Mémoire

Présenté à

L'université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Par

KAIDI Mohammed Lamine

Pour obtenir le diplôme de
Master en Mathématiques.
Option : Analyse Fonctionnelle

Résolution des équations paraboliques dans des domaines coniques non-symétriques

Soutenue

Devant le jury :

Président	**Prof.**
Examinateur	**Prof.**
Examinateur	
Encadreur	

Table des matières

INTRODUCTION

On s'intéresse dans ce travail, à l'équation $\partial_t u - \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u = f$ avec les conditions aux limites dans un domaine conique non-symétrique. Q ouvert de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$Q = \left\{ (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \Omega_t, 0 < t < T \right\}.$$

où T est un nombre positif fini et pour un t fixé dans l'intervalle $]0, T[$, Ω_t est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\Omega_t = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \frac{x_1^2}{\varphi^2(t)} + \frac{x_2^2}{h^2(t)\,\varphi^2(t)} < 1 \right\}.$$

Ici, φ est une fonction à valeurs réelles continue Lipschitzienne définie sur $[0, T]$, telle que

$$\varphi(0) = 0, \varphi(t) > 0$$

pour chaque $t \in [0, T]$, h est une fonction à valeurs réelles continue Lipschitzienne définie sur $[0, T]$, telle que

$$0 < \delta \leq h(t) \leq \beta \tag{1}$$

pour chaque $t \in [0, T]$,où δ et β sonts des constantes positives.

Dans Q on considère le problème avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u &= f \in L^2(Q), \\ u\,|_{\partial Q - \Gamma_t} &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

où $L^2(Q)$ est l'espace de Lebesgue sur $Q, \partial Q$ est la frontière de Q et Γ_t est la partie de la frontière de Q où $t = T$.

Dans ce mémoire on fait la synthèse du travail de Arezki KHELOUFI : "[Resolution of parabolic equation in non-symmetric conical domains]", [Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2012 (2012), No. 116, pp.1-14].

La difficulté liée à ce genre de problèmes vient d'une situation singulière pour les problèmes d'évolution ; plus précisement φ s'annule pour $t = 0$, ce qui empêche le domaine Q d'être transformé en un domaine régulier sans l'apparition de termes dégénérés dans l'équation parabolique, voir par exemple Sadallah[12].

Afin de surmonter cette difficulté, on pose une condition suffisante pour la fonction φ :

$$\varphi'(t)\varphi(t) \to 0 \text{ quand } t \to 0 \tag{3}$$

et on obtient des résultats d'existence et de régularité pour le problème(2).On utilise la méthode de décomposition de domaine pour montrer que le problème (2) a une solution avec la régularité optimale, c-à-d a une solution u appartenant à l'espace anisotrope de Sobolev

$$H_0^{1,2}(Q) := \left\{ u \in H^{1,2}(Q) : u\,|_{\partial Q - \Gamma_t} = 0 \right\}.$$

avec

$$H^{1,2}(Q) = \left\{ u \in L^2(Q) : \partial_t u, \partial_{x_1}^j u, \partial_{x_2}^j u, \partial_{x_1}\partial_{x_2} u \in L^2(Q), j = 1, 2 \right\}.$$

Dans Sadallah[13] le même problème à été étudié dans le cas d'un domaine conique symétrique, c-à-d, dans le cas où $h = 1$. D'autres références sur l'analyse des problèmes paraboliques dans des domaines non-cylindrique sont : Alkhutov[1,2], Deatyarev[4], Labbas, Medeghri et Sadallah[8,9], Sadallah[12]. Il y a beaucoup d'autres travaux au sujet des problèmes aux limites dans des domaines non-réguliers (voir, par exemple Grisvard[6] et les références citees dans ce travail).

Dans le chapitre 1, on donne des rappels sur les espaces de sobolev et les formules de Green.

Au chapitre 2 on montre un résultat d'unicité pour le problème(2), et on démontre quelques lemmes techniques cela permettra de prouver une estimation uniforme (dans un sens qui sera défini plus tard).

Au chapitre 3 on montre que le problème (2) admet une solution (unique) dans le cas d'un domaine qui peut être transformé en un cylindre.

Au chapitre 4, pour T assez petit, on montre que les précédents résultats restent vrais dans le cas d'un domaine conique avec la condition mentionnée ci-dessus sur les fonctions φ et h. La méthode utilisée ici est basée sur l'approximation du domaine conique par une suite de sous domaines $(Q_n)_n$ qui peuvent etre transformés en domaines réguliers (cylindres) . On établie une estimation uniforme du type

$$\|u_n\|_{H^{1,2}(Q_n)} \leq k \|f\|_{L^2(Q)} ,$$

où u_n est la solution du problème (2) en Q_n et K une constante indépendante de n.

Finalement, dans le dernier chapitre on complète la preuve du résultat principal (Théorème 5.1).

Chapitre 1

Rappels

1.1 Rappels sur l'espace $L^2(Q)$

On désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

Définition 1.1 *on définit l'éspace $L^2(\Omega)$ comme :*

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \text{ est mesurable, } \int_\Omega |f(x)|\, dx < +\infty \right\}.$$

on le munit de la norme $\|f\|_2 = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ *, et on notera* $(L^2(\Omega))^2$ *l'éspace des champs de vecteurs dont chaque composante appartient à* $L^2(\Omega)$.

Définition 1.2 *on note $D(\Omega)$ l'espace des fonctions infiniments dérivables à support compact danc Ω, et on écrit : $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$.*

Proposition 1.1 *l'espace $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$.*

Définition 1.3 (Gradient) *Soit φ une fonction de classe C^1 de Ω dans $\mathbb{R}$.*
on appelle gradient de φ, la fonction de Ω dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\nabla\varphi = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

1.2 Espace de Sobolev

Définition 1.4 *On définit l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions u dans $L^2(\Omega)$ telles qu'il existe $V = (V_1, V_2) \in (L^2(\Omega))^2$ vérifiant :*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega \varphi V_i, \forall \varphi \in D(\Omega), i = 1, 2.$$

on notera alors $V = \nabla u$.

La fonction ∇u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ est ainsi définie comme l'unique fonction vectorielle à composantes $L^2(\Omega)$ telle que l'identité entre vecteurs de $\mathbb{R}^2$: $\int\limits_{\Omega} u\nabla\varphi = -\int\limits_{\Omega} \varphi\nabla u$, soit vérifiée pour tout $\varphi \in D(\Omega)$.

1.3 Formules de Green

Définition 1.5 (Vecteur normale) *soit Ω un ouvert de classe C^1, a un point de Γ (la frontière de Ω) ; Et $\varphi \in C^1$ telle que $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$.*

on appelle vecteur normal à Γ au point a le vecteur :

$$n = \frac{(\nabla\varphi, -1)}{|(\nabla\varphi, -1)|}.$$

Définition 1.6 (Dérivée normale) *Soit Ω un domaine de frontière Lipschitzienne. On note n le vecteur normale à Γ dirigé vers l'exterieur de Ω, ce vecteur est défini presque partout.*

Pour toute fonction $\varphi \in D(\overline{\Omega})$,($D(\overline{\Omega})$ l'ensemble des restrictions des fonctions de $D(\mathbb{R}^2)$ à $\overline{\Omega}$), on appelle dérivée normale de φ en un point de Γ la quantité :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \nabla\varphi.n.$$

Définition 1.7 (L'intégrale curviligne) *Longueur d'un élément différentiel de courbe*

Le cas des équations cartésiennes, dans le plan :supposons que la coordonnée y soit une fonction continuement dérivable de la variable x.

On s'intéresse à l'arc de courbe formé des points $M(x, y)$ tels que $y = f(x)$ ou x varie de x_1 à x_2 avec $x_1 < x_2$.

on a :

$$y = f(x) \Rightarrow dy = f'(x)dx \Rightarrow dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

1.3.1 Première formule de Green

Proposition 1.2 *Soit Ω un ouvert borné de frontière Lipschitzienne Γ, pour tout u, v dans $H^1(\Omega)$, on a :*

$$\int\limits_{\Omega} v\nabla u = -\int\limits_{\Omega} u\nabla v + \int\limits_{\Gamma} u.v.n.$$

1.3.2 Deuxième formule de Green

Proposition 1.3 *Soit Ω un ouvert borné de régularité C^2, pour tout u dans $H^2(\Omega)$ ($H^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $H^1(\Omega)$ dont toutes les dérivées partielles par rapport à l'une des composantes sont elles-memes dans $H^1(\Omega)$), et tout v dans $H^1(\Omega)$, on a :*

$$-\int\limits_{\Omega} v\nabla u = \int\limits_{\Omega} \nabla u\nabla v - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n}.v.$$

Chapitre 2

Unicité et lemmes techniques

2.1 Unicité

Proposition 2.1 *Le problème (2) admet une unique solution.*
Preuve. *Considérons $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ une solution du problème (2) avec un second membre nul. Ainsi*

$$\partial_t u - \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u = 0 \text{ dans } Q.$$

de plus u vérifie les conditions de frontière

$$u\,|_{\partial Q - \Gamma_T} = 0.$$

on utilise la formule de Green ; on a

$$\begin{aligned}\int_Q (\partial_t u - \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u) u dt dx_1 dx_2 &= \int_{\partial Q} \left(\frac{1}{2} |u|^2 v_t - \partial_{x_1} u.u v_{x_1} - \partial_{x_2} u.u v_{x_2} \right) d\sigma \\ &+ \int_Q \left(|\partial_{x_1} u|^2 + |\partial_{x_2} u|^2 \right) dt dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

où v_t, v_{x_1}, v_{x_2} sont les composantes du vecteur normal exterieur à ∂Q, tenant compte des conditions de frontière, toutes les intégrales de frontière disparaissent excepté $\int_{\partial Q} |u|^2 d\sigma$; on a

$$\int_{\partial Q} |u|^2 v_t d\sigma = \int_{\Gamma_T} |u|^2 dx_1 dx_2.$$

alors

$$\begin{aligned}\int_Q (\partial_t u - \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u) u dt dx_1 dx_2 &= \int_{\Gamma_T} \frac{1}{2} |u|^2 dx_1 dx_2 \\ &+ \int_Q \left(|\partial_{x_1} u|^2 + |\partial_{x_2} u|^2 \right) dt dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

puisque

$$\int_Q (\partial_t u - \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u) u dt dx_1 dx_2 = 0$$

alors

$$\int_Q \left(|\partial_{x_1} u|^2 + |\partial_{x_2} u|^2 \right) dt dx_1 dx_2 = 0,$$

car

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma_t} |u|^2 \, dx_1 dx_2 \geq 0.$$

Ceci imlique

$$|\partial_{x_1} u|^2 + |\partial_{x_2} u|^2 = 0$$

et par conséquence

$$\partial_{x_1}^2 u = \partial_{x_2}^2 u = 0,$$

puis l'hypothèse

$$\partial_t u - \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u = 0$$

donne

$$\partial_t u = 0.$$

Ainsi u est constante. Les conditions de frontière impliquent que $u = 0$ dans Q. Ceci prouve l'unicité de la solution du problème (2) . ■

Remarque 2.1 *Dans la suite, on s'interesse seulement à l'existence de la solution du problème (2) .*

2.2 Lemmes techniques

Lemme 2.1 *Soit $D(0,1)$ le disque unité de $\mathbb{R}^2$, l'opérateur de Laplace*

$$\triangle : H^2(D(0,1)) \cap H_0^1(D(0,1)) \to L^2(D(0,1))$$

est un isomorphisme. De plus il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\|_{H^2(D(0,1))} \leq C \|\triangle v\|_{L^2(D(0,1))}, \forall v \in H^2(D(0,1)).$$

Dans le lemme ci-dessus, H^2 et H_0^1 sont les espaces habituels de Sobolev définis, par exemple, dans Lions-Magenes [11].

Dans le chapitre 3, nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 2.2 *Soit $t \in]\alpha_n, T[$, où $(\alpha_n)_n$ est une suite décroissante vers zéro. Alors il existe une constante $C > 0$ indépendante de n telle que pour chaque $u_n \in H^2(\Omega_t)$, on a*

a $\|\partial_{x_1} u_n\|_{L^2(\Omega_t)}^2 \leq C\varphi^2(t) \|\triangle u_n\|_{L^2(\Omega_t)}^2$,

b $\|\partial_{x_2} u_n\|_{L^2(\Omega_t)}^2 \leq C\varphi^2(t) \|\triangle u_n\|_{L^2(\Omega_t)}^2$.

Preuve. C'est une conséquence directe du lemme 2.1. En effet, soit $t \in]\alpha_n, T[$ on définit le changement de variables suivant

$$\begin{array}{rcl} D(0,1) & \rightarrow & \Omega_t \\ (x_1, x_2) & \rightarrow & (\varphi(t)x_1, h(t)\varphi(t)x_2) = (x_1^{'}, x_2^{'}). \end{array}$$

d'où

$$v(x_1, x_2) = u(\varphi(t)x_1, h(t)\varphi(t)x_2),$$

donc si $v \in H^2(D(0,1))$, u_n appartient à$H^2(\Omega)$.

a) on a

$$\begin{aligned} \|\partial_{x_1} v\|^2_{L^2(D(0,1))} &= \int\limits_{D(0,1)} (\partial_{x_1} v)^2(x_1, x_2)dx_1 dx_2 \\ &= \int\limits_{\Omega_t} \left(\partial_{x_1^{'}} u_n\right)^2 (x_1^{'}, x_2^{'})\varphi^2\left(t\right) \frac{1}{h(t)\varphi^2\left(t\right)} dx_1^{'} dx_2^{'} \\ &= \frac{1}{h(t)} \int\limits_{\Omega_t} \left(\partial_{x_1^{'}} u_n\right)^2 (x_1^{'}, x_2^{'}) dx_1^{'} dx_2^{'} \\ &= \frac{1}{h(t)} \left\|\partial_{x_1^{'}} u_n\right\|^2_{L^2(\Omega_t)}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|\triangle v\|^2_{L^2(D(0,1))} &= \int\limits_{D(0,1)} \left[\left(\partial^2_{x_1} v + \partial^2_{x_2} v\right)(x_1, x_2)\right]^2 dx_1 dx_2 \\ &= \int\limits_{\Omega_t} \left(\varphi^2\left(t\right)\partial^2_{x_1^{'}} u_n + (h\varphi)^2(t)\partial^2_{x_1^{'}} u_n\right)^2 (x_1^{'}, x_2^{'}) \frac{dx_1^{'} dx_2^{'}}{\left(h\varphi^2\right)\left(t\right)} \\ &= \frac{\varphi^2\left(t\right)}{h(t)} \int\limits_{\Omega_t} \left(\partial^2_{x_1^{'}} u_n + h^2(t)\partial^2_{x_1^{'}} u_n\right)^2 (x_1^{'}, x_2^{'}) dx_1^{'} dx_2^{'} \\ &\leq \frac{1}{\delta}\varphi^2\left(t\right) \|\triangle u_n\|^2_{L^2(\Omega_t)}, \end{aligned}$$

où δ est la constante qui apparaît dans (1). En utilisant le lemme 2.1 et la condition(1), on obtient l'inégalité désirée.

b) on a

$$\begin{aligned} \|\partial_{x_2} v\|^2_{L^2(D(0,1))} &= \int\limits_{D(0,1)} (\partial_{x_2} v)^2(x_1, x_2)dx_1 dx_2 \\ &= \int\limits_{\Omega_t} \left(\partial_{x_2^{'}} u_n\right)^2 (x_1^{'}, x_2^{'})h^2(t)\varphi^2\left(t\right) \frac{1}{h(t)\varphi^2\left(t\right)} dx_1^{'} dx_2^{'} \\ &= h(t) \int\limits_{\Omega_t} \left(\partial_{x_2^{'}} u_n\right)^2 (x_1^{'}, x_2^{'}) dx_1^{'} dx_2^{'} \\ &= h(t) \left\|\partial_{x_2^{'}} u_n\right\|^2_{L^2(\Omega_t)}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\|\triangle v\|^2_{L^2(D(0,1))} \leq \frac{1}{\delta}\varphi^2\left(t\right)\|\triangle u_n\|^2_{L^2(\Omega_t)}.$$

On utilise l'inégalité

$$\|\partial_{x_2} v\|^2_{L^2(D(0,1))} \leq C\,\|\triangle v\|^2_{L^2(D(0,1))}$$

du lemme 2.1 et de la condition (1) , on obtient l'inégalité désirée

$$\left\|\partial_{x_2'} u_n\right\|^2_{L^2(\Omega_t)} \leq C\varphi^2(t)\,\|\triangle u_n\|^2_{L^2(\Omega_t)}.$$

■

Chapitre 3

Cas d'un domaine pouvant être transformé en un cylindre

Dans ce chapitre, on remplace Q par Q_α

$$Q_\alpha = \left\{ (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{\alpha} < t < T, 0 \leq \frac{x_1^2}{\varphi^2(t)} + \frac{x_2^2}{h^2(t)\varphi^2(t)} < 1 \right\}$$

avec $\alpha > 0$.

Théorème 3.1 *Le problème*

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u &= f \in L^2(Q_\alpha), \\ u\,|_{\partial Q_\alpha - \Gamma_T} &= 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

admet une unique solution $u \in H^{1,2}(Q_\alpha)$.

Preuve. le changement de variables

$$(t, x_1, x_2) \to (t, y_1, y_2) = \left(t, \frac{x_1}{\varphi(t)}, \frac{x_2}{h(t)\varphi(t)} \right)$$

transforme $Q_\alpha$en cylindre $P_\alpha = \left] \frac{1}{\alpha}, T \right[\times D\left(\frac{1}{\alpha}, 1 \right)$, où $D\left(\frac{1}{\alpha}, 1 \right)$ est le disque unité centré en $\left(\frac{1}{\alpha}, 0, 0 \right)$. En posant

$$u(t, x_1, x_2) = v(t, y_1, y_2)$$

et

$$f(t, x_1, x_2) = g(t, y_1, y_2),$$

le problème (3.1) est transformé, dans Q_α en problème parabolique de coefficient-variable

$$\partial_t v - \frac{1}{\varphi^2(t)} \partial_{y_1}^2 v - \frac{1}{h^2(t)\varphi^2(t)} \partial_{y_2}^2 v - \frac{\varphi'(t)\, y_1}{\varphi(t)} \partial_{y_1} v - \frac{(h\varphi)'(t)\, y_2}{h(t)\varphi(t)} \partial_{y_2} v = g$$

$$u\,|_{\partial P_\alpha - \Gamma_T} = 0.$$

Ce changement de variables conserve les espaces $H^{1,2}$ et L^2. En d'autres termes

$$\begin{aligned} f &\in L^2(Q_\alpha) \Rightarrow g \in L^2(P_\alpha) \\ u &\in H^{1,2}(Q_\alpha) \Rightarrow v \in H^{1,2}(P_\alpha). \end{aligned}$$

Proposition 3.1 *L'opérateur*

$$-\left[\frac{\varphi^{'}(t)\,y_1}{\varphi(t)}\partial_{y_1}+\frac{(h\varphi)^{'}(t)\,y_2}{h(t)\,\varphi(t)}\partial_{y_2}\right]:H_0^{1,2}(P_\alpha)\to L^2(P_\alpha)$$

est compact.
Preuve. *P_α a la propriété de Besov (voir [3]). Ainsi, pour $j = 1, 2$*

$$\begin{array}{cccc}\partial_{y_j} & H_0^{1,2}(P_\alpha) & \to & H^{\frac{1}{2},1}(P_\alpha)\\ & v & \longmapsto & \partial_{y_j}v,\end{array}$$

est continu. Puisque P_α est borné, l'injection canonique est compacte de $H^{\frac{1}{2},1}(P_\alpha)$ dans $L^2(P_\alpha)$ (voir par exemple [3]), où

$$H^{\frac{1}{2},1}(P_\alpha)=L^2\left(\frac{1}{\alpha},T;H^1\left(D\left(\frac{1}{\alpha},1\right)\right)\right)\cap H^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\alpha},T;L^2\left(D\left(\frac{1}{\alpha},1\right)\right)\right).$$

Pour les définitions complètes de $H^{r,s}$ les espaces de Sobolev Hilbertien voir par exemple [11].

Considérons la composition

$$\begin{array}{cccc}\partial_{y_j} & H_0^{1,2}(P_\alpha) & \to & H^{\frac{1}{2},1}(P_\alpha)\to L^2(P_\alpha)\\ & v & \longmapsto & \partial_{y_j}v\mapsto\partial_{y_j}v,\end{array}$$

alors ∂_{y_j} est un opérateur compact de $H_0^{1,2}(P_\alpha)$ dans $L^2(P_\alpha)$. Comme

$$-\frac{\varphi^{'}(t)}{\varphi(t)},-\frac{(h\varphi)^{'}(t)}{h(t)\,\varphi(t)}$$

sont des fonctions bornées, les opérateurs

$$-\frac{\varphi^{'}(t)\,y_1}{\varphi(t)}\partial_{y_1},-\frac{(h\varphi)^{'}(t)\,y_2}{h(t)\,\varphi(t)}\partial_{y_2}$$

sont compacts de $H_0^{1,2}(P_\alpha)$ dans $L^2(P_\alpha)$. En conséquence,

$$-\left[\frac{\varphi^{'}(t)\,y_1}{\varphi(t)}\partial_{y_1}+\frac{(h\varphi)^{'}(t)\,y_2}{h(t)\,\varphi(t)}\partial_{y_2}\right]$$

est compact de $H_0^{1,2}(P_\alpha)$ dans $L^2(P_\alpha)$. ■

Ainsi, pour completer la preuve du théorème 3.1, il est suffisant de montrer que l'opérateur

$$\partial_t-\frac{1}{\varphi^2(t)}\partial_{y_1}^2-\frac{1}{h^2(t)\,\varphi^2(t)}\partial_{y_2}^2$$

est un isomorphisme de $H_0^{1,2}(P_\alpha)$ dans $L^2(P_\alpha)$.

Lemme 3.1 *L'opérateur*

$$\partial_t - \frac{1}{\varphi^2(t)}\partial^2_{y_1} - \frac{1}{h^2(t)\,\varphi^2(t)}\partial^2_{y_2}$$

est un isomorphisme de $H_0^{1,2}(P_\alpha)$ *dans* $L^2(P_\alpha)$.

Preuve. *Comme les coefficients* $\frac{1}{\varphi^2(t)}$ *et* $\frac{1}{h^2(t)\,\varphi^2(t)}$ *sont bornés dans* $\overline{P_\alpha}$, *la régularité optimale est montrée par Ladyzhenskaya-Solonnikov-Ural'tseva [10].* ■

Nous aurons besoin du résultat suivant pour justifier le calcul de ce chapitre.

Lemme 3.2 *L'espace*

$$\left\{u \in H^4(P_\alpha) : u\left|_{\partial_p P_\alpha} = 0\right.\right\}$$

est dense dans l'espace

$$\left\{u \in H^{1,2}(P_\alpha) : u\left|_{\partial_p P_\alpha} = 0\right.\right\}.$$

Ici, $\partial_p P_\alpha$ est la frontière parabolique P_α et H^4 représente l'espace habituel de Sobolev défini, par exemple, dans Lions-Magenes [11].

La preuve du lemme ci-dessus peut être trouvée dans [7].

Remarque 3.1 *Dans le lemme 3.2, on peut remplacer* P_α *par* Q_α *avec l'aide du changement de variables défini ci-dessus.*

■

Chapitre 4

Cas d'un domaine conique (T assez petit)

Dans ce cas, on défini Q par

$$Q = \left\{ (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 < t < T, 0 \leq \frac{x_1^2}{\varphi^2(t)} + \frac{x_2^2}{h^2(t)\varphi^2(t)} < 1 \right\}$$

avec

$$\varphi(0) = 0, \varphi(t) > 0, t \in]0, T]. \tag{4.1}$$

On suppose que les fonctions h et φ vérifient les conditions (1) et (3). Pour chaque $n \in N^*$, on définit Q_n par

$$Q_n = \left\{ (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{n} < t < T, 0 \leq \frac{x_1^2}{\varphi^2(t)} + \frac{x_2^2}{h^2(t)\varphi^2(t)} < 1 \right\}$$

et on note $f_n = f|_{Q_n}$ et $u_n \in H^{1,2}(Q_n)$ la solution du problème dans Q_n. Telle que la solution existe d'aprés le Theoreme 3.1.

Proposition 4.1 *Il existe une constante K_1 indépendante de n telle que*

$$\|u_n\|_{H^{1,2}(Q_n)} \leq K_1 \|f_n\|_{L^2(Q_n)} \leq K_1 \|f\|_{L^2(Q)},$$

où

$$\|u_n\|_{H^{1,2}(Q_n)} = \left(\|u_n\|_{H^1(Q_n)}^2 + \sum_{i,j=1}^{2} \left\| \partial_{x_i}\partial_{x_j} u \right\|_{L^2(Q_n)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour prouver la proposition, on a besoin du résultat suivant qui est une conséquence du lemme 2.2 (voir Grisvard-Looss [5] ,théorème 2.2).

Lemme 4.1 *Il existe une constante C indépendante de n telle que*

$$\left\|\partial_{x_1}^2 u_n\right\|_{L^2(Q_n)}^2 + \left\|\partial_{x_2}^2 u_n\right\|_{L^2(Q_n)}^2 + \left\|\partial_{x_1 x_2}^2 u_n\right\|_{L^2(Q_n)}^2 \leq C \left\|\triangle u_n\right\|_{L^2(Q_n)}^2.$$

Preuve de la proposition. On note le produit scalaire dans $L^2(Q_n)$ par $\langle .,. \rangle$, alors on a

$$\begin{aligned} \|f_n\|^2_{L^2(Q_n)} &= \langle \partial_t u_n - \triangle u_n, \partial_t u_n - \triangle u_n \rangle \\ &= \|\partial_t u_n\|^2_{L^2(Q_n)} + \|\triangle u_n\|^2_{L^2(Q_n)} - 2\langle \partial_t u_n, \triangle u_n \rangle \end{aligned}$$

Estimation de $-2\langle \partial_t u_n, \triangle u_n \rangle$: on a

$$\partial_t u_n . \triangle u_n = \partial_{x_1}(\partial_t u_n \partial_{x_1} u_n) + \partial_{x_2}(\partial_t u_n \partial_{x_2} u_n) - \frac{1}{2}\partial_t \left[(\partial_{x_1} u_n)^2 + (\partial_{x_2} u_n)^2\right].$$

alors

$$\begin{aligned} -2\langle \partial_t u_n, \triangle u_n \rangle &= -2\int_{Q_n} \partial_t u_n . \triangle u_n dt dx_1 dx_2 \\ &= -2\int_{Q_n} \left[\partial_{x_1}(\partial_t u_n \partial_{x_1} u_n) + \partial_{x_2}(\partial_t u_n \partial_{x_2} u_n)\right] dt dx_1 dx_2 \\ &\quad + \int_{Q_n} \partial_t \left[(\partial_{x_1} u_n)^2 + (\partial_{x_2} u_n)^2\right] dt dx_1 dx_2 \\ &= \int_{\partial Q_n} \left[|\nabla u_n|^2 v_t - 2\partial_t u_n (\partial_{x_1} u_n v_{x_1}) + (\partial_{x_2} u_n v_{x_2})\right] d\sigma \end{aligned}$$

où v_t, v_{x_1}, v_{x_2} sont les composantes du vecteur normal extérieur à ∂Q_n.

On réecrit l'intégrale de frontière en utilisant les conditions de frontière. Sur la frontière de Q_n où $t = \frac{1}{n}$, on a

$$u_n = 0$$

et par conséquent

$$\partial_{x_1} u_n = \partial_{x_2} u_n = 0.$$

L'intégrale de frontière correspondante disparaît. Sur la frontière où $t = T$, on a

$$v_{x_1} = 0, v_{x_2} = 0 \text{ et } v_t = 1.$$

En conséquence l'intégrale de frontière correspondante

$$A = \int_{\Gamma_T} |\nabla u_n|^2 dx_1 dx_2$$

n'est pas négative. Sur la frontière où

$$\frac{x_1^2}{\varphi^2(t)} + \frac{x_2^2}{h^2(t)\varphi^2(t)} = 1,$$

on a

$$\begin{aligned} v_{x_1} &= \frac{h(t)\cos\theta}{\sqrt{\left(\varphi'(t)h(t)\cos^2\theta + (h\varphi)'(t)\sin^2\theta\right)^2 + (h(t)\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}}, \\ v_{x_2} &= \frac{\sin\theta}{\sqrt{\left(\varphi'(t)h(t)\cos^2\theta + (h\varphi)'(t)\sin^2\theta\right)^2 + (h(t)\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}}, \\ v_t &= \frac{-\left(\varphi'(t)h(t)\cos^2\theta + (h\varphi)'(t)\sin^2\theta\right)}{\sqrt{\left(\varphi'(t)h(t)\cos^2\theta + (h\varphi)'(t)\sin^2\theta\right)^2 + (h(t)\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}} \end{aligned}$$

et

$$u_n\left(t,\varphi(t)\cos\theta,h(t)\varphi(t)\sin\theta\right)=0$$

En dérivant par rapport à t et par rapport à θ on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t u_n &= -\varphi^{'}(t)\cos\theta.\partial_{x_1}u_n-(h\varphi)^{'}(t)\sin\theta.\partial_{x_2}u_n,\\ \sin\theta.\partial_{x_1}u_n &= h(t)\cos\theta.\partial_{x_2}u_n.\end{aligned}$$

En conséquence l'intégrale de frontière correspondante est

$$\begin{aligned}J_n &= -2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{T}\partial_t u_n.\left(h\varphi\cos\theta.\partial_{x_1}u_n+h\varphi\sin\theta.\partial_{x_2}u_n\right)dtd\theta\\ &\quad-\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{T}|\nabla u_n|^2\left((h\varphi)^{'}\varphi\sin^2\theta+\varphi^{'}h\varphi\cos^2\theta\right)dtd\theta\\ &\quad=2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{T}\left\{\left(\varphi^{'}\cos\theta.\partial_{x_1}u_n+(h\varphi)^{'}\sin\theta.\partial_{x_2}u_n\right)\times\left(h\varphi\cos\theta.\partial_{x_1}u_n+h\varphi\sin\theta.\partial_{x_2}u_n\right)\right\}dtd\theta\\ &\quad-\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{T}|\nabla u_n|^2\left((h\varphi)^{'}\varphi\sin^2\theta+\varphi^{'}h\varphi\cos^2\theta\right)dtd\theta\\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{T}|\nabla u_n|^2\left((h\varphi)^{'}\varphi\sin^2\theta+\varphi^{'}h\varphi\cos^2\theta\right)dtd\theta\\ &\quad-\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{T}|\nabla u_n|^2\left((h\varphi)^{'}\varphi\sin^2\theta+\varphi^{'}h\varphi\cos^2\theta\right)dtd\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{T}|\nabla u_n|^2\left((h\varphi)^{'}\varphi\sin^2\theta+\varphi^{'}h\varphi\cos^2\theta\right)dtd\theta.\end{aligned}$$

finalement,

$$\begin{aligned}-2\left\langle\partial_t u_n,\triangle u_n\right\rangle &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{T}|\nabla u_n|^2\left((h\varphi)^{'}\varphi\sin^2\theta+\varphi^{'}h\varphi\cos^2\theta\right)dtd\theta \\ &\quad+\int_{\Gamma_T}|\nabla u_n|^2(T,x_1,x_2)\,dx_1dx_2\end{aligned}\tag{4.2}$$

on utilisera aussi le resultat suivant

Lemme 4.2 *on a*

$$\begin{aligned}
-2\left\langle \partial_t u_n, \triangle u_n\right\rangle &= 2\int\limits_{Q_n}\left(\frac{\varphi^{'}}{\varphi}x_1\partial_{x_1}u_n+\frac{(h\varphi)^{'}}{h\varphi}x_2\partial_{x_2}u_n\right)\triangle u_n dt dx_1 dx_2\\
&+\int\limits_{\Gamma_T}\left|\nabla u_n\right|^2(T,x_1,x_2)\,dx_1dx_2.
\end{aligned}$$

Preuve. *Pour* $\frac{1}{n}<t<T$, *on considère la paramétrisation du domaine* Ω_t

$$\begin{aligned}
(0,2\pi) &\rightarrow \Omega_t\\
\theta &\rightarrow (\varphi(t)\cos\theta, h(t)\varphi(t)\sin\theta)=(x_1,x_2)\,.
\end{aligned}$$

Notons le produit scalaire dans $L^2(\Omega_t)$ *par* $\langle .,.\rangle$, *d'où*

$$I_n=\left\langle \triangle u_n, \frac{\varphi^{'}}{\varphi}x_1\partial_{x_1}u_n+\frac{(h\varphi)^{'}}{h\varphi}x_2\partial_{x_2}u_n\right\rangle$$

alors on a

$$\begin{aligned}
I_n &= \int\limits_{\Omega_t}\left(\partial^2_{x_1}u_n+\partial^2_{x_2}u_n\right)\left(\frac{\varphi^{'}}{\varphi}x_1\partial_{x_1}u_n+\frac{(h\varphi)^{'}}{h\varphi}x_2\partial_{x_2}u_n\right)dx_1dx_2\\
&= \int\limits_{\Omega_t}\left(\frac{\varphi^{'}}{\varphi}x_1\partial^2_{x_1}u_n\partial_{x_1}u_n+\frac{(h\varphi)^{'}}{h\varphi}x_2\partial^2_{x_2}u_n\partial_{x_2}u_n\right)dx_1dx_2\\
&+\int\limits_{\Omega_t}\left(\frac{\varphi^{'}}{\varphi}x_1\partial^2_{x_2}u_n\partial_{x_1}u_n+\frac{(h\varphi)^{'}}{h\varphi}x_2\partial^2_{x_1}u_n\partial_{x_2}u_n\right)dx_1dx_2.
\end{aligned}$$

On utilise la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t}\left(\frac{\varphi^{'}}{\varphi}x_1\partial_{x_1}\left(\partial_{x_1}u_n\right)^2+\frac{(h\varphi)^{'}}{h\varphi}x_2\partial_{x_2}\left(\partial_{x_2}u_n\right)^2\right)dx_1dx_2\\
&+\int\limits_{\Omega_t}\left(\frac{\varphi^{'}}{\varphi}x_1\partial_{x_2}\left(\partial_{x_2}u_n\right)\partial_{x_1}u_n+\frac{(h\varphi)^{'}}{h\varphi}x_2\partial_{x_1}\left(\partial_{x_1}u_n\right)\partial_{x_2}u_n\right)dx_1dx_2\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_t}\left(\frac{\varphi^{'}}{\varphi}x_1v_{x_1}\left(\partial_{x_1}u_n\right)^2+\frac{(h\varphi)^{'}}{h\varphi}x_2v_{x_2}\left(\partial_{x_2}u_n\right)^2\right)d\sigma\\
&-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t}\left(\frac{\varphi^{'}}{\varphi}\left(\partial_{x_1}u_n\right)^2+\frac{(h\varphi)^{'}}{h\varphi}\left(\partial_{x_2}u_n\right)^2\right)dx_1dx_2\\
&+\int\limits_{\partial\Omega_t}\left(\frac{\varphi^{'}}{\varphi}x_1v_{x_2}+\frac{(h\varphi)^{'}}{h\varphi}x_2v_{x_1}\right)\partial_{x_1}u_n\partial_{x_2}u_n d\sigma\\
&-\int\limits_{\Omega_t}\left(\frac{\varphi^{'}}{\varphi}x_1\partial_{x_2}u_n\partial^2_{x_1x_2}u_n+\frac{(h\varphi)^{'}}{h\varphi}x_2\partial_{x_1}u_n\partial^2_{x_1x_2}u_n\right)dx_1dx_2
\end{aligned}$$

où v_{x_1}, v_{x_2} *sont les composantes du vecteur normal extérieur à* $\partial\Omega_t$*. Alors*

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_t}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}x_1v_{x_1}\left(\partial_{x_1}u_n\right)^2+\frac{(h\varphi)'}{h\varphi}x_2v_{x_2}\left(\partial_{x_2}u_n\right)^2\right)d\sigma\\
&\quad -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\left(\partial_{x_1}u_n\right)^2+\frac{(h\varphi)'}{h\varphi}\left(\partial_{x_2}u_n\right)^2\right)dx_1dx_2\\
&\quad +\int\limits_{\partial\Omega_t}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}x_1v_{x_2}+\frac{(h\varphi)'}{h\varphi}x_2v_{x_1}\right)\partial_{x_1}u_n\partial_{x_2}u_nd\sigma\\
&\quad -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}x_1\partial_{x_1}\left(\partial_{x_2}u_n\right)^2+\frac{(h\varphi)'}{h\varphi}x_2\partial_{x_2}\left(\partial_{x_1}u_n\right)^2\right)dx_1dx_2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_t}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}x_1v_{x_1}\left(\partial_{x_1}u_n\right)^2+\frac{(h\varphi)'}{h\varphi}x_2v_{x_2}\left(\partial_{x_2}u_n\right)^2\right)d\sigma\\
&\quad -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\left(\partial_{x_1}u_n\right)^2+\frac{(h\varphi)'}{h\varphi}\left(\partial_{x_2}u_n\right)^2\right)dx_1dx_2\\
&\quad +\int\limits_{\partial\Omega_t}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}x_1v_{x_2}+\frac{(h\varphi)'}{h\varphi}x_2v_{x_1}\right)\partial_{x_1}u_n\partial_{x_2}u_nd\sigma\\
&\quad -\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_t}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}x_1v_{x_1}\left(\partial_{x_2}u_n\right)^2+\frac{(h\varphi)'}{h\varphi}x_2v_{x_2}\left(\partial_{x_1}u_n\right)^2\right)dx_1dx_2\\
&\quad +\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_t}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\left(\partial_{x_1}u_n\right)^2+\frac{(h\varphi)'}{h\varphi}\left(\partial_{x_2}u_n\right)^2\right)dx_1dx_2
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_t}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}x_1v_{x_1}\left(\partial_{x_1}u_n\right)^2+\frac{(h\varphi)'}{h\varphi}x_2v_{x_2}\left(\partial_{x_2}u_n\right)^2\right)d\sigma\\
&\quad +\int\limits_{\partial\Omega_t}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}x_1v_{x_2}+\frac{(h\varphi)'}{h\varphi}x_2v_{x_1}\right)\partial_{x_1}u_n\partial_{x_2}u_nd\sigma\\
&\quad -\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega_t}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}x_1v_{x_1}\left(\partial_{x_2}u_n\right)^2+\frac{(h\varphi)'}{h\varphi}x_2v_{x_2}\left(\partial_{x_1}u_n\right)^2\right)dx_1dx_2.
\end{aligned}$$

En conséquence ,

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\varphi^{'}}{\varphi}\varphi h\varphi\left(\cos\theta.\partial_{x_1}u_n\right)^2+\frac{(h\varphi)^{'}}{h\varphi}\varphi h\varphi\left(\sin\theta.\partial_{x_2}u_n\right)^2\right)d\theta \\
&+\int_0^{2\pi}\left(\frac{\varphi^{'}}{\varphi}\varphi^2+\frac{(h\varphi)^{'}}{h\varphi}\left(\varphi h\right)^2\right)\sin\theta\cos\theta.\partial_{x_1}u_n\partial_{x_2}u_n d\theta \\
&-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\varphi^{'}}{\varphi}\varphi h\varphi\left(\cos\theta.\partial_{x_2}u_n\right)^2+\frac{(h\varphi)^{'}}{h\varphi}\varphi h\varphi\left(\sin\theta.\partial_{x_1}u_n\right)^2\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\varphi^{'}h\varphi\left(\cos\theta.\partial_{x_1}u_n\right)^2+\varphi\left(h\varphi\right)^{'}\left(\sin\theta.\partial_{x_2}u_n\right)^2\right)d\theta \\
&+\int_0^{2\pi}\left(\varphi^{'}\varphi+\left(h\varphi\right)^{'}h\varphi\right)\sin\theta\cos\theta.\partial_{x_1}u_n\partial_{x_2}u_n d\theta \\
&-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\varphi^{'}h\varphi\left(\cos\theta.\partial_{x_2}u_n\right)^2+\varphi\left(h\varphi\right)^{'}\left(\sin\theta.\partial_{x_1}u_n\right)^2\right)d\theta.
\end{aligned}
$$

Les conditions de frontière

$$u_n = (t, \varphi(t)\cos\theta, h(t)\varphi(t)\sin\theta) = 0$$

impliquent

$$\sin\theta.\partial_{x_1}u_n = h(t)\cos\theta.\partial_{x_2}u_n;$$

alors

$$\sin\theta\cos\theta.\partial_{x_1}u_n\partial_{x_2}u_n = h(t)(\cos\theta.\partial_{x_2}u_n)^2$$

et

$$h(t)\sin\theta\cos\theta.\partial_{x_1}u_n\partial_{x_2}u_n = (\sin\theta.\partial_{x_1}u_n)^2.$$

En conséquence

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\varphi^{'}h\varphi\left(\cos\theta.\partial_{x_1}u_n\right)^2+\varphi\left(h\varphi\right)^{'}\left(\sin\theta.\partial_{x_2}u_n\right)^2\right)d\theta\\
&+\int_0^{2\pi}\left(\varphi^{'}h\varphi\left(\cos\theta.\partial_{x_2}u_n\right)^2+\varphi\left(h\varphi\right)^{'}\left(\sin\theta.\partial_{x_1}u_n\right)^2\right)d\theta\\
&-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\varphi^{'}h\varphi\left(\cos\theta.\partial_{x_2}u_n\right)^2+\varphi\left(h\varphi\right)^{'}\left(\sin\theta.\partial_{x_1}u_n\right)^2\right)d\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\varphi^{'}h\varphi\left(\cos\theta.\partial_{x_1}u_n\right)^2+\varphi\left(h\varphi\right)^{'}\left(\sin\theta.\partial_{x_2}u_n\right)^2\right)d\theta\\
&+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\varphi^{'}h\varphi\left(\cos\theta.\partial_{x_2}u_n\right)^2+\varphi\left(h\varphi\right)^{'}\left(\sin\theta.\partial_{x_1}u_n\right)^2\right)d\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\varphi^{'}h\varphi\left(\cos\theta.\partial_{x_1}u_n\right)^2+\varphi\left(h\varphi\right)^{'}\left(\sin\theta.\partial_{x_2}u_n\right)^2\\
&+\varphi^{'}h\varphi\left(\cos\theta.\partial_{x_2}u_n\right)^2+\varphi\left(h\varphi\right)^{'}\left(\sin\theta.\partial_{x_1}u_n\right)^2\}d\theta\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\left(\partial_{x_1}u_n\right)^2+\left(\partial_{x_2}u_n\right)^2\right]\left(\varphi\left(h\varphi\right)^{'}\sin^2\theta+\varphi^{'}h\varphi\cos^2\theta\right)d\theta.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$I_n=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left|\nabla u_n\right|^2\left(\varphi\left(h\varphi\right)^{'}\sin^2\theta+\varphi^{'}h\varphi\cos^2\theta\right)d\theta$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{n}}^{T}\int_0^{2\pi}\left|\nabla u_n\right|^2\left(\varphi\left(h\varphi\right)^{'}\sin^2\theta+\varphi^{'}h\varphi\cos^2\theta\right)dtd\theta\\
&= 2\int_{Q_n}\left(\frac{\varphi^{'}}{\varphi}x_1\partial_{x_1}u_n+\frac{\left(h\varphi\right)^{'}}{h\varphi}x_2\partial_{x_2}u_n\right)\triangle u_n dtdx_1dx_2.
\end{aligned}$$

Finalement, d'après (4.2) on a

$$\begin{aligned}
-2\left\langle\partial_t u_n,\triangle u_n\right\rangle &= 2\int_{Q_n}\left(\frac{\varphi^{'}}{\varphi}x_1\partial_{x_1}u_n+\frac{\left(h\varphi\right)^{'}}{h\varphi}x_2\partial_{x_2}u_n\right)\triangle u_n dtdx_1dx_2\\
&+\int_{\Gamma_T}\left|\nabla u_n\right|^2\left(T,x_1,x_2\right)dx_1dx_2.
\end{aligned}$$

■

On continue la preuve de la proposition4.1. On a

$$\begin{aligned}
&\left|\int\limits_{Q_n}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}x_1\partial_{x_1}u_n+\frac{(h\varphi)'}{h\varphi}x_2\partial_{x_2}u_n\right)\triangle u_n dtdx_1dx_2\right| \\
\leq\ & \|\triangle u_n\|_{L^2(Q_n)}\left\|\frac{\varphi'}{\varphi}x_1\partial_{x_1}u_n\right\|_{L^2(Q_n)}+\|\triangle u_n\|_{L^2(Q_n)}\left\|\frac{(h\varphi)'}{h\varphi}x_2\partial_{x_2}u_n\right\|_{L^2(Q_n)},
\end{aligned}$$

mais le lemme 2.2 implique

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\varphi'}{\varphi}x_1\partial_{x_1}u_n\right\|^2_{L^2(Q_n)} &= \int\limits_{\frac{1}{n}}^{T}\varphi'^2(t)\int\limits_{\Omega_t}\left(\frac{x_1}{\varphi(t)}\right)^2(\partial_{x_1}u_n)^2 dtdx_1dx_2 \\
&\leq \int\limits_{\frac{1}{n}}^{T}\varphi'^2(t)\int\limits_{\Omega_t}(\partial_{x_1}u_n)^2 dtdx_1dx_2 \\
&\leq C^2\int\limits_{\frac{1}{n}}^{T}\left(\varphi(t)\varphi'(t)\right)^2\int\limits_{\Omega_t}(\triangle u_n)^2 dtdx_1dx_2 \\
&\leq C^2\epsilon^2\|\triangle u_n\|^2_{L^2(Q_n)},
\end{aligned}$$

puisque $\left(\varphi(t)\varphi'(t)\right)\leq\epsilon$. De même on a

$$\left\|\frac{(h\varphi)'}{h\varphi}x_2\partial_{x_2}u_n\right\|^2_{L^2(Q_n)}\leq C^2\epsilon^2\|\triangle u_n\|^2_{L^2(Q_n)}.$$

alors

$$\left|\int\limits_{Q_n}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}x_1\partial_{x_1}u_n+\frac{(h\varphi)'}{h\varphi}x_2\partial_{x_2}u_n\right)\triangle u_n dtdx_1dx_2\right|\leq 2C\epsilon\|\triangle u_n\|^2_{L^2(Q_n)}.$$

Par conséquent, le lemme 4.2 montre que

$$\begin{aligned}
|2\langle\partial_t u_n,\triangle u_n\rangle| &\geq -2\left|\int\limits_{Q_n}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}x_1\partial_{x_1}u_n+\frac{(h\varphi)'}{h\varphi}x_2\partial_{x_2}u_n\right)\triangle u_n dtdx_1dx_2\right| \\
&\quad+\int\limits_{\Gamma_T}|\nabla u_n|^2(T,x_1,x_2)\,dx_1dx_2 \\
&\geq -4C\epsilon\|\triangle u_n\|^2_{L^2(Q_n)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\|f_n\|^2_{L^2(Q_n)} &= \|\partial_t u_n\|^2_{L^2(Q_n)}+\|\triangle u_n\|^2_{L^2(Q_n)}-2\langle\partial_t u_n,\triangle u_n\rangle \\
&\geq \|\partial_t u_n\|^2_{L^2(Q_n)}+(1-4C\epsilon)\|\triangle u_n\|^2_{L^2(Q_n)}.
\end{aligned}$$

Alors, il suffit de choisir ϵ tel que $1 - 4C\epsilon > 0$ pour obtenir une constante $K_0 > 0$ indépendante de n telle que

$$\|f_n\|_{L^2(Q_n)} \geq K_0 \|u_n\|_{H^{1,2}(Q_n)},$$

et

$$\|f_n\|_{L^2(Q_n)} \leq \|f\|_{L^2(Q_n)},$$

il existe une constante $K_1 > 0$, indépendante de n telle que

$$\|u_n\|_{H^{1,2}(Q_n)} \leq K_1 \|f_n\|_{L^2(Q_n)} \leq K_1 \|f\|_{L^2(Q)}.$$

Ceci termine la preuve de la proposition4.1. ■

4.1 Passage à la limite.

On est en position de prouver le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 4.1 *Supposons que les fonctions h et φ vérifient les conditions (1), (3) et (4.1). Alors, pour T assez petit, le problème (2) admet une unique solution $u \in H^{1,2}(Q)$.*
Preuve. *Choisissons une suite Q_n $n = 1, 2\ldots$, de domaines coniques tronqués (voir chapitre 3) tels que $Q_n \subset Q$. Alors on a*

$$Q_n \to Q \text{ quand } n \to +\infty.$$

On considère la solution $u_n \in H^{1,2}(Q_n)$ du problème de Cauchy-Dirichlet

$$\begin{aligned} \partial_t u_n - \partial_{x_1}^2 u_n - \partial_{x_2}^2 u_n &= f \quad \text{dans } Q_n \\ u\,|_{\partial Q_\alpha - \Gamma_T} &= 0, \end{aligned}$$

où Γ_T est la partie de la frontière de Q_n où $t = T$. La solution u_n existe d'après le Theoreme 3.1. Soit $\widetilde{u}_n$ la 0-extension de u_n à Q. Par la Proposition 4.1, on a l'existence d'une constante C telle que

$$\|\widetilde{u}_n\|_{L^2(Q)} + \|\partial_t \widetilde{u}_n\|_{L^2(Q)} + \sum_{i,j=0, 1\leq i+j\leq 2}^{2} \left\|\partial_{x_1}^i \partial_{x_2}^j \widetilde{u}_n\right\|_{L^2(Q)} \leq C \|f\|_{L^2(Q)}.$$

Ceci signifie que $\widetilde{u}_n, \partial_t \widetilde{u}_n, \partial_{x_1}^i \partial_{x_2}^j \widetilde{u}_n$ pour $1 \leq i + j \leq 2$ sont des fonctions bornées dans $L^2(Q)$.

Ainsi pour un ordre croissant approprié de nombres entiers n_k, $k = 1, 2\ldots$, on a l'existence des fonctions $u, v, v_{i,j}$, $1 \leq i + j \leq 2$ dans $L^2(Q)$ telles que

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_{n_k} &\to u \text{ faiblement dans } L^2(Q) \text{ quand } k \to +\infty \\ \partial_t \widetilde{u}_{n_k} &\to v \text{ faiblement dans } L^2(Q) \text{ quand } k \to +\infty \\ \partial_{x_1}^j \partial_{x_2}^j \widetilde{u}_{n_k} &\to v_{i,j} \text{ faiblement dans } L^2(Q) \text{ quand } k \to +\infty, 1 \leq i + j \leq 2. \end{aligned}$$

Il est évident que

$$v = \partial_t u, v_{i,j} = \partial_{x_1}^i \partial_{x_2}^j u, 1 \leq i + j \leq 2$$

dans le sens des distributions dans Q *et ainsi dans* $L^2(Q)$. *Ainsi,* $u \in H^{1,2}(Q)$ *et*

$$\partial_t u - \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u = f \quad \textit{dans } Q.$$

d'autre part, la solution u *satisfait les conditions de frontière*

$$u\,|_{\partial Q - \Gamma_t} = 0$$

tel que $u\,|_{Q_n} = u_n$ *pour tout* $n \in N^*$. *Ceci prouve l'existence d'une solution au problème (2).* ■

Chapitre 5

Résultat principal

Supposons que Q vérifie (4.1). Dans le cas où T n'est pas dans le voisinage de zéro, on a $Q = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma_{T_1}$ où

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 < t < T_1, 0 \leq \frac{x_1^2}{\varphi^2(t)} + \frac{x_2^2}{(h\varphi)^2(t)} < 1\right\} \\ D_2 &= \left\{(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : T_1 < t < T, 0 \leq \frac{x_1^2}{\varphi^2(t)} + \frac{x_2^2}{(h\varphi)^2(t)} < 1\right\} \\ \Gamma_{T_1} &= \left\{(T_1, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \frac{x_1^2}{\varphi^2(T_1)} + \frac{x_2^2}{(h\varphi)^2(T_1)} < 1\right\} \end{aligned}$$

avec T_1 assez petit.

Dans la suite, f représente un élément fixe arbitraire de $L^2(Q)$ et $f_i = f\,|_{D_i}$, $i = 1, 2$.

Le théorème 4.1 appliqué au domaine conique D_1, prouve qu'il existe une solution unique $u_1 \in H^{1,2}(D_1)$ du problème

$$\begin{aligned} \partial_t u_1 - \partial_{x_1}^2 u_1 - \partial_{x_2}^2 u_1 &= f_1 \qquad f_1 \in L^2(D_1) \\ u\,\big|_{\partial D_1 - \Gamma_{T_1}} &= 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ci-après, on note la trace $u\,\big|_{\Gamma_{T_1}}$ par ψ qui est dans l'espace de Sobolev $H^1(\Gamma_{T_1})$ car $u_1 \in H^{1,2}(D_1)$ (voir [11]).

Maintenant, considérons le problème suivant dans D_2,

$$\begin{aligned} \partial_t u_2 - \partial_{x_1}^2 u_2 - \partial_{x_2}^2 u_2 &= f_2 \qquad f_2 \in L^2(D_2) \\ u_2\,\big|_{\Gamma_{T_1}} &= \psi \\ u_2\,\Big|_{\partial D_2 - (\Gamma_{T_1} \cup \Gamma_T)} &= 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

On utilise le résultat suivant, qui est une conséquence de [11, théorème 4.3, vol. 2], pour résoudre le problème (5.2).

Proposition 5.1 *Soit Q le cylindre $]0, T[\times D(0, 1)$, $f \in L^2(Q)$ et $\psi \in H^1(\gamma_0)$. Alors, le problème*

$$\begin{aligned} \partial_t u - \partial_{x_1}^2 u - \partial_{x_2}^2 u &= f \quad \text{dans } Q \\ u\,\big|_{\gamma_0} &= \psi \\ u\,\big|_{\gamma_0 \cup \gamma_1} &= 0 \end{aligned}$$

où

$$\gamma_0 = \{0\} \times D(0,1), \gamma_1 =]0,T[\times \partial D(0,1),$$

admet une (unique) solution $u \in H^{1,2}(Q)$.

Remarque 5.1 *Dans l'application de [11, théorème 4.3, Vol.2], on peut observer qu'il n'y a aucune compatibilité à satisfaire parceque* $\partial_x \psi$ *est seulement dans* $L^2(\gamma_0)$.

Grâce à la transformation

$$(t, x_1, x_2) \longmapsto (t, y_1, y_2) \longmapsto (t, \varphi(t)x_1, (h\varphi)(t)x_2),$$

on déduit le résultat suivant.

Proposition 5.2 *Le problème (5.2) admet une (unique) solution* $u_2 \in H^{1,2}(D_2)$.

Ainsi, la fonction u définie par

$$u = \begin{cases} u_1 \text{ dans } D_1 \\ u_2 \text{ dans } D_2 \end{cases}$$

est la solution (unique) du problème (2) pour T arbitraire.

La deuxième résultat principal est :

Théorème 5.1 *Supposons que les fonctions* h *et* φ *vérifient les conditions (1), (3) et (4.1). Alors, le problème (2) admet une solution unique* $u \in H^{1,2}(Q)$.

Bibliographie

[1] Yu. A. Alkhutov ; L_p-Solubility of the Dirichlet problem for the heat équation in non-cylindrical domains, Sbornik : Mathematics 193 :9 (2002), 1243-1279.

[2] Yu. A. Alkhutov ; L_p-Estimates of solutions of the Dirichlet problem for the heat equation in a ball, Journ. Math. Sc., Vol. 142, No.3, (2007), 2021-2032.

[3] V. Besov ; The continuation of function in L_p^1 and W_p^1, Proc. Steklov Inst. Math. 89 (1967), 5 - 17.

[4] S. P. Degtyarev ; The solvability of the first initial-boundary problem for parabolic and de- generate parabolic equations in domains with a conical point, Sbornik Mathematics 201 (7) (2010) 999-1028.

[5] P. Grisvard, G. Looss ; Problèmes aux limites unilatéraux dans des domaines non réguliers, Journees Equations aux Derivees Partielles, (1976), 1-26.

[6] P. Grisvard ; Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, Monographs and Studies in Mathematics 24, Pitman, Boston, 1985.

[7] A. Kheloufi, R. Labbas, B .K. Sadallah ; On the resolution of a parabolic equation in a nonregular domain of $\mathbb{R}^3$, Differ. Equat. Appl. 2 (2) (2010) 251-263.

[8] R. Labbas, A. Medeghri, B.-K. Sadallah ; On a parabolic equation in a triangular domain, Appl. Math.Comput. 130(2002), 511-523.

[9] R. Labbas, A. Medeghri, B.-K. Sadallah ; An L^p approach for the study of degenerate parabolic equation, Electron. J. Diff. Equ., vol 2005 (2005), No. 36, 1-20.

[10] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva ; Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type, A.M.S., Providence, Rhode Island, 1968.

[11] J. L. Lions, E. Magenes ; Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications, 1, 2, Dunod, Paris, 1968.

[12] B. K. Sadallah ; Etude d'un problème $2m$-parabolique dans des domaines plan non rectangulaires, Boll. Un. Mat. Ital., (5), 2-B (1983), 51-112.

[13] B. K. Sadallah ; Study of a parabolic problem in a conical domain, to appear in Mathematical Journal of Okayama University.