$\overline{\lambda}(g_0) = \sigma(g_0) = \infty.$$

ii) Si z_0 est un zéro de f de multiplicité m et n'est pas un pôle de A, alors z_0 est un zéro de F de multiplicité $\geq m-2$. Donc

$$N\left(r,\frac{1}{g_0}\right)\leq 2\overline{N}(r,\frac{1}{g_0})+N\left(r,\frac{1}{F-(\psi''+A(z)\psi)}\right)+N(r,A). \qquad (2.4.4)$$

D'après (2.4.3) *on a*

$$m\left(r,\frac{1}{g_0}\right)\leq m\left(r,\frac{1}{F-(\psi''+A(z)\psi)}\right)+m\left(r,\frac{g_0''}{g_0}\right)+m(r,A). \qquad (2.4.5)$$

Donc

$$T\left(r,\frac{1}{g_0}\right)\leq 2\overline{N}\left(r,\frac{1}{g_0}\right)+O(T(r,A))+O(T(r,\psi))+O(T(r,F))+S(r,g_0). \qquad (2.4.6)$$

Comme A, F et ψ d'ordre fini, alors

$$\overline{\lambda}_2(g_0)=\sigma_2(g_0)=\sigma(A). \qquad (2.4.7)$$

3)i)Supposons que $g_1=f'-\psi$. Alors d'après le Théorème 2.1.1 *et l'équation* (2.4.1) *on a*

$$\sigma(g_1)=\sigma(f')=\infty,\quad \sigma_2(g_1)=\sigma_2(f')=\sigma(A). \qquad (2.4.8)$$

On dérive l'équation (2.1.4) *on trouve*

$$f'''+A'f+Af'=F'. \qquad (2.4.9)$$

Alors

$$f=-\frac{1}{A'}(f'''+Af'-F')=-\frac{1}{A'}(g_1''+\psi''+A(g_1+\psi)-F'). \qquad (2.4.10)$$

Donc d'après les relations (2.1.4) *et* (2.4.10) *on a*

$$g_1'+\psi'-\frac{A}{A'}(g_1''+\psi''+A(g_1+\psi)-F')=F. \qquad (2.4.11)$$

Alors

$$\frac{A}{A'}g_1''-g_1'+\frac{A^2}{A'}g_1=-\left(\frac{A}{A'}\psi''-\psi'+\frac{A^2}{A'}\psi-\frac{A}{A'}F'+F\right)=\phi. \qquad (2.4.12)$$

La fonction $\phi\not\equiv 0$ car si on suppose $\phi\equiv 0$ on obtient

$$D_1(z)e^{p_1(z)}+D_2(z)e^{p_2(z)}=-\frac{\psi''}{\psi}+\frac{A'}{A}\frac{\psi'}{\psi}+\frac{F'}{\psi}-\frac{A'}{A}\frac{F}{\psi}-Q(z). \qquad (2.4.13)$$

Alors d'après le Lemme 2.2.6 *et pour r assez grand avec $r\notin E_2$ (E_2 est une ensemble de mesure linéaire finie) et $\varepsilon>0$ on a*

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)m(r,e^{p_1}) &\leq m(r,D_1e^{p_1}+D_2e^{p_2})\\ &= m\left(r,-\frac{\psi''}{\psi}+\frac{A'}{A}\frac{\psi'}{\psi}+\frac{F'}{\psi}-\frac{A'}{A}\frac{F}{\psi}-Q(z)\right)\\ &\leq O(\log(rT(r,A)))+O(\log(rT(r,\psi)))+O(T(r,\psi))\\ &\quad +O(T(r,F))+O(T(r,Q)). \qquad (2.4.14)\end{aligned}$$

Comme $\max\{\sigma(\psi), \sigma(F), \sigma(Q)\} < n$ *et* $\sigma(A) < \infty$, *alors on obtient une contradiction. Alors d'après le Lemme* 2.2.4 *et l'équation* (2.4.12) *on trouve*

$$\overline{\lambda}(g_1) = \sigma(g_1) = \infty.$$

ii)Si z_0 *est un zéro de* f *de multiplicité* m *et n'est pas un pôle de* A, *alors* z_0 *est un zéro de* $A'\phi$ *de multiplicité* $\geq m-2$. *Donc*

$$N\left(r, \frac{1}{g_1}\right) \leq 2\overline{N}\left((r, \frac{1}{g_1}\right) + N\left(r, \frac{1}{\phi}\right) + N\left(r, \frac{1}{A'}\right) + N(r, A). \tag{2.4.15}$$

D'après (2.4.12) *on a*

$$m\left(r, \frac{1}{g_1}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{\phi}\right) + m\left(r, \frac{g_1'}{g_1}\right) + m(r, \frac{g_1''}{g_1}) + O(T(r, A)). \tag{2.4.16}$$

Donc

$$T\left(r, \frac{1}{g_1}\right) \leq 2\overline{N}\left(r, \frac{1}{g_1}\right) + O(T(r, A)) + O(T(r, \psi)) + O(T(r, F)) + S(r, g_1). \tag{2.4.17}$$

Comme A, F *et* ψ *d'ordre fini, alors*

$$\overline{\lambda}_2(g_1) = \sigma_2(g_1) = \sigma(A). \tag{2.4.18}$$

4)i)Supposons que $g_2 = f'' - \psi$. *Alors d'après le Théorème* 2.1.1 *et l'équation* (2.4.1) *on a*

$$\sigma(g_2) = \sigma(f'') = \infty \quad , \sigma_2(g_2) = \sigma_2(f'') = \sigma(A). \tag{2.4.19}$$

On dérive l'équation (2.4.9) *on trouve*

$$f^{(4)} + Af'' + 2A'f' + A''f = F''. \tag{2.4.20}$$

On a d'après (2.4.9)

$$A'f + Af' = -g_2' - \psi' + F'. \tag{2.4.21}$$

Donc d 'après les relations (2.1.4) *et* (2.4.20) *on a*

$$2A'f' + (A'' - A^2)f = F'' - AF - g_2'' - \psi'', \tag{2.4.22}$$

Alors d'après (2.4.21) *et* (2.4.22) *on trouve*

$$(AA'' - A^3 - 2(A')^2)f = A(F'' - AF - g_2'' - \psi'') - 2A'(-g_2' - \psi' + F'). \tag{2.4.23}$$

Montrons que $AA'' - A^3 - 2(A')^2 \not\equiv 0$. *On suppose le contraire c'est à dire*

$$A = \frac{A''}{A} - 2\left(\frac{A'}{A}\right)^2. \tag{2.4.24}$$

Alors

$$D_1(z)e^{p_1(z)} + D_2(z)e^{p_2(z)} = \frac{A''}{A} - 2\left(\frac{A'}{A}\right)^2 - Q(z). \tag{2.4.25}$$

D'après le Lemme 2.2.6 *pour* r *assez grand avec* $r \notin E_2$ *on a*

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)m(r,e^{p_1}) &\leq m(r,D_1e^{p_1}+D_2e^{p_2}) \\ &= m\left(r,\frac{A''}{A}-2\left(\frac{A'}{A}\right)^2-Q\right) \\ &\leq O(\log(rT(r,A)))+O(T(r,Q)). \qquad (2.4.26)\end{aligned}$$

Comme $\sigma(Q)<n$ *et* $\sigma(A)<\infty$, *alors on obtient une contradiction .*
Alors

$$f=\frac{A(F''-AF-g_2''-\psi'')-2A'(-g_2'-\psi'+F')}{AA''-A^3-2(A')^2}. \qquad (2.4.27)$$

Donc d 'après les relations (2.1.4) *et* (2.4.27) *on a*

$$g_2+\psi+\frac{A^2(F''-AF-g_2''-\psi'')-2A'A(-g_2'-\psi'+F')}{AA''-A^3-2(A')^2}=F. \qquad (2.4.28)$$

D'où

$$-A^2g_2''+2A'Ag_2'+(AA''-A^3-2(A')^2)g_2=\varphi, \qquad (2.4.29)$$

où

$$\varphi=A^2\psi''-2A'A\psi'-(AA''-A^3-2(A')^2)\psi-A^2F''+2A'AF'+\left(AA''-2(A')^2\right)F.$$

La fonction $\varphi\not\equiv 0$ *car si on suppose* $\varphi\equiv 0$ *on obtient*

$$A=\frac{\psi''}{\psi}-2\frac{A'}{A}\frac{\psi'}{\psi}-\left(\frac{A''}{A}-2\left(\frac{A'}{A}\right)^2\right)-\frac{F''}{\psi}+2\frac{A'}{A}\frac{F'}{\psi}+\left(\frac{A''}{A}-2\left(\frac{A'}{A}\right)^2\right)\frac{F}{\psi}. \qquad (2.4.30)$$

Donc d'après le Lemme 2.2.6 *pour* r *assez grand avec* $r\notin E_2$ *on a*

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)m(r,e^{p_1}) &\leq m(r,D_1e^{p_1}+D_2e^{p_2}) \\ &\leq O(\log(rT(r,A)))+O(\log(rT(r,\psi)))+O(T(r,\psi))+O(T(r,F)) \\ &\quad +O(T(r,Q)). \qquad (2.4.31)\end{aligned}$$

Comme $\max\{\sigma(\psi),\sigma(F),\sigma(Q)\}<n$ *et* $\sigma(A)<\infty$, *alors on obtient une contradiction .*
Donc d'apres le Lemme 2.2.4 *et l'équation* (2.4.29) *on trouve*

$$\overline{\lambda}(g_2)=\sigma(g_2)=\infty.$$

ii)Si z_0 *est un zéro de* f *de multiplicité* m *et n'est pas un pôle de* A, *alors* z_0 *est un zéro de* φ *de multiplicité* $\geq m-2$. *Donc*

$$N\left(r,\frac{1}{g_2}\right)\leq 2\overline{N}\left(r,\frac{1}{g_2}\right)+N\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)+N(r,A). \qquad (2.4.32)$$

D'après (2.4.29) *on a*

$$m\left(r,\frac{1}{g_2}\right)\leq m\left(r,\frac{1}{\varphi}\right)+m\left(r,\frac{g_2''}{g_2}\right)+m\left(r,\frac{g_2'}{g_2}\right)+O(T(r,A)). \qquad (2.4.33)$$

Donc

$$T\left(r, \frac{1}{g_2}\right) \leq 2\overline{N}\left(r, \frac{1}{g_2}\right) + O(T(r,A)) + O(T(r,\psi)) + O(T(r,F)) + S(r,g_2). \qquad (2.4.34)$$

Comme A, F *et* ψ *d'ordre fini, alors*

$$\overline{\lambda}_2(g_2) = \sigma_2(g_2) = \sigma(A). \qquad (2.4.35)$$

D'où le résultat. □

2.5 Preuve de Théorème 2.1.3 :

Preuve. *Supposons que* f *une solution méromorphe de l'équation* (2.1.4)*. Alors d'apres le Théorème* 2.1.1 *on a* $\sigma(f) = \infty$*. D'après l'équation* (2.1.4) *on a*

$$L(f) = d_2F + d_1f' + (d_0 - d_2A)\, f. \qquad (2.5.1)$$

En dérivant (2.5.1) *on obtient*

$$(L(f))' - (d_2F)' = (d_1' + (d_0 - d_2A))\, f' + \big((d_0 - d_2A)' - d_1A\big)\, f + d_1F. \qquad (2.5.2)$$

On pose

$$\begin{cases} \alpha_1 = d_1, & \alpha_0 = d_0 - d_2A, \\ \beta_1 = d_1' + (d_0 - d_2A)\,, & \beta_0 = (d_0 - d_2A)' - d_1A. \end{cases} \qquad (2.5.3)$$

Alors d'après (2.5.1) *et* (2.5.2) *on trouve*

$$\begin{cases} \alpha_1 f' + \alpha_0 f = L(f) - d_2F, \\ \beta_1 f' + \beta_0 f = (L(f))' - (d_2F)' - d_1F. \end{cases} \qquad (2.5.4)$$

Posons

$$\begin{aligned} h &= \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 = d_1\big((d_0 - d_2A)' - d_1A\big) - (d_0 - d_2A)\,(d_1' + (d_0 - d_2A)) \\ &= h_1(z)e^{p_1} + h_2(z)e^{p_2} - d_2^2D_1^2e^{2p_1} - d_2^2D_2^2e^{2p_2} - d_2^2D_1D_2e^{p_1+p_2} + R(z), \end{aligned} \qquad (2.5.5)$$

avec $h_1(z)$, $h_2(z)$ *et* $R(z)$ *trois fonctions méromorphes d'ordre* $< n$.
Montrons que $h \not\equiv 0$.
On suppose le contraire $(h \equiv 0)$ *donc on a trois cas.*
CasA : $d_2 \not\equiv 0$.
On applique le Théorème 1.3.1 *sur* (2.5.5) *on obtient* $D_1 \equiv 0$ *ce qui impossible.*
CasB : $d_2 \equiv 0$, $d_1 \not\equiv 0$*. Donc*

$$h = d_1\,(d_0' - d_1A) - d_0\,(d_1' + d_0)$$

$$= -d_1^2D_1e^{p_1} - d_1^2D_2e^{p_2} + R(z). \qquad (2.5.6)$$

Alors on applique le Théorème 1.3.1 *sur* (2.5.6) *on obtient* $D_1 \equiv 0$ *ce qui impossible.*
CasC : $d_2 \equiv 0$, $d_1 \equiv 0$ *et* $d_0 \not\equiv 0$.
Donc $h = -d_0^2 \not\equiv 0$ *(contradiction).*
D'où $h \not\equiv 0$.
Alors on peut résoudre le system (2.5.4) *:*

$$f = \frac{1}{h}\left(\alpha_1 (L(f))' - \beta_1 L(f) + \left(\beta_1 d_2 - \alpha_1^2\right) F - \alpha_1 (d_2 F)' \right). \tag{2.5.7}$$

Comme $\max\{\sigma(h), \sigma(\beta_1), \sigma(\alpha_1), \sigma(d_2), \sigma(F)\} < \infty$ *et* $\sigma(f) = \infty$, *alors* $\sigma(L(f)) = \infty$.
Posons $W = L(f) - \psi$. *Alors* $\sigma(W) = \max\{\sigma(L(f)), \sigma(\psi)\} = \infty$.
On remplace $L(f) = W + \psi$ *dans* (2.5.7) *on trouve*

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{h}\left(\alpha_1 (W+\psi)' - \beta_1 (W+\psi) + \left(\beta_1 d_2 - \alpha_1^2\right) F - \alpha_1 (d_2 F)' \right) \\ &= \frac{1}{h}\left(\alpha_1 W' - \beta_1 W\right) + \phi, \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

a*vec*

$$\phi(z) = \frac{1}{h}\left(\alpha_1 \psi' - \beta_1 \psi + \left(\beta_1 d_2 - \alpha_1^2\right) F - \alpha_1 (d_2 F)' \right)$$

est une fonction méromorphe d'ordre fini.
Alors d'après les relations (2.1.4) , (2.5.8) *on obtient*

$$\frac{\alpha_1}{h} W''' + \phi_2 W'' + \phi_1 W' + \phi_0 W = F - (\phi'' + A\phi), \tag{2.5.9}$$

avec ϕ_j $(j = 0\ ,1\ ,2)$ *trois fonctions méromorphes d'ordre fini.*
La fonction $F - (\phi'' + A\phi) \not\equiv 0$ *car si on suppose* $F - (\phi'' + A\phi) \equiv 0$ *on trouve* $\sigma(\phi) = \infty$ *d'après le Théorème* 2.1.1 ce *qui impossible.*
Pour applique le Lemme 2.2.4 *on a deux cas.*
Cas 1 :$\alpha_1 \not\equiv 0$ *. Donc d'après le Lemme* 2.2.4 *et l'équation* (2.5.9) *on a*

$$\overline{\lambda}(W) = \sigma(W) = \infty.$$

Cas 2 :$\alpha_1 \equiv 0$ *. Donc* $\beta_1 \not\equiv 0$ *puis-que si* $\beta_1 \equiv 0$ *alors* $d_0 \equiv d_2 \equiv 0$ *ou bien* $A(z) = \dfrac{d_0(z)}{d_2(z)}$ *ce qui impossible (*$\sigma(A) > \max\{\sigma(d_0), \sigma(d_2)\}$*).*
On a d'après les relations (2.1.4) , (2.5.8) *:*

$$\frac{\beta_1}{h} W'' + \phi_1 W' + \phi_0 W = F - (\phi'' + A\phi). \tag{2.5.10}$$

Alors d'après le Lemme 2.2.4 *et l'équation* (2.5.10) *on a*

$$\overline{\lambda}(W) = \sigma(W) = \infty.$$

D'où le résultat. □

Bibliographie

[1] Z.X.*Chen,The fixed points of solutions of higher order linear differential equations, Acta. Mathematica Scientia,Ser. AChin.ed. 20(2000), 425-432.*

[2] Z.X.*Chen, zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations, Analysis 14(1994), 425-438.*

[3] Z.X.*Chen and K.H.Shon, On the growth and fixed points of solutions of second differential équations with meromorphic coefficients, Acta. Mathematica Scientia, (Engl.Ser.) 21 (2005) 753-764.*

[4] Z.X.*Chen and K.H.Shon, The relation between solutions of a class of second differential equations with functions of small growth , Chin. Ann. Math. 27 (4) (2006) 431-432 (in Chinese) ; English transl. J. Contemp. Math. 27 (3) (2006).*

[5] *F.Gross, On the distribution of méromorphic functions, Received by the editors March 20, 1965 and in revised form, January 6, 1967.*

[6] G.G.*Gundersen, Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function plus similar estimates, J. London Math. Soc. 37 (2) (1998), 88-104.*

[7] W.K.*Hayman, Meromorphic functions, London , Oxford, 1964.*

[8] K.*Ishizaki, An oscillation result for a certain linear differential equations of second order, Hokkaido Math.J. 26 (1997) 421-434.*

[9] L.*Kinnunen, Linear differential equations with solution of finite iterated order, Southeast Asian Bull. Math. 22 (1998) 385-405.*

[10] M.S.*Liu and X.Zhang, Fixed points of meromorphic solutions of higher order linear differential equations, Ann. Acad. Fenn. Math. 231(2006) 191-211.*

[11] A.I.*Markushevich, Theory of functions of a complexe variable, Vol. II.rev.ed., translated by R. A. Silverman, Prentice-Hall,(Englewood Cliffs, New Jersey, 1965).*

[12] J.*Wangand I.Laine, Growth of solutions of nonhomogeneous linear differential équations, Abstr. Appl. Anal. 2009(2009) 1-11. Article ID 363927.*

[13] J.*Wang and W.Lü, The fixed points and hyper-order of solutions of second ordre linear differential equations with meromorphic coefficients, Acta. Math. Appl. Sin. 27 (1) (2004) 72-80.*

[14] J.*Wang and H.X.Yi, Fixed points and hyper-order of differential polynomials generated by solutions differential equations, Complex. Var. Elliptic 48 (1) (2003) 83-94.*

[15] C.C.*Yang and H.X.Yi, The uniqueness theory of meromoephic functions, Science Press \Kluwer Academic Publishers, Beijing, New York, 2003.*