REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM (UMAB)
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE
Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire de fin d'étude
pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Présenté par

M^{r}. SAADI Abdelhamid

THEME

Croissance des solutions des équations différentielles linéaires dans le disque unité

Soutenu le 19/06/2013 devant le Jury

Mr BELAIDI Benharrat	Président	Pr	UMAB
Mme HAMANI Karima	Examinateur	M.C.A	UMAB
Mr HAMOUDA Saâda	Encadreur	M.C.A	UMAB

Année universitaire : 2012-2013

Remerciements

Merci Mon Dieu pour cet accomplissement honorable et fatidique.
Mes remerciements les plus chaleureux vont à mes parents qui n'ont jamais cessé de croire en moi, m'ont soutenue et tant donné.
Je tiens aussi à exprimer toute ma reconnaissance et toute ma gratitude envers mon encadreur
saâda HAMOUDA, pour avoir encadré ce travail et pour la confiance qu'il m'a accordée.
Mes remerciements s'étendent également à Monsieur.Benharrat BELAIDI, Professeur à l'université de Mostaganem, qui me fera l'honneur de présider le jury d'examination de mon mémoire.
Je remercie avec aussi Mme HAMANI Karima, qui a bien voulu accepter d'examiner ce modeste travail.
Je remercie également l'ensemble professoral ayant contribué , de près ou de loin, à ma formation et mon évolution.
Je n'oublie pas de remercier mes collègues de la promotion 2 ème année Master.

Table des matières

Introduction

On sait que les équations différentielles linéaires constitue une partie très intéressante en mathématiques qui a des applications énormes dans plusieurs domaines scientifiques à savoir la physique, la chimie, l'astronomie, le mecanique, l'électricité et d'autres. De l'autre coté, l'analyse complexe s'est introduit pour résoudre certains problèmes épineux en mathématiques, à savoir le fameux théorème de Cauchy et la méthode d'intégration des résidu.
Depuis environ trois déscennies, la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par le célèbre mathématicien Rolph Nevanlinna est devenue un outil indispensable dans l'étude de certaines propriétés des solutions des équations différentielles dans le domaine complexe.
En 1966, H. Wittich a démontré le résultat suivant :
Les coefficients de l'équation différentielle

$$f^{(n)} + p_{n-1}(z) f^{(n-1)} + ... + p_0(z) f = 0, \tag{0.0.1}$$

sont des polynômes si et seulement si toutes les solutions sont des fonctions entières d'ordre fini de croissance.
On signale ici qu'il est très connu que si les coefficients de (0.0.1) sont des fonctions entières alors les solutions le sont aussi, la même chose pour le cas des fonctions analytiques dans le disque unité. La question qui se pose ici, qu'en est-il pour le cas oú il existe un coefficient transcendant (non polynôme) ? Plusieurs auteurs cherchent des conditions suffisantes qui assurent que toute solution $f(\not\equiv 0)$ de (0.0.1) est d'ordre infini ; (voir par exemple [2],[3],[5],[11].
Plusieurs auteurs ont étudié l'équation différentielle particulière suivante

$$f'' + e^{-z} f' + Q(z) f = 0 \tag{0.0.2}$$

où $Q(z)$ est une fonction entière d'ordre fini. Toute solution de l'équation (0.0.2) est une fonction entière. De plus, si f_1 ; f_2 sont deux solutions méromorphes linéairement indépendantes de (0.0.2), il y a au moins une des solutions qui doit être d'ordre infini.
De là, la plupart des solutions de (0.0.2) sont l'ordre infini.

Introduction (suite)

Ce mémoire contient trois chapitre, le premier chapitre est consacré à quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna, la théorie de la distribustion des valeurs des fonctions méromorphes, qu'on aura besoin par la suite. Dans le deuxième chapitre, on étudie la croisance des solutions de l'équation différentielle 0.0.2 et d'autres qui sont lieés et ont une relation avec celles étudies en troixième chapitre dans le disque unité et on va voir qu'il y a des resemblenses et des différences entre les deux cas : complexe et disque unité.

Chapitre 1

Eléments de la Théorie de R. Nevanlinna

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Définition 1.1.1 *Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe où $a \neq \infty$, alors on définit $m(r, a, f)$ la fonction de proximité de la fonction f au point a par*

$$m(r, a, f) = m(r, \frac{1}{f-a}) = \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta \quad si \quad a \neq \infty,$$

et

$$m(r, \infty, f) = m(r, f) = \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta \quad si \quad a = \infty,$$

où $\ln^+ x = \max(0, \ln x)$ pour $x > 0$ et on définit $N(r, a, f)$ la fonction a-points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$ par

$$N(r, a, f) = N(r, \frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \ln r \; d\theta \quad si \quad a \neq \infty$$

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \ln r \; d\theta \; si \, a = \infty$$

et

$$\overline{N}(r, a, f) = \overline{N}(r, \frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{\bar{n}(t, a, f) - \bar{n}(0, a, f)}{t} dt + \bar{n}(0, a, f) \ln r \; d\theta \; si \, a \neq \infty$$

$$\overline{N}(r, \infty, f) = \overline{N}(r, f) = \int_0^r \frac{\bar{n}(t, \infty, f) - \bar{n}(0, \infty, f)}{t} dt + \bar{n}(0, \infty, f) \ln r \; d\theta \; si \, a = \infty,$$

où

$n(t, a, f)$ désigne le nombre des zéros de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq t$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité ;
$n(t, \infty, f)$ désigne le nombre des pôles de la fonction $f(z)$ dans le disque $|z| \leq t$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité ;
$\overline{n}(t, a, f)$ désigne le nombre des zéros distincts de l'équation $f(z) = a$ dans le disque$|z| \leq t$; et :
$\overline{n}(t, \infty, f)$ désigne le nombre des pôles distincts de la fonction $f(z)$ dans le disque $|z| \leq t$.
On pose $N(r, \infty, f) = N(r, f)$ et $m(r, \infty, f) = m(r, f)$.
On définit $T(r, f)$ la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction f par

$$T(r, f) = N(r, f) + m(r, f)$$

1.2 Premier Théorème fondamental de R.Nevanlinna

Théorème 1.2.1 *Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors pour tout nombre complexe a, on a*

$$N(r, a, f) + m(r, a, f) = T(r, f) + \varepsilon(r, a),$$

où $\varepsilon(r, a) = O(1)$ $(r \to \infty)$.

1.3 L'ordre et l'hyper ordre de la croissance

Définition 1.3.1 *Soit f une fonction méromorphe dans le plan complexe. On définit l'ordre $\sigma(f)$ de la fonction f par*

$$\sigma(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r} = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r}$$

et on définit l'hyper ordre $\sigma_2(f)$ de la fonction f par

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\ln \ln T(r, f)}{\ln r} = \limsup_{r \longrightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \ln M(r, f)}{\ln r},$$

où $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Exemple 1.3.1
i) Soit $f(z) = e^z$. Nous avons $n(t, f) = 0$ car f n'admet pas de pôles, par conséquent

$$N(r, f) = 0.$$

De plus

$$\begin{aligned} m(r, f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| e^{r \cos \theta} \right| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \theta) d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (r \cos \theta) d\theta \right) \\ &= \frac{r}{2\pi}(1 + 1) = \frac{r}{\pi}. \end{aligned}$$

Donc

$$T(r,f)=\frac{r}{\pi}.$$

D'où

$$\sigma(e^z)=\limsup_{r\longrightarrow+\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}=1.$$

ii) Soient $P(z)=a_pz^p+...+a_0$ *un polynôme de degré* $p>0$ *et* $f(z)=e^{p(z)}$*, alors*

$$T(r,f)\sim\frac{|a_p|}{\pi}r^p(r\longrightarrow\infty).$$

D'où

$$\sigma(e^{p(z)})=p.$$

Par exemple

$$\sigma(e^{z^2})=2,\quad \sigma(e^{z^3+3z^2+1})=3.$$

iii) Soit $f(z)=exp(e^z)$*, alors*

$$T(r,f)\sim\frac{e^z}{(2\pi^3r)^{\frac{1}{2}}}(\text{quand } r\longrightarrow\infty).$$

D'où

$$\sigma(e^{e^z})=\infty.$$

Exemple 1.3.2

$$\sigma_2(e^z)=0,\quad \sigma_2(\exp(e^z))=1,\quad \sigma_2(\exp(e^{z^3}))=3.$$

Définition 1.3.2 *L'ordre d'une fonction méromorphe* $f(z)$ *dans le disque unité* $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$*, est défini par*

$$\sigma(f)=\limsup_{r\longrightarrow 1^-}\frac{\log^+T(r,f)}{\log\frac{1}{1-r}},$$

où $T(r,f)$ *la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction* f*, et pour toute fonction analytique* $f(z)$ *dans* D*, on a*

$$\sigma_M(f)=\limsup_{r\longrightarrow 1^-}\frac{\log^+\log^+M(r,f)}{\log\frac{1}{1-r}},$$

où $M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|$.

Remarque 1.3.1 *Tsuji [27, p. 205], a démontré que*

$$\sigma(f)\le\sigma_M(f)\le\sigma(f)+1.$$

Par exemple la fonction $g(z)=\exp\left\{\frac{1}{(1-z)^\mu}\right\}$ *satisfait* $\sigma(g)=\mu-1$ *et* $\sigma_M(g)=\mu$*. Evidemment, on a* $\sigma(f)<\infty$ *si et selement si* $\sigma_M(f)<\infty$*.*

Définition 1.3.3 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le disque unité D. f est dite admissible si*

$$\limsup_{r \longrightarrow 1^-} \frac{T(r,f)}{\log \frac{1}{1-r}} = \infty,$$

et dite non admissible si

$$\limsup_{r \longrightarrow 1^-} \frac{T(r,f)}{\log \frac{1}{1-r}} < \infty.$$

Définition 1.3.4 *Soit f une fonction analytique dans D, et $q \in [0, \infty)$. On dit que f appartient à l'espace Hardy H_q^∞ si on a*

$$\sup_{z \in D} \left(1 - |z|^2\right)^q |f(z)| < \infty.$$

On dit que f est $\mathcal{H}$-fonction quand $f \in H_q^\infty$ pour un certain q.

1.4 La mesure linéaire et la mesure logarithmique

Définition 1.4.1 *Supposons que $E \subset [1, +\infty)$, on désigne par $m(E)$ la mesure linéaire de l'ensemble E et par $lm(E)$ la mesure logarithmique de l'ensemble E, avec*

$$m(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t) dt,$$

et

$$lm(E) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_E(t)}{t} dt,$$

où $E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E.

Exemple 1.4.1
i) La mesure linéaire de l'ensemble $E = [2, e] \subset [1, +\infty)$ est

$$m(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t) dt = \int_2^e dt = e - 2.$$

ii) La mesure logarithmique de l'ensemble $E = [2, e] \subset [1, +\infty)$ est

$$lm(E) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_E(t)}{t} dt = \int_2^e \frac{dt}{t} = 1 - \ln 2.$$

iii) La mesure linéaire d'un ensemble fini E est nulle, $m(E) = 0$.

1.5 L'indice central et le terme maximal

Définition 1.5.1 *Soit* $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une fonction entière. Pour tout* $r > 0$ *la série* $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ *est convergente. D'où*

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| r^n = 0,$$

et le terme maximal $\mu(r, f) = \{\max |a_n| r^n, n \in \mathbb{N}\}$ *est bien défini.*
On définit l'indice central par $\upsilon(r, P) = \max\{m : |a_m| r^m = |a_n| r^n\}$.

Exemple 1.5.1

1. *Soit le polynôme* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$, $a_n \neq 0$, *on a*

$$\mu(r, p) = |a_n| r^n, \quad \text{quand } r \to \infty,$$

et

$$\upsilon(r, p) = n.$$

2. *Soit* $f(z) = e^z$. *Donc le développement de* f *est* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$. *Posons* $a_n = \frac{1}{n!}$. *On a*

$$\mu(r, f) = \max_{n\geq 0} |a_n| r^n = \max_{n\geq 0} \frac{1}{n!} r^n.$$

Posons $U_n = |a_n| r^n = \frac{1}{n!} r^n$. *Etudions la monotonie de la suite* U_n. *On a*

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{r}{n+1}.$$

Donc U_n *est décroissante si* $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$, *c'est à dire* $n > [r] - 1$, *où le crochet* [ ] *désigne la partie entier. La suite* U_n *est croissante si* $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$, *c'est à dire* $n < [r] - 1$, *d'où*

$$\mu(r, f) = \frac{1}{[r]!} r^{[r]},$$

et par suite

$$\upsilon(r, f) = [r].$$

Proposition 1.5.1 *Soit* f *et* g *deux fonctions méromorphes. Alors*

1.

$$\rho(f + g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\},$$

et

$$\rho(fg) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}.$$

2. Si $\rho(g) < \rho(f)$, *alors*

$$\rho(f + g) = \rho(fg) = \rho(f).$$

Chapitre 2

Croissance des solutions de l'équation $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$ où $\sigma(Q) = 1$.

2.1 Introduction et résultats

En 1962, Frei a établi le résultat suivant.

Théorème 2.1.1 *[10] Si l'équation*

$$f'' + e^{-z}f' + Cf = 0 \tag{2.1.1}$$

où ($C \neq 0$) est une constante complexe, admet une solution $f \not\equiv 0$ d'ordre fini, alors $C = -k^2$ où k est un entier positif. Inversement, pour tout entier positif k, (2.1.1) avec $C = -k^2$, admet une solution f qui est polynômiale en e^z de degré k.

Ozawa [25], Amemiya et Ozawa [1], et Gundersen [12] ont étudiés le cas où $Q(z)$ est un polynôme particulier. Langley prouva le résultat suivant pour le cas où $Q(z)$ est un polynôme général [23].

Théorème 2.1.2 *[23] Soit $Q(z)$ un polynôme non constant. Alors toutes les solutions non triviales de l'équation*

$$f'' + Ae^{-z}f' + Q(z)f = 0 \tag{2.1.2}$$

sont d'ordre infini, pour toute constante non nulle A.

Pour le cas où $Q(z)$ est une fonction entière transcendente, Gundersen a démontre le résultat suivant.

Théorème 2.1.3 *[12] Si $Q(z)$ est une fonction entière transcendante d'ordre $\sigma(Q) \neq 1$, alors toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (0.0.2) est d'ordre infini.*

En 2002, Chen a étudié le cas où $\sigma(Q) = 1$ et a établi les résultats suivants

Théorème 2.1.4 *[5] Soit $A_j(z)(\not\equiv 0)$ $(j = 0,1)$ une fonction entière avec $\sigma(A_j) < 1$. a, b sont des nombres complexes constants telles que $ab \neq 0$ et $a = cb$ $(c > 1)$. Alors toute solution $f(\not\equiv 0)$ de l'équation*

$$f'' + A_1(z)e^{az}f' + A_0(z)e^{bz}f = 0 \tag{2.1.3}$$

est d'ordre infini.

Théorème 2.1.5 *[5] Soient $A_j(z)(\not\equiv 0)$, $D_j(z)$ $(j = 0,1)$ des fonctions entières avec $\sigma(A_j) < 1$, $\sigma(D_j) < 1$. a, b deux nombres complexes constants telles que $ab \neq 0$ et $\arg a \neq \arg b$ où $a = cb$ $(c > 1)$. Alors toute solution $f(\not\equiv 0)$ de l'équation*

$$f'' + (A_1e^{az} + D_1)f' + (A_0e^{bz} + D_0)f = 0 \tag{2.1.4}$$

est d'ordre infini.

Du Théorèmes (2.1.4)-(2.1.5) et Théorèmes (2.1.2)-(2.1.3) on a le corollaire suivant

Corollaire 2.1.1 *Soit $Q(z)$ une fonction entière non constant, vérifie l'une des trois hypôthèses suivantes :*
(i) $Q(z)$ est un polynôme non constant.
(ii) $\sigma(Q) < 1$ ou $\sigma(Q) > 1$.
(iii) $Q(z) = h(z)e^{-dz}$, où $h(z)$ $(\not\equiv 0)$ est une fonction entière avec $\sigma(h) < 1$, est une constante complexe non nulle.
Alors toute solution $f(\not\equiv 0)$ de (0.0.2) est d'ordre infini.

Théorème 2.1.6 *[21] Soient $p(z) = a_nz^n + ...$, $Q(z) = b_nz^n + ...$, $(a_nb_n \neq 0)$ des polynômes non constants telles que $\arg a_n \neq \arg b_n$ ou $a_n = cb_n$ $(0 < c < 1)$, $h_1(z)$ et $h_0(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions entières avec $\sigma(h_j) < n$ $(j = 0,1)$. Alors toute solution $f(\not\equiv 0)$ de*

$$f'' + h_1(z)e^{p(z)}f' + h_0(z)e^{Q(z)}f = 0 \tag{2.1.5}$$

est d'ordre infini avec $\sigma_2(f) = n$.

En étudiant le cas où $p(z) = az$, $Q(z) = bz$ $(ab \neq 0)$, $a \neq b$ où a, b sont des nombres complexes, on trouve le Théoème suivant.

Théorème 2.1.7 *[5] Soient a, b des nombres complexes non nuls et $a \neq b$, $Q(z)$ est un polynôme non constant ou $Q(z) = h(z)e^{bz}$ où $h(z)$ est un polynôme non nul. Alors toute solution $f(\not\equiv 0)$ de l'équation*

$$f'' + e^{az}f' + Q(z)f = 0 \tag{2.1.6}$$

est d'ordre infini et $\sigma_2(f) = 1$.

Du Théoème (2.1.6), on trouve le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.2 *Soient $b \neq -1$ un nombre complexe et $h(z)$ un polynôme non nul. Alors toute solution $f(\not\equiv 0)$ de l'équation*

$$f'' + e^{-z}f' + h(z)e^{bz}f = 0$$

est d'ordre infini avec $\sigma_2(f) = 1$.

2.2 Lemmes préliminaires

Dans cette partie du Chapitre 2, nous présentons des lemmes nécessaires pour la démonstration des Théorèmes données précédemments.

Lemme 2.2.1 *Soit $f(z)$ une fonction entière. Si $\left|f^{(k)}(z)\right|$ est non borné sur le rayon $\arg z = \theta$, alors il existe une suite infinie de points $z_n = r_n e^{i\theta}$ $(n = 1, 2, ...)$, où $r_n \to \infty$, telle que $f^{(k)}(z_n) \to \infty$ et*

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(k)}(z_n)}\right| \leq |z_n|^{k-j}(1 + \circ(1)) \quad (j = 0, ..., k-1). \tag{2.2.1}$$

Preuve
Posons $M(r, \theta, f^{(k)}) = \{\max\left|f^{(k)}(z)\right| : |z| \leq r, \arg z = \theta\}$. Alors, il existe une suite infinie de points $z_n = r_n e^{i\theta}$, $r_n \to \infty$, telle que pour tout n, on a $M(r_n, \theta, f^{(k)}) = \left|f^{(k)}(z_n)\right| \to \infty$ quand $n \to +\infty$. pour tout n, par $(k-j)$ intégrations itérées le long du segment $L_1 : z = r_n e^{i\theta}$, $0 < r < |z_n|$
$f^{(j)}(z_n) = f^{(j)}(0) + f^{(j+1)}(0)\frac{z_n}{1!} + ... + \frac{1}{(k-j-1)!}f^{(k-1)}(0)z_n^{k-j-1} + \int_0^{z_n} ... \int_0^{z_n} f^{(k)}(t)dtd\sigma d\lambda...$
Par suite, en utilisant l'inégalité triangulaire et l'estimation $\left|f^{(k)}(z)\right| \leq \left|f^{(k)}(z_n)\right|$ sur le segement L_1 on obtient
$\left|f^{(j)}(z_n)\right| = \left|f^{(j)}(0)\right| + \left|f^{(j+1)}(0)\right||z_n| + ... + \frac{1}{(k-j-1)!}\left|f^{(k-1)}(0)\right||z_n|^{k-j-1} + \frac{1}{(k-j)!}\left|f^{(k)}(0)\right||z_n|^{k-j}$
D'où, on aura pour $z_n \to \infty$,

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(k)}(z_n)}\right| \leq \frac{1}{(k-j)}(1 + \circ(1))|z_n|^{k-j}(j = 0, ..., k-1).$$

Lemme 2.2.2 *[13] Soit f une fonction méromorphe et transcendante avec $\sigma(f) = \sigma < \infty$, $H = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), ..., (k_q, j_q)\}$ un ensemble fini de paires d'entiers distinctes vérifiant $ki \geq j_i \geq 0$, pour $i = 1, ..., q$. Et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors*
(i) Il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ ayant une mesure linéaire nulle, tel que si $\psi \in [0, 2\pi)\backslash E$, alors il existe une constante $R_0 = R_0(\psi) > 1$ telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \psi$ et $|z| \geq R_0$ et pour tout $(k, j) \in H$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z_n)}{f^{(j)}(z_n)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)} \tag{2.2.2}$$

(ii) il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout z vérifiant $|z| \notin E \cup [0, 1]$ pour et tout $(k, j) \in H$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z_n)}{f^{(j)}(z_n)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}. \tag{2.2.3}$$

(iii) il existe un ensemble $E \subset [1, +\infty)$ de mesure linéaire finie,tel que pour tout z vérifiant $|z| \notin E \cup [0, 1]$ et pour tout $(k, j) \in H$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z_n)}{f^{(j)}(z_n)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma+\varepsilon)}. \tag{2.2.4}$$

Lemme 2.2.3 *On Suppose que* $P(z) = (\alpha + i\beta)z^n + \ldots$ *(*α, β *sont deux nombres réel,* $|\alpha| + |\beta| \neq 0$*) est un polynôme de degrée* $n \geq 1$*, et* $A(z)(\not\equiv 0)$ *est une fonction entiére avec* $\sigma(A) < n$*. Posons* $g(z) = A(z)e^{P(z)}$*,* $z = re^{i\theta}$*,* $\delta(P, \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$*. Alors pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un ensemble* $H_1 \subset [0, 2\pi)$ *de mesure linéaire nulle, tel que pour tout* $\theta \in [0, 2\pi) \backslash (H_1 \cup H_2)$*, il existe* $R > 0$ *tel que pour* $|z| = r > R$*, on a*
(i) si $\delta(P, \theta) > 0$*, alors*

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\} < \left|g(re^{i\theta})\right| < \exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\}; \qquad (2.2.5)$$

(ii) si $\delta(P, \theta) < 0$*, alors*

$$\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\} < \left|g(re^{i\theta})\right| < \exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r^n\} \qquad (2.2.6)$$

où $H_2 = \{\theta \in [0, 2\pi); \delta(P, \theta) = 0\}$ *est un ensemble fini.*

Preuve
Supposons que $g(z) = h(z)\, e^{(\alpha+i\beta)z^n}$ où $h(z) = A(z)\, e^{P_{n-1}(z)}$, $P_{n-1}(z) = P(z) - (\alpha + i\beta) z^n$, alors $\sigma(h) = s < n$. Du Lemme 2.2.2, pour tout ε donné $0 < 2\varepsilon < n - s$, il existe un $H_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle telle que pour tout $z = re^{i\theta}$ avec $|z|$ suffisamment grand et $\theta \in [0, 2\pi) - H_1$, il y a $R_0 > 1$ et pour $|z| > R_0$ nous avons

$$\left|\frac{h'\left(re^{i\theta}\right)}{h\left(re^{i\theta}\right)}\right| \leqslant r^{(s-1-\varepsilon/2)}. \qquad (2.2.7)$$

En prenant la courbe intégrante $C = \{z : \arg z = \theta, R_0 \leq |z| < r\}$, nous avons

$$\log h\left(re^{i\theta}\right) = \int_{R_0}^{r} \frac{h'\left(te^{i\theta}\right)}{h\left(te^{i\theta}\right)} e^{i\theta} dt + \log h\left(R_0 e^{i\theta}\right). \qquad (2.2.8)$$

De (2.2.7) et (2.2.8) nous obtenons

$$\left|\log h\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq r^{s+\varepsilon/2} + M \leq r^{s+\varepsilon}$$

où $M > 0$ est une constante, et

$$\left|\log\left|h\left(re^{i\theta}\right)\right|\right| \leq \left|\log h\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq r^{s+\varepsilon}$$

D'où

$$\exp\left\{-r^{s+\varepsilon}\right\} \leq \left|h\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\left\{r^{s+\varepsilon}\right\} \qquad (2.2.9)$$

De $\left|\exp\left\{(\alpha + i\beta)\left(re^{i\theta}\right)^n\right\}\right| = e^{\delta(P,\theta)r^n}$ et (2.2.9), nous avons

$$exp\left\{\delta(P,\theta)r^n - r^{s+\varepsilon}\right\} < \left|g\left(re^{i\theta}\right)\right| < exp\left\{\delta(P,\theta)r^n + r^{s+\varepsilon}\right\} \qquad (2.2.10)$$

D'où, de (2.2.10) il y a $R > R_0$ telle que pour $r > R$ le lemme 2.2.6. est vrai.

Lemme 2.2.4 *[4] Soit* $g(z)$ *une fonction entière d'ordre infini avec l'hyper ordre* $\sigma_2(g) = \sigma$*, et* $\upsilon(r)$ *l'indice central de* g*, alors*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log \upsilon(r)}{\log r} = \sigma.$$

Lemme 2.2.5 *Soient A, B deux fonctions entières d'ordre finie. Si $f(z)$ est une solution de l'équation*

$$f'' + Af' + Bf = 0, \tag{2.2.11}$$

Alors $\sigma_2(f) \leq \max\{\sigma(A), \sigma(B)\}$.

Preuve. *Supposons que $\max\{\sigma(A), \sigma(B)\} = \sigma$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et r est suffissement grand, on a*

$$|A| \leq \exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\}, |B| \leq \exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\}. \tag{2.2.12}$$

D'aprés la théorie de wiman valiron, il existe un ensemble $E \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique nulle $lmE < \infty$. On peut chiosé z qui vérifie $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$ et $|f(z)| = M(r, f)$, on a

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\upsilon_f(r)}{z}\right)^j (1 + \circ(1))(j = 1.2), \tag{2.2.13}$$

où $\upsilon_f(r)$ est l'indice central de $f(z)$. En remplacent (2.2.12) et (2.2.13) dans (2.2.11) . On obtient

$$\left(\frac{\upsilon_f(r)}{|z|}\right)^2 |1 - \circ(1)| \leq \{r^{\sigma+\varepsilon}\}\frac{\upsilon_f(r)}{|z|} + |1 + \circ(1)| + \exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\}. \tag{2.2.14}$$

Où $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$ et $|f(z)| = M(r, f)$, on a

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log \upsilon_f(r)}{\log r} \leq \sigma + \varepsilon. \tag{2.2.15}$$

Comme ε est arbitraire, d'aprés (2.2.15) et le lemme2.2.4 on a $\sigma_2(f) \leq \sigma$. □

Lemme 2.2.6 *Supposons que $P(z)$, $A(z)$, $g(z)$, $\delta(P, \theta)$ satisfaient les hypothèses du lemme 2.2.3. Alors pour toute $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique $lmE < \infty$, telle que pour tout $\theta \in [0, 2\pi)\backslash H_2$ ($H_2 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P, \theta) = 0\}$), pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$, (2.2.5) et (2.2.6) sont vérifiés.*

Preuve

Supposons que $g(z) = h(z) e^{(\alpha+i\beta)z^n}$ où $h(z) = A(z) e^{P_{n-1}(z)}$, $P_{n-1}(z) = P(z) - (\alpha + i\beta) z^n$, alors $\sigma(h) = s < n$. On utilise le même démonstration utilisée dans le lemme 2.2.3 [3], on obtient que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique $lmE < \infty$, telle que pour tout z satisfie $z = re^{i\theta}$, $r \notin [0, 1] \cup E$, on a

$$exp\left\{-r^{s+\varepsilon}\right\} \leq \left|h\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq exp\left\{r^{s+\varepsilon}\right\}.$$

Lemme 2.2.7 *Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\sigma(f) = \infty$ et $\sigma_2(f) = \alpha < +\infty$; soit un ensemble $E \subset [1, +\infty)$ ayant une mesure logarithmique finie. Alors il existe une suite infinie de points $\{z_k = r_k e^{i\theta_k}\}$ tel que $|f(z_k)| = M(r_k, f)$, $\theta_k \in [0, 2\pi)$ $\lim_{k\to\infty} \theta_k = \theta_0 \in [0, 2\pi)$, $r_k \notin E$, $r_k \to \infty$ et pour tout $\varepsilon > 0$, et pour r_k assez grand, on a*

$$\limsup_{r_k\to\infty} \frac{\log \upsilon(r_k)}{\log r_k} = \infty, \tag{2.2.16}$$

$$\exp\{r_k^{\alpha-\varepsilon}\} < \upsilon(r_k) < \exp\{r_k^{\alpha+\varepsilon}\}, \tag{2.2.17}$$

où $\upsilon_f(r)$ est l'indice central de $f(z)$.

Preuve. *Du lemme (2.2.4) et* $\sigma_2(f) = \alpha$ *, on a*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log \upsilon(r)}{\log r} = \sigma_2(f) = \alpha < \infty.$$

Il existe une suite finie de points $\{r'_k\}$ $(r'_k \to \infty)$ *vérifiant*

$$\limsup_{r'_k\to\infty} \frac{\log\log \upsilon(r'_k)}{\log r'_k}. \tag{2.2.18}$$

Sachant que $lmE = \delta < \infty$ *alors il existe un point* $r_k \in \left[r'_k, (1+\delta)r'_k\right] \backslash E$. *Comme*

$$\frac{\log\log \upsilon(r_k)}{\log r_k} > \frac{\log\log \upsilon(r'_k)}{\log\left[(1+\delta)r'_k\right]} = \frac{\log\log \upsilon(r'_k)}{\log r'_k \left[1 + \frac{\log(1+\delta)}{\log r'_k}\right]},$$

alors on a

$$\limsup_{r_k\to\infty} \frac{\log\log \upsilon(r_k)}{\log r_k} = \alpha.$$

D'où (2.2.17) et (2.2.16) sont vérifiées. On prend, $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ $,\theta_k \in [0, 2\pi)$, *tel que* $|f(z_k)| = M(r_k, f)$. *Il existe une sous suite* $\{\theta_{k_j}\}$ *de* $\{\theta_k\}$ *tel que* $\lim_{k\to\infty} \theta_k = \theta_0 \in [0, 2\pi)$. □

2.3 Preuve du Théorème 2.1.4

Supposons que $f(z)$ est une fonction transcendente de (2.1.3) avec $\sigma(f) = \sigma < \infty$. D'aprés le lemme 2.2.2, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$, de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi)\backslash E_1$, alors il existe une constante $R_0 = R_0(\theta) > 1$ tel que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$ et $|z| = r \geq R_0$, on a

$$\left|\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right| \leq r^{\sigma-1+\varepsilon}. \tag{2.3.1}$$

Soient $az = (\alpha + \beta)re^{i\theta}$ $,\alpha, \beta$ des nombres réels. Posons $\delta(az, \theta) = \alpha\cos n\theta - \beta \sin n\theta$, $\delta(bz, \theta) = \delta(az, \theta)/c$. Du lemme 2.2.3, on sait que pour tout ε $(0 < \varepsilon < 1)$, il existe un ensemble $H_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle tel que pour tout $\theta \in [0, 2\pi)\backslash(H_1 \cup H_2)$ $(H_2 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(az, \theta) = 0\}$ est un ensemble fini). Il existe $R_1 > 0$ tel que $|z| = r \geq R_1$, on a
(i) si $\delta(az, \theta) < 0$, alors

$$\left|A_1(re^{i\theta})e^{are^{i\theta}}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(az,\theta)r\}. \left|A_0(re^{i\theta})e^{bre^{i\theta}}\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\frac{1}{c}\delta(az,\theta)r, \tag{2.3.2}$$

(ii) si $\delta(az, \theta) > 0$, alors

$$\left|A_1(re^{i\theta})e^{are^{i\theta}}\right| \geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(az,\theta)r\}. \left|A_0(re^{i\theta})e^{bre^{i\theta}}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\frac{1}{c}\delta(az,\theta)r\}. \tag{2.3.3}$$

Maintenant on prend $\theta \in [0, 2\pi)\backslash(E_1 \cup H_1 \cup H_2)$ ($E_1 \cup H_1 \cup H_2$ sont de mesure linéaire nulles), alors θ vérifie $\delta(az, \theta) < 0$ ou $\delta(az, \theta) > 0$, on prend deux cas

1erCas. $\delta(az, \theta) < 0$. Du $a = cb$, $\delta(bz, \theta) = (1/c)\delta(az, \theta) < 0$. Du (2.1.3), on a

$$1 \leq |A_1(z)e^{az}| \left|\frac{f'(z)}{f''(z)}\right| + \left|A_0(z)e^{bz}\right| \left|\frac{f(z)}{f''(z)}\right|. \tag{2.3.4}$$

Si $\left|f''(re^{i\theta})\right|$ est non borné sur le rayon $\arg z = \theta$, alors Du lemme 2.2.1, il existe une suite finie de points $\{z_n = r_n e^{i\theta}\}$ où $r_n \to \infty$ telle que $f''(z_n) \to \infty$ et

$$\left|\frac{f(r_n e^{i\theta})}{f''(r_n e^{i\theta})}\right| \leq r_n^2(1 + \circ(1)), \left|\frac{f'(r_n e^{i\theta})}{f''(r_n e^{i\theta})}\right| \leq r_n(1 + \circ(1)). \tag{2.3.5}$$

En remplacent (2.3.2) et (2.3.5) dans (2.3.4), on a, quand $n \to \infty$,

$$1 \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(az, \theta)r_n\}r_n(1 + \circ(1)) + \exp\left\{(1-\varepsilon)\frac{1}{c}\delta(az, \theta)r_n\right\} r_n^2(1 + \circ(1)) \to 0.$$

Contradiction. D'où

$$|f''(z_n)| \leq M_1 \tag{2.3.6}$$

est vérifié sur $\arg z = \theta$, où $M_1 > 0$ est une constante. On prend l'intégrale curvilinne $\Gamma = \{t : \arg t = \theta, \, 0 \leq |t| \leq |z|\}$, du (2.3.6) et

$$f'(z) = f'(0) + \int_0^z f''(t)dt \tag{2.3.7}$$

on obtient

$$|f'(z)| \leq |z| \, M_2,$$

où $M_2 > 0$ est une constante. Analogiquement, du (2.3.7) on obtient $|f(z)| \leq M |z|^2$ ($M > 0$ est une constante) sur le rayon $\arg z = \theta$.

2èmeCas. $\delta(az, \theta) > 0$. Alors $\delta(bz, \theta) = (1/c)\delta(az, \theta) > 0$. Du (2.1.3), on a

$$\left|A_1(re^{i\theta})e^{are^{i\theta}}\right| \leq \left|\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right| + \left|A_0(re^{i\theta})e^{bre^{i\theta}}\right| \left|\frac{f(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right|. \tag{2.3.8}$$

Si $\left|f'(re^{i\theta})\right|$ est non borné sur le rayon $\arg z = \theta$, alors d'aprés le lemme 2.2.1, il existe une suite finie de points $\{z_n = r_n e^{i\theta_n}\}$, où $r_n \to \infty$ telles que $f'(z_n) \to \infty$ et

$$\left|\frac{f(r_n e^{i\theta})}{f'(r_n e^{i\theta})}\right| \leq r_n(1 + \circ(1)). \tag{2.3.9}$$

En remplacent (2.3.1) , (2.3.3) et (2.3.9) dans (2.3.8). On a

$$\begin{aligned} & \exp\{(1-\varepsilon)\delta(az, \theta)r_n\} \\ \leq \; & \left|A_1(r_n e^{i\theta})e^{ar_n e^{i\theta}}\right| \\ \leq \; & r_n^{\sigma-1+\varepsilon} + \exp\left\{(1+\varepsilon)\frac{1}{c}\delta(az, \theta)r_n\right\} r_n(1 + \circ(1)) \\ \leq \; & r_n^{\sigma+\varepsilon} \exp\left\{(1+\varepsilon)\frac{1}{c}\delta(az, \theta)r_n\right\} r_n(1 + \circ(1)). \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

On prend ε tel que

$$0 < 2\varepsilon < \frac{c-1}{c+1}. \tag{2.3.11}$$

Du (2.3.10) et (2.3.11), on a

$$\exp\{\frac{(c+1)}{c}\varepsilon\delta(az,\theta)r_n\} \leq r_n^{\sigma+\varepsilon}(1+\circ(1)),$$

qui mene à une contraduction. D'où

$$\left|f'(re^{i\theta})\right| \leq M \tag{2.3.12}$$

est vérifié sur $\arg z = \theta$, où $M > 0$ est une constante. On utilise le même raisonement, on obtient que $|f(z)| \leq M|z|^2$ sur $\arg z = \theta$.
Maintenent on démontre que la solution de (2.1.3) ne peut pas être un polynôme non nul. Supposons $f(z)$ est une solution polynômiale non nulle de (2.1.3). On peut prendre le rayon $\arg z = \theta$ tel que $\delta(az,\theta) > 0$. Du lemme 2.2.3 et (2.1.3), pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \frac{c-1}{c+1})$, pour r assez grand, on a

$$\begin{aligned} & \exp\{(1-\varepsilon)\delta(az,\theta)r\}r^{k-1}(1+\circ(1)). \\ \leq & \left|A_1(re^{i\theta})e^{are^{i\theta}}\right| \\ \leq & \left|f''(re^{i\theta})\right| + \left|A_0(re^{i\theta})e^{bre^{i\theta}}f(re^{i\theta})\right| \\ \leq & 2r^k\exp\left\{(1+\varepsilon)\frac{1}{c}\delta(az,\theta)r\right\}(1+\circ(1)), \end{aligned}$$

où $k = \deg f$. En prenant $2\varepsilon < \frac{c-1}{c+1}$ on obtient une contraduction. D'où, toute solution de (2.1.3) est d'ordre infini.

2.4 Preuve du Théorème 2.1.5

On utilise le même raisonnement utilisé dans la preuve du Théorème 2.2.4, on peut prouver que (2.1.4) n'admet pas une solution polynômiale nulle.
Supposons que $f(z)$ est une solution trascendante de (2.1.4) avec $\sigma(f) = \sigma < \infty$. D'aprés le lemme 2.2.2, pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < 1 - \sigma(D_1))$, il existe un ensemble $E_1 \in [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi)\backslash E_1$, alors il existe une constante $R_0 = R_0(\theta) > 1$, tel que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$ et $|z| = r \geq R_0$, on a

$$\left|\frac{f''(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right| \leq |z|^{2(\sigma-1+\varepsilon)}, \left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right| \leq |z|^{(\sigma-1+\varepsilon)}. \tag{2.4.1}$$

Soit $z = re^{i\theta}$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{az\} &= |a|\,r\cos(\arg a + \theta). \\ \mathrm{Re}\{bz\} &= |b|\,r\cos(\arg b + \theta). \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Maintenent on suppose que $\arg a \neq \arg b$. Du lemme 2.2.3 et (2.4.2), il existe un rayon $\arg z = \theta$ tel que $\theta \in [0, 2\pi) \backslash (E_1 \cup H_1 \cup H_2)$ (où H_1, H_2 sont définiés dans le lemme 2.2.3, $E_1 \cup H_1 \cup H_2$ sont des mesures linéaires nulles), et $\delta(az, \theta) < 0$, $\delta(bz, \theta) > 0$, et pour r assez grand, on a

$$\left| A_0(re^{i\theta})e^{bre^{i\theta}} + D_0(re^{i\theta}) \right| \geq \exp\{(1-\varepsilon)\delta(bz,\theta)r\}(1+\circ(1)), \tag{2.4.3}$$

$$\begin{aligned} & \left| A_1(re^{i\theta})e^{are^{i\theta}} + D_1(re^{i\theta}) \right| & (2.4.4) \\ \leq\ & \exp\{(1-\varepsilon)\delta(az,\theta)r\}\exp\{r^{\sigma(D_1)+\varepsilon/2}\} \leq \exp\{r^{\sigma(D_1)+\varepsilon}\}. & (2.4.5) \end{aligned}$$

D'aprés (2.1.4) et (2.4.1), (2.4.3), (2.4.4), on a

$$\begin{aligned} \exp\{(1-\varepsilon)\delta(bz,\theta)r\}(1+\circ(1)) &\leq \left| A_0e^{bz} + D_0 \right| \\ &\leq r^{2(\sigma-1+\varepsilon)}\exp\{r^{\sigma(D_1)+\varepsilon}\}r^{\sigma-1+\varepsilon} \\ &\leq 2r^{2(\sigma-1+\varepsilon)}\exp\{r^{\sigma(D_1)+\varepsilon}\}. \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

(2.4.6) est une absurde, ce qui imlique $\sigma(f) = \infty$.
Maintenent, on suppose que $a = cb$ $(0 < c < 1)$. Alors $\delta(az,\theta) = c\delta(bz,\theta)$. On utilise le même raisonnement que précident, on sait que (2.4.1) est vérifié et il existe un rayon $\arg z = \theta$ satisfie $\delta(az,\theta) = c\delta(bz,\theta) > 0$, et pour r assez grand, on a

$$|A_1e^{az} + D_1| \leq \exp\{(1+\varepsilon)c\delta(bz,\theta)r\}(1+\circ(1)). \tag{2.4.7}$$

D'aprés (2.1.4), (2.4.1), (2.4.3)et (2.4.7), on obtient

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(bz,\theta)r\}(1+\circ(1)) \leq \left| A_0e^{bz} + D_0 \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \frac{f''(z)}{f(z)} \right| + \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \exp\{(1+\varepsilon)c\delta(bz,\theta)r\}(1+\circ(1)) & (2.4.8) \\ &\leq 2r^{2(\sigma-1+\varepsilon)}\exp\{(1+\varepsilon)c\delta(bz,\theta)r\}(1+\circ(1). \end{aligned}$$

On prend ε tel que ε $(0 < 2\varepsilon < \min\left\{\frac{1-c}{1+c}, 1-\sigma(D_1)\right\}$, alors $(1-\varepsilon) - c(1+\varepsilon) > \varepsilon(1+c)$. D'aprés (2.4.8), on a

$$\exp\{\varepsilon(1+c)\delta(bz,\theta)r\} \leq 4r^{2(\sigma-1+\varepsilon)}.$$

Ceci est une contradiction.

2.5 Preuve du Théorème 2.1.7

On prouve le cas où $Q(z) = h(z)e^{bz}$ où $h(z)$ est un polynôme non nul, $b \neq a$, $ab \neq 0$. le cas où Q est un polynôme non constant, peut être prouvé par la même méthode.
Supposons que f est une solution non triviale de (2.1.6). Alors $\sigma(f) = \infty$ et $\sigma_2(f) \geq 1$, du corollaire 2.1.1 et lemme 2.2.5. On prend deux cas.

1er**cas**. $\arg a \neq \arg b$ ou $a = cb$ $(0 < c < 1)$. Du Théorème 2.1.6, on a $\sigma_2(f) \geq 1$, d'où le Théoème 2.1.7 est vérifié.
2ème**cas**. $a = cb$ $(c > 1)$. On démontre que $\sigma_2(f) = 1$. Pour celà, on suppose que $\sigma_2(f) = \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, et on démontre que $\sigma_2(f) = \alpha$ est fausse.
D'après la Théorie de wiman-valiron, on a

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\upsilon(r)}{z}\right)^j (1 + \circ(1))(j = 1.2), \tag{2.5.1}$$

où $|f(z)| = M(r, f)$ et $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique nulle, $\upsilon(r)$ est l'indice centrale de f.
Du lemme 2.2.7, il existe une suite finie de points$\{z_k = r_k e^{i\theta_k}\}$ tel que $f(z_k) = M(r_k, f)$, $\theta_k \in [0, 2\pi)$, $\lim_{k\to\infty} \theta_k = \theta_0 \in [0, 2\pi)$, $r_k \notin [0, 1] \cup E_1 \cup E_2$ (E_2 est défini dans le lemme 2.2.6) $r_k \to \infty$ et pour tout $\varepsilon > 0$, et pour r_k assez grand, on a

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log \upsilon(r_k)}{\log r_k} = \infty, \tag{2.5.2}$$

$$\exp\{r_k^{\alpha-\varepsilon}\} \leq \upsilon(r_k) \leq \exp\{r_k^{\alpha+\varepsilon}\}. \tag{2.5.3}$$

Pour θ_0, supposons que $a = r_a e^{i\varphi}$, $\delta(az, \theta_0) = \cos(\varphi, \theta_0) = \delta$, alors ils existent trois cas : (i) $\delta < 0$, (ii) $\delta > 0$, (iii) $\delta = 0$. On divise la démonstration en trois cas :
cas i. $\delta < 0$. Du $\lim_{k\to\infty} \theta_k = \theta_0$, on sait que pour k est assez grand, $\delta(bz, \theta_k) = \delta_k < 0$, $\delta(az, \theta_k) = c\delta_k < 0$, $\delta(-bz, \theta_k) = -\delta_k > 0$, $\delta(az - bz, \theta_k) = \delta(b(c-1), \theta_k) = (c-1)\delta_k > 0$. Du (2.1.6), on a

$$-e^{-bz}\frac{f''(z)}{f(z)} = e^{b(c-1)z}\frac{f'(z)}{f(z)} + h(z). \tag{2.5.4}$$

En remplacent (2.5.1) et (2.5.3) dans (2.5.4), du lemme 2.2.6, pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < 1 - \alpha)$, et pour k assez grand, on a

$$\begin{aligned} & \exp\{(1-\varepsilon)(-\delta_k)r_k\} \exp\{2r_k^{\alpha-\varepsilon}\} r_k^{-2}(1 + \circ(1)) \\ \leq & \left| -e^{-bz_k}\frac{f''(z_k)}{f(z_k)} \right| \\ \leq & \exp\{(1-\varepsilon)(c-1)\delta_k r_k\} \exp\{r_k^{\alpha+\varepsilon}\} r_k^{-1} + z_k^{m+1} \\ \leq & \exp\{(1-\varepsilon)(c-1)\delta_k r_k\} \exp\{r_k^{\alpha+\varepsilon}\} z_k^{m+1}, \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

où $m = \deg h$. Ceci est une contradiction du fait que $\delta_k < 0$ et $0 \leq \alpha < 1$.
cas ii. $\delta > 0$. De $\lim_{k\to\infty} \theta_k = \theta_0$, on sait que pour k assez grand, $\delta(az, \theta_k) = \delta_k > 0$, $\delta(-az, \theta_k) = -\delta_k < 0$, $\delta(a((1-c)/c)z, \theta_k) = ((1-c)/c)\delta_k < 0$. Du (2.1.6), on a

$$-\frac{f'(z)}{f(z)} = e^{-az}\frac{f''(z)}{f(z)} + h(z)e^{a((1-c)/c)z}. \tag{2.5.6}$$

En remplacent (2.5.1) et (2.5.3) dans (2.5.6), du lemme 2.2.6, et pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < 1-\alpha)$, et pour k assez grand, on a

$$\begin{aligned} & \frac{\upsilon(r_k)}{r_k}(1+\circ(1)) \\ \leq\ & \exp\{(1-\varepsilon)(-\delta_k)r_k\}\frac{\upsilon^2(r_k)}{r_k^2}(1+\circ(1)) \\ & +r_k^{m+1}\exp\{(1-\varepsilon)((1/c)-1)\delta_k r_k\} \\ \leq\ & \exp\{(1-\varepsilon)(-\delta_k)r_k\}\exp\{2r_k^{\alpha+\varepsilon}\}r_k^{-2}(1+\circ(1)) \\ & +r_k^{m+1}\exp\{(1-\varepsilon)((1/c)-1)\delta_k r_k\}, \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

où $m = \deg h$. Du (2.5.7) et $\alpha + \varepsilon < 1$, on a

$$\upsilon(r_k) \to 0 \quad (k \to \theta).$$

Contradictions avec (2.5.2).

cas iii. $\delta = 0$. Puisque pour tout k, $\mathrm{Re}\{a\ r_k e^{i\theta_0}\} = 0$ et la ligne $\arg z = \theta_0$ est une ligne asymptotique de $\{a\ r_k e^{i\theta_k}\}$, il existe un nombre $K > 0$ tel que quand $k > K$. On a

$$\begin{aligned} -1 &< \mathrm{Re}\{ar_k e^{i\theta_k}\} < 1. \\ -\frac{1}{c} &< \mathrm{Re}\{br_k e^{i\theta_k}\} < \frac{1}{c}. \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Du (2.1.6), (2.5.1) et (2.5.8), on obtient

$$-\left(\frac{\upsilon(r_k)}{r_k}\right)^2(1+\circ(1)) = e^{az_k}\frac{\upsilon(r_k)}{r_k}(1+\circ(1))h(z_k)e^{bz_k}. \tag{2.5.9}$$

Du (2.5.8), (2.5.9) et $c > 0$, pour r_k est assez, on a

$$\begin{aligned} \upsilon^2(r_k)(1+\circ(1)) &\leq 2r_k^2 e^{r_k^{m+1}}\upsilon(r_k)(1+\circ(1)),\ (m=\deg h), \\ \upsilon(r_k) &\leq 12r_k^{m+3}. \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

(2.5.10) contredit (2.5.2). D'où la démonstration du Théoème 2.2.7 est achevée.

Chapitre 3

Propriétés des solutions des équations differetielles linéaires avec coefficients analytiques dans le disque unité

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intèresse à étudier la croissance des solutions des équations differetiels linèaires avec coefficients analytiques dans le disque unité. On va voir qu'il y a des similitudes et différences entre le disque unité et le plan complexe.
En 2000, Heittokangas a établi les résultats suivants

Théorème 3.1.1 *[19] Soient $A(z)$ et $B(z)$ des fonctions analytiques dans le disque unité. Si $\sigma(A) < \sigma(B)$ ou $A(z)$ est non admisible et $B(z)$ est admisible, alors toute solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation differetiel linéaire*

$$f'' + A(z)f' + B(z)f = 0, \tag{3.1.1}$$

est d'ordre infini.

Théorème 3.1.2 *[19] Soient $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ des coefficients analytiques dans le disque unité de l'équation differetiel linéaire*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + ... + A_0(z)f = 0. \tag{3.1.2}$$

Soit A_d le derniér coefficient non $\mathcal{H}$-fonction dans le disque unité et les coefficients $A_{d+1}(z), ..., A_{k-1}(z)$ sont $\mathcal{H}$-fonctions. Alors l'équation (3.1.2) admet au plus d solutions linéairement indepen-dantes d'ordre fini.

En 1988, Gundersen a prouvé le résultat suivant.

Théorème 3.1.3 *[11] Soient $A(z)$ et $B(z)$ des fonctions entières. Si $\sigma(A) < \sigma(B)$ ou $A(z)$ est un polynôme et $B(z)$ est trascendente. Alors toute solution $f(z) \not\equiv 0$ de 3.1.1 est d'ordre infini.*

En 1962, Frei a établi le résultat suivant.

Théorème 3.1.4 *[9] Soient $A_0(z), ..., A_{k-1}(z)$ des fonctions entières. Soit A_d le dernier coefficient trascendent de l'équation 3.1.2 et $A_{d+1}(z), ..., A_{k-1}(z)$ sont des polynômes. Alors l'équation (3.1.2) admet au plus d solutions entières linéairement independantes d'ordre fini.*

En 2012, Hamouda a établit les résultats suivants.

Théorème 3.1.5 *[14] Soient $A(z)$ et $B(z) \not\equiv 0$ des fonctions analytiques dans le disque unité. Supposons que $\mu > 1$ est une constante réelle, b et z_0 sont des nombres complexes telles que $b \neq 0$, $|z_0| = 1$. Si $A(z)$ et $B(z)$ sont analytiques en z_0, alors toute solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation différetielle*

$$f'' + A(z)f' + B(z)e^{\frac{b}{(z_0-z)^\mu}} f = 0, \tag{3.1.3}$$

est d'ordre infini.

Exemple 3.1.1 *Toute solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation différetiel*

$$f'' + A(z)e^{\frac{1}{(1+z)^\alpha}} f' + B(z)e^{\frac{1}{(1-z)^\beta}} f = 0,$$

est d'ordre infini. Où $\alpha > 0$, $\beta > 0$ sont des constantes reélles, on voit que, dans le cas où $\alpha = \beta$, les coefficient sont de même ordre et de même type.

Théorème 3.1.6 *[14] Soient $A(z)$ et $B(z) \not\equiv 0$ des fonctions analytiques dans le disque unité. Supposons que $\mu > 1$ est une constante réelle, a, b et z_0 sont des nombres complexes telles que $ab \neq 0$, $\arg a \neq \arg b$, $|z_0| = 1$. Si $A(z)$ et $B(z)$ sont analytiques en z_0, alors toute solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation différetielle*

$$f'' + A(z)e^{\frac{a}{(z_0-z)^\mu}} f' + B(z)e^{\frac{b}{(z_0-z)^\mu}} f = 0, \tag{3.1.4}$$

est d'ordre infini.

Théorème 3.1.7 *[14] Soient $A(z)$ et $B(z) \not\equiv 0$ des fonctions analytiques dans le disque unité. Supposons que $\mu > 1$ est une constante réelle, a, b et z_0 sont des nombres complexes telles que $ab \neq 0$, $a = cb$ $(0 < c < 1)$, $|z_0| = 1$. Si $A(z)$ et $B(z)$ sont analytiques en z_0 alors toute solution $f(z) \not\equiv 0$ de l'équation différetielle*

$$f'' + A(z)e^{\frac{a}{(z_0-z)^\mu}} f' + B(z)e^{\frac{b}{(z_0-z)^\mu}} f = 0, \tag{3.1.5}$$

est d'ordre infini.

Théorème 3.1.8 *[14] On considère l'équation différetielle*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + ... + A_1(z)f' + B(z)e^{\frac{b}{(z_0-z)^\mu}} f = 0, \tag{3.1.6}$$

où $\mu > 1$ est une constante réelle, b et z_0 sont des nombres complexes telle que $b \neq 0$, $|z_0| = 1$, $B(z) \not\equiv 0$, $A_1(z), ..., A_{k-1}(z)$ sont des fonctions analytiques dans le disque unité telle que $A_j(z)$ est analytique en z_0 ou $A_j(z) = B_j(z)e^{\frac{b_j}{(z_0-z)^\mu}}$ où $B_j(z)$ est analytique en z_0 et $b_j = c_j b$ $(0 < c_j < 1)$ ou $\arg b_j \neq \arg b$ pour une fois au plus. Alors toute solution $f(z) \not\equiv 0$ de (3.1.6) est d'ordre infini.

3.2 Lemmes préliminaires

Pour la démonstration de ces résultats, on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 3.2.1 *[8] Soit f une fonction méromorphe dans le disque unité D d'ordre fini σ. Soit $\varepsilon > 0$ une constante, k et j sont des nombres entiers vérifiant $k > j \geq 0$. Supposons que $f^{(j)} \not\equiv 0$. Alors il existe un ensemble $E \subset [0,1)$ qui vérifie $\int_E \frac{1}{1-r}dr < \infty$, tel que pour tout $z \in D$ vérifiant $|z| \notin E$, on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq \left(\frac{1}{1-|z|}\right)^{(k-j)(\sigma+2+\varepsilon)}.$$

Lemme 3.2.2 *Soit $A(z)$ une fonction analytique en $z_0 \in \mathbb{C}$. Posons $g(z) = A(z)e^{\frac{a}{(z_0-z)^\mu}}$, ($\mu > 1$ est une constante réelle), $a = \alpha + i\beta$, $z_0 - z = Re^{i\varphi}$, $\delta_a(\varphi) = \alpha\cos(\mu\varphi) + \beta\sin(\mu\varphi)$, et $H = \{\varphi \in [0, 2\pi) : \delta_a(\varphi) = 0\}$, ($H$ est de mesure linéaire nulle). Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\varphi \in [0, 2\pi)\backslash H$, il existe $R_0 > 0$ telle que pour $0 < R < R_0$, on a*
(i) si $\delta_a(\varphi) > 0$, alors

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta_a(\varphi)\frac{1}{R^\mu}\} \leq |g(z)| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta_a(\varphi)\frac{1}{R^\mu}\}, \tag{3.2.1}$$

(ii) si $\delta_a(\varphi) < 0$, alors

$$\exp\{(1+\varepsilon)\delta_a(\varphi)\frac{1}{R^\mu}\} \leq |g(z)| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\delta_a(\varphi)\frac{1}{R^\mu}\}. \tag{3.2.2}$$

Preuve

On a

$$\left|e^{\frac{a}{(z_0-z)^\mu}}\right| = \exp\{\delta_a(\varphi)\frac{1}{R^\mu}\}. \tag{3.2.3}$$

Si z_0 est un zéro d'ordre m de $A(z)$, alors il existe $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ tel que

$$c_1' \leq |A(z)| \leq c_2',$$

Maintenant, si z_0 n'est pas un zéro de $A(z)$, alors il existe $c_1' > 0$, $c_2' > 0$ tel que

$$c_1 R^m \leq |g(z)| \leq c_2 R^m, \tag{3.2.4}$$

pour z au voisinage de z_0.
Du (3.2.3) et (3.2.4), on a

$$c_1 R^m \exp\{\delta_a(\varphi)\frac{1}{R^\mu}\} \leq |g(z)| \leq c_2 R^m \exp\{\delta_a(\varphi)\frac{1}{R^\mu}\}, \tag{3.2.5}$$

pour z au voisinage de z_0.
et

$$c_1' \exp\{\delta_a(\varphi)\frac{1}{R^\mu}\} \leq |g(z)| \leq c_2' \exp\{\ \frac{1}{R^\mu}\}, \tag{3.2.6}$$

pour z au voisinage de z_0. Du (3.2.5) et (3.2.6), on a (3.2.1) et (3.2.2).

Remarque 3.2.1 *En génerale, on peut écrire $\delta_a(\varphi) = c\cos(\mu\varphi + \varphi_0)$, où $c > 0$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$. De cette formule il est facile à démontrer que si $\mu > 1$, $\delta_a(\varphi)$ change son signe sur n'importe quel intervalle (φ_1, φ_2) de mesure linéaire égal à π.*

3.3 Preuve du Théorème 3.1.5

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de (3.1.3) d'ordre fini $\sigma(f) = \sigma < \infty$. Puisque $\mu > 1$, du remark 3.2.1 il existe $(\varphi_1, \varphi_2) \subset [0, 2\pi)$ tel que pour $z \in D$ et $\arg(z_0 - z) = \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ on a $\delta_b(\varphi) > 0$. D'aprés (3.1.3), on a

$$\left| B(z) e^{\frac{b}{(z_0 - z)^\mu}} \right| \leq \left| \frac{f''}{f} \right| + |A(z)| \left| \frac{f'}{f} \right|. \tag{3.3.1}$$

Du lemme 3.2.1, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $E \subset [0, 1)$ vérifie $\int_E \frac{1}{1-r} dr < \infty$, tel que pour tout $z \in D$ vérifie $|z| \notin E$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| \leq \left(\frac{1}{1 - |z|} \right)^{k(\sigma + 2 + \varepsilon)}, (k = 1, 2). \tag{3.3.2}$$

Du lemme 3.2.2, pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et pour $z \in D$ et $\arg(z_0 - z) = \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ avec $|z_0 - z| = R$, il existe $R_0 > 0$ tel que $0 < R < R_0$, on a

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta_b(\varphi) \frac{1}{R^\mu}\} \leq \left| B(z) e^{\frac{b}{(z_0 - z)^\mu}} \right|. \tag{3.3.3}$$

Comme $A(z)$ est analytique en z_0, pour z au voisinage de z_0

$$|A(z)| < M, \quad M > 0. \tag{3.3.4}$$

En remplacent (3.3.2), (3.3.3) et (3.3.4) dans (3.3.1), on a

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta_b(\varphi) \frac{1}{R^\mu}\} \leq \left(\frac{1}{1 - |z|} \right)^{2(\sigma + 2 + \varepsilon)} + M \left(\frac{1}{1 - |z|} \right)^{(\sigma + 2 + \varepsilon)}, \tag{3.3.5}$$

où $z \in D$, $|z| \notin E$ et $\arg(z_0 - z) = \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ avec $|z_0 - z| = R$, et $0 < R < R_0$, on a.
Des relations metriques dans le triangle (oz_0z), on a $|z|^2 = 1 + R^2 - 2R\cos\varphi^*$
et alors

$$1 - |z| = R \left(\frac{2\cos\varphi^* - R}{1 + |z|} \right). \tag{3.3.6}$$

Pour z au voisinage de z_0 et considérons que φ est fixé, alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\frac{2\cos\varphi^* - R}{1 + |z|} > \varepsilon_0; \tag{3.3.7}$$

pour $0 < \varphi^* < \frac{\pi}{2}$. D'aprés (3.3.6) et (3.3.7), on a

$$\frac{1}{1 - |z|} < \frac{1}{\varepsilon_0 R}. \tag{3.3.8}$$

De (3.3.5) et (3.3.8), on a

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta_b(\varphi) \frac{1}{R^\mu}\} \leq M' \left(\frac{1}{\varepsilon_0 R} \right)^{2(\sigma + 2 + \varepsilon)}, \; M' > 1,$$

contradiction quand $R \to \infty$.

3.4 Preuve du Théorème 3.1.6

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de (3.1.4) d'ordre fini $\sigma(f) = \sigma < \infty$. Puisque $\arg a \neq \arg b$ et $\mu > 1$, alors il existe $(\varphi_1, \varphi_2) \subset [0, 2\pi)$ tel que pour $z \in D$ et $\arg(z_0 - z) = \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ on a $\delta_b(\varphi) > 0$ et $\delta_a(\varphi) < 0$. D'aprés (3.1.4), on a

$$\left|B(z)e^{\frac{b}{(z_0-z)^\mu}}\right| \leq \left|\frac{f''}{f}\right| + |A(z)| \left|A(z)e^{\frac{a}{(z_0-z)^\mu}}\right| \left|\frac{f'}{f}\right|. \tag{3.4.1}$$

Du lemme 3.2.1, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $E \subset [0, 1)$ vérifie $\int_E \frac{1}{1-r} dr < \infty$, tel que pour tout $z \in D$ vérifie $|z| \notin E$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq \left(\frac{1}{1 - |z|}\right)^{k(\sigma+2+\varepsilon)}, (k = 1, 2). \tag{3.4.2}$$

Du lemme 3.2.2, pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et pour $z \in D$ et $\arg(z_0 - z) = \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ avec $|z_0 - z| = R$, il existe $R_0 > 0$ tel que $0 < R < R_0$, on a

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta_b(\varphi)\frac{1}{R^\mu}\} \leq \left|B(z)e^{\frac{b}{(z_0-z)^\mu}}\right|, \tag{3.4.3}$$

et

$$\left|A(z)e^{\frac{a}{(z_0-z)^\mu}}\right| \leq \exp\{(1 - \varepsilon)\delta_a(\varphi)\frac{1}{R^\mu}\}. \tag{3.4.4}$$

En utilisant (3.4.1), (3.4.4) et (3.3.8), on a

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta_b(\varphi)\frac{1}{R^\mu}\} \leq \left(\frac{1}{\varepsilon_0 R}\right)^{2(\sigma+2+\varepsilon)} + \left(\frac{1}{\varepsilon_0 R}\right)^{(\sigma+2+\varepsilon)} \exp\{(1 - \varepsilon)\delta_a(\varphi)\frac{1}{R^\mu}\},$$

où $z \in D$, $|z| \notin E$ et $\arg(z_0 - z) = \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ avec $|z_0 - z| = R$, et $0 < R < R_0$. Contradiction quand $R \to \infty$.

3.5 Preuve du Théorème 3.1.7

Suppose que $f \not\equiv 0$ est une solution de (3.1.5) d'ordre fini $\sigma(f) = \sigma < \infty$. Puisque $\mu > 1$, alors il existe $(\varphi_1, \varphi_2) \subset [0, 2\pi)$ tel que pour $z \in D$ et $\arg(z_0 - z) = \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ on a $\delta_a(\varphi) > 0$. D'aprés (3.1.5), on a

$$\left|B(z)e^{\frac{b}{(z_0-z)^\mu}}\right| \leq \left|\frac{f''}{f}\right| + |A(z)| \left|A(z)e^{\frac{a}{(z_0-z)^\mu}}\right| \left|\frac{f'}{f}\right|. \tag{3.5.1}$$

Du lemme 3.2.1, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $E \subset [0, 1)$ vérifie $\int_E \frac{1}{1-r} dr < \infty$, tel que pour tout $z \in D$ vérifie $|z| \notin E$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq \left(\frac{1}{1 - |z|}\right)^{k(\sigma+2+\varepsilon)}, (k = 1, 2). \tag{3.5.2}$$

Du lemme 3.2.2, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour $z \in D$ et $\arg(z_0 - z) = \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ avec $|z_0 - z| = R$, il existe $R_0 > 0$ tel que $0 < R < R_0$, on a

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta_b(\varphi)\frac{1}{R^\mu}\} \leq \left|B(z)e^{\frac{b}{(z_0-z)^\mu}}\right|, \tag{3.5.3}$$

et

$$\left|A(z)e^{\frac{a}{(z_0-z)^\mu}}\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\delta_a(\varphi)\frac{1}{R^\mu}\}. \tag{3.5.4}$$

En remplacant (3.5.2 , (3.5.4) dans (3.5.1), et on prend $\delta_a(\varphi) = c\delta_b(\varphi)(0 < c < 1)$

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta_b(\varphi)\frac{1}{R^\mu}\} \leq \left(\frac{1}{\varepsilon_0 R}\right)^{2(\sigma+2+\varepsilon)} + \left(\frac{1}{\varepsilon_0 R}\right)^{(\sigma+2+\varepsilon)} \exp\{(1+\varepsilon)\delta_a(\varphi)\frac{1}{R^\mu}\},$$

on prend ε tel que $(0 < \varepsilon < \frac{1-c}{1+c})$, contradiction quand $R \to \infty$.

3.6 Preuve du Théorème 3.1.8

Soit

$$A_{j_1}(z) = B_{j_1}(z)e^{\frac{b_{j_1}}{(z_0-z)^\mu}}$$

tel que $B_{j_1}(z)$ est analytique en z_0 et $\arg b_{j_1} \neq \arg b$,

$$A_{j_m}(z) = B_{j_m}(z)e^{\frac{b_{j_m}}{(z_0-z)^\mu}}(m = 2, ..., s)$$

tel que $B_{j_m}(z)$ est analytique en z_0 et $b_{j_m} = c_{j_m}b(0 < c_{j_m} < 1)$, et les coefficients $A_{j_m}(z)$ sont analytique en z_0 $(m = s+1, ..., k-1)$. Supposons $f \not\equiv 0$ est une solution de l'eq(3.1.6) d'ordre fini $\sigma(f) = \sigma < \infty$. Puisque $\arg b_{j_1} \neq \arg b$, alors il existe $(\varphi_1, \varphi_2) \subset [0, 2\pi)$ tel que pour $z \in D$ et $\arg(z_0 - z) = \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$ on a $\delta_b(\varphi) > 0$ $\delta_{b_j}(\varphi) < 0$. On suppose que $c = \max\{c_{j_m} : m = 2, ..., s\}$. On a $\delta_{b_{j_m}}(\varphi) = \delta_{c_{j_m}}\delta_b(\varphi) \leq c\delta_b(\varphi)$. Du (3.1.6), on a

$$\begin{aligned}\left|B(z)e^{\frac{b}{(z_0-z)^\mu}}\right| &\leq \left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + \sum_{m=s+1}^{k-1}|A_{j_m}(z)|\left|\frac{f^{(j_m)}}{f}\right| \\ &\quad + \sum_{m=2}^{s}|A_{j_m}(z)|\left|\frac{f^{(j_m)}}{f}\right| + |A_{j_1}(z)|\left|\frac{f^{(j_1)}}{f}\right|.\end{aligned} \tag{3.6.1}$$

En utilisant la même démonstration précidente, du (3.6.1), on a

$$\begin{aligned}&\exp\{(1-\varepsilon)\delta_b(\varphi)\frac{1}{R^\mu}\} \\ \leq\ &\left(\frac{1}{\varepsilon_0 R}\right)^{k(\sigma+2+\varepsilon)} + \left(M + (s-1)\exp\{(1+\varepsilon)c\delta_b(\varphi)\frac{1}{R^\mu} + \exp\{(1-\varepsilon)\delta_{b_{j_1}}(\varphi)\frac{1}{R^\mu}\}\right).\end{aligned}$$

On prend ε tel que $(0 < \varepsilon < \frac{1-c}{1+c})$, contradiction quand $R \to \infty$.

Remarque 3.6.1 *Considérons dans le cas où $0 < \mu \leq 1$, en générale cette méthode n'est pas valide. Par exemple, pour l'équation différentielle*

$$f'' + A(z)f' + B(z)e^{\frac{-1}{(1-z)}}f = 0,$$

où $A(z)$ et $B(z)$ sont analytique en $z_0 = 1$. D'où, on ne peut pas utiliser cette méthode, puisque pour tout $z \in D$ on a $\delta_{-1}(\varphi) < 0$, où $\varphi = \arg(1 - z)$. De plus, pour l'équation différetielle

$$f'' + A(z)f' + B(z)e^{\frac{1}{(1-z)}}f = 0,$$

cette méthode est valide. Alors toute solution $f \not\equiv 0$ de cette équation est d'ordre infini. En générale cette méthode est valide pour $0 < \mu \leq 1$ sauf dans le cas où $\delta_b(\varphi) < 0$ pour $\arg z_0 - \frac{\pi}{2} < \varphi < \arg z_0 + \frac{\pi}{2}$.

Bibliographie

[1] **I. Amemyiya, M. Ozawa**. *Non-existence of finite order solutions of* $w'' + e^{-z}w' + Q(z)w = 0$, Hokkaido Math. J ; 10(1981), 1-17.

[2] **B. Belaïdi and S. Hamouda**, *Orders of solutions of an n-th order linear differential equations with entière coefficients,* Electronic J. Differ. Equations, N° 63, Vol. 2001 (2001), 1-5.

[3] **Chen. Zong-xuan**, *The growth of Solutions of class of second order differential equations with entière coefficients.* Chen. Ann. of Math. (in Chinesse), 1999. 20A(1) :7-14.

[4] **Chen. Zong-xuan. Yang Chung -Chun**, *Some further results on the zeros and growths of entière solutions of second order linear differiential equations*, Kodai. Math. J ; 22(1999),273-285.

[5] **Z. X. Chen** ; *The growth of solutions of* $f'' + e^{-z}\ f' + Q(z)f = 0$*, where the order* $(Q) = 1$,
Sci, China Ser. A, 45 (2002), 290-300.

[6] **Z. X. Chen, K. H. Shon** ; *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations,* Acta. Mathematica Scientia, 24 B (1) (2004), 52-60.

[7] **Z. X. Chen, K. H. Shon** ; *The growth of solutions of differential equations with coefficients of small growth in the disc*, J. Math. Anal. Appl. 297 (2004) 285-304.

[8] **I. Chyzhykov, G. Gundersen, J. Heittokangas** ; *Linear differential equations and logarithmic derivative estimates*, Proc. London Math. Soc ; 86 (2003), 735-754.

[9] **M. Frei** ; *Sur l'ordre des solutions entières d'une équation différentielle linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris 236 (1953), 38-40.

[10] **M. Frei** ; *Uber die subnormalen losungen der differentialgleichung* $w'' + e^{-z}\ w' + Q(konst.)w = 0$, comment. Math. Helv, 1962. 36 : 1-8.

[11] **G. G. Gundersen** ; *Finite order solutions of second order linear differential equations,* Trans.Amer. Math. Soc. 305 (1988), 415-429.

[12] **G. G. Gundersen** ; *On the question of whether* $f'' + e^{-z}\ f' + B(z)f = 0$ *can admit a solution* $f \not\equiv 0$ *of finite order,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh 102A (1986), 9-17.

[13] **G. G. Gundersen**, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function , plus similar estimates* J. London Math. Soc. (2) 37 (1988), 88-104.

[14] **S. Hamouda,** *Proprieties of solutions to lineair differential equations with analytic coefficients in the unit disc,* Electronic J. Differ. Equations, N° 77, Vol. 2012 (2012), 1-8.

[15] **W. K. Hayman** ; *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[16] **W. K. Hayman** ; *The local growth of power series :asurvey of the Wiman-Valiron method* , Canad. Math. Bull,1974, 17 :817-358.

[17] **He Yu-zaz. Xiao Xiu-zhi**, *Algebroid Functions and Ordinary Differetiel Equations (in Chinesse)*, Bejing ; Science Press, 1988.

[18] **Hille, E**, *Ordinary Differentiel Equations in the complexe Domain*, New York :Wiley, 1976.

[19] **J. Heittokangas** ; *On complex differential equations in the unit disc*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. 122 (2000) 1-14.

[20] **J. Heittokangas, R. Korhonen, J. Rattya** ; *Fast growing solutions of linear differential equations in the unit disc*, Result. Math. 49 (2006), 265-278.

[21] **Kwon Ki-Ho**, *Nonexistence of finite order solutions of certain second order linear differential equations*, Kodai Math. J., 1996, 19z 378-387.

[22] **I. Laine**, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, W. de Gruyter, Berlin-New York, 1993.

[23] **I. Langly, M. Ozawa**, *On complexe oscilation and a probleme of Ozawa*, Kodia Math. J. 1986, 9 :430-439.

[24] **A. I. Markushevich**, *Theory of functions of a complexe variable, Vol. II, translated by R. A. Silverman*, Prentice-Hall, (Englewood Cliffs, New Jersey, 1965).

[25] **M. Ozawa**, *On a solution of* $w'' + e^{-z}\ w' + (az+b)w = 0$, Kodia Math. J. 1980, 3 : 295-309.

[26] **L. Kinnunen** ; *Linear differential equations with solution of finite iterated order*, Southeast Asian Bull. Math. 22 (4) (1998) 1-8.

[27] **M. Tsuji** ; *Differential theory in modern function theory*, Chelsea, New York, 1975, reprint of the 1959 edition.

[28] **Valiron, G** *; Lectures on the General Theory of Integral Functtions*, New York : Chelsea, 1949.

[29] **L. Yang** ; *Value distribution theory,* Springer-Verlag Science Press, Berlin-Beijing. 1993.

[30] **L. Yang** ; *Value distribution theory and new research (in chinese)*, Bijing :Science Presss,1982.

[31] **Yi Hong-Xun.Yang Chung-Chun**, *The Uniqueness Theory of Meromoephic Functions (in chinese),* Bijing :Science Presss,1995.