

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

Département de mathématiques

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de MASTER

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Harmonique et EDP

THEME

**Application de la théorie des ondelettes sous Matlab
Dans L'imagerie Médicale(Genou :Patella)**

Soutenue le 22 06 2013

Présenté par

Mr : Mansour BELARBI

Devant le jury :

Encadreur	Mme. Amina LAHMAR-BENBERNOU	Professeur	U.Mostaganem
Président	Mme. Samira HAMANI-BELARBI	M.C.A	U.Mostaganem
Examineur	Mr. Mohamed Amine GHEZZAR	M.A.B	U.Mostaganem

Année universitaire : 2012/2013

Table des matières

Remerciements	3
Introduction	4
1 Notions préliminaires	5
1.1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ [6]	5
1.1.1 Théorème de Riemann-Lebesgue	5
1.1.2 Transformée de Fourier inverse dans $L^1(\mathbb{R})$	6
1.1.3 La convolution	8
1.2 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ ([6],[13])	10
1.2.1 Extension de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$	11
2 Théorie des ondelettes et analyse multi-résolution	13
2.1 Rappels sur les ondelettes ([7],[10],[12])	13
2.1.1 La transformée en ondelettes continue (TOC)	13
2.1.2 Relation entre échelle et fréquence	14
2.1.3 Inversion de la transformée en ondelette continue (La reconstruction du signal)	15
2.1.4 La transformée en ondelette discrète (TOD)	16
2.2 Base d'ondelettes dans D1 ([4],[7],[10])	16
2.2.1 Analyse multi-résolution (AMR)	17
2.2.2 Base de Riesz	18
2.3 Base d'ondelettes dans D2 ([9],[10],[11])	19
2.3.1 Analyse multi-résolution dans D2 (bidimensionnels)	19
3 Application à l'imagerie médicale	22
3.1 Traitement d'image de la patella sous Matlab	23
3.1.1 L'imagerie médicale ([1],[3],[14])	23
3.1.2 Genou (Patella) ([2],[3],[16])	24
3.1.3 Matlab ([5],[8],[11])	25
3.2 Analyse et comparaison d'une patella saine et pathologique	25
3.2.1 Traitement de l'image avec la commande DWT2	25
3.2.2 Traitement d'image avec la commande CWT	28
Bibliographie	32

Remerciements

J'adresse mes remerciements, en priorité, à mon encadreur Madame Amina LAHMAR-BENBERNOU Professeur à l'université de mostaganem qui m'a toujours soutenu et encouragé au cours de la rédaction de ce modeste mémoire.

Je remercie également le Docteur Hakim CHIALI pour sa disponibilité et son dévouement.

J'adresse aussi mes remerciements à tous mes professeurs qui ont toujours répondu présent à mes appels.

Sans oublier mes parents, ma femme, mes frères, mes amis et collègues, surtout ma mère qui à toujours privilégié les études.

Introduction

L'accès à l'image est seulement une première étape. Il faut en extraire l'information utile qu'elle porte, comme les anomalies tissulaires et osseuses dans le domaine médical. C'est là tout l'enjeu des méthodes de segmentation. Les mathématiques appliquées sont au centre de toutes ces opérations. La segmentation est la délimitation des contours d'un organe ou d'une lésion. Il s'agit d'une phase importante dans l'imagerie médicale. Dans ce cadre, la théorie des ondelettes nous ouvrent tous ces horizons. Dans notre projet de mémoire nous allons nous intéresser au genou(patella), nous donnerons des exemples au dernier chapitre([14]).

Au debut des années 1990, le mathematicien Michaël FRAZIER, spécialiste en analyse harmonique, utilisait une construction mathématique pour extraire d'un font sonore le bruit caracteristique de la coque d'un sou-marin. Victor WICKERHAUSER utilisait les mêmes mathématiques pour permettre au FBI de stocker les empreintes digitales à moindre coût. Ces études utilisent un nouveau langage mathématique, les ondelettes. La transformation de Fourier(1882), qui est un outil mathématique, utilisée dans le domaine informatique et audio-visuel, a comme défaut de cacher l'information sur le temps : elle nous informe sur les fréquences contenues dans le signal, mais tait l'instant d'émission des diverses fréquences. Elle agit comme si chaque instant du signal équivalait à tout les autres. Dans cette optique l'application des ondelettes est un outil qui décompose un signal à la fois en temps et en frèquence, indiquant non seulement les fréquences, mais aussi le temps. La première transformation en ondelette est proposée par Haar en 1910.

Yves Meyer, un des fondateurs du sujet, écrit : << à l'inverse de ce qui se passe pour les séries de Fourier, les coefficients d'une série d'ondelettes traduisent de façon simple, précise et fidèle les propriétés des fonctions, du moins les propriétés qui correspondent à une discontinuité, un événement imprévu.>>. Durant les années 80 des travaux scientifiques sur les ondelettes se formalisent et émergent par : Y. Meyer(1985) avec la notion de base orthogonale, S. Mallat(1986) avec l'analyse multi-résolution, I. Daubechies(1988) avec les ondelettes à support compact, et bien d'autres([13],[15]). Les ondelettes sont avant tout un puissant outil d'analyse mathématique, leurs application dans l'imagerie médicale sont les plus utiles.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ [6]

On rappelle que

$$L^1(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad / \quad \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty \right\}$$

Définition 1.1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformée de Fourier de f qui est notée $\mathcal{F}f$ ou \widehat{f} , la fonction définie en tout $\omega \in \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{F}f(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Remarque 1.1 La fonction f est dans $L^1(\mathbb{R})$, donc la fonction $f(t) e^{-i\omega t}$ est aussi intégrable ■

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) e^{-i\omega t}| dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt < +\infty$$

Donc \widehat{f} est bien définie. On peut avec cette intégrale mesurer la vitesse des oscillations de la fonction f à la fréquence $\omega \in \mathbb{R}$. On peut considérer cette transformation comme la projection de f sur des fonctions analysantes qui sont des "ondes pures" :

$$\psi_{x,\xi}(t) = e^{-i\xi t}$$

qui ne dépend pas du paramètre de temps t . elle nous permet d'analyser le contenu fréquentiel d'un signal.

1.1.1 Théorème de Riemann-Lebesgue

Etant donnée $f \in L^1(\mathbb{R})$ on a

1. $\mathcal{F}f$ est une fonction continue et bornée sur \mathbb{R}
2. \mathcal{F} est un opérateur linéaire et continu de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$$

3. $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0$

1.1.2 Transformée de Fourier inverse dans $L^1(\mathbb{R})$

La transformée de Fourier est un outil essentiel dans le traitement du signal.

Nous avons vu que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, \widehat{f} n'est pas nécessairement un élément de $L^1(\mathbb{R})$: on ne peut pas donc définir la formule d'inversion.

Sous cette contrainte on suppose que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

On note par $\overline{\mathcal{F}}$ l'inverse de la transformée de Fourier de f dans \mathbb{R} .

Théorème 1.1 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

en tout point t où f est continue.

Preuve. On a par définition

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i\omega u} du \right) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-i(u-t)\omega} du \right) d\omega. \end{aligned}$$

■

Etant donné que $f(u) e^{-i(u-t)\omega}$ n'est pas intégrable sur \mathbb{R}^2 , on ne peut pas appliquer directement le théorème de Fubini. Pour résoudre ce problème, on introduit pour tout entier $n \geq 1$, la fonction

$$g_n(x) = e^{-\frac{2\pi}{n}|x|}$$

dont la transformée de Fourier est

$$\widehat{g}_n(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + \left(\frac{n\omega}{2\pi}\right)^2}.$$

Les fonctions g_n et \widehat{g}_n sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $e^{i\omega t} g_n \in L^1(\mathbb{R})$ alors, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) g_n(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{\mathbb{R}} f(\omega) \widehat{g_n(\omega)} e^{i\omega t} d\omega = \int_{\mathbb{R}} f(u) \widehat{g}_n(u-t) du.$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$, on peut passer à la limite dans $\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) g_n(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue. En effet :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(\omega) = 1 \text{ pour tout } \omega \in \mathbb{R}.$$

et

$$|\widehat{f}(\omega) g_n(\omega) e^{i\omega t}| \leq |\widehat{f}(\omega)|$$

on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) g_n(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Il reste à montrer que $\int_{\mathbb{R}} f(u) \widehat{g}_n(u-t) du$ converge vers $2\pi f(t)$. Comme $\widehat{g}_n \in L^1(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}_n(\omega) d\omega = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^{+a} \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + \left(\frac{n\omega}{2\pi}\right)^2} d\omega = 2\pi.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(u) \widehat{g}_n(u-t) du - 2\pi f(t) &= \int_{\mathbb{R}} f(x+t) \widehat{g}_n(x) dx - f(t) \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}_n(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} [f(x+t) - f(t)] \widehat{g}_n(x) dx. \end{aligned}$$

Comme f est continue en t , alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / |s-t| \leq \eta \implies |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Décomposons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} [f(x+t) - f(t)] \widehat{g}_n(x) dx &= \int_{|x| \leq \eta} [f(x+t) - f(t)] \widehat{g}_n(x) dx \\ &\quad + \int_{|x| > \eta} [f(x+t) - f(t)] \widehat{g}_n(x) dx. \end{aligned}$$

Pour tout $\eta > 0$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x| \leq \eta} [f(x+t) - f(t)] \widehat{g}_n(x) dx \right| &\leq \int_{|x| \leq \eta} |f(x+t) - f(t)| |\widehat{g}_n(x)| dx \leq \varepsilon \int_{|x| \leq \eta} |\widehat{g}_n(x)| dx \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}_n(x)| dx = \varepsilon 2\pi. \end{aligned}$$

Estimons le deuxième terme : $\int_{|x| > \eta} [f(x+t) - f(t)] \widehat{g}_n(x) dx$. On a

$$\left| \int_{|x| > \eta} f(t) \widehat{g}_n(x) dx \right| = |f(t)| \left| \int_{|x| > \eta} \widehat{g}_n(x) dx \right| = |f(t)| \left(1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctg} \left(\frac{n\eta}{2\pi} \right) \right).$$

D'autre part, comme \widehat{g}_n est paire et décroissante sur \mathbb{R}_+ , donc :

$$\left| \int_{|x| > \eta} f(x+t) \widehat{g}_n(x) dx \right| \leq \widehat{g}_n(\eta) \|f\|_1$$

Puisque les deux majorents convergent vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|x| > \eta} [f(x+t) - f(t)] \widehat{g}_n(x) dx = 0.$$

Le théorème est ainsi démontré.

1.1.3 La convolution

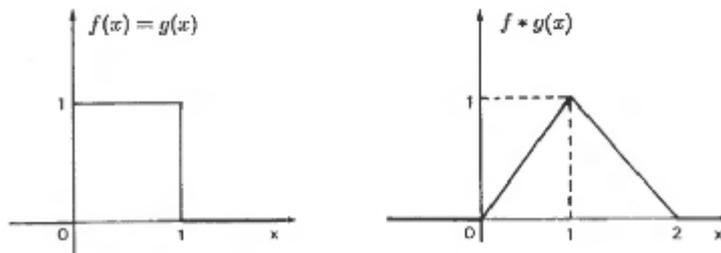
La convolution est avec la transformée de Fourier un des outils essentiels du traitement du signal. La propriété la plus importante de la convolution est la régularité du signal.

Exemple 1.1 . Prenons $f = g = \chi_{[a,b]}$. On obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt = \int_0^1 \chi_{[0,1]}(x-t)dt = \text{mes}([0,1] \cap [x-1, x]),$$

c'est-à-dire

$$(f * g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$



La convolution des deux fonctions discontinues est continue.

. Prenons maintenant $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g = \frac{1}{2h}\chi_{[-h,+h]}$ où $h > 0$. Calculons $f * g$.

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} f(x-t)dt = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(u)du,$$

ce qui représente la moyenne de f sur $[x-h, x+h]$. On voit directement sur l'intégrale que $f * g$ est une fonction continue.

Ces deux exemples illustrent la propriété essentielle de la convolution qui est de régulariser en effectuant une moyenne.

. Avant de définir le produit de convolution, montrons que le produit de deux fonctions intégrable sur \mathbb{R} , n'est pas nécessairement intégrable sur \mathbb{R} .

Contre exemple

Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)|dx &= \int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \right| dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2 < +\infty \\ &\Rightarrow f \in L^1(]0, 1]) \end{aligned}$$

On prend $f = g$ sur $]0, 1]$, on trouve :

$$\int_0^1 |(f.g)(x)|dx = \int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \right| dx = \int_0^1 \left| \frac{1}{x} \right| dx = \text{Log } x \Big|_0^1 = +\infty$$

Donc :

$$\text{Si } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ et } g \in L^1(\mathbb{R}) \not\Rightarrow f.g \in L^1(\mathbb{R})$$

Définition 1.2 Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, le produit de convolution de f et g , noté $f * g$ est défini par :

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)g(x)dx.$$

Théorème 1.2 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. La fonction $h = f * g$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ et

$$\widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega) = \widehat{h}(\omega).$$

Preuve. Soit $t \in \mathbb{R}$, on a par définition : ■

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-x)g(x)dx$$

donc :

$$\begin{aligned} \|h\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |h(t)| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(t-x)g(x)dx \right| dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(t-x)| \cdot |g(x)| dx dt \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini

$$\|h\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}} |g(x)| \left[\int_{\mathbb{R}} |f(t-x)| dt \right] dx$$

Posons $t-x = y$, alors

$$\begin{aligned} \|h\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}} |g(x)| \left[\int_{\mathbb{R}} |f(y)| dy \right] dx \\ &\leq \|f\|_1 \cdot \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx \\ &\leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \Rightarrow \|h\|_1 < +\infty \Rightarrow \|h\|_1 \in L^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega) = \widehat{h}(\omega)$.

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} h(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-x)g(x)dx \right) e^{-i\omega t} dt \end{aligned}$$

Comme $f(t-x)g(x)e^{-i\omega t}$ est intégrable dans \mathbb{R}^2 , on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\widehat{h}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-x) e^{-i\omega t} dt \right) g(x) dx$$

Posons $t - x = y$, alors

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i\omega(x+y)} dy \right) g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i\omega y} dy \right) e^{i\omega x} g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega x} g(x) dx \\ &= \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega). \end{aligned}$$

Remarque 1.2 La convolution $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ est bien définie presque partout, on a :

1. $f * g = g * f$.
2. $\frac{d}{dt} (f * g) = \left(\frac{df}{dt} * g \right) (t) = \left(f * \frac{dg}{dt} \right) (t)$.

Exemple 1.2 Soit $f(t) = \chi_{[-a,a]}(t)$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-a, a]$. Elle est discontinue en $t = a$ et $t = -a$.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-a, a] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Sa transformée de Fourier est une fonction non intégrable :

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt = 2 \frac{\sin(\omega a)}{\omega}.$$

1.2 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ ([6],[13])

Rappelons qu'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement intégrable, comme par exemple $\frac{\sin(t)}{t}$.

On ne peut pas donc définir la transformée de Fourier de cette fonction par l'intégrale :

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Dans ce cas on utilise un sous-espace dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et stable par \widehat{f} pour obtenir une formule d'inversion.

On rappelle que :

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < +\infty \right\}.$$

1.2.1 Extension de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Définition 1.3 On définit par $S(\mathbb{R})$ l'ensemble de fonctions infiniment dérivable φ sur \mathbb{R} telque pour tout multi-indice α et β on a :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < +\infty.$$

On note par \mathcal{F} la transformée de Fourier de f dans \mathbb{R} et par $\overline{\mathcal{F}}$ son inverse.

On prolonge \widehat{f} à $L^2(\mathbb{R})$ en utilisant la densité de S dans $L^2(\mathbb{R})$.

Soit f_n une suite de fonctions de S qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R})$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_2 = 0.$$

La suite f_n étant convergente, elle est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$.

Or d'après l'égalité de Parseval dans S ,

$$\|f_n - f_m\|_2 = \|\mathcal{F}(f_n - f_m)\|_2 = \|\mathcal{F}(f_n) - \mathcal{F}(f_m)\|_2.$$

Ce qui montre que la suite $\mathcal{F}(f_n)$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$.

Elle admet donc une limite, puisque $L^2(\mathbb{R})$ est complet.

Par définition cette limite est \widehat{f} .

Théorème 1.3 Soient f et g dans $L^2(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier \widehat{f} possède les propriétés suivantes :

1. formule d'échange :

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \widehat{g}(t) dt.$$

2. formule d'inversion :

$$f = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}(f)).$$

3. isomorphisme d'espaces de Hilbert :

$$\langle f, g \rangle = \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g) \rangle.$$

4. identité de Plancherel-Parceval :

$$\|f\|_2 = \|\mathcal{F}(f)\|_2.$$

5. si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$:

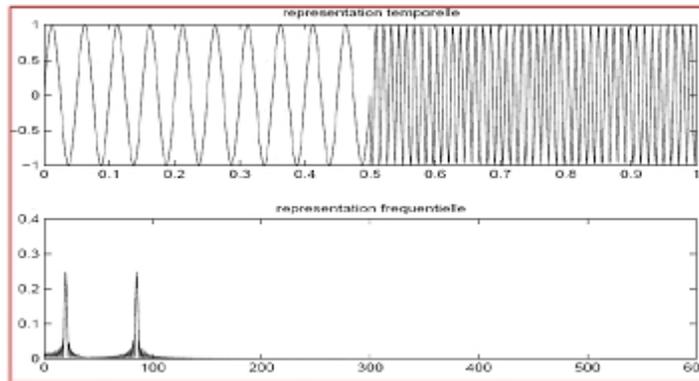
$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Remarque 1.3 Le problème dans la transformée de Fourier ne permet pas d'analyser le comportement local d'un signal.

D'un autre côté les fonctions analysantes sont à support infini, il est donc nécessaire de connaître l'ensemble des valeurs d'une fonction pour pouvoir calculer sa transformée de Fourier. Et encore cette transformation ne permet pas d'avoir une localisation temporelle du contenu fréquentiel d'un signal.

Nous allons voir dans ce qui suit l'intérêt des ondelettes dans le traitement du signal, du fait que cette technique d'analyse nous donne des résultats meilleurs.

Exemple 1.3 Soit un signal composé d'une succession de deux sinusoïdes de fréquences différentes, la première étant une sinusoïde d'une fréquence de 20Hz et la deuxième de 85Hz (c'est-à-dire $\omega_0 = 40\pi$ et $\omega_0 = 170\pi$). La transformée de Fourier indique les fréquences, mais ne donne aucune information sur l'ordre d'apparition des sinusoïdes, c'est la perte de localisation temporelle.



Figure(1,1)

Figure(1,1) : Signal de deux sinusoïdes et module de leur transformée de Fourier avec une représentation temporelle et fréquentielle.

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

donne le contenu fréquentiel de f pour la fréquence ω .

Dans la figure (1,1) (haut), le signal est représenté par :

$$f(t) = \sin(40\pi t) \text{ et } f(t) = \sin(170\pi t).$$

et le module de sa transformée de Fourier $\hat{f}(\omega)$ (bas).

L'analyse en fréquence ne nous informe pas sur la localisation temporelle du changement de régime dans le signal.

Chapitre 2

Théorie des ondelettes et analyse multi-résolution

2.1 Rappels sur les ondelettes([7],[10],[12])

2.1.1 La transformée en ondelettes continue (TOC)

Définition 2.1 une ondelette est une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ de moyenne nulle c-à-d :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$$

de plus l'ondelette est normalisée :

$$\|\psi(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left\{ \int_{\mathbb{R}} |\psi(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} = 1$$

Définition 2.2 La transformation en ondelette continue (TOC) d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est définie comme la somme de tout le temps du signal multiplié par des échelles.

Dans l'analyse par ondelette, les fonctions analysantes sont définies à partir de translations et dilatations / contractions de l'ondelette "mère" ψ :

$$\psi_{x,s}(t) = s^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-x}{s}\right),$$

où $x \in \mathbb{R}$ définit la translation temporelle et $s > 0$ est l'échelle de dilatation / contraction. On peut évaluer aussi la transformée de Fourier $\hat{\psi}_{x,s}$ comme suit :

$$\hat{\psi}_{x,s}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{x,s}(t) e^{-i\omega t} dt = s^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{t-x}{s}\right) e^{-i\omega t} dt.$$

Or

$$s\hat{\psi}(s\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{t}{s}\right) e^{-i\omega t} dt$$

Donc, en posant $t' = t - x$, on obtient

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}_{x,s}(\omega) &= s^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{t'}{s}\right) e^{-i\omega(t'+x)} dt \\ &= s^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{t'}{s}\right) e^{-i\omega t'} dt' \right) e^{-i\omega x} \\ &= s^{\frac{1}{2}} \widehat{\psi}(s\omega) e^{-i\omega x}\end{aligned}$$

Par définition, l'énergie des fonctions analysantes est constante :

$$\|\psi_{x,s}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1.$$

En effet, pour $t - x = su$, on a

$$\|\psi_{x,s}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s} \left| \psi\left(\frac{t-x}{s}\right) \right|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\psi(u)|^2 du = 1.$$

Définition 2.3 La transformée en ondelette continue d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ au temps x et à l'échelle s est définie par :

$$W_f(x, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi_{x,s}^*(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) s^{-\frac{1}{2}} \psi^*\left(\frac{t-x}{s}\right) dt,$$

où W est l'initiale de Wavelet, c'est-à-dire, "ondelette" en anglais.

Remarque 2.1 Remarquons que $|W_f(x, s)| \leq \|f\|_{L^2}$.

2.1.2 Relation entre échelle et fréquence

La transformée en ondelette continue est une analyse temps-échelle. Elle permet d'avoir des informations sur le comportement d'une fonction au voisinage du point x et à l'échelle s . Une transformée en ondelette peut se réécrire comme un produit de convolution :

$$W_f(x, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) s^{-\frac{1}{2}} \psi^*\left(\frac{t-x}{s}\right) dt = (f * \bar{\psi}_s)(x).$$

Avec

$$\bar{\psi}_s(t) = s^{-\frac{1}{2}} \psi^*\left(\frac{-t}{s}\right).$$

Comme ψ est de moyenne nulle, alors :

$$W_f(x, s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) s^{-\frac{1}{2}} \psi^*\left(\frac{t-x}{s}\right) dt.$$

nous permet de mesurer la variation de f dans un voisinage de x (dépend de ψ) de taille proportionnelle à s .

2.1.3 Inversion de la transformée en ondelette continue (La reconstruction du signal)

Cette étape nous permet d'utiliser la transformée en ondelettes inverse afin de reconstruire le signal de f à partir de ses coefficients d'ondelettes W_f .

Le théorème suivant montre que la transformée en ondelette continue est une transformation inversible qui conserve l'énergie du signal si l'ondelette vérifie la condition d'admissibilité suivante :

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty.$$

Si ψ vérifie la condition d'admissibilité ci-dessus, alors l'ondelette est dite admissible. On remarque que la condition d'admissibilité impose que

$$\widehat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0,$$

c'est-à-dire que l'ondelette est de moyenne nulle.

En effet, supposons que $\psi \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\widehat{\psi}$ est continue sur \mathbb{R} .

Si $\widehat{\psi}(0) \neq 0$, d'après la continuité de $\widehat{\psi}$, il existe un intervalle I de \mathbb{R} contenant 0 et un $\varepsilon > 0$

tel que $|\widehat{\psi}(\omega)| > \varepsilon$ pour tout $\omega \in I$. Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \geq \int_I \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \geq \varepsilon^2 \int_I \frac{d\omega}{|\omega|} = +\infty.$$

Il est alors possible de reconstruire f à partir de ses coefficients d'ondelettes $W_f(x, s)$, en

utilisant une ondelette de synthèse ψ , c'est-à-dire une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant la condition

d'admissibilité.

Théorème 2.1 (Caldéron, Grossman et Morlet) soit $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction réelle

(ou un signal réel) vérifiant :

$$0 < C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega = \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty.$$

Toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ vérifie

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(x, s) s^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-x}{s}\right) \frac{dx ds}{s^2},$$

où l'égalité est à prendre au sens de la convergence dans $L^2(\mathbb{R})$. De plus, la transformée en ondelette conserve l'énergie du signal :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_f(x, s)|^2 \frac{dx ds}{s^2}.$$

Corollaire 2.1 Si $C_\psi < +\infty$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors $W_f \in L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \frac{dxds}{s^2})$ et

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |W_f(x, s)|^2 \frac{dxds}{s^2} = C_\psi \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)|^2 dx.$$

Remarque 2.2 En traitement de l'image, les images sont souvent, légèrement déformées par des algorithmes de compression, si ces modifications changent les coefficients d'ondelettes, la reconstruction de l'image à partir de ses coefficients risque d'être moins bonne. La propriété d'invariance par translation nous assure qu'en cas de translation des données, les coefficients d'ondelette sont également translatés.

Proposition 2.1 Si $f_\tau(t) = f(t - \tau)$ alors $W_\tau(x, s) = W(x - \tau, s)$.

2.1.4 La transformée en ondelette discrète(TOD)

La transformation en ondelette discrète (TOD) est une technique utilisée dans la compression de données numériques avec perte.

La compression est réalisée par approximation successive de l'information initiale du plus grossier au plus fin.

Notons par

$$s = s_0^m \text{ et } u = nu_0s_0^m, \quad u_0 \in \mathbb{Z}.$$

On définit la transformation en ondelette discrète par :

$$W_f(m, n) = s_0^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi(s_0^{-m}t - nu_0) dt, \quad (s_0, u_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^2,$$

où s_0^m représente l'échelle et $nu_0s_0^m$ représente la translation.

Remarque 2.3 La transformation en ondelette est dyadique dans le cas où $s_0 = 2$ et $u_0 = 1$.

$$W_f(m, n) = 2^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi(2^{-m}t - n) dt,$$

le signal décomposé $f(x)$ est reconstruit par la formule suivante :

$$f(x) = \sum_j \sum_n W_f(j, n) \psi_{m,n}(x).$$

2.2 Base d'ondelettes dans D1([4],[7],[10])

Définition 2.4 Une base d'ondelette est une base Hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme $\psi_{j,k}(t)$ obtenue par translation et dilatation dyadique de l'ondelette mère ψ :

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Exemple 2.1 La base d'ondelette de Haar est définie par :

$$\psi_{j,k}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{k}{2^j} \leq t < \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \\ -1 & \text{si } \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \leq t < \frac{k+1}{2^j} \\ 0 & \text{sin on} \end{cases} .$$

Définition 2.5 Une base d'ondelette $\psi_{j,k}(t)$ est dite orthonormale si

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{i,l} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(x) \psi_{i,l}(x) dx = \delta(j-i) \delta(k-l) .$$

où δ est le symbole de Kroneker

$$\delta(j-i) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}, \delta(k-l) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases} .$$

2.2.1 Analyse multi-résolution(AMR)

les AMR d'ondelettes sont des espaces d'approximation générés par des bases de fonctions introduites par Stéphan Mallat en 1986. Cette thématique permet de calculer des approximations successives d'une fonction à des résolutions spatiales de plus en plus grossières. L'approximation multi-résolution calcule l'approximation d'une fonction f à diverses résolutions par sa projection orthogonale sur une famille des espaces $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$.

Définition 2.6 Une analyse multi-résolution est une suite $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant

1. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$:

$$V_j \subset V_{j+1},$$

2. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$:

$$f(t) \in V_j \iff f(2t) \in V_{j+1},$$

3. $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$, $(\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \{0\})$.

4. $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$, $(\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = L^2(\mathbb{R}))$.

5. Il existe $\varphi \in V_0$ tel que $\{\varphi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthonormale de V_0 .

Remarque 2.4 1. La première condition de la définition de la (AMR) signifie que V_j est un sous espace de V_{j+1} et donc la projection d'une fonction sur V_j donne une approximation faible que sa projection sur V_{j+1} .

2. La deuxième nous assure le passage de V_j à V_{j+1} en multipliant par le facteur d'échelle 2. Ce qui correspond à la dilatation d'un facteur d'échelle 2.

3. La troisième montre quand $j \rightarrow +\infty$ on prend toutes les informations sur la fonction.

4. La quatrième montre quand $j \rightarrow -\infty$ que l'approximation est asymptotiquement égale à la fonction d'origine.

5. J s'appelle la résolution et représente le niveau d'analyse de la fonction f , l'approximation dans V_j est deux fois plus fine que celle dans V_{j-1} , mais deux fois moins bonne que celle dans V_{j+1} . L'exemple le plus simple pour illustrer cette notion est l'analyse multi-résolution de Haar, qui consiste simplement à approximer f par des fonctions constantes par morceaux sur des intervalles de longueur 2^{-j} .

2.2.2 Base de Riesz

Définition 2.7 une famille de vecteur $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée une base de Riesz d'espace de Hilbert H si :

1. Elle est linéairement indépendante.
2. S'il existe deux constantes $A, B > 0$ tel que $\forall f \in H$:

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2.$$

Théorème 2.2 Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$, alors il existe une unique fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, telle que la famille :

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}t - k), j, k \in \mathbb{Z},$$

soit une base orthonormale de V_j .

Les espaces d'approximations et les espaces de détails

Les espaces V_j sont appelés les espaces d'approximation et le complémentaire orthogonale de V_j dans V_{j+1} noté par W_j est appelé espace de détails et on écrit :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \text{ et } V_j \perp W_j$$

où \oplus désigne la somme directe de sous espaces vectoriels.

Ainsi la projection orthogonale d'une fonction f sur V_{j+1} peut se décomposer comme la somme de la projection orthogonale sur V_j et W_j .

Les familles

$$\left\{ \varphi_{j,n}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}t - n), j, n \in \mathbb{Z} \right\} \text{ et } \left\{ \psi_{j,n}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - n), j, n \in \mathbb{Z} \right\},$$

étants les bases orthonormales des espaces V_j et W_j respectivement.

La projection de f sur V_{j+1} est donnée par

$$P_{V_{j+1}} f(t) = P_{V_j} f(t) + P_{W_j} f(t),$$

où

$$P_{V_j} f(t) = \sum_n a_j[n] 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}t - n),$$

$$P_{W_j} f(t) = \sum_n c_j[n] 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - n),$$

et

$$a_j[n] = \left\langle f(t), 2^{-\frac{j}{2}} \varphi(2^{-j}t - n) \right\rangle, c_j[n] = \left\langle f(t), 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}t - n) \right\rangle.$$

Les coefficients $a_j[n]$ et $c_j[n]$ sont appelés coefficients d'approximation et coefficient d'ondelettes ou de détails de la fonction au niveau de résolution j .

Fonction d'échelle

Définition 2.8 La fonction $\varphi \in V_0$ est appelé fonction d'échelle et on a :

$$\varphi_{j,n}(t) = 2^{-\frac{j}{2}}\varphi(2^{-j}t - n) \in V_j.$$

1. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ les fonctions $\{\varphi_{j,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forment une base orthonormée de sous-espace vectoriel V_j .
2. On a

$$\begin{aligned} \varphi_{1,n}(t) = 2^{-\frac{1}{2}}\varphi(2^{-1}t - n) \in V_1 &\implies \varphi_{1,n}(t) \in V_0. \\ \text{si } f \in V_0 &\implies f(t) = \sum_n a[n]\varphi(t - n), \end{aligned}$$

donc

$$\varphi_{1,n}(t) = \sum_n h[n]\varphi(t - n) \implies 2^{-\frac{1}{2}}\varphi(2^{-1}t - n) \simeq \sum_n h[n]\varphi(t - n),$$

qui est l'équation d'échelle et les coefficients $(h[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ sont unique.

2.3 Base d'ondelettes dans D2([9],[10],[11])

2.3.1 Analyse multi-résolution dans D2 (bidimensionnels)

La définition d'une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R}^2)$ est la même à celle donné dans $L^2(\mathbb{R})$. Il suffit de considérer des fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^2 et non dans \mathbb{R} .

Le produit tensoriel noté \otimes donne un moyen simple de définir une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$.

Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$, on définit l'analyse multi-résolution séparable de $L^2(\mathbb{R}^2)$ par

$$\mathbf{V}_j = V_j^2 = V_j \otimes V_j,$$

si $\varphi(x)$ est la fonction d'échelle associée à l'AMR $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ alors on peut donner une base orthonormale de $(\mathbf{V}_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ définie par :

$$\{\varphi_{n,m}(x,y) = 2^{-j}\varphi(2^{-j}x - n)\varphi(2^{-j}y - m), (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Remarque 2.5 L'AMR dans le cas 2D a les mêmes propriétés que dans le cas 1D.

Suposons que :

$$V_j = \mathbf{V}_{j+1} \oplus W_j.$$

On a définit par

$$\mathbf{V}_j = V_j^2 = V_j \otimes V_j,$$

une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Or :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j,$$

donc :

$$\begin{aligned} V_{j+1}^2 &= V_{j+1} \otimes V_{j+1}, \\ &= (V_j \oplus W_j) \otimes (V_j \oplus W_j), \\ &= (V_j \otimes V_j) \oplus [(V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes W_j)], \end{aligned}$$

et on écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_j^h &= V_j \otimes W_j, \\ \mathbf{W}_j^d &= W_J \otimes V_j, \\ \mathbf{W}_j^v &= W_j \otimes W_j,\end{aligned}$$

Dans le cas 2D, on a besoin de trois espaces de détails \mathbf{W}_j^h , \mathbf{W}_j^d , \mathbf{W}_j^v de tels sorte que

$$V_{j+1}^2 = V_j^2 \oplus \mathbf{W}_j^h \oplus \mathbf{W}_j^d \oplus \mathbf{W}_j^v, \quad (*)$$

où \mathbf{W}_j^h est l'espace de détails horizontaux, \mathbf{W}_j^d est l'espace de détails diagonaux et \mathbf{W}_j^v est l'espace de détails verticaux.

Si $\psi(t)$ est l'ondelette mère associée à l'AMR $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ on pose les fonctions :

$$\begin{aligned}\psi^h(x, y) &= \varphi(x) \psi(y), \\ \psi^d(x, y) &= \varphi(x) \psi(y), \\ \psi^v(x, y) &= \varphi(x) \psi(y),\end{aligned}$$

par translation et dilatation de ces bases, on obtient des bases orthonormales de trois espaces de détails :

$$\begin{aligned}\{2^{-j} \psi^h(2^{-j}x - n, 2^{-j}y - m), (n, m) \in \mathbb{Z}^2\} & \text{ base orthonormale de } \mathbf{W}_j^h, \\ \{2^{-j} \psi^v(2^{-j}x - n, 2^{-j}y - m), (n, m) \in \mathbb{Z}^2\} & \text{ base orthonormale de } \mathbf{W}_j^v, \\ \{2^{-j} \psi^d(2^{-j}x - n, 2^{-j}y - m), (n, m) \in \mathbb{Z}^2\} & \text{ base orthonormale de } \mathbf{W}_j^d,\end{aligned}$$

ces ondelettes extraient les détails d'une fonction à différente échelle et orientations.

Comme $J \in \mathbb{Z}$ la relation (*) s'écrit :

$$V_j^2 = V_{j-1}^2 \oplus \mathbf{W}_{j-1}^h \oplus \mathbf{W}_{j-1}^d \oplus \mathbf{W}_{j-1}^v$$

Chaque espace d'approximation V_j^2 est donc décomposé en un espace d'approximation plus grossier V_{j-1}^2 et trois espaces de détails. Considérons le cas d'une image carrée numérique, cette dernière a un nombre fini de pixels. Une image $2^J \times 2^J$ sera considérée comme appartenant à V_j^2 puis décomposée dans les espaces $(\mathbf{W}_j^h, \mathbf{W}_j^d, \mathbf{W}_j^v)_{j=L, \dots, J-1}$ et dans V_L^2 .

	\mathbf{W}_{J-3}^v		
\mathbf{W}_{J-3}^h	\mathbf{W}_{J-3}^d	\mathbf{W}_{J-2}^v	
	\mathbf{W}_{J-2}^h	\mathbf{W}_{J-2}^d	\mathbf{W}_{J-1}^v
		\mathbf{W}_{J-1}^h	\mathbf{W}_{J-1}^d

Figure (2,1)

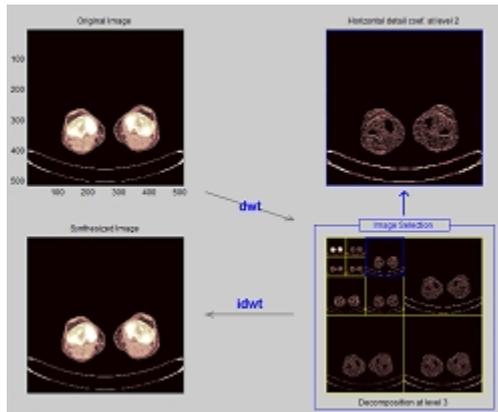
Figure(2,1) : Représentation de la transformée en ondelette orthogonale.

Les espaces \mathbf{W}_j^h , générés par une fonction échelle dans la direction x et une ondelette dans la direction y , auront tendance à repérer la singularité de l'image dans la direction y , et donc les arêtes horizontales.

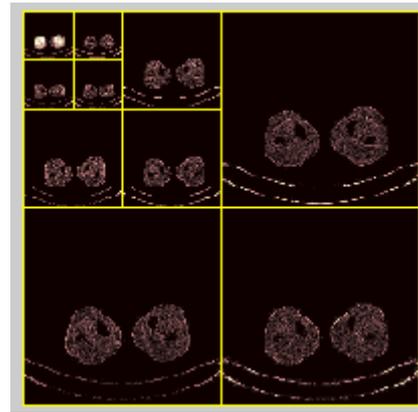
Les espaces \mathbf{W}_j^v , générés par une ondelette dans la direction x et une fonction échelle dans la direction y , repéreront les arêtes verticales.

Les espaces \mathbf{W}_j^d , générés par une ondelette dans la direction x et une ondelette dans la direction de y détecteront des singularités dans les deux directions, donc des coins.

Ci dessous est donné un exemple de décomposition orthogonale en ondelette d'une image.



Figure(2,2)



Figure(2,3)

Figure(2,2) : Décomposition de l'image sur trois niveaux avec l'ondelette de Haar. L'image à gauche d'en haut est une IRM coupe horizontale en format jpg(512X512) du genou fourni par le service d'anatomie d'oran.

Figure(2,3) : Représentation de de la transformée en ondelette orthogonale de l'image de la figure précédente.

On remarque que prendre simplement la transformée en ondelette d'une image à une échelle fine ($j = J - 1$) par exemple nous permet déjà de détecter de façon acceptable, les contours de l'image.

Chapitre 3

Application à l'imagerie médicale

Définition de l'image numérique

Une image numérique est une matrice de pixels définie par les coordonnées (x, y) . S'il s'agit d'une image couleur, un pixel est codé par 3 composantes (R,V,B), représentant respectivement les doses : rouge, vert et bleu qui caractérisent la couleur du pixel. S'il s'agit d'une image en niveau de gris, il est codé par une composante comprise entre 0 et 255, représentant la luminosité du pixel.

Définition 3.1 Soit Ω un domaine fermé de \mathbb{R}^2 .

Une image est une fonction (signal) f définie comme suit :

$$\begin{aligned} f & : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \\ p & \rightarrow f(p). \end{aligned}$$

Où $n \in \mathbb{N}^*$ et p représente la valeur de l'intensité du pixel p .

Définition 3.2 Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, soit $I = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{N}^2$ ou $I_i = \{0, 1, \dots, n_i - 1\}$

et $J = \{0, 1, \dots, 255\}$. Une image de taille $n_1 \times n_2$ est une fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f & : I \rightarrow J^n \\ i & \rightarrow f(i). \end{aligned}$$

Le traitement d'image peut être considéré comme une extension du traitement du signal au signaux bidimensionnels(images).

Exemple 3.1 1. Une image noir et blanc (binaire) est représentée par la fonction : $f_1 : I \rightarrow \{0, 255\}$.

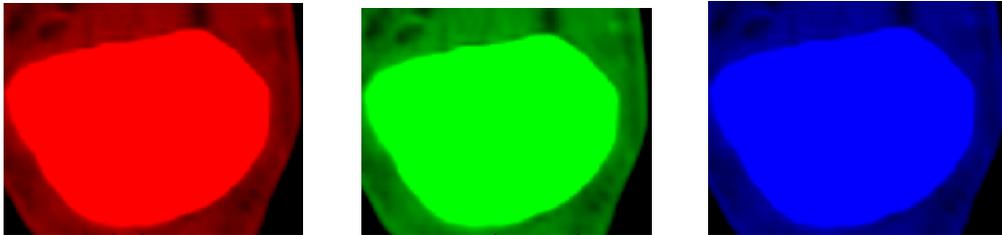
C'est typiquement le type d'image que l'on utilise pour

le scanner quand celui ci est composé d'une seule couleur. Par convention la valeur 0 représente le noir et la valeur 255 représente le blanc.

2. Une image en niveaux de gris est représentée par la fonction : $f_2 : I \rightarrow J$.

3. Une image couleur est représentée par la fonction : $f_3 : I \rightarrow J^3$.

Chaque pixel contient les valeurs des trois canaux (RVB) que nous considérerons comme trois matrices. La figure ci-dessous représente les trois types R,V et B.



Figure(3,1) : $R=(:, :,1)$ Figure(3,2) : $V=(:, :,2)$ Figure(3,3) : $B=(:, :,3)$

3.1 Traitement d'image de la patella sous Matlab

3.1.1 L'imagerie médicale([1],[3],[14])

L'imagerie médicale est un ensemble de techniques permettant de visualiser une partie du corps humain ou d'un organe et d'en conserver une image. Elle a pour objectif d'aider dans le diagnostic et la thérapie.

Les premiers pas de l'imagerie médicale datent de 1895, W.C.RÖNTGEN(Prix Nobel de physique en 1901) dans une conférence traite une nouvelle sorte de rayon, c'est la déclaration officielle des rayons X. Cette conférence est accompagnée de la première radio, voir (figure ci dessous).



A la fin des années soixante est apparu le scanner X, ou le tomodynamitometre. Le premier prototype industriel fut réalisé en 1968 par G.N.Hounsfield, qui reçut le Prix Nobel en 1979.

Le principe de scanner vient du fait que le faisceau de rayon X projette sur une plaque radiographique les ombres des organes traversés en les confondant.

Les zones entourées par des tissus plus denses(comme les os)ne sont pas donc visibles.

Les coupes que le scanner effectue sont appelées <<coupes tomodynamimétrique>>(coupes axiales transverses).

Dans notre projet de memoire nous allons traiter des images IRM.

L'IRM c'est l'imagerie par resonance magnétique. La première image IRM fut par Paul Lauterbur (Prix Nobel en 2003) en 1973.

L'IRM fabrique une image du corps à partir de deux instants t_1 et t_2 en tout point du corps. Les trois étapes d'IRM consiste à créer un champ magnétique appliqué au corps étudié, émettre un signal de fréquence radio sur le corps étudié, analyser le signal obtenu en sortie.

Le principe de l'IRM peut s'appliquer à l'organisme car ce dernier comporte de petits <<aimants atomiques>>, le plus courant et reactif étant le proton du noyau de l'atome d'hydrogène.

Le principe de l'IRM met à profit la distribution aléatoire des protons qui possèdent des propriétés magnétiques.

L'IRM est l'une des meilleurs méthodes d'imagerie grâce à sa grande résolution. De plus cette methode n'a pas d'effet destructeur ni traumatisant sur le corps humain.

3.1.2 Genou (Patella) ([2],[3],[16])

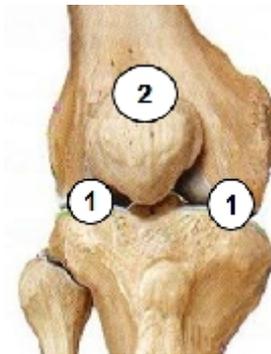
Le genou est défini comme une articulation intermédiaire du membre pelvien, elle est importante par sa fonction d'appui. Le genou est caractérisé par son verrouillage articulaire complet en extension grâce à la mise en tension maximale du système ligamentaire, et le déverrouillage en flexion qui permet une adaptation en terrain irrégulier grâce à la possibilité de rotations actives. Le genou est une articulation résultant de la combinaison de trois articulations que stabilisent les ménisques :

- .Articulation fémoro-méniscale
- .Articulation tibio-méniscale
- .Articulation fémoro-patellaire

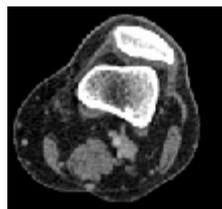
Le genou est une articulation mixte ginglyme-bicondylaire caractérisée par une stabilité supérieure à sa mobilité. Le schéma ci dessus présente une articulation mixte du genou.

Gyglyme (fémoro-patellaire) incluse dans le système extenseur (2).

Double bicondylaire (fémoro-tibiale) (1).



Parmis les pathologies du genou les lésions méniscales (sportifs) et l'arthrose du genou (chez les sujets âgés).



Figure(3,4)

Figure (3,4) : image d'une IRM coupe axial en format jpg du genou, la partie d'en haut désigne la patella, un peux plus bas le fémur.

3.1.3 Matlab([5],[8],[11])

Matlab est un environnement de calcul intégré basé sur un langage de programmation qui permet le développement rapide d'applications. Le langage permet la manipulation d'objets mathématiques à l'aide des fonctions.

Matlab dispose de fonctions de calcul plus spécialisées appelées boîtes à outils (tool-boxes).

Nous allons nous intéresser à la boîtes à outils wavelet (ondelettes).

La boîte à outils ondelettes se décompose en plusieurs familles de fonction comme les familles d'ondelettes continues et ondelettes discètes.

La commande `<<help wavelet>>`, `<<wavemenu>>` et `<<wavedemo>>` nous permet l'analyse et le traitement de l'image avec les ondelettes.

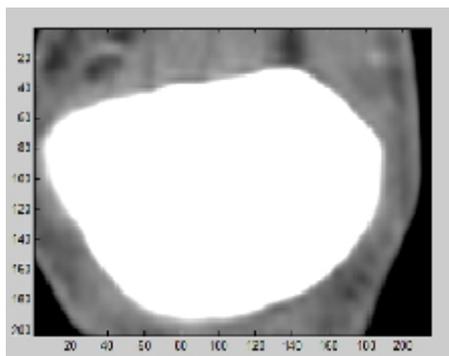
Les images en niveaux de gris sont mémorisées sous la forme d'une matrice formée chacune d'entiers de 0 à 255 correspondant à un octet (format Matlab : `uint8`).

Par exemple `image(1,1,1)` désigne l'intensité du rouge [3ème 1]présent dans le pixel qui est sur la ligne 1[1er 1]et sur la colonne 1[2ème 1].

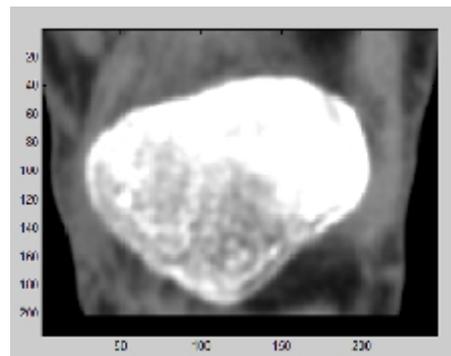
le traitement de l'image amène à faire des opérations sur les valeurs de chaque pixel. Ces valeurs sont représentées avec un type adapté appelé double en Matlab. Les valeurs doivent être comprises entre 0 et 1, afin de pouvoir utiliser les commandes Matlab de visualisation des images.

3.2 Analyse et comparaison d'une patella saine et pathologique

Les images traitées nous ont été fournies par le service d'anatomie d'oran([3],[11]).



Figure(3,5)



Figure(3,6)

Figure (3,5) : Image d'une IRM coupe transversale d'une patella saine en format png qu'on nottera PATS.

Figure (3,6) : Image d'une IRM coupe transversale d'une patella arthrosée en format png qu'on nottera PATM.

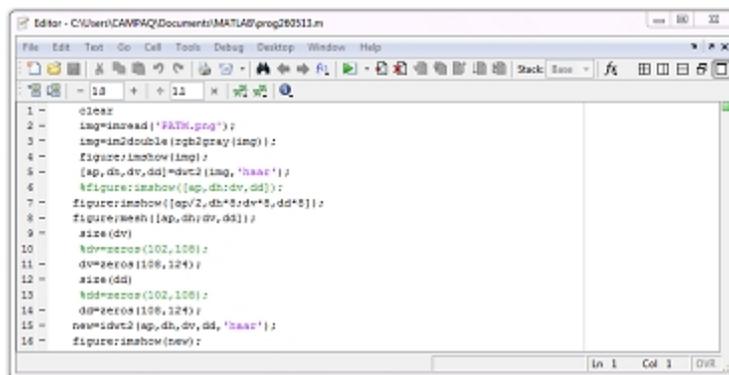
3.2.1 Traitement de l'image avec la commande DWT2

Nous allons considérer en premier une analyse à un niveau de résolution avec la commande DWT2 dans Matlab.

Le programme ci-dessous nous permet d'afficher l'analyse de l'image au premier niveau de résolution et la reconstruction de l'image après une annulation des détails verticaux et diagonaux :

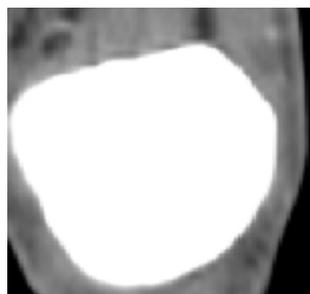
```
>>img=imread('PATM.png');
>>img=im2double(rgb2gray(img));
>>figure;imshow(img);
>>[ap,dh,dv,dd]=dwt2(img,'haar');
>>figure;imshow([ap/2,dh*8;dv*8,dd*8]);
>>figure;mesh([ap,dh;dv,dd]);
>>size(dv)
>>dv=zeros(108,124);
>>size(dd)
>>dd=zeros(108,124);
>>new=idwt2(ap,dh,dv,dd,'haar');
>>figure;imshow(new);
```

voir ci dessous la présentation de ce programme sur Matlab.



```
Editor - C:\Users\CANPAQ\Documents\MATLAB\prog260311.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
1 - clear
2 - img=imread('PATM.png');
3 - img=im2double(rgb2gray(img));
4 - figure;imshow(img);
5 - [ap,dh,dv,dd]=dwt2(img,'haar');
6 - figure;imshow([ap/2,dh*8;dv*8,dd*8]);
7 - figure;mesh([ap,dh;dv,dd]);
8 - size(dv)
9 - dv=zeros(108,124);
10 - size(dd)
11 - dd=zeros(108,124);
12 - dd=zeros(108,124);
13 - new=idwt2(ap,dh,dv,dd,'haar');
14 - figure;imshow(new);
```

Affichage du programme pour la patella saine et arthrosée :



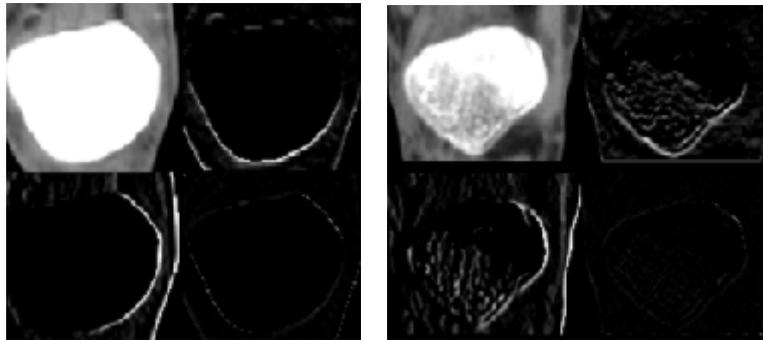
Figure(3,7)



Figure(3,8)

Figure (3,7) : patella saine.

Figure (3,8) : patella arthrosée.

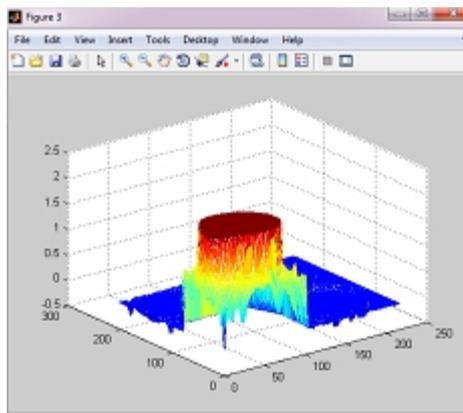


Figure(3,9)

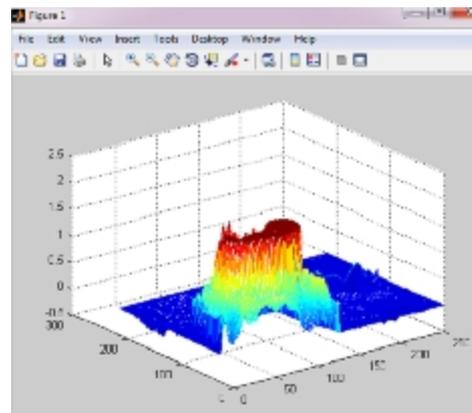
Figure(3,10)

Figure (3,9) : Analyse au premier niveau de résolution qui affiche les contours ou segmentations (grandes) qui séparent la patella et le vide(le cartilage).

Figure (3,10) : Analyse au premier niveau de résolution qui affiche des segmentations dans la patella, surtout dans l'image de détail verticale et horizontale. On peut constater une décalcification de la patella.



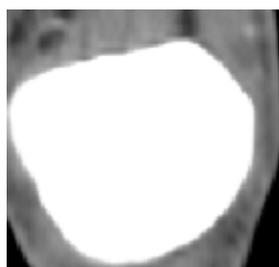
Figure(3,11)



Figure(3,12)

Figure (3,11) : En 3D, il est clair que la partie du haut est plate et lisse, ce qui représente la partie saine de la patella.

Figure (3,12) : En 3D, la partie du haut est bien fissurée.



Figure(3,13)



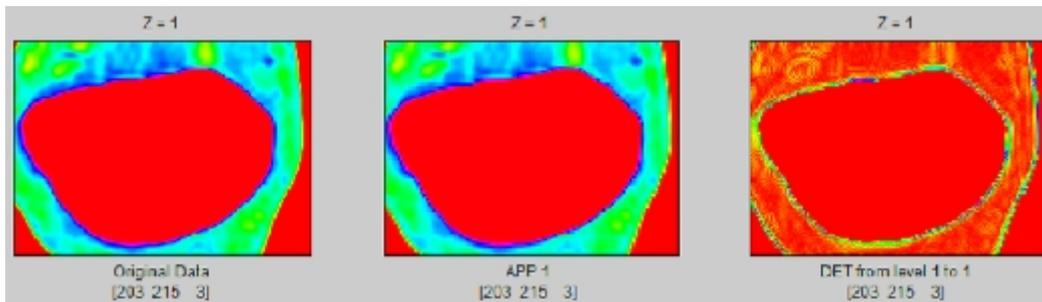
Figure(3,14)

Figure (3,13) : Reconstruction de PATS après l'annulation des détails

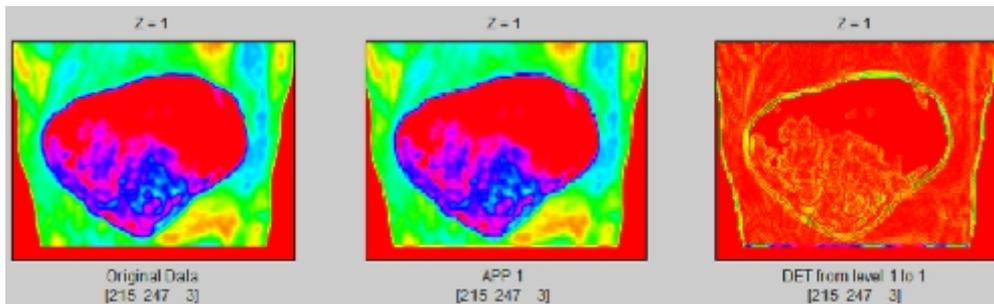
verticaux (102,108) et diagonaux (102,108).

Figure (3,14) : Reconstruction de PATM après l'annulation des détails verticaux (108,124) et diagonaux (108,124).

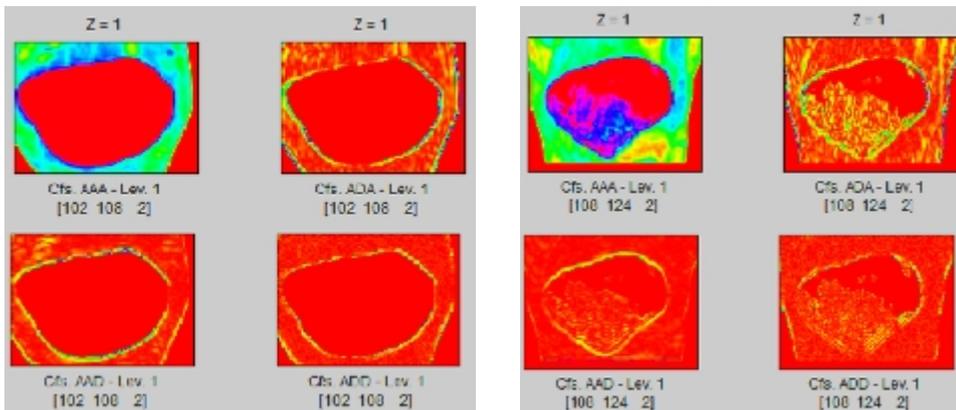
Remarque 3.1 on peut utiliser la commande `<<wavelet 3D>>` pour afficher une analyse plus détaillée. Le contraste des couleurs dans les images favorise l'étude de la segmentation de la PATS et la PATM dans le domaine médical, et le plus intéressant avec cette commande est la reconstruction en 3D des sujets indiqués.



Figure(3,15) : PATS avec contraste



Figure(3,16) : PATM avec contraste



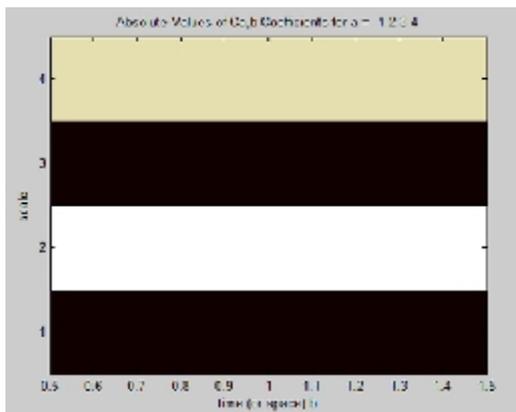
Figure(3,17) : PATS en 1er niveau Figure(3,18) : PATM en 1er niveau

3.2.2 Traitement d'image avec la commande CWT

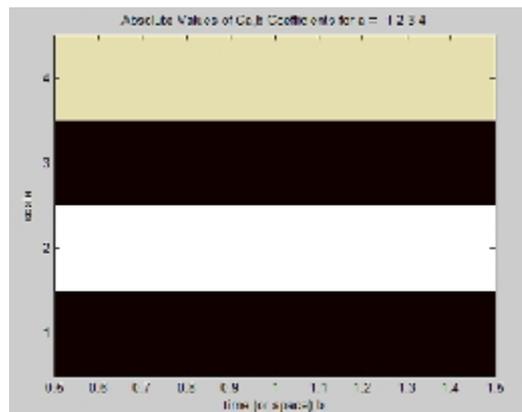
Dans cet exemple de comparaison nous allons considérer la matrice $(:, :1)$. Le code qui nous permet d'afficher ce traitement d'image est :

```
>>PATS=imread('PATS.png');
>>mat1=PATS(:, :,1);
>>x=mat1(:, :);
>>coef=cwt(x, :, 'haar', 'plot');
```

On fait cette analyse avec les ondelettes de Haar.



Figure(3,19)

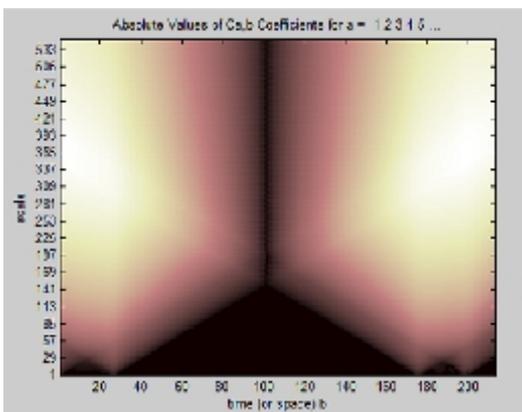


Figure(3,20)

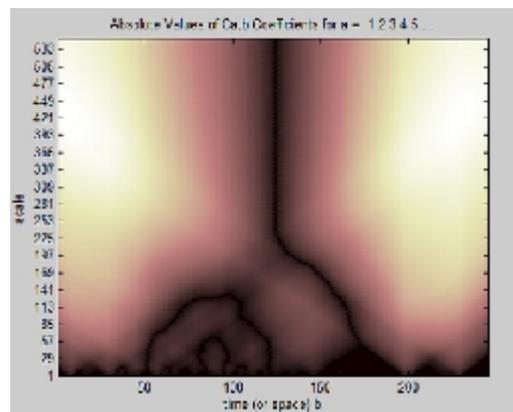
Figure (3,19) : on prend un point de la matrice considérée, PATS(120 :120,120 :120).

Figure (3,20) : on prend un point de la matrice considérée, PATM(120 :120,120 :120).

on peut distinguer le nombre de coefficients $a=1 :4$, mais la comparaison est pratiquement impossible sur un pixel.



Figure(3,21)



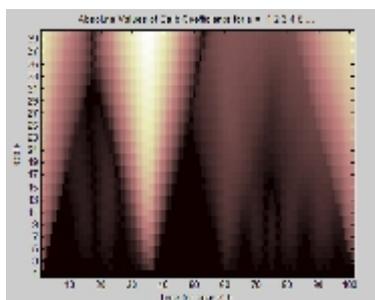
Figure(3,22)

Figure (3,21) : on prend une ligne de la matrice considérée, PATS(140 :140,2 :214).

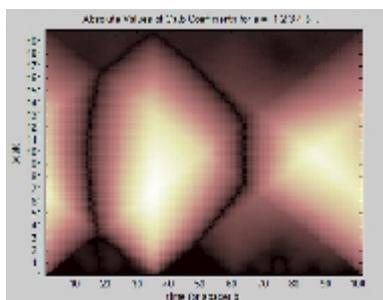
Figure (3,22) : on prend une ligne de la matrice considérée, PATM(120 :120,2 :246).

Pour des coefficients $a=1 :550$, on constate une bonne harmonie dans le comportement

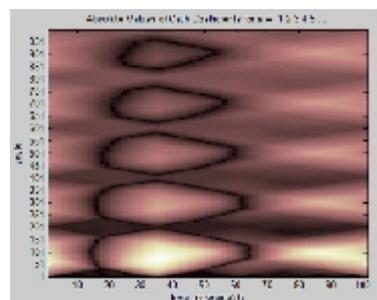
des coefficients dans la **Figure (3,21)**, c'est tout à fait le contraire dans l'autre figure.



Figure(3,23)



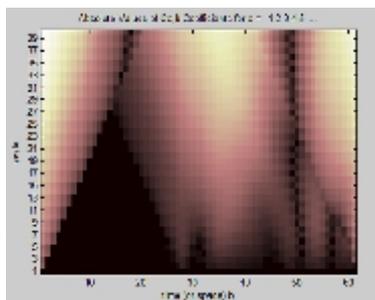
Figure(3,24)



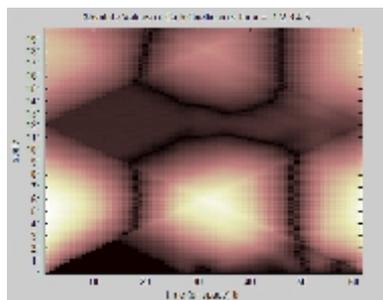
Figure(3,25)

Dans les figures ci dessus on prend une partie de la matrice considérée, $PATS(20 :120,20 :120)$.

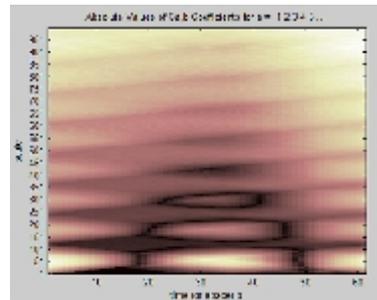
L'affichage des figures est donnée par les coefficients de Haar, 1 :40,1 :200 et 1 :1000, allons de gauche à droite.



Figure(3,26)



Figure(3,27)



Figure(3,28)

Dans les figures ci dessus on prend une partie de la matrice considérée, $PATM(60 :120,60 :120)$.

L'affichage des figures est donnée par les coefficients de Haar, 1 :40,1 :200 et 1 :1000, allons de gauche à droite.

Avec l'augmentation des coefficients de Haar, on constate une déformation dans l'analyse de la dernière image de la PATM.

Remarque 3.2 .*PATS est une image IRM de dimension 203X215, dans notre analyse on a pris les pixels de l'image avec l'intensité du rouge, c'est-à-dire la première matrice (:, :,1).*

Dans la figure(3,21), $PATS(140 :140,2 :214)$, on a analysé la 140ème ligne allant de la 2ème colonne à la 214ème colonne.

Dans la figure(3,23), $PATS(20 :120,20 :120)$, on a analysé une sous matrice de la PATS, de la 20ème ligne à la 120ème ligne sur la 20ème colonne à la 120ème colonne(un morceau de carré d'image).

.PATM est une image IRM de dimension 215X247, dans notre analyse on a pris les pixels de l'image avec l'intensité du rouge, c'est-à-dire la première matrice (:, :,1).

Dans la figure(3,22), $PATM(120 :120,2 :246)$, on a analysé la 120ème ligne allant de la 2ème colonne à la 246ème colonne.

Dans la figure(3,26), $PATM(60 :120,60 :120)$, on a analysé une sous matrice de la PATM, de la 60ème ligne à la 120ème ligne sur la 60ème colonne à la 120ème colonne(un morceau de carré d'image).

.Le choix des lignes et des surfaces sur image est très important dans l'analyse et le traitement de l'image.

Conclusion 3.1 *Du traitement de l'image à la segmentation et la reconstruction en 3D, nous espérons qu'on pourra y arriver à notre but afin d'aboutir à des résultats réels. Avec ces outils, les précisions et la qualité du travail se mettront au service du patient. Avec la patella et le cartilage qui l'entoure ainsi qu'une bonne segmentation, les prothèses se reconstruiront avec une grande précision. Ceci pour le bien être du malade qui n'aura plus à supporter le calvaire d'essayer une quantité importante de prothèses sans résultat définitif.*

Au service d'anatomie d'oran ils ont expérimenté cette méthode au niveau du visage. Il sont arrivés à une bonne segmentation. Mais le plus dur est la reconstruction qui doit se faire avec un scanner 3D. Malheureusement ce dernier n'est pas disponible chez nous car il coûte trop cher.

Notre objectif est de rendre utile les mathématiques dans le domaine médical. Nous avons essayé cette méthode théorique des ondelettes avec image.

Une nouvelle méthode est en cours qui est celle de l'information quantique.

L'enjeu sera immense si nous arrivons à développer cette méthode d'avenir de la médecine nouvelle.

Bibliographie

- [1] M. Aouij, R. Bouchez et J. Ribeiro, Imagerie médicale, fusion d'image, ESIGETEL(2002-2003).
- [2] S.M. BOUKERCHE (Service d'anatomie-Exploration morpho-fonctionnelles)-Cours Genou-Schémas(2012-2013).
- [3] H. Chiali, Cours d'anatomie, Présenté à l'Université de Mostaganem, 2013.
- [4] O. Guillot, J-P. Gourret, Analyse multi-résolution par ondelettes pour la compression d'un maillage dans le système logiciel MEFP3C. Lyon, 2008.
- [5] G. Dauphi et A. Beghdadi, T.P de traitement d'image, Institut Galilée 2011.
- [6] C. Gasquet,P. Witomski, Analyse de Fourier et applications, filtrage, calcul numérique, ondelettes, Dunod, 2000.
- [7] E. Hernandez, G. Weiss, A first course of Wavelets, 1996.
- [8] Jérôme. LANDRE, Boîte à outils Ondelettes sous Matlab-Journées du club E.E.A. : Ecole AMR pour l'image 11-13 janvier 2006-Le Creusot.
- [9] O. LE CADET, Méthodes d'ondelettes pour la segmentation d'image. Applications à l'imagerie médicale, thèse, 2004.
- [10] S. MALLAT, A Wavelet Tour of Signal Processing,Academic press, 1999.
- [11] MATLAB-Version 7.12.0.635(R2011a), 32-bit(win32), License Number : 161052, Logiciel Matlab, 2011.
- [12] Y. Meyer, Ondelette et opérateurs 1-Ondelettes, Hermann, Paris, 1990.
- [13] M. OUAHIOUNE, Compression d'images hyperspectrales par la transformée en ondelettes 3D, 2011.
- [14] M.J. Pestel(C.I.J.M) et M.R.Roy(MATHS A VENIR),brochure colloque 2009 à l'imagerie médicale, thèse, 2004.
- [15] I. QUARTA,Une introduction à la théorie des ondelettes, 2001.
- [16] VHD Dissector PRO,based on the visible Human projet, Version 4.5.1, 2006 Touch of the life Technologies. (Logiciel pour toutes les coupes du corps humain.)