Mémoire

Présenté à

L'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Par

Haouach Mohamed el Amine

Pour obtenir le diplôme de
Master en Mathématiques.
Analyse Fonctionnelle.

Etude d'une équation différentielle abstraite du second ordre de type elliptique avec des conditions aux limites de Robin généralisées

Soutenue le

16/6/2013

Devant le jury :

Président	Mr **Ahmed Medeghri**	**Professeur**	Université de Mostaganem
Examinateur	Mr **Haoua Rabah**	**M.A.B**	Université de Mostaganem
Encadreur	Mr **Houari Hammou**	**M.A.A**	Université de Mostaganem

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire on étudie une équation différentielle absrtaite elliptique avec des conditions aux limites de type Robin généralisées dans les espaces de Hölder.

Le but est de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir une unique solution stricte satisfaisant la régularité maximale.

Les techniques utilisées sont basées essentiellement sur la construction d'une représentation de la solution à l'aide des puissances fractionnaires d'opérateurs, semi-groupes, la méthode de réduction de l'ordre de Krein et l'application de la méthode des sommes d'opérateurs Da Prato-Grisvard.

Ce travail est une synthèse de l'article de Cheggag-Favini-Labbas-Maingot-Medeghri "Abstract differential equations of elliptic type with general Robin boundary conditions in Hölder spaces" Applicable Analysis, Vol. 91, No. 8, August 2012, 1453-1475. Il fait suite à celui de : M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot et A. Medeghri, Sturm-liouville problems for an abstract differential equation of elliptic type in UMD spaces, Differ.Integral. Eqns 21(9–10) (2008), pp. 981–1000. (Dans le cas des espaces U.M.D).

Ce mémoire est composé de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on fait des rappels de notions utiles pour ce travail sur les semi-groupes, les espaces d'interpolation, les puissances fractionnaires d'opérateurs et la théorie des sommes d'opérateurs.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du problème

$$\left\{\begin{array}{l} u''(x) + Au(x) = f(x); \quad x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0 \\ u(1) = u_1, \end{array}\right.$$

où $f \in C^\theta([0,1)]; X)$, $d_0, u_1 \in X$, (X espace de Banach complexe), A et H sont des opérateurs linéaires fermés dans X et vérifient certaines hypothèses.

On donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une unique solution stricte.

Dans le troisième chapitre, on ajoute un paramètre spectral ω dans l'équation et on étudie le problème

$$\left\{\begin{array}{l} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x); \quad x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0 \\ u(1) = u_1. \end{array}\right.$$

On donne des exemples concrets d'équation différentielle partielle dans le quatrième chapitre.

Chapitre 1

Rappels

On rappelle que A est un opérateur linéaire sur X un espace de Banach si et seulement si c'est une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A)$ (domaine de définition de A) de X, à valeurs dans X.

Alors :

1. A est dit borné si

$$D(A) = X \quad \text{et} \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|A\xi\| < +\infty$$

et on écrit $A \in L(X)$.

2. A est dit fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n) \in D(A)$ telle que

$$\begin{cases} x_n \to x \\ Ax_n \to y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in D(A) \\ Ax = y. \end{cases}$$

3. A est dit fermable si et seulement s'il admet une extension fermée, ce qui équivaut à dire que pour toute suite $(x_n)_n \in D(A)$ telle que

$$\begin{cases} x_n \to 0 \\ Ax_n \to y \end{cases} \Rightarrow y = 0.$$

4. A étant un opérateur linéaire fermé sur X, on définie $\rho(A)$ l'ensemble résolvant de A par

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / (\lambda I - A)^{-1} \in L(X)\},$$

et le spectre de A par

$$\sigma(A) = \mathbb{C} / \rho(A).$$

Les convergences des suites x_n et Ax_n sont au sens de la norme de l'espace X.

La notion de fermabilité des opérateurs linéaires est importante dans la résolution de certaines équations aux dérivées partielles car elle permet d'avoir des solutions distributions, voir [12].

1.1 Les semi-groupes

Définition 1.1 *Soit X un epace de Banach. On dit que la famille $(G(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X constitue un semi-groupe si :*

1. $G(0) = I = I_X$,
2. $\forall t, s \geq 0, G(t+s) = G(t) \cdot G(s)$.

Lorsque la famille $(G(t))$ est donnée pour $t \in \mathbb{R}$ et que la deuxième propriété est vérifiée pour tous t et s de $\mathbb{R}$ on dira qu'on a un groupe.

Définition 1.2 *On dit qu'un semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ est fortement continu si et seulement si pour tout $x \in X$ l'application $t \to G(t)x$ de $\mathbb{R}_+$ dans X est continue c'est à dire*

$$\forall x \in X,\ \lim_{t\to 0} \|G(t)x - x\|_X = 0$$

on dit aussi que $(G(t))_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe.

Proposition 1.1 *Si $(G(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ telles que*

$$\forall t \geq 0,\ \ \|G(t)\|_{L(E)} \leq Me^{\omega t}. \tag{1.1}$$

Définition 1.3 *On appelle générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur Λ défini par*

$$\begin{cases} D(\Lambda) = \left\{ x \in X : \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t} \ \textit{existe dans } X \right\} \\ \forall x \in D(\Lambda),\ \ \Lambda x = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{G(t)x - x}{t}. \end{cases}$$

Proposition 1.2 *Si Λ est générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$, alors*

1. Λ est linéaire fermé de domaine $D(\Lambda)$ dense dans X,
2. L'ensemble résolvant $\rho(\Lambda)$ contient le demi-plan

$$P_\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(\lambda)| > \omega\}$$

et $\forall \lambda \in P_\omega, \forall n \geq 1$

$$\left\|(\Lambda - \lambda I)^{-n}\right\|_{L(E)} \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}(\lambda) - \omega)^n}$$

3. La résolvante de Λ est donnée par la transformation de Laplace :

$$\forall \lambda \in P_\omega, (\Lambda - \lambda I)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t) x dt$$

où M et ω sont les constantes de la proposition précédente.

La réciproque de ce résultat est donnée par le célèbre théorème de Hille-Yosida suivant :

Theorème 1.1 *(Hille-Yosida) Soit $\Lambda : D(\Lambda) \subset E \to E$ un opérateur linéaire tel que :*

1. Λ est fermé et $D(\Lambda)$ est dense dans E,
2. il existe $M \geq 1$ et ω tels que :

$$\rho(\Lambda) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(\lambda)| > \omega\}$$

et pour $\mathrm{Re}\lambda > \omega, n = 1, 2, ...$

$$\left\|(\Lambda - \lambda I)^{-n}\right\|_{L(E)} \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}(\lambda) - \omega)^n}.$$

Alors Λ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$.

Proposition 1.3 *On peut retrouver le semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ à partir de son générateur Λ par la formule*

$$G(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t\Lambda_\lambda}x, \;\; t \geq 0, \;\; x \in X$$

où $\Lambda_\lambda \in L(X)$ est l'approximation de Yosida définie par

$$\Lambda_\lambda = -\lambda\Lambda(\Lambda - \lambda I)^{-1}, \;\; \lambda > \omega.$$

La proposition suivante détaille les principales propriétés des C_0 semi-groupes.

Proposition 1.4 *Soit $(G(t))_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe de générateur infinitésimal Λ, alors on a :*

1. Pour tout $x \in X$, la fonction $t \to G(t)x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Si $x \in D(\Lambda)$ et $t \geq 0$ alors $G(t)x \in D(\Lambda)$.
3. La fonction $t \to G(t)x$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $x \in D(\Lambda)$. Dans ce cas

$$\forall t \geq 0, \;\; \frac{d}{dt}G(t)x = \Lambda G(t)x = G(t)\Lambda x.$$

4. Pour tout x de X et tout $t \geq 0$

$$\int_0^t G(s)xds \in D(\Lambda) \;\; \text{et} \;\; \Lambda\int_0^t G(s)xds = G(t)x - x,$$

et si de plus $x \in D(\Lambda)$

$$\Lambda\int_0^t T(s)xds = \int_0^t T(s)\Lambda xds = T(t)x - x.$$

5. Si Λ est générateur infinitésimal d'un autre C_0 semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, alors

$$\forall t \geq 0, \quad S(t) = G(t).$$

La proposition précédente permet d'affirmer que si Λ est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ et si $u_0 \in D(\Lambda)$, la fonction $u : [0, +\infty[\to X$ définie par

$$\forall t \geq 0, \quad u(t) = G(t)u_0,$$

est l'unique fonction dans $C^1([0,1]; X) \cap C([0,1]; D(\Lambda))$, solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \Lambda u(t), & x \in [0, +\infty[, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Définition 1.4 *On dit que* $(G(t))_{t\geq 0}$ *est un :*

-C_0 semi-groupe uniformément borné si on a la majoration (1.1) avec $M \geq 1$ et $\omega = 0$.
-C_0 semi-groupe de contraction si on a (1.1) avec $M = 1$ et $\omega = 0$.

Semi-groupe analityque

Dans toute la suite arg désigne la détermination principale de la fonction argument caractérisée par :

$$\arg(z) = \phi \text{ si } z = re^{i\phi},\ r > 0,\ \phi \in [-\pi, \pi]$$

Définition 1.5 *Soit* $0 < \phi < \pi/2$. *On appelle semi-groupe analytique l'application* G *définie sur le secteur* $\overline{S_\theta}$ *avec*

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| < \phi\}$$

et à valeurs dans $L(X)$ *telle que :*

1. $z \to G(z)$ est analytique sur S_θ.
2. $G(0) = I$ et $\forall x \in X. \lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in \overline{S_\theta}}} G(z)x = x$.
3. $\forall z_1, z_2 \in \overline{S_\theta}, G(z_1 + z_2) = G(z_1)G(z_2)$.

Générateur infinitésimal de semi-groupe analytique (ou holomorphe)

Theorème 1.2 *Soit* $\Lambda : D(\Lambda) \subset X \to X$ *un opérateur linéaire.*

Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
1. Λ est fermé, $D(\Lambda)$ est dense dans X et il existe $C \geq 0$ telle que

$$\begin{cases} \rho(\Lambda) \supset \Pi = \{\lambda \in \mathbb{C}^* \ /\ \operatorname{Re}\lambda \geq 0\} \text{ et} \\ \\ \forall \lambda \in \Pi,\ \ \|(\Lambda - \lambda I)^{-1}\|_{L(X)} \leq \dfrac{C}{|\lambda|}. \end{cases}$$

2. Λ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, uniformément borné $(G(t))_{t\geq 0}$ qui de plus se prolonge en $(G(z))_{z \in \overline{S_\theta}}$, semi-groupe sur X, analytique dans S_θ, uniformément borné dans $\overline{S_\theta}$ (avec $\phi \in]0, \pi]$).

1.2 Les espaces d'interpolation

On donne ici certaines caractérisation des espaces d'interpolation dont on rappelle ci-dessous les principales.

Définition 1.6 *Soit* X *un espace de Banach.*

On désigne par $L_*^p(\mathbb{R}_+, X)$ avec $p \in [1, +\infty[$, l'espace de Banach des fonctions f fortement mesurables définies pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$ et telles que

$$\left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_F^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} = \|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X)} < +\infty.$$

Si $p = +\infty$, on définit l'espace $L_*^\infty(\mathbb{R}_+, F)$ par

$$f \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X) \Leftrightarrow \begin{cases} f : \mathbb{R}_+ \to X \text{ est fortement mesurable et} \\ \sup_{0<t<\infty} ess \|f(t)\|_X < \infty. \end{cases}$$

Theorème 1.3 *Soient* $p \in [1, +\infty]$ *et* $\theta \in]0, 1[$.

Supposons que $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+^*$ et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0, \ \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq \frac{C}{\lambda},$$

alors

$$D_A(\theta, p) = \{x \in X : t^\theta A(A - tI)^{-1} x \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1)\}.$$

et

$$D_A(\theta, +\infty) = \left\{ x \in X : \sup_{t>0} \left\| t^\theta A(A - t)^{-1} x \right\|_E \leq K < +\infty \right\}$$

et

$$\|x\|_{D_A(\theta, +\infty)} = \|x\|_X + \sup_{t>0} \left\| t^\theta A(A - t)^{-1} x \right\|_X.$$

Voir P.Grisvard [21].

1. Si A génère un semi-groupe fortement continu et borné dans X

$$D_A(\theta, p) = \left\{ x \in X : t^{-\theta}(e^{tA} - I)x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X) \right\}.$$

Voir J.L.Lions [22].

2. Si maintenant A génère un semi-groupe analytique borné dans X, alors

$$D_A(\theta, p) = \{x \in X : t^{1-\theta} A e^{tA} x \in L_*^p(\mathbb{R}_+; X)\}.$$

1.3 Calcul et Intégrale de Dunford

1.3.1 Formule de Cauchy

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$.

On note $H(U)$, l'espace des fonctions holomorphes, de U dans $\mathbb{C}$.

Pour $f \in H(U)$, K un compact à bord de U et z_0 à l'intérieur de K, la formule de Cauchy est donnée par

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - z_0} d\lambda,$$

où Γ est le bord positivement orienté de K.

1.3.2 Intégrale de Dunford-Riesz

Le calcul fonctionnel classique de Dunford-Riesz s'appuie sur la formule précédente pour construire $f(T)$ où T est un opérateur linéaire fermé et f est holomorphe.

Plus précisément si $T \in L(X)$ et si f est holomorphe sur un voisinage ouvert U de $\sigma(T)$ (le spectre de T) alors on définit l'intégrale de Dunford-Riesz par

$$f(T) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1} d\lambda,$$

où Γ est le bord positivement orienté d'un compact à bord K contenant $\sigma(T)$ et contenu dans U.

1.4 La théorie des sommes d'opérateurs

On rappelle dans la suite les principaux résultats de la théorie des sommes d'opérateurs linéaires dans les espaces de Banach quelconques.

Soient A et B deux opérateurs linéaires fermés dans X, de domaine respectifs $D(A)$ et $D(B)$. On s'intéresse alors à l'équation

$$Au + Bu = g, \tag{1.2}$$

où g est un vecteur donné de X.

L'opérateur somme $L = A + B$ est défini par

$$\begin{cases} D(L) = D(A) \cap D(B) \\ Lu = Au + Bu \text{ si } u \in D(L), \end{cases}$$

et (1.2) s'écrit encore

$$Lu = g.$$

Une solution stricte de (1.2) est un élément $u \in D(L)$ satisfaisant (1.2). L'idéal est de trouver une telle solution lorsque g est quelconque dans X, mais ce n'est pas toujours possible ; on introduit donc une nouvelle notion :

u est une solution forte de (1.2) si et seulement s'il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $D(L)$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = u \text{ et } \lim_{n \to +\infty} Lu_n = g. \tag{1.3}$$

Evidemment, une solution stricte de (1.2) est une solution forte de (1.2). La notion de solution forte est donc plus faible (mais le terme de solution faible ne sera pas utilisé ici, il est en général réservé aux solutions variationnelles, la notion de solution forte correspond plutôt à une solution distribution).

Notons que si L est fermé les deux notions de solution stricte et forte sont équivalentes, mais la somme de deux opérateurs fermés n'est pas nécessairement fermée.

D'autre part si l'on suppose que L est fermable et si on note $\overline{L}$ sa fermeture (i.e. $\overline{L}$ est la plus petite extension fermée de L) alors (1.3) équivaut à

$$u \in D(\overline{L}) \text{ et } \overline{L}u = g.$$

Enfin dans le cas où L est fermable, les propositions suivantes sont équivalentes :
1. Pour tout g de X, il existe une solution forte de (1.2).
2. $0 \in \rho(\overline{L})$.
Et si L est fermé les propositions suivantes sont équivalentes :
1. Pour tout g de X, il existe une solution stricte de (1.2).
2. $0 \in \rho(L)$.

1.5 Puissances fractionnaires

1.5.1 Construction des puissances fractionnaires

Soit A linéaire fermé à domaine non nécessairement dense dans X, soit $\lambda > 0$

$$\lambda \in \rho(A) \text{ tel que } \left\|\lambda(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{L(E)} < C < +\infty.$$

Alors, on définit l'opérateur J^{α} par

$$J^{\alpha}x = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \lambda^{\alpha-1}(A-\lambda I)^{-1}(-A)x d\lambda$$

si $0 < Re\alpha < 1$ et $x \in D_A$,
et

$$\begin{aligned} J^{\alpha}x &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} \lambda^{\alpha-1}((A-\lambda I)^{-1} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2})(-A)x d\lambda \\ &\quad +(-A)x \sin \pi\frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

si $0 < Re\alpha < 2$ et $x \in D_{A^2}$, (voir Balakrishnan [8]).

En plus généralement, si $n-1 < Re\alpha < n$ et $x \in D_{A^n}$, alors

$$J^{\alpha}x = J^{\alpha-n+1}(-A)^{n-1}x.$$

Lemme 1.1 *Pour $x \in D_{A^2}$ et $0 < Re(\alpha+\beta) < 1$, $J^{\alpha+\beta}x = J^{\alpha}J^{\beta}x$.*

Lemme 1.2 *Les opérateurs J^{α} admettent des extensions fermées et $(-A)^{\alpha}$ est la plus petite extension fermée de J^{α}.*

Theorème 1.4 *Si A est un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X tels que*

$$\begin{cases} \exists C > 0 : \mathbb{R}_+ \subset \rho(A) \text{ et pour } \lambda \geq 0 \\ \|(\lambda I - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq C/\left(1+\lambda\right), \end{cases}$$

alors pour $0 < \alpha \leq 1/2$, $-(-A)^{\alpha}$ défini précédement génère un semi-groupe $G_{\alpha}(t)$ fortement continu pour $t \geq 0$ et uniformément continu pour $t > 0$.

Preuve. Voir A. V. Balakrishnan [8] ■

Exemple 1.1 *Pour $\alpha = 1/2$, $G_{1/2}(t) = \int_{0}^{+\infty} (A-\lambda I)^{-1} \sin t\sqrt{\lambda} d\lambda$.*

1.5.2 Puissances fractionnaires avec partie réelle positive

On considère ici $A \in S_\phi$ où $\phi \in]0, \pi[$.
On se donne $\alpha \in \mathbb{C}$, il s'agit alors sous certaines conditions, d'activer la formule

$$A^\alpha = (z^\alpha)(A).$$

Ici z^α désigne la détermination principale de la fonction "puissance α" caractérisée par

$$z^\alpha = e^{\alpha(\ln r + i\theta)} \text{ si } z = re^{i\theta}, \ r > 0, \ \theta \in]-\pi, \pi[.$$

Proposition 1.5 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $Re\beta$, $Re\alpha > 0$, on a*

1. A^α est un opérateur fermé de X.
2. $A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha$.
3. $Re\beta > Re\alpha \Rightarrow D(A^\beta) \subset D(A^\alpha)$ et en particulier

$$Re\alpha < 1 \Rightarrow D(A) \subset D(A^\alpha).$$

4. Si A est injectif alors A^α l'est aussi et

$$(A^{-1})^\alpha = (A^\alpha)^{-1}.$$

5. Si $0 \in \rho(A)$ alors $0 \in \rho(A^\alpha)$.
6. Si $\theta \in \mathbb{R}$ avec $0 < \theta < \dfrac{\pi}{\omega}$ alors

$$(A^\theta)^\alpha = A^{\theta\alpha}.$$

7. $A \in L(X) \Rightarrow A^\alpha \in L(X)$.

1.5.3 Puissances fractionnaires avec partie réelle quelconque

Proposition 1.6 *On considère $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et on suppose que A est injectif. Alors*

1. A^α est un opérateur fermé de X.
2. A^α est injectif et $(A^\alpha)^{-1} = A^{-\alpha} = (A^{-1})^\alpha$.
3. $A^{\alpha+\beta} \subset A^\alpha A^\beta$.
4. Si $\theta \in \mathbb{R}$ avec $|\theta| < \dfrac{\pi}{\omega}$ alors
$$(A^\theta)^\alpha = A^{\theta\alpha}.$$

Considérons maintenant le cas particulier où A admet un inverse borné.

Définition 1.7 *Si $0 \in \rho(A)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $Re\alpha > 0$, alors*

1. $A^{-\alpha} = (A^{-1})^\alpha \in L(X)$.
2. $A^{-\alpha-\beta} = A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-\beta}A^{-\alpha}$.

1.6 Les espaces de Hölder

Définition 1.8 *Soient X un espace de Banach complexe et $C([0,1];X)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans X muni de la norme*

$$\|f\|_{C(X)} = \max_{t\in[0.1]} \|f(t)\|_X$$

On considère, pour $0<\theta<1$, l'espace

$$C^\theta([0,1];X) = \left\{ f \in C([0,1];X) \quad / \sup_{t-s\neq 0} \frac{\|f(t)-f(s)\|_X}{|t-s|^\theta} < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^\theta([0,1];X)} = \|f\|_{C([0,1];X)} + \sup_{t-s\neq 0} \frac{\|f(t)-f(s)\|_X}{|t-s|^\theta}$$

Cet espace est un espace de Banach appelé espace höldérien de degré θ.

1.7 Lemmes techniques

Lemme 1.3 *Si A est un opérateur fermable et B est un opérateur borné avec $D(A)\subset D(B)$ alors l'opérateur $A+B$ est un opérateur fermable.*
Preuve. $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans $D(A)$ telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \ \text{ et } \lim_{n\to+\infty} (A+B)\, u_n = y,$$

montrons que $y=0$. On a :

$$\left\{ \begin{array}{c} \lim\limits_{n\to+\infty} Au_n = z \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \end{array} \right. \Rightarrow z = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \ \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} Bu_n = 0,$$

car

$$\|Bu_n\| \leq K\,\|u_n\|$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} (A+B)\, u_n &= \lim_{n\to+\infty} (Au_n + Bu_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} Au_n = 0 = y, \end{aligned}$$

■

Lemme 1.4 *Si A est un opérateur fermable et B est un opérateur borné avec $D(\operatorname{Im} B) \subset D(A)$ alors l'opérateur $A\cdot B$ est un opérateur fermable.*

Preuve. *$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} (A\cdot B)\, u_n = y,$$

montrons que $y = 0$. Puisque B est un opérateur borné on a :

$$\lim_{n\to+\infty} Bu_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 0,$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{c} \lim\limits_{n\to+\infty} A\cdot Bu_n = \lim\limits_{n\to+\infty} A\,(Bu_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} Av_n = y \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{array} \right. \Rightarrow y = 0.$$

■

Lemme 1.5 *$\exists C > 0$ ne dépendant que de γ tel que, $\forall \zeta > 0$ on a*

$$\int\limits_{\gamma} \frac{|dz|}{|z\pm\zeta|\,|z|^{\alpha}} \le \frac{C}{\zeta^{\alpha}} \qquad \forall \alpha \in]0,1[$$

Preuve.

$$\begin{aligned} |z\pm r| &\ge AB = r\sin\theta \ge Cr \\ &\ge CD = |z|\sin\theta \ge C\,|z| \end{aligned}$$

$$\int\limits_{\gamma} \frac{|dz|}{|z\pm r|\,|z|^{\varphi}} = \int\limits_{\gamma_r} \frac{|dz|}{|z\pm r|\,|z|^{\varphi}} + \int\limits_{\gamma\backslash\gamma_r} \frac{|dz|}{|z\pm r|\,|z|^{\varphi}}$$

avec $\gamma = \gamma_r \cup (\gamma\backslash\gamma_r)$, $\gamma_r = \{z\in\gamma : |z| \le r\}$ et $\gamma\backslash\gamma_r = \{z\in\gamma : |z| \ge r\}$

$$\begin{aligned} \int\limits_{\gamma_r} \frac{|dz|}{|z\pm r|\,|z|^{\varphi}} &= \int\limits_{|z|\le r} \frac{|dz|}{|z\pm r|\,|z|^{\varphi}} \\ &\le \frac{K}{r}\int\limits_{0}^{r} \frac{|dz|}{|z|^{\varphi}} \le \left[\frac{K}{r}\,|z|^{1-\varphi}\right]_0^r = \frac{K}{r^{\varphi}} \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \int\limits_{\gamma\backslash\gamma_r} \frac{|dz|}{|z\pm r|\,|z|^{\varphi}} &= \int\limits_{r}^{+\infty} \frac{|dz|}{|z\pm r|\,|z|^{\varphi}} \\ &\le K\int\limits_{r}^{+\infty} \frac{|dz|}{|z|^{1+\varphi}} \le \left[\frac{C}{|z|^{\varphi}}\right]_r^{+\infty} = \frac{C}{r^{\varphi}} \end{aligned}$$

■

Chapitre 2

Etude du problème aux limites

2.1 Position du problème

Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense dans X, on considère le problème abstrait suivant

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x); \quad x \in (0,1) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0 \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f \in C^\theta([0,1];X)$, d_0 et $u_1 \in X$, A et H sont des opérateurs linéaires fermés dans X

2.2 Hypothèses

Supposons que A vérifie l'hypothèse suivante

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \ \exists M > 0 \text{ telle que } \rho(A) \supset [0,+\infty[, \\ \\ \|(\lambda - A)^{-1}\|_{L(X)} \leq \dfrac{M}{1+\lambda}, \forall \lambda \in [0,+\infty[. \end{cases} \tag{2.2}$$

De l'hypothèse (2.2) on a l'opérateur $Q = -(-A)^{1/2}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique généralisé dans X. Voir [8] pour les opérateurs densement définis et [10] autrement.

On va aussi utiliser les hypothèses de fermeture et d'inversibilité suivantes :

$$\begin{cases} H \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \\ Q - H \text{ est fermable. } 0 \in \rho\left(\overline{Q-H}\right), \\ \left(\overline{Q-H}\right)^{-1}((D(Q),X)_{1-\theta,\infty}) \subset D(Q) \cap D(H), \\ Q\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}((D(Q),X)_{1-\theta,\infty}) \subset (D(Q),X)_{1-\theta,\infty}, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$Q^{-1}\left(\overline{Q-H}\right)^{-1} = \left(\overline{Q-H}\right)^{-1} Q^{-1}, \tag{2.4}$$

et

$$0 \in \rho(\Pi), \tag{2.5}$$

où
$$\Pi = I + 2(I - e^{2Q})^{-1} Q e^{2Q} \left(\overline{Q - H}\right)^{-1} \in L(X),$$
et
$$(D(Q), X)_{1-\theta,\infty} = \{z \in X \diagup \sup_{\xi \in (0,1)} \xi^{1-\theta} \|Q e^{\xi Q} z\|_{L(X)} < +\infty\}.$$
Notons que $I - e^{2Q}$ est inversible et borné voir [11] (e.g. p. 60).

1. De (2.4) on déduit que $\left(\overline{Q - H}\right)^{-1} (D(Q)) \subset D(Q)$.
2. L'hypothèse (2.3) est obtenue sous des suppositions bien choisies sur Q et H, en appliquant la théorie des sommes d'opérateurs de Da Prato-Grisvard.
3. Sous (2.2), (2.4), on va considérer le cas particulier suivant
$$Q - H \text{ est fermé et } 0 \in \rho(Q - H). \tag{2.6}$$
4. Sous (2.2), (2.3) et (2.4), puisque $D(Q) \subset (D(Q), X)_{1-\theta,\infty}$ alors il est clair que
$$\left(\overline{Q - H}\right)^{-1} (D(Q)) \subset D(Q) \cap D(H), \tag{2.7}$$

pour tout $\phi \in (D(Q), X)_{1-\theta,\infty}$, on a
$$(Q - H) \left(\overline{Q - H}\right)^{-1} \phi = \phi,$$
et on a aussi $H \left(\overline{Q - H}\right)^{-1} \phi \in (D(Q), X)_{1-\theta,\infty}$ car
$$\begin{aligned} H \left(\overline{Q - H}\right)^{-1} \phi &= -(Q - H) \left(\overline{Q - H}\right)^{-1} \phi + Q \left(\overline{Q - H}\right)^{-1} \phi \\ &= -\phi + Q \left(\overline{Q - H}\right)^{-1} \phi. \end{aligned}$$

2.3 Lemmes techniques :

On considère Λ l'opérateur linéaire de domaine $D(\Lambda) = D(Q) \cap D(H)$ défini par
$$\Lambda = Q - H + e^{2Q}(Q + H). \tag{2.8}$$

Lemme 2.1 *Supposons (2.2)∼(2.5). Alors l'opérateur Λ est fermable et sa fermeture est inversible avec*
$$\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} = (\overline{Q - H})^{-1} \Pi^{-1} (I - e^{2Q})^{-1}, \tag{2.9}$$
et
$$\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} = (\overline{Q - H})^{-1} + (\overline{Q - H})^{-1} W, \tag{2.10}$$
avec
$$W \in L(X), (\overline{Q - H})^{-1} W = W (\overline{Q - H})^{-1} \ \textit{et} \quad W(X) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(Q^k).$$

Preuve. On a $\Lambda = (I - e^{2Q})(Q - H) + 2Q e^{2Q}$. Puisque $Q - H$ est fermable, $I - e^{2Q}$est inversible et $Q e^{2Q} \in L(X)$, alors Λ est fermable et on a
$$\begin{aligned} \Lambda &= (I - e^{2Q})(Q - H) + 2Q e^{2Q} \\ &= [(I - e^{2Q}) + 2Q e^{2Q} (Q - H)^{-1}](Q - H) \\ &= (I - e^{2Q})[I + 2(I - e^{2Q})^{-1} Q e^{2Q} (Q - H)^{-1}](Q - H) \end{aligned}$$

donc

$$\overline{\Lambda} = (I - e^{2Q})[(I + 2(I - e^{2Q})^{-1}Qe^{2Q}\left(\overline{Q-H}\right)^{-1})](\overline{Q-H}) \qquad (2.11)$$
$$= (I - e^{2Q})\Pi(\overline{Q-H}),$$

L'égalité (2.11) avec l'hypothèses (2.3) et (2.5) donnent $0 \in \rho(\overline{\Lambda})$ et (2.9).

De (2.9) on a $\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} = (\overline{Q-H})^{-1}(I+T)^{-1}(I+S)^{-1}$, avec

$$\begin{cases} T = 2(I - e^{2Q})^{-1}Qe^{2Q}(\overline{Q-H})^{-1} \in L(X), \quad S = -e^{2Q} \in L(X) \text{ et} \\ T(X) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} D(Q^k), \quad S(X) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} D(Q^k). \end{cases}$$

Posons $U = -T(I+T)^{-1} \in L(X)$ et $V = -S(I+S)^{-1} \in L(X)$. Alors

$$\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} = (\overline{Q-H})^{-1}(I+U)(I+V).$$

En effet,

$$\begin{aligned} (I+T)\ (I+T)^{-1} = I \quad &\Leftrightarrow \quad (I+T)^{-1} + T(I+T)^{-1} = I \\ &\Leftrightarrow \quad (I+T)^{-1} - U = I \\ &\Leftrightarrow \quad (I+T)^{-1} = I + U, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (I+S)\ (I+S)^{-1} = I \quad &\Leftrightarrow \quad (I+S)^{-1} + S(I+S)^{-1} = I \\ &\Leftrightarrow \quad (I+S)^{-1} - V = I \\ &\Leftrightarrow \quad (I+S)^{-1} = I + V. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} &= (\overline{Q-H})^{-1}(I+U)(I+V) \\ &= (\overline{Q-H})^{-1}(I+U+V+UV) \\ &= (\overline{Q-H})^{-1}(I+W), \end{aligned}$$

avec

$$(\overline{Q-H})^{-1}U = U(\overline{Q-H})^{-1}, \quad (\overline{Q-H})^{-1}V = V(\overline{Q-H})^{-1},$$

et $U(X), V(X) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} D(Q^k)$. ■

On introduit l'opérateur linéaire L dans X défini par

$$\begin{cases} D(L) = \{\xi \in X : \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}\xi \in D(Q+H)\} \\ L\xi = (Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}\xi. \end{cases}$$

Lemme 2.2 *Supposons (2.2)∼(2.5). Alors*

$$(I + L - e^{2Q}L)Q^{-1} \in L(X), \quad (-I + L + e^{2Q}L)Q^{-1} \in L(X),$$

et

$$\begin{cases} (I+L-e^{2Q}L)Q^{-1} = 2\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}. \\ (-I+L+e^{2Q}L)Q^{-1} = -2(Q-H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}Q^{-1} + 2Q\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}Q^{-1}. \end{cases}$$

Preuve. L'opérateur LQ^{-1} est bien défini dans X et

$$\begin{aligned} LQ^{-1} &= (Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}Q^{-1} \\ &= (Q+H)(\overline{Q-H})^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1}Q^{-1} \\ &= (-Q+H+2Q)(\overline{Q-H})^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1}Q^{-1} \\ &= -(Q-H)(\overline{Q-H})^{-1}\Pi^{-1}Q^{-1}(I-e^{2Q})^{-1} \\ &\quad +2Q(\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1}, \end{aligned}$$

on a

$$\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1}Q^{-1} = \left[I+2(I-e^{2Q})^{-1}Qe^{2Q}(\overline{Q-H})^{-1}\right]^{-1}Q^{-1}(I-e^{2Q})^{-1},$$

puisque l'opérateur Q^{-1} commute avec

$$\Pi = I+2(I-e^{2Q})^{-1}Qe^{2Q}(\overline{Q-H})^{-1},$$

d'aprés l'hypothèse (2.4) et on déduit aussi que Q^{-1} commute avec Π^{-1}([12], p.171, Problème 5.37) et

$$\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1}Q^{-1} = Q^{-1}\left[I+2(I-e^{2Q})^{-1}Qe^{2Q}(\overline{Q-H})^{-1}\right]^{-1}(I-e^{2Q})^{-1},$$

et par suite on aura

$$\begin{aligned} LQ^{-1} &= -(Q-H)(\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1} \\ &\quad +2Q(\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1}. \end{aligned}$$

Il est clair que les opérateurs

$$(Q-H)(\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1} \quad \text{et} \quad Q(\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1},$$

sont bien définis et bornés dans X d'aprés l'hypothèse (2.3). Par conséquant

$$(I+L-e^{2Q}L)Q^{-1} = Q^{-1} + (I-e^{2Q})LQ^{-1},$$

appartient à $L(X)$.Et

$$(-I+L+e^{2Q}L)Q^{-1} = -Q^{-1} + (I+e^{2Q})LQ^{-1},$$

appartient à $L(X)$. Finalement, on a

$$\begin{aligned} (I+L-e^{2Q}L)Q^{-1} &= Q^{-1} - (I-e^{2Q})(Q-H)(\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1} \\ &\quad +2(I-e^{2Q})Q(\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1}, \end{aligned}$$

et grâce aux hypothèses (2.3) et (2.4), on obtient

$$\begin{aligned} (I+L-e^{2Q}L)Q^{-1} &= Q^{-1} - (Q-H)(\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1} + 2(\overline{Q-H})^{-1}\Pi^{-1} \\ &= Q^{-1} - Q^{-1}\Pi^{-1} + 2(\overline{Q-H})^{-1}\Pi^{-1} \\ &= [Q^{-1}(I-e^{2Q})\Pi(\overline{Q-H}) - Q^{-1}(I-e^{2Q})(\overline{Q-H}) \\ &\quad +2(I-e^{2Q})](\overline{Q-H})^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1}; \end{aligned}$$

en remplaçant Π par $I+2(I-e^{2Q})^{-1}Qe^{2Q}(\overline{Q-H})^{-1}$, on obtient

$$[Q^{-1}(I-e^{2Q})\Pi(\overline{Q-H})-Q^{-1}(I-e^{2Q})(\overline{Q-H})+2(I-e^{2Q})]=2I,$$

en effet,

$$\begin{aligned}
& Q^{-1}(I-e^{2Q})\Pi(\overline{Q-H})-Q^{-1}(I-e^{2Q})(\overline{Q-H})+2(I-e^{2Q}) \\
= \; & Q^{-1}(I-e^{2Q})(I+2(I-e^{2Q})^{-1}Qe^{2Q}(\overline{Q-H})^{-1})(\overline{Q-H}) \\
& -Q^{-1}(I-e^{2Q})(\overline{Q-H})+2(I-e^{2Q}) \\
= \; & Q^{-1}(I-e^{2Q})((\overline{Q-H})+2(I-e^{2Q})^{-1}Qe^{2Q})-Q^{-1}(I-e^{2Q})(\overline{Q-H}) \\
& +2(I-e^{2Q}) \\
= \; & Q^{-1}(I-e^{2Q})(\overline{Q-H})+2e^{2Q}-Q^{-1}(I-e^{2Q})(\overline{Q-H})+2I-2e^{2Q} \\
= \; & 2I
\end{aligned}$$

donc

$$(I+L-e^{2Q}L)Q^{-1}=2(\overline{Q-H})^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1}=2\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}.$$

Pour la deuxième égalité on a

$$\begin{aligned}
(-I+L+e^{2Q}L)Q^{-1} &= -Q^{-1}+(I+e^{2Q})LQ^{-1} \\
&= -Q^{-1}+(2I-I+e^{2Q})LQ^{-1} \\
&= -Q^{-1}+2LQ^{-1}-(I-e^{2Q})LQ^{-1} \\
&= -Q^{-1}-2(Q-H)(\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1} \\
&\quad +4Q(\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1} \\
&\quad +(I-e^{2Q})(Q-H)(\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1} \\
&\quad -(I-e^{2Q})2Q(\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1} \\
&= -Q^{-1}-2(Q-H)(\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1} \\
&\quad +4Q(\overline{Q-H})^{-1}\Pi^{-1}Q^{-1}(I-e^{2Q})^{-1} \\
&\quad +(Q-H)(\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}-2\Pi^{-1}(\overline{Q-H})^{-1} \\
&= [-Q^{-1}(I-e^{2Q})\Pi(\overline{Q-H})-2(Q-H)Q^{-1}+4I \\
&\quad +(Q-H)Q^{-1}(I-e^{2Q}) \\
&\quad -2(I-e^{2Q})](\overline{Q-H})^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1} \\
&= [-Q^{-1}(I-e^{2Q})(I+2(I-e^{2Q})^{-1}Qe^{2Q}(\overline{Q-H})^{-1})(\overline{Q-H}) \\
&\quad -2(Q-H)Q^{-1}+4I \\
&\quad +(Q-H)Q^{-1}(I-e^{2Q})-2(I-e^{2Q})]\;(\overline{Q-H})^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1} \\
&= [-Q^{-1}(I-e^{2Q})(\overline{Q-H})-2e^{2Q}-2(Q-H)Q^{-1}+4I \\
&\quad +(Q-H)Q^{-1}(I-e^{2Q})-2(I-e^{2Q})](\overline{Q-H})^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1} \\
&= [-Q^{-1}(I-e^{2Q})(\overline{Q-H})-2e^{2Q}-2(Q-H)Q^{-1}+4I \\
&\quad +(Q-H)Q^{-1}(I-e^{2Q})-2I+2e^{2Q}](\overline{Q-H})^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1} \\
&= (-2(Q-H)Q^{-1}+2I)(\overline{Q-H})^{-1}\Pi^{-1}(I-e^{2Q})^{-1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$(-I+L+e^{2Q}L)Q^{-1}=-2(Q-H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}Q^{-1}+2Q\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}Q^{-1}.$$

■

Lemme 2.3 *Supposons que (2.2), (2.4) et (2.6). Alors*
1) Λ *est fermé.*
2) Si $\|((Q+H)(Q-H)^{-1})^{n_1}\|_{L(X)} \leq 1$ *pour certain* $n_1 \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, *alors (2.5) est satisfaite.*

Preuve. L'expression 1) est claire car $\Lambda = (I - e^{2Q})(Q-H) + 2Qe^{2Q}$. qui est fermé puisque $Q - H$ est fermé, $I - e^{2Q}$ est inversible et $Qe^{2Q} \in L(X)$. Pour 2) on va noter

$$\Pi = I + 2(I - e^{2Q})^{-1}Qe^{2Q}(Q-H)^{-1} = (I - e^{2Q})^{-1}(I - C),$$

où

$$C = -(Q+H)(Q-H)^{-1}e^{2Q} \in L(X).$$

Donc pour que l'hypothèse (2.5) soit satisfaite il faut et il suffit que $0 \in \rho(I - C)$.

Puisque Q génère un semi-groupe analytique borné et $0 \in \rho(Q)$, il existent $M \geq 1$ et $\delta > 0$ telles que pour tout $y > 0$

$$\|e^{yQ}\|_{L(X)} \leq Me^{-\delta y},$$

(voir [13], Théorème 6.13, p. 74] et dans le cas de domaines non dense voir [11], Proposition 2.1.1, p. 35 et Proposition 2.3.1, pp. 55-56]) et on peut choisir $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tel que

$$Me^{-2kn_1\delta} < 1.$$

Finalement

$$\|C^{kn_1}\|_{L(X)} \leq \| \left((Q+H)(Q-H)^{-1}\right)^{n_1} \|^k_{L(X)} \|e^{2kn_1Q}\|_{L(X)} \leq Me^{-2kn_1\delta} < 1,$$

donc $0 \in \rho(I - C^{kn_1})$ et ainsi $0 \in \rho(I - C)$ puisque

$$\begin{aligned} I &= (I - C)(I + C + ... + C^{kn_1 - 1})(I - C^{kn_1})^{-1} \\ &= (I + C + ... + C^{kn_1 - 1})(I - C^{kn_1})^{-1}(I - C). \end{aligned}$$

■

2.4 Représentation de la solution

Posons (2.2)~(2.5). On suppose que le problème (2.1) admet une solution stricte u

$$u \in C^2([0,1]; X) \cap C([0,1]; D(A)), \tag{2.12}$$

$u(0) \in D(H)$ et (2.1) est satisfait. Alors, en utilisant la méthode de la reduction de l'ordre de Krein [14]. Donc, pour tout $x \in [0,1]$, posons

$$y(x) = \frac{1}{2}(u(x) + Q^{-1}u'(x)), \quad z(x) = \frac{1}{2}(u(x) - Q^{-1}u'(x)). \tag{2.13}$$

On a

$$\begin{aligned} y'(x) = \frac{1}{2}(u'(x) + Q^{-1}u''(x)) \quad &\Leftrightarrow \quad y'(x) = \frac{1}{2}(u'(x) + Q^{-1}(f(x) - Au(x)) \\ &\Leftrightarrow \quad y'(x) = \frac{1}{2}(u'(x) + Q^{-1}(f(x) + Q^2u(x)) \\ &\Leftrightarrow \quad y'(x) = \frac{1}{2}u'(x) + \frac{1}{2}(Q^{-1}f(x) + Qu(x)) \\ &\Leftrightarrow \quad y'(x) = \frac{1}{2}Q(Q^{-1}u'(x) + u(x)) + \frac{1}{2}Q^{-1}f(x) \\ &\Leftrightarrow \quad y'(x) = Qy(x) + \frac{1}{2}Q^{-1}f(x) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} y'(x) = Qy(x) + \frac{1}{2}Q^{-1}f(x), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Même chose pour z ona

$$\begin{aligned} z'(x) = \frac{1}{2}(u'(x) - Q^{-1}u''(x)) \quad &\Leftrightarrow \quad z'(x) = \frac{1}{2}(u'(x) - Q^{-1}(f(x) - Au(x)) \\ &\Leftrightarrow \quad z'(x) = \frac{1}{2}(u'(x) - Q^{-1}(f(x) + Q^2u(x)) \\ &\Leftrightarrow \quad z'(x) = \frac{1}{2}u'(x) - \frac{1}{2}(Q^{-1}f(x) - Qu(x)) \\ &\Leftrightarrow \quad z'(x) = \frac{1}{2}Q(Q^{-1}u'(x) - u(x)) - \frac{1}{2}Q^{-1}f(x) \\ &\Leftrightarrow \quad z'(x) = -Qz(x) - \frac{1}{2}Q^{-1}f(x) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{cases} z'(x) = -Qz(x) + \frac{1}{2}Q^{-1}f(x), \\ z(1) = z_1. \end{cases} \tag{2.15}$$

où

$$y_0 = \frac{1}{2}(u(0) + Q^{-1}u'(0)) \text{ et } \; z(1) = \frac{1}{2}(u(1) - Q^{-1}u'(1))$$

alors la résolution du problème (2.1) est équivalente à celle des deux système (2.14) et (2.15).

Par conséquant, pour tout $x \in [0, 1]$ on obtient

$$\begin{cases} y(x) = e^{xQ}\; y_0 + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)ds \\ z(x) = e^{(1-x)Q}z_1 + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}f(s)ds, \end{cases} \tag{2.16}$$

finalement la solution du problème est donnée par

$$\begin{aligned} u(x) &= y(x) + z(x) \\ &= e^{xQ}\; y_0 + e^{(1-x)Q}z_1 + I_x(f) + J_x(f), \end{aligned} \tag{2.17}$$

où

$$\begin{cases} I_x(f) = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)ds, \\ J_x(f) = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}f(s)ds. \end{cases}$$

En effet, on a

$$y'(x) - Qy(x) = \frac{1}{2}Q^{-1}f(x)$$

en raisonant l'équation homogène

$$\begin{aligned} y'(x) - Qy(x) = 0 &\Leftrightarrow y'(x) = Qy(x) \\ &\Leftrightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = Q \\ &\Leftrightarrow y(x) = K(x)e^{Qx} \end{aligned}$$

par la méthode de la variation de la constante, on aura

$$\begin{aligned} K'(x)e^{xQ} + K(x)Qe^{xQ} - K(x)Qe^{xQ} = \frac{1}{2}Q^{-1}f(x) &\Leftrightarrow K'(x) = \frac{1}{2}Q^{-1}e^{-xQ}f(x) \\ &\Leftrightarrow K(x) = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{-sQ}f(s)ds \end{aligned}$$

alors

$$y(x) = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)ds.$$

De même on a

$$z(x) = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}f(s)ds.$$

De (2.12), on a $u(0) \in D(A) \subset D(Q)$ et donc y_0, $e^Q z_1$, $J_0(f) \in D(Q)$, alors de (2.3), on peut écrire

$$\begin{cases} H(\overline{\Lambda})^{-1}u(0) = H(\overline{\Lambda})^{-1}y_0 + H(\overline{\Lambda})^{-1}e^Q z_1 + H(\overline{\Lambda})^{-1}J_0(f), \\ (\overline{\Lambda})^{-1}u'(0) = Q(\overline{\Lambda})^{-1}y_0 - Q(\overline{\Lambda})^{-1}e^Q z_1 - Q(\overline{\Lambda})^{-1}J_0(f). \end{cases}$$

Cherchons y_0, z_1. On a

$$\begin{aligned} (\overline{\Lambda})^{-1}d_0 &= (\overline{\Lambda})^{-1}[u'(0) - Hu(0)] \\ &= (\overline{\Lambda})^{-1}u'(0) - H(\overline{\Lambda})^{-1}u(0) \\ &= (Q-H)\ (\overline{\Lambda})^{-1}y_0 - \ (Q+H)e^Q\ (\overline{\Lambda})^{-1}z_1 - (Q+H)\ (\overline{\Lambda})^{-1}J_0(f), \end{aligned}$$

cependant, vu les représentations (2.16) et (2.17), on a

$$z_1 = u_1 - e^Q y_0 - I_1, \tag{2.18}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} (\overline{\Lambda})^{-1}d_0 &= [(Q-H)\ + (Q+H)e^Q](\overline{\Lambda})^{-1}y_0\ -\ (Q+H)\ (\overline{\Lambda})^{-1}(e^Q u_1 - e^Q I_1(f) + J_0(f)) \\ &= y_0 - \ (Q+H)\ (\overline{\Lambda})^{-1}(e^Q u_1 - e^Q I_1(f) + J_0(f)), \end{aligned}$$

et donc on aboutit à

$$y_0 = (\overline{\Lambda})^{-1}d_0 + (Q+H)(\overline{\Lambda})^{-1}(e^Q u_1 - e^Q I_1(f) + J_0(f)), \tag{2.19}$$

et

$$z_1 = u_1 - I_1(f) - e^Q(\overline{\Lambda})^{-1}d_0 - e^Q(Q+H)(\overline{\Lambda})^{-1}(e^Q u_1 - e^Q I_1(f) + J_0(f)). \tag{2.20}$$

On a $L = (Q+H)(\overline{\Lambda})^{-1}$. Alors on obtient

$$
\begin{aligned}
u(x) &= e^{xQ}[(\overline{\Lambda})^{-1}d_0 + Le^{Q}u_1] + e^{xQ}LJ_0(f) - e^{xQ}Le^{Q}I_1(f) \\
&\quad + e^{(1-x)Q}[(I - Le^{2Q})u_1 - (\overline{\Lambda})^{-1}e^{Q}d_0] \\
&\quad - e^{(1-x)Q}Le^{Q}J_0(f) - e^{(1-x)Q}[I - Le^{2Q}]I_1(f) + I_x(f) + J_x(f\ ) \\
&= e^{xQ}(\overline{\Lambda})^{-1}d_0 + e^{xQ}Le^{Q}u_1 + e^{xQ}L\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(s)ds \\
&\quad - e^{xQ}Le^{Q}\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)ds + e^{(1-x)Q}u_1 \\
&\quad - e^{(1-x)Q}Le^{2Q}u_1 - e^{(1-x)Q}(\overline{\Lambda})^{-1}e^{Q}d_0 \\
&\quad - e^{(1-x)Q}Le^{Q}\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(s)ds - e^{(1-x)Q}\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)ds \\
&\quad + e^{(1-x)Q}Le^{2Q}\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)ds + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}f(s)ds \\
&= e^{xQ}(\overline{\Lambda})^{-1}d_0 + e^{xQ}Le^{Q}u_1 + e^{xQ}L\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}(f(s) - f(0)ds \\
&\quad + e^{xQ}L\frac{1}{2}Q^{-2}e^{Q}f(0) - e^{xQ}L\frac{1}{2}Q^{-2}f(0) \\
&\quad - e^{xQ}Le^{Q}\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)ds + e^{(1-x)Q}u_1 - e^{(1-x)Q}Le^{2Q}u_1 \\
&\quad - e^{(1-x)Q}(\overline{\Lambda})^{-1}e^{Q}d_0 - e^{(1-x)Q}Le^{Q}\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(s)ds \\
&\quad - e^{(1-x)Q}\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}(f(s) - f(1))ds + e^{(1-x)Q}\frac{1}{2}Q^{-2}f(1) \\
&\quad - e^{(1-x)Q}\frac{1}{2}Q^{-2}e^{Q}f(1) + e^{(1-x)Q}Le^{2Q}\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}(f(s) - f(0))ds - \frac{1}{2}Q^{-2}f(0) + \frac{1}{2}Q^{-2}f(0)e^{xQ} \\
&\quad + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}(f(s) - f(1))ds + \frac{1}{2}Q^{-2}f(1)e^{(1-x)Q} - \frac{1}{2}Q^{-2}f(1)
\end{aligned}
$$

alors on peut écrire

$$
\begin{aligned}
& u(x) = e^{xQ}((\overline{\Lambda})^{-1}d_0 + \frac{1}{2}Q^{-2}f(0) - \frac{1}{2}LQ^{-2}f(0)) \\
& + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}(f(s) - f(0))ds \\
& - \frac{1}{2}Q^{-2}f(0) + \frac{1}{2}e^{xQ}LQ^{-1}\int_0^1 e^{sQ}(f(s) - f(0)ds \\
& + e^{(1-x)Q}(u_1 + Q^{-2}f(1)) + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}(f(s) - f(1))ds \\
& - \frac{1}{2}Q^{-2}f(1) \quad - \frac{1}{2}e^{(1-x)Q}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}(f(s) - f(1))ds \\
& + e^{xQ}e^{Q}L\left[u_1 - \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)ds + \frac{1}{2}Q^{-2}f(0)\right] \\
& - e^{(1-x)Q}e^{2Q}L\left[u_1 - \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)ds \quad\right] \\
& - e^{(1-x)Q}e^{Q}\left[(\overline{\Lambda})^{-1}d_0 + \frac{1}{2}LQ^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(s)ds + \frac{1}{2}Q^{-2}f(1)\right].
\end{aligned}
$$

Pour le premier terme , on écrit

$$
\begin{aligned}
(\overline{\Lambda})^{-1}d_0 + \frac{1}{2}Q^{-2}f(0) - \frac{1}{2}LQ^{-2}f(0) &= (\overline{\Lambda})^{-1}d_0 + \frac{1}{2}[I - L]Q^{-2}f(0) \\
&= (\overline{\Lambda})^{-1}d_0 + \frac{1}{2}[\Lambda(\overline{\Lambda})^{-1} - (Q+H)(\overline{\Lambda})^{-1}]Q^{-2}f(0) \\
&= (\overline{\Lambda})^{-1}d_0 + \frac{1}{2}[(Q - H + (Q+H)e^{2Q})(\overline{\Lambda})^{-1} \\
&\quad -(Q+H)(\overline{\Lambda})^{-1}\ ]Q^{-2}f(0) \\
&= (\overline{\Lambda})^{-1}d_0 + \frac{1}{2}Q^{-2}f(0)(\overline{\Lambda})^{-1}(Q-H) + \frac{1}{2}e^{2Q}LQ^{-2}f(0) \\
&\quad -\frac{1}{2}(Q+H)(\overline{\Lambda})^{-1}Q^{-2}f(0) \\
&= (\overline{\Lambda})^{-1}d_0 - \frac{1}{2}H(\overline{\Lambda})^{-1}Q^{-2}f(0) + \frac{1}{2}Q^{-1}(\overline{\Lambda})^{-1}f(0) \\
&\quad +\frac{1}{2}e^{2Q}LQ^{-2}f(0) - \frac{1}{2}Q^{-1}(\overline{\Lambda})^{-1}f(0) - \frac{1}{2}H(\overline{\Lambda})^{-1}Q^{-2}f(0) \\
&= (\overline{\Lambda})^{-1}d_0 - H(\overline{\Lambda})^{-1}Q^{-2}f(0) + \frac{1}{2}e^{2Q}LQ^{-2}f(0).
\end{aligned}
$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{xQ}\xi_0 + e^{(1-x)Q}\xi_1 + S_1(x,f) + S_1(1-x, f(1-\cdot)) \\ &\quad + LS_2(x,f) - S_2(1-x, f(1-\cdot)) \\ &\quad - \frac{1}{2}Q^{-2}f(0) - \frac{1}{2}Q^{-2}f(1) + R(x,f,d_0,u_1), \end{aligned} \tag{2.21}$$

où

$$\xi_0 = (\overline{\Lambda})^{-1}d_0 - H(\overline{\Lambda})^{-1}Q^{-2}f(0), \quad \xi_1 = u_1 + Q^{-2}f(1), \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} S_1(x,f) &= \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}(f(s)-f(0))ds, \\ S_2(x,f) &= \frac{1}{2}e^{xQ}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}(f(s)-f(0))ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} R(x,f,d_0,u_1) &= e^{xQ}e^{Q}L\left[u_1 - \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)ds + \frac{1}{2}(I+e^{Q})Q^{-2}f(0)\right] \\ &\quad - e^{(1-x)Q}e^{2Q}L\left[u_1 - \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)ds\right] \\ &\quad - e^{(1-x)Q}e^{Q}\left[(\overline{\Lambda})^{-1}d_0 + \frac{1}{2}LQ^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(s)ds + \frac{1}{2}Q^{-2}f(1)\right]. \end{aligned}$$

2.5 La régularité de la solution

Theorème 2.1 *Supposons (2.2)∼(2.5) et soit $f \in C^\theta([0,1];X)$ avec $\theta \in]0,1[$. Alors*

$i)$ Le problème (2.1) admet une unique solution stricte u si et seulement si

$$\begin{cases} u_1 \in D(Q^2), (\overline{Q-H})^{-1}d_0 \in D(Q)\cap D(H), \\ Q(\overline{Q-H})^{-1}(d_0 - Q^{-1}f(0)) \in D(Q), \\ Q^2(\overline{Q-H})^{-1}(d_0 - Q^{-1}f(0)) + f(0) \in \overline{D(Q)}, \\ Q^2u_1 + f(1) \in \overline{D(Q)}. \end{cases} \tag{2.23}$$

$ii)$ Le problème (2.1) admet une unique solution stricte u vérifiant la propriété de la régularité maximale u'', $Q^2u \in C^\theta([0,1)];X)$ si et seulement si

$$\begin{cases} u_1 \in D(Q^2), (\overline{Q-H})^{-1}d_0 \in D(Q)\cap D(H), \\ Q(\overline{Q-H})^{-1}(d_0 - Q^{-1}f(0)) \in D(Q), \\ Q^2(\overline{Q-H})^{-1}(d_0 - Q^{-1}f(0)) + f(0) \in (D(Q),X)_{1-\theta,\infty}, \\ Q^2u_1 + f(1) \in (D(Q),X)_{1-\theta,\infty}. \end{cases} \tag{2.24}$$

Preuve. Pour $i)$ supposons que (2.23) est satisfaite et on va montrer que u donnée par (2.21) est la solution stricte u du problème (2.1).

On peut verifier que $u \in C^2(]0,1[;X) \cap C(]0,1[;D(A))$ et pour tout $x \in]0,1[$

$$u''(x) + Au(x) = f(x),$$

donc pour démontrer que

$$u \in C^2([0,1];X) \cap C([0,1];D(A)),$$

il suffit de montrer que $Q^2u \in C([0,1];X)$.

Chaque terme dans $R(\cdot, f, d_0, u_1)$ contient e^Q, et $e^Q \in L(X, D(Q^m))$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, donc

$$Q^2R(\cdot, f, d_0, u_1) \in C^\infty([0,1];X). \tag{2.25}$$

Puisque $f \in C^\theta([0,1)];X)$ alors il est clair que les fonctions

$$\begin{cases} x \mapsto Q^2S_1(x,f) \in C^\theta([0,1];X), \\ x \mapsto Q^2S_1(1-x, f(1-\cdot)) \in C^\theta([0,1];X) \\ x \mapsto Q^2S_2(1-x, f(1-\cdot)) \in C^\theta([0,1];X) \end{cases} \tag{2.26}$$

(Voir [7] ,e.g Thérorème 6, l'expression 2). On a aussi

$$Q^2S_2(x,f) = \frac{1}{2}e^{xQ}Q\int_0^1 e^{sQ}(f(s) - f(0))ds,$$

on a

$$Q\int_0^1 e^{sQ}(f(s) - f(0))ds \in (D(Q), X)_{1-\theta,\infty}, \tag{2.27}$$

(Voir [7] , Thérorème 6, l'expression 4), alors à partir de l'hypothèse (2.3) et la remarque 4.

$$\begin{cases} (\overline{Q-H})^{-1}Q\displaystyle\int_0^1 e^{sQ}(f(s) - f(0))ds \in D(Q) \cap D(H), \\ \psi = (Q+H)(\overline{Q-H})^{-1}Q\displaystyle\int_0^1 e^{sQ}(f(s) - f(0))ds \in (D(Q), X)_{1-\theta,\infty}, \end{cases}$$

d'aprés Triebel [[15], pp. 25. 76] on obtient

$$Q^2(Q+H)(\overline{Q-H})^{-1}S_2(\cdot, f) = \frac{1}{2}e^{\cdot Q}\psi \in C^\theta([0,1];X).$$

Donc d'aprés le lemme 2.1 on a

$$Q^2LS_2(\cdot, f) = (I+W)Q^2(Q+H)(\overline{Q-H})^{-1}S_2(\cdot, f) \in C^\theta([0,1];X). \tag{2.28}$$

Alors de (2.21), (2.25), (2.26) et (2.28), on peut écrire

$$u = e^{\cdot Q}\xi_0 \ + e^{(1-\cdot)Q}\xi_1 + Q^{-2}\phi,$$

où

$$\begin{aligned}\phi &= Q^2(S_1(x,f) + S_1(1-x, f(1-\cdot)) + LS_2(x,f) - S_2(1-x, f(1-\cdot)) \\ &\quad -\frac{1}{2}Q^{-2}f(0) - \frac{1}{2}Q^{-2}f(1) + R(x,f,d_0,u_1))\end{aligned}$$

et $\phi \in C^\theta([0,1];X)$, et d'aprés lemme 2.1, on a

$$\begin{aligned}\xi_0 &= (\overline{\Lambda})^{-1}d_0 - H(\overline{\Lambda})^{-1}Q^{-2}f(0) \\ &= (\overline{Q-H})^{-1}d_0 - H(\overline{Q-H})^{-1}Q^{-2}f(0) \\ &\quad +(\overline{Q-H})^{-1}Wd_0 - H(\overline{Q-H})^{-1}WQ^{-2}f(0) \\ &= (\overline{Q-H})^{-1}d_0 + (Q-H)(\overline{Q-H})^{-1}Q^{-2}f(0) - (\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1}f(0) \\ &\quad +(\overline{Q-H})^{-1}Wd_0 - H(\overline{Q-H})^{-1}WQ^{-2}f(0) \\ &= (\overline{Q-H})^{-1}d_0 + Q^{-2}f(0) - (\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1}f(0) \\ &\quad +(\overline{Q-H})^{-1}Wd_0 - H(\overline{Q-H})^{-1}WQ^{-2}f(0),\end{aligned}$$

où $W \in L(X)$ et $R(W) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(Q^k)$. Donc

$$\begin{aligned}u &= e^{\cdot Q}\left[(\overline{Q-H})^{-1}d_0 - (\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1}f(0) + Q^{-2}f(0)\right] \\ &\quad +e^{(1-\cdot)Q}[u_1 + Q^{-2}f(1)] + Q^{-2}\widetilde{\phi},\end{aligned}$$

où

$$\widetilde{\phi} = \phi + Q^2[e^{\cdot Q}((\overline{Q-H})^{-1}Wd_0 - H(\overline{Q-H})^{-1}WQ^{-2}f(0))]$$

et $\widetilde{\phi} \in C^\theta([0,1];X)$. Alors, de (2.23) on peut écrire

$$\begin{aligned}Q^2u &= e^{\cdot Q}[Q\left(Q(\overline{Q-H})^{-1}d_0 - (\overline{Q-H})^{-1}f(0)\right) + f(0)] \\ &\quad +e^{(1-\cdot)Q}[Q^2u_1 + f(1)] + \widetilde{\phi},\end{aligned}$$

d'où $Q^2u \in C([0,1];X)$.

Ainsi $u \in C^2([0,1];X) \cap C([0,1];D(A))$, et puisque u donnée par (2.17) avec y_0, z_1 définies dans (2.19),(2.20), alors u satisfait (2.1).

On a

$$I_1(f) = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)ds, \quad J_0(f) = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(s)ds, \tag{2.29}$$

alors on obtient

$$\begin{aligned}u(0) &= y_0 + e^Q z_1 + J_0(f) \\ &= (\overline{\Lambda})^{-1}d_0 + (Q+H)(\overline{\Lambda})^{-1}(e^Q u_1 - e^Q I_1(f) + J_0(f)) + e^Q u_1 - e^Q I_1(f) \\ &\quad -e^{2Q}(\overline{\Lambda})^{-1}d_0 - e^{2Q}(Q+H)(\overline{\Lambda})^{-1}(e^Q u_1 - e^Q I_1(f) + J_0(f)) + J_0(f) \\ &= [I - e^{2Q}](\overline{\Lambda})^{-1}d_0 + [I + L - e^{2Q}L]e^Q(u_1 - I_1(f)) + [I + L - e^{2Q}L]J_0(f),\end{aligned}$$

et grâce au lemme 2.2, on a

$$u(0) = [I - e^{2Q}](\overline{\Lambda})^{-1}d_0 + 2(\overline{\Lambda})^{-1}Qe^{Q}(u_1 - I_1(f)) + 2(\overline{\Lambda})^{-1}QJ_0(f). \tag{2.30}$$

D'aprés le lemme 2.1 et (2.23) on a

$$(\overline{\Lambda})^{-1}d_0 = (\overline{Q-H})^{-1}(I+W)d_0 \in D(Q) \cap D(H) \subset D(H),$$

et d'aprés (2.27) on peut écrire

$$QJ_0(f) = Q^{-1}\left(Q\int_0^1 e^{sQ}(f(s)-f(0))ds + (e^{Q}-I)f(0)\right) \in D(Q),$$

donc d'aprés (2.7) on a

$$(\overline{Q-H})^{-1}(D(Q)) \subset D(Q) \cap D(H),$$

et on a aussi

$$(I+W)Qe^{Q}(u_1 - I_1(f)) \in D(Q),$$

et donc

$$(\overline{\Lambda})^{-1}Qe^{Q}(u_1 - I_1(f)) \in D(Q) \cap D(H) \;\text{ et }\; (\overline{\Lambda})^{-1}QJ_0(f) \in D(Q) \cap D(H). \tag{2.31}$$

Ainsi $u(0) \in D(H)$. D'aprés (2.17) et (2.30) on obtient

$$\begin{aligned} u'(0) - H\,u(0) &= Qy_0 - Qe^{Q}z_1 - QJ_0(f) - H[I - e^{2Q}](\overline{\Lambda})^{-1}d_0 \\ &\quad -2H(\overline{\Lambda})^{-1}Q^{-1}(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)), \end{aligned}$$

donc en utilisant (2.19) et (2.20), on obtient

$$\begin{aligned} u'(0) - H\,u(0) &= Q(\overline{\Lambda})^{-1}d_0 + Q(Q+H)(\overline{\Lambda})^{-1}(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)) \\ &\quad +Qe^{2Q}(\overline{\Lambda})^{-1}d_0 + Qe^{2Q}(Q+H)(\overline{\Lambda})^{-1}(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)) \\ &\quad -Q(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)) \\ &\quad -H[I - e^{2Q}](\overline{\Lambda})^{-1}d_0 - 2H(\overline{\Lambda})^{-1}Q(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)), \end{aligned}$$

on a $L = (Q+H)(\overline{\Lambda})^{-1}$, alors on obtient

$$\begin{aligned} u'(0) - H\,u(0) &= [Q - H + e^{2Q}(Q+H)](\overline{\Lambda})^{-1}d_0 \\ &\quad +[L + e^{2Q}L - I - 2H(\overline{\Lambda})^{-1}]Q(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)) \\ &= \Lambda(\overline{\Lambda})^{-1}d_0 + (-2Q(\overline{\Lambda})^{-1}Q + 2Q(\overline{\Lambda})^{-1}Q)(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)) \\ &= d_0. \end{aligned}$$

On a d'aprés (2.18) on a

$$\begin{aligned} z_1 &= u_1 - e^{Q}y_0 - I_1 \qquad (2.32) \\ &\Leftrightarrow\; u_1 = z_1 + e^{Q}y_0 + I_1 \qquad (2.33) \end{aligned}$$

et d'aprés (2.17) on obtient

$$u(1) = z_1 + e^{Q}y_0 + I_1,$$

Finalement $u(1) = u_1$ et u est la solution stricte du problème (2.1).

Réciproquement si le problème (2.1) admet une solution stricte u, alors u donnée par (2.21) s'écrit comme suite

$$\begin{aligned} u &= e^{\cdot Q}[(\overline{Q-H})^{-1}d_0 - (\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1}f(0) + Q^{-2}f(0)] \\ &\quad + e^{(1-\cdot)Q}[u_1 + Q^{-2}f(1)] + Q^{-2}\widetilde{\phi}, \end{aligned}$$

avec $\widetilde{\phi} \in C^\theta([0,1];X)$, on a $Qu \in C([0,1];X)$ qui implique que

$$\begin{cases} (\overline{Q-H})^{-1}d_0 - (\overline{Q-H})^{-1}Q^{-1}f(0) + Q^{-2}f(0) \in D(Q) \\ u_1 + Q^{-2}f(1) \in D(Q). \end{cases}$$

Alors $(\overline{Q-H})^{-1}d_0$, $u_1 \in D(Q)$ et

$$\begin{aligned} Qu &= e^{\cdot Q}[Q(\overline{Q-H})^{-1}(d_0 - Q^{-1}f(0)) + Q^{-1}f(0)] \\ &\quad + e^{(1-\cdot)Q}[Qu_1 + Q^{-1}f(1)] + Q^{-1}\tilde{\phi}, \end{aligned}$$

On a $Q^2u \in C([0,1];X)$, alors

$$Q(\overline{Q-H})^{-1}(d_0 - Q^{-1}f(0)) + Q^{-1}f(0) \in D(Q), \quad u_1 \in D(Q^2),$$

et

$$Q^2(\overline{Q-H})^{-1}(d_0 - Q^{-1}f(0)) + f(0) \in \overline{D(Q)}, \quad Q^2u + f(1) \in \overline{D(Q)}.$$

Notons que u est aussi donnée par (2.17), par conséquant d'aprés (2.30) on obtient

$$[I - e^{2Q}](\overline{\Lambda})^{-1}d_0 = u(0) - 2(\overline{\Lambda})^{-1}Qe^{Q}(u_1 - I_1(f) - 2(\overline{\Lambda})^{-1}QJ_0(f),$$

on a $u(0) \in D(H)$ et

$$(\overline{\Lambda})^{-1}Qe^{Q}(u_1 - I_1(f)) \in D(H) \text{ et } (\overline{\Lambda})^{-1}QJ_0(f) \in D(H),$$

ainsi en utilisant (2.4), $(\overline{\Lambda})^{-1}d_0 \in D(H)$. D'aprés le lemme 2.1 on obtient

$$(\overline{Q-H})^{-1}d_0 = (\overline{\Lambda})^{-1}d_0 - (\overline{Q-H})^{-1}Wd_0 \in D(H).$$

Finalement (2.23) est satisfaite.

Pour *ii)* puisque $D(Q) \subset (D(Q),X)_{1-\theta,\infty}$, alors il suffit de remplaçer la condition (2.23) par (2.24) dans la preuve précédente. ■

Notons que $Q = -(-A)^{\frac{1}{2}}$, alors dans le thérorème 2.1, on a

$$\overline{D(Q)} = \overline{D(A)} \ \ et \ \ (D(Q),X)_{1-\theta,\infty} = (D(A),X)_{1-\frac{\theta}{2},\infty}.$$

On va donner des conditions suffisantes

Corollary 2.1 *Supposons (2.2)∼(2.5) et soit* $f \in C^\theta([0,1];X)$ *avec* $\theta \in]0,1[$.

Si $u_1 \in D(Q^2)$, $d_0 \in D(Q)$ et Qd_0, $f(0)$, $Q^2u_1+ f(1) \in (D(Q),X)_{1-\theta,\infty}$, alors le problème (2.1) admet une unique solution stricte u satisfisant la propriété de la régularité maximale u'', $Q^2u \in C^\theta([0,1)];X)$.

Chapitre 3

Etude du problème avec un paramètre spectral

3.1 Position du problème

Considérons un certain nombre strictement positif ω et le problème

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) - \omega u(x) = f(x); \quad x \in (0,1), \\ u'(0) - Hu(0) = d_0, \\ u(1) = u_1. \end{cases} \tag{3.1}$$

On fixe $\omega_0 \geq 0$ et on pose pour $\omega \geq \omega_0$

$$A_\omega = A - \omega I,$$

alors le problème (3.1) est le problème (2.1) avec A remplaçé par A_ω.

On va rappeller les définitions suivantes. Posons pour tout $\alpha \in]0,\pi[$

$$S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \diagdown \{0\} \diagup |\arg(z)| < \alpha\} \text{ et } \Sigma_\alpha = \mathbb{C} \diagdown \overline{S_\alpha},$$

alors $P \in Sect(\alpha)$ si P est un opérateur linéaire fermé dans X, $\sigma(P) \subset \overline{S_\alpha}$ et pour tout $\alpha' \in]\alpha,\pi[$

$$M(P,\alpha') := \sup_{\lambda \in \Sigma_{\alpha'}} \|\lambda(P - \lambda I)^{-1}\|_{L(X)} < +\infty.$$

3.2 Hypothèses

On suppose que

$$0 \in \rho(A_{\omega_0}) \quad \text{et} \quad -A_{\omega_0} \in Sect(\alpha_0) \quad \text{pour certain } \alpha_0 \in [\pi/2,\pi[, \tag{3.2}$$

$$0 \in \rho(H) \quad \text{et} \quad H \in Sect(\beta) \quad \text{pour certain } \beta \in [\pi/2,\pi[, \tag{3.3}$$

$$\frac{\alpha_0}{2} + \beta \in]0,\pi[\text{ et } \overline{D(\sqrt{-A_{\omega_0}}) + D(H)} = X, \tag{3.4}$$

et

$$(A-\omega_0 I)^{-1}H^{-1} = H^{-1}(A-\omega_0 I)^{-1}. \tag{3.5}$$

Remarque 3.1 *Soit $\omega \geq \omega_0$. Sous (3.2) on a aussi $\sqrt{-A_\omega} \in Sect(\alpha_0/2)$ et pour tout $\alpha' \in$ $]\alpha_0/2, \pi[$*

$$\begin{aligned} M(\sqrt{-A_\omega}, \alpha') &\leq M(-A_\omega) + M(-A_\omega, \alpha_0')C_0 \\ &\leq M(-A_{\omega_0}) + M(-A_{\omega_0}, \alpha_0')C_0, \end{aligned}$$

où

$$M(-A_\omega) := \sup_{\lambda \leq 0} \|\lambda(-A_\omega - \lambda I)^{-1}\|_{L(X)}, \tag{3.6}$$

$\alpha_0' = (\alpha' + \alpha_0)/2$ et C_0 est une constante positive dépend uniquement de α_0' [[16], Proposition 3.1.2].
Finalement, puisque $Q_\omega = -\sqrt{-A_\omega}$, on obtient pour $\omega \geq \omega_0$, $\alpha' \in]\alpha_0/2, \pi[$ et $z \in -\Sigma_{\alpha'}$

$$\| \, (Q_\omega - zI)^{-1} \, \|_{L(X)} \leq \frac{K_{\alpha'}}{|z|}, \tag{3.7}$$

où $K_{\alpha'} = M(-A_{\omega_0}) + M(-A_{\omega_0}, \alpha_0')C_0$.

3.3 Lemmes techniques

Proposition 3.1 *Supposons (3.2)$\sim$(3.5). Alors*

i) Pour tout $\omega \geq \omega_0$, $Q_\omega - H$ est fermable, $0 \in \rho(\overline{Q_\omega - H})$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} (\overline{Q_\omega - H})^{-1}((D(Q), X)_{1-\theta,\infty}) \subset D(Q) \cap D(H), \\ Q(\overline{Q_\omega - H})^{-1}((D(Q), X)_{1-\theta,\infty}) \subset (D(Q), X)_{1-\theta,\infty}. \end{array} \right.$$

ii) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\omega \geq \omega_0$

$$\| \, (\overline{Q_\omega - H})^{-1} \, \|_{L(X)} \leq C. \tag{3.8}$$

Preuve. *i*) Les suppositions (3.2)$\sim$(3.5) permettent nous d'appliquer la théorie des sommes d'opérateurs de Da Prato-Grisvard et ainsi on obtient *i*) [[9]. Théorème 3.7, p 324 et Théorème 3.11 p 328].

ii) De (3.11) dans [9], on a

$$(\overline{Q_\omega - H})^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (Q_\omega - zI)^{-1}(H - zI)^{-1}dz,$$

où Γ est une courbe sectorielle dans $\rho(Q_\omega) \cap \rho(H)$, sépare $\sigma(Q_\omega)$ et $\sigma(H)$. On peut prendre $\Gamma = \partial\Sigma_{\alpha'}$ avec $\alpha' \in]\beta, \pi - \alpha_0/2[$.

Prenons en considération (3.3) et (3.7) alors on déduit (3.8) où $C > 0$ ne dépend pas de ω.

On suppose pour $\omega \geq \omega_0$

$$\Pi_\omega = I + 2(I - e^{2Q_\omega})^{-1}Q_\omega e^{2Q_\omega}(\overline{Q_\omega - H})^{-1}.$$

■

Lemme 3.1 *Supposons (3.2)∼(3.5). Alors il existe $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$,*

$0 \in \rho(\Pi_\omega)$.

Preuve. De [[17], Lemme p. 103], il existe des constantes K, $k > 0$(ne dépendent pas de ω) telles que

$$\| Q_\omega e^{2Q_\omega} \|_{L(X)} \leq K e^{-2k\sqrt{\omega}} \quad \text{et} \quad \| e^{2Q_\omega} \|_{L(X)} \leq K e^{-2k\sqrt{\omega}}, \tag{3.9}$$

et alors, en utilisant (3.8), on peut trouver $\omega^* \geq \omega_0$ tel que pour tout $\omega \geq \omega^*$

$$\| 2(I - e^{2Q_\omega})^{-1} Q_\omega e^{2Q_\omega} (\overline{Q_\omega - H})^{-1} \|_{L(X)} < 1,$$

qui implique $0 \in \rho(\Pi_\omega)$. ■

3.4 La régularité de la solution

On obtient un résultat analogue à celui du chapitre précédent

Theorème 3.1 *Supposons (3.2)∼(3.5). Soit $f \in C^\theta([0,1]; X)$ avec $\theta \in]0,1[$ et $\omega \geq \omega^*$. Alors*

i) Le problème (3.1) admet une unique solution stricte u si et seulement si

$$\begin{cases} u_1 \in D(A), (\overline{Q_\omega - H})^{-1} d_0 \in D(Q) \cap D(H), \\ Q_\omega (\overline{Q_\omega - H})^{-1} (d_0 - Q_\omega^{-1} f(0)) \in D(Q), \\ Q_\omega^2 (\overline{Q_\omega - H})^{-1} (d_0 - Q_\omega^{-1} f(0)) + f(0) \in \overline{D(Q)}, \\ A_\omega u_1 - f(1) \in \overline{D(Q)}. \end{cases}$$

ii) Le problème (3.1) admet une unique solution stricte u satisfisant la propriété de la régularité maximale $u'', Au \in C^\theta([0,1)]; X)$ si et seulement si

$$\begin{cases} u_1 \in D(A), (\overline{Q_\omega - H})^{-1} d_0 \in D(Q) \cap D(H), \\ Q_\omega (\overline{Q_\omega - H})^{-1} (d_0 - Q_\omega^{-1} f(0)) \in D(Q), \\ Q_\omega^2 (\overline{Q_\omega - H})^{-1} (d_0 - Q_\omega^{-1} f(0)) + f(0) \in (D(A), X)_{1-\frac{\theta}{2},\infty}, \\ A_\omega u_1 - f(1) \in (D(A), X)_{1-\frac{\theta}{2},\infty}. \end{cases}$$

Chapitre 4

Les exemples

Considérons le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{ll} -\frac{1}{b_\delta} div(b_\delta \nabla u^\delta) = g^\delta & \text{dans } \Omega^\delta, \\ u^\delta = 0 & \text{sur } \partial\Omega^\delta \backslash \Gamma^\delta, \\ \partial_\xi u^\delta = 0 & \text{sur } \Gamma^\delta, \end{array}\right. \tag{4.1}$$

où δ est un petit paramètre donné dans $]0,1]$, Ω^δ est le cylindre $]-\delta,1[\times G$ de $\mathbb{R}^n$ dans les variables (ξ,η), G est un domaine ouvert régulier de $\mathbb{R}^{n-1}$, $\Gamma^\delta = \{-\delta\} \times G$ et b_δ est la fonction définie par

$$b_\delta(\xi) = \left\{\begin{array}{ll} p_+ & \text{si } \xi \in]0,1[, \\ p_- & \text{si } \xi \in]-\delta, 0[, \end{array}\right.$$

où p_+, p_- sont les coefficients de conductivité positive des deux corps $]0,1[\times G$ et $]-\delta,0[\times G$ dépendent peut-être de δ. Ce problème modèle, par exemple c'est la propagation de la chaleur entre le corps fixé $\Omega_+ =]0,1[\times G$, et la couche mince $\Omega_-^\delta =]-\delta,0[\times G$.

Si on note par u_+^δ et g_+ les restrictions de u^δ et g^δ à Ω_+ respectivement et par u_-^δ et g_-^δ les restrictions de u^δ et g^δ à Ω_-^δ respectivement. Ce problème est équivalant au problème de transmission suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{(eq)} & \Delta u_-^\delta = -g_-^\delta \text{ dans } \Omega_-^\delta \text{ et } \Delta u_+^\delta = -g_+ \text{ dans } \Omega_+, \\ \text{(bc)} & u_-^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega_-^\delta \backslash \Gamma^0 \cup \Gamma^\delta, \quad u_+^\delta = 0 \text{ sur } \partial\Omega_+ \backslash \Gamma^0 \\ & \qquad \text{et } \partial_\xi\, u_-^\delta = 0 \text{ sur } \Gamma^\delta, \\ \text{(tc)} & u_-^\delta = u_+^\delta \text{ sur } \Gamma^0 \text{ et } p_- \partial_\xi\, u_-^\delta = p_+ \partial_\xi\, u_+^\delta \text{ sur } \Gamma^0, \end{array}\right. \tag{4.2}$$

où $\Gamma^0 = \{0\} \times G$ et $\partial\Omega_+$ est le bord de Ω_+.

Les deux dernières conditions de transmission signifient que le saut de u^δ et $b_\delta(\cdot)\partial_\xi u^\delta$ à travers Γ^0 est égale à 0.

Posons, par exemple, $X = L^p(G)$, $1 < p < \infty$ et supposons les hypothèses suivantes sur g^δ

$$\left\{\begin{array}{l} g_-^\delta = g^\delta \,|_{[-\delta,0]} \in C^\theta([-\delta,0];X), \\ g_+ = g^\delta \,|_{[0,1]} \in C^\theta([0,1];X), \quad (0<\theta<1), \end{array}\right.$$

alors notre problème (4.1) peut s'écrire dans le problème de transmission abstrait à valeur limite suivant :

$$\begin{cases} (u_+^\delta)''(\xi) + Au_+^\delta(\xi) = -g_+(\xi) & \text{dans }]0,1[, \\ (u_-^\delta)''(\xi) + Au_-^\delta(\xi) = -g_-(\xi) & \text{dans }]-\delta,0[, \\ u_+^\delta(1) = 0, \\ (u_-^\delta)'(-\delta) = 0, \\ u_-^\delta(0^-) = u_+^\delta(0^+), \\ p_-(u_-^\delta)'(0^-) = p_+(u_+^\delta)'(0^+), \end{cases} \tag{4.3}$$

où A est l'opérateur linéair fermé défini par

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,p}(G) \cap W_0^{1,p}(G), \\ (A\varphi)(\eta) = \Delta_\eta \varphi(\eta). \end{cases}$$

On remarque que, à cause de la couche mince, la résolution numérique du problème (4.2) ou (4.3) est trés difficile à calculer. Mais, en utilisant la notion d'opérateurs impedances, on peut montrer que les valeurs limites et le problème de transmission (4.3) posés dans $[-\delta, 1]$ peut s'écrire comme le problème impedance à valeur limite suivant posé dans l'interval fixé $[0,1]$:

$$\begin{cases} (u_+^\delta)''(\xi) + Au_+^\delta(\xi) = -g_+(\xi) & \text{dans } [0,1], \\ (u_+^\delta)'(0) = T_\delta^1(u_+^\delta(0)) + T_\delta^2(g_-^\delta), \\ u_+^\delta(1) = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

où

$$\begin{cases} T_\delta^1(u_+^\delta(0)) = -\frac{p_-}{p_+}[I + e^{2\delta Q}]^{-1}[I - e^{2\delta Q}]Qu_+^\delta(0), \\ T_\delta^2(g_-^\delta) = -\frac{p_-}{p_+}[I + e^{2\delta Q}]^{-1} \int_0^\delta [e^{(2\delta - t)Q} + e^{tQ}]g_-^\delta(-t)dt, \end{cases}$$

et $Q = -\sqrt{-A}$.

Une fois que u_+^δ est connue, on résout le problème de Dirichlet-Neumann suivant

$$\begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + Au_-^\delta(x) = -g_-^\delta(x) & \text{dans } [-\delta, 0], \\ u_-^\delta(0) = u_+^\delta(0), \\ (u_-^\delta)'(-\delta) = 0, \end{cases}$$

voir [18] où une analyse complete est donnée pour le problème (4.3) pour tout $\delta > 0$.

On peut aussi résoudre (4.4) pour tout $\delta > 0$ par notre approche développée dans le cas Höldérien continu. Au fait, on considère par exemple la cas $\frac{p_-}{p_+} = \delta$.

Notons que le problème (4.4) est exactement (2.1) avec

$$f = -g_+, \quad d_0 = T_\delta^2(g_-^\delta), \quad u_1 = 0, \quad H = T_\delta^1.$$

Il faut montrer que (2.2), (2.4), (2.5) et (2.6) sont satisfaites.

i) L'hypothèse (2.2) est bien définie.

ii) Pour (2.4), les opérateurs $I + e^{2\delta Q}$ et $I - e^{2\delta Q}$ ont des inverses bornés [11] ce qui implique que l'opérateur

$$H = T_\delta^1 = -\delta(I + e^{2\delta Q})^{-1}(I - e^{2\delta Q})Q$$

de domaine $D(H) = D(Q)$ est inversible et borné et

$$H^{-1} = -\frac{1}{\delta}Q^{-1}(I - e^{2\delta Q})^{-1}(I + e^{2\delta Q}).$$

Il est clair que H^{-1} commute avec $A^{-1} = -Q^{-2}$.

iii)

$$\begin{aligned} Q - H &= \left[\delta(I+e^{2\delta Q})^{-1}(I-e^{2\delta Q}) + I\right] Q \\ &= (I+e^{2\delta Q})^{-1}[(\delta+1)I + (1-\delta)e^{2\delta Q}]Q \\ &= (1+\delta)(I+e^{2\delta Q})^{-1}\left(I + \frac{1-\delta}{1+\delta}e^{2\delta Q}\right)Q, \end{aligned}$$

puisque le coefficient $(1-\delta)/(1+\delta) \in]0,1[$, on peut calculer l'inverse de l'opérateur

$$I + \frac{1-\delta}{1+\delta}e^{2\delta Q}$$

exactement comme dans [11], alors $Q - H$ est fermé et

$$0 \in \rho\left(\overline{Q-H}\right) = \rho(Q-H)$$

on a

$$(\overline{Q-H})^{-1} = \frac{1}{(1+\delta)}Q^{-1}\left(I + \frac{1-\delta}{1+\delta}e^{2\delta Q}\right)^{-1}(I+e^{2\delta Q}),$$

alors on déduit que $(\overline{Q-H})^{-1}$commute avec Q^{-1}.

On a aussi

$$(Q-H)(\overline{Q-H})^{-1} = I.$$

Pour tout sous espace X_0 de X, il est clair que

$$(\overline{Q-H})^{-1}(X_0) \subset D(Q) = D(H),$$

et ainsi

$$(\overline{Q-H})^{-1}((D(Q),X)_{1-\theta,+\infty}) \subset D(Q) \cap D(H).$$

Finalement

$$\begin{aligned} Q(\overline{Q-H})^{-1} &= \frac{1}{(1+\delta)}\left(I + \frac{1-\delta}{1+\delta}e^{2\delta Q}\right)^{-1}(I+e^{2\delta Q}) \\ &= \frac{1}{(1+\delta)}\left(I + \frac{1-\delta}{1+\delta}e^{2\delta Q}\right)^{-1} + \frac{1}{(1+\delta)}e^{2\delta Q}\left(I + \frac{1-\delta}{1+\delta}e^{2\delta Q}\right)^{-1}; \end{aligned}$$

alors

$$\left(I + \frac{1-\delta}{1+\delta}e^{2\delta Q}\right)^{-1} = I - \frac{1-\delta}{1+\delta}e^{2\delta Q}\left(I + \frac{1-\delta}{1+\delta}e^{2\delta Q}\right)^{-1}$$

et en utilisant le fait que, pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

$$e^{2\delta Q}(X_0) \subset D(Q^k) \subset (D(Q),X)_{1-\theta,\infty},$$

on déduit que

$$Q(\overline{Q-H})^{-1}((D(Q),X)_{1-\theta,+\infty}) \subset (D(Q),X)_{1-\theta,+\infty}.$$

Par conséquant l'hypothèse (2.6) est complètement prouvée.

iv) Il n'est pas facile de vérifier l'hypothèse (2.5) , on va donner une autre méthode pour la preuve. On a

$$\begin{aligned}\Pi &= I + 2(I - e^{2Q})^{-1} Q e^{2Q} (\overline{Q - H})^{-1} \\ &= I + \frac{2}{1+\delta}(I - e^{2Q})^{-1}\left(I + \frac{1-\delta}{1+\delta} e^{2\delta Q}\right)^{-1} e^{2Q}(I + e^{2\delta Q}).\end{aligned}$$

Soit $\theta \in]0, \pi[$ et rappelons la notation
$H^\infty(S_\theta) = \{f : f$ est une fonction holomorphe et bornée sur $S_\theta\}$,
où $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}\diagdown\{0\} :| \arg z |< \theta\}$.
Choisissons $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\sigma(-Q) \subset S_\theta\diagdown\{0\}$ et considérons $f \in H^\infty(S_\theta\diagdown\{0\})$ définie par

$$f(z) = 1 + \frac{2}{1+\delta} \frac{e^{-2z}(I + e^{-2\delta z})}{(I - e^{-2\delta z})(I + \frac{1-\delta}{1+\delta} e^{-2\delta z})}.$$

Notons que $1/f \in H^\infty(S_\theta\diagdown\{0\})$, et puisque $-Q$ est sectoriel et inversible borné, on peut déduire que $\Pi = f(-Q)$ est inversible avec

$$\Pi^{-1} = [f(-Q)]^{-1} = (1/f)(-Q) \in L(X),$$

voir, par exemple [16], sous section 2.5.1, p. 45, et la remarque 2.5.1 et fig. 6, p. 46 ; voir aussi [19].

On donne au-dessous la nouvelle méthode pour résoudre le problème limité du (4.4) (lorsque $\delta \to 0$). Ce qui implique l'étude du comportement de T_δ^1 et T_δ^2 lorsque $\delta \to 0$.

On va développer deux approches dans les deux exemples suivants.

Exemple 4.1 *Supposons que p_+ ne dépend pas de δ et*

$$\frac{p_-}{p_+} = \frac{q}{\delta}$$

avec q un nombre positif fixé fini. On a pour tout complexe fixé z l'asymptotique suivant lorsque $\delta \to 0$

$$\frac{I - e^{2\delta z}}{I + e^{2\delta z}} = -\delta z + \delta^2 R_{1\delta}(z),$$

et ce suggère l'approximation de $(I + e^{2\delta Q})^{-1}(I - e^{2\delta Q})$ par $-\delta Q$. Au fait, posons $\xi \in D(Q)$, alors il existe $C > 0$ dépend de δ telle que

$$\|(I + e^{2\delta Q})^{-1}\|_{L(X)} \leq C,$$

voir lemme 5.2., p. 1883 dans [18], alors de l'estimation

$$\begin{aligned}\left\|\frac{(I + e^{2\delta Q})^{-1}(I - e^{2\delta Q})}{\delta}\xi + Q\xi\right\| &\leq \left\|(I + e^{2\delta Q})^{-1}\right\|_{L(X)} \left\|\frac{(I - e^{2\delta Q})}{\delta}\xi + (I + e^{2\delta Q})Q\xi\right\| \\ &\leq C\left\|\frac{(I - e^{2\delta Q})}{\delta}\xi + (I + e^{2\delta Q})Q\xi\right\|.\end{aligned}$$

et le fait que

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{(I - e^{2\delta Q})}{\delta}\xi + (I + e^{2\delta Q})Q\xi\right) = -2Q\xi + 2Q\xi = 0;$$

l'opérateur

$$\frac{p_-}{p_+}(I+e^{2\delta Q})^{-1}(I-e^{-2\delta Q})=\frac{q}{\delta}(I+e^{2\delta Q})^{-1}(I-e^{-2\delta Q}).$$

peut être approximer par $-qQ$ et ainsi T_δ^1 est approximé par $T_{*\delta}^1=qQ^2$.

Pour $T_\delta^2(g_-^\delta)$, on suppose que

$$\begin{cases} g_-^\delta(0)\in\overline{D(Q)} \text{ pour tout } \delta>0, & \lim\limits_{\delta\to 0}(\delta^\theta\|g_-^\delta\|_{C^\theta([-\delta,0];X)})=0,\\ \exists L\in X:\ \lim\limits_{\delta\to 0}\left\|g_-^\delta(0)-L\right\|_X=0. \end{cases}$$

On a

$$\frac{1}{\delta}\int_0^\delta e^{tQ}g_-^\delta(-t)dt=\frac{1}{\delta}\int_0^\delta(e^{tQ}g_-^\delta(-t)-g_-^\delta(-t))dt+\frac{1}{\delta}\int_0^\delta g_-^\delta(-t)dt,$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\delta}\int_0^\delta(e^{tQ}g_-^\delta(-t)-g_-^\delta(-t))dt\\ =\ &\frac{1}{\delta}\int_0^\delta e^{tQ}(g_-^\delta(-t)-g_-^\delta(0))dt+\frac{1}{\delta}\int_0^\delta(e^{tQ}g_-^\delta(0)-g_-^\delta(0))dt\\ &+\frac{1}{\delta}\int_0^\delta(g_-^\delta(0)-g_-^\delta(-t))dt\\ =\ &(a)+(b)+(c). \end{aligned}$$

Il est clair que (a) et (c) tend vers 0 lorsque $\delta\to 0$ car

$$\left\|\frac{1}{\delta}\int_0^\delta e^{tQ}(g_-^\delta(-t)-g_-^\delta(0))dt\right\|\le C\delta^\theta\left\|g_-^\delta\right\|_{C^\theta([-\delta,0];X)}.$$

Pour (b), on a

$$\begin{aligned} (b)\ &=\ \frac{(e^{\delta Q}-I)}{\delta}Q^{-1}g_-^\delta(0)-g_-^\delta(0)\\ &=\ \frac{(e^{\delta Q}-I)}{\delta}Q^{-1}[g_-^\delta(0)-L]+\frac{(e^{\delta Q}-I)}{\delta}Q^{-1}L-L+L-g_-^\delta(0), \end{aligned}$$

et

$$\frac{(e^{\delta Q}-I)}{\delta}Q^{-1}[g_-^\delta(0)-L]=\frac{1}{\delta}\int_0^\delta e^{tQ}[g_-^\delta(0)-L]dt,$$

pour ces calculs au-dessus, on a utilisé les propriétés montrée dans ([20], Proposition 1.2, pp. 20-21).

On a

$$\left\|\frac{(e^{\delta Q}-I)}{\delta}Q^{-1}[g_-^\delta(0)-L]\right\|_X\le C\left\|g_-^\delta(0)-L\right\|_X,$$

ce qui implique que

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_0^\delta e^{tQ}g_-^\delta(-t)dt=L;$$

par la même méthode, on obtient

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_0^\delta e^{(2\delta-t)Q}g_-^\delta(-t)dt = L.$$

Par conséquant on obtient l'approximation

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{q}{\delta}T_\delta^2(g_-^\delta) = -qL.$$

Par conséquant à la place du problème (4.4), on résout le problème approximatif

$$\begin{cases} (u_+^\delta)''(x) + Au_+^\delta(x) = -g_+(x) \quad \text{dans }]0,1[, \\ (u_+^\delta)'(0) - H_\delta^1(u_+^\delta(0)) = -qL, \\ u_+^\delta(1) = 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

avec $H_\delta^1 = qQ^2$.

Exemple 4.2 *Supposons que*

$$p_+ \textit{ et } p_- \textit{ ne dépendons pas de } \delta. \tag{4.6}$$

On sait que

$$\lim_{\delta\to 0}(I+e^{2\delta Q})^{-1}(I-e^{2\delta Q})Q\xi = 0,$$

si $\xi \in D(Q)$. Dans ce cas l'approximation par 0 ne prend pas en considération aucun résultat de la cosse mince. Alors on cherche un approximation d'ordre supérieur. On a l'asymptotique suivant lorsque $\delta \to 0$ pour tout complexe fixé z :

$$\frac{I-e^{2\delta z}}{I+e^{2\delta z}} = -\frac{\delta z}{1+(\delta^2/2)z^2} + \delta^2 R_\delta^2(z),$$

ce qui suggère l'approximation de

$$T_\delta^1 = -\frac{p_-}{p_+}(I+e^{2\delta Q})^{-1}(I-e^{2\delta Q})Q,$$

par

$$T_{*\delta}^1 = \frac{p_-}{p_+}\delta Q\left(I+\frac{1}{2}\delta^2 Q^2\right)^{-1}Q = -\frac{p_-}{p_+}\delta Q\frac{2}{\delta^2}\left(A-\frac{2}{\delta^2}I\right)^{-1}Q;$$

la preuve est semblable à celle de l'exemple 4.1. Ici on peut aussi montrer que $T_\delta^2(g_-^\delta)$ est approximé par

$$T_{*\delta}^1(g_-^\delta) = -\delta\frac{p_-}{p_+}\left(I+\frac{\delta^2}{2}Q^2\right)^{-1}g_-^\delta(0) = \delta\frac{p_-}{p_+}\left(\frac{\delta^2}{2}A-I\right)^{-1}g_-^\delta(0);$$

alors, à la place du problème (4.4), on résout le problème approximatif

$$\begin{cases} (u_+^\delta)''(x) + Au_+^\delta(x) = -g_+(x) \quad \textit{dans } [0,1], \\ (u_+^\delta)'(0) - H_\delta^2(u_+^\delta(0)) = \delta\frac{p_-}{p_+}\left(\frac{\delta^2}{2}A-I\right)^{-1}g_-^\delta(0) \\ u_+^\delta(1) = 0, \end{cases} \tag{4.7}$$

avec $H_\delta^2 = -\frac{p_-}{p_+}\delta Q\frac{2}{\delta^2}\left(A-\frac{2}{\delta^2}I\right)^{-1}Q.$

Bibliographie

[1] **A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe, et A. Yagi**, complete abstract differential equations of elliptic type in U M D spaces. Funkc. Ekv. 49 (2006), pp. 193-214.

[2] **A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe, et A. Yagi**, A simplified approach in the study of elliptic differential equations in U M D spaces and new applications, Funkc. Ekv. 51 (2008), pp. 165-187.

[3] **M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, et A. Medeghri**, Sturm-liouville problems for an abstract differential equations of elliptic type in U M D spaces, Differ. Integral. Eqns 21(9-10) (2008), pp. 981-1000.

[4] **M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, et A. Medeghri**, Complete abstract differential equations of elliptic type with general Robin boundary conditions in U M D spaces, DCDS-S 4(3) (2011), pp. 1-16.

[5] **A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe, et A. Yagi**, On the solvability and maximal regularity of complete abstract differential equations of elliptic type, Funkc. Ekv. 47 (2004), pp. 423-452.

[6] **A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe, et A. Yagi**, Etude unifiée de problèmes elliptiques dans le cadre Höldérien, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005), pp. 485-490.

[7] **A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe, et A. Yagi**, Necessary and sufficient conditions in the study of maximal regularity elliptic differential equations in Hölder spaces, Discrete Contin. Dyn. Syst. 22 (2008), pp. 973-987.

[8] **A.V. Balakrishnan**, Franctional powers of closed operators and the semigroups generated by them, Pac. J. Math. 10 (1960), pp. 419-437.

[9] **G. Da Prato et P. Grisvard**, Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles, J. Math. Pures Appl. Ser. IX 54 (1975), pp. 305-387.

[10] **C. Martinez et M. Sanz**, The theory of Fractional Powers of Operators, North Holland Mathematics Studies, Vol. 187, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[11] **A. Lunardi**, Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Birkhäuser, Basel, 1995.

[12] **T. Kato**, Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[13] **A. Pazy**, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, Tokyo, 1983.

[14] **S.G. Krein**, Linear Diffirential Equations in Banach Spaces, Nauka, Moscou, 1967.

[15] **H. Triebel**, Interpolation Theory, Function Spaces, Diffirential operators, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[16] **M. Haase**, The Functional Calculus for Sectorial Operators Theory : Advances and Applications, Vol. 169, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2006.

[17] **G. Dore et S. Yakubov**, Semigroups estimates and noncoercive boundary value problems, Semigroups Forum 60 (2000), pp. 93-121.

[18] **G. Dore, A. Favini, R. Labbas, et K. Lemrabet**, An abstract transmission problem in a thin layer, I : Sharp estimates, J. Funct. Anal. 261 (2011), pp. 1865-1922.

[19] **G. Dore et A. venni**, H^∞ functional calculus for sectorial and bisectorial operators, Stud. Math. 166 (2005), pp. 221-241.

[20] **E. Sinestrari**, On the abstract cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions, J. Math. Anal. Appl. 66 (1985), pp. 16-66.

[21] **P. Grisvard**, Spazi di trace e applicazioni, Rendiconti di Matematica, vol. 5, Serie VI, 1972.

[22] **J.L. Lions**, Théorème de tracce et d'interpolation I et II. Annali S.N.S.di pisa, 13, (1959), 389-403 et 14, (1960), 317-331.