REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET D' INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Mémoire de Master en Mathématiques

OPTION : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Sujet

Contrôle Optimal Classique et Fractionnaire

Présenté par

Taïeb Amel

Soutenu le

19 Juin 2013

Devant le Jury

Omar BELHAMITI	Président	*MCA*	*U. MOSTAGANEM*
Sidi Mohamed BAHRI	*Examinateur*	*MCA*	*U. MOSTAGANEM*
Abdessamad AMIR	*Encadreur*	*MCA*	*U. MOSTAGANEM*

Table des matières

Remerciement

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah, Le Tout Puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.

Je remercie du fond de mon cœur, mes parents, qui m'ont soutenue, encouragée et motivée tout au long de mes études.

Je tiens à remercier ces personnes chères : ma soeur et mon frère, et je ne peux oublier de remercier mes amies.

A messieurs les membres du jury

Je remercie :

Monsieur A. AMIR pour ses précieux conseils et suggetions. Qu'il veuille bien trouver dans ce travail l'expression de ma déférence et de ma profonde gratitude.

Monsieur O. BELHAMITI qui m'a fait l'honneur de bien vouloir accepter la présidence de ce mémoire. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma déférence et de ma profonde gratitude.

Messieur S. BAHRI qu'il veuille bien trouver ici l'expression ma profonde gratitude et de mon profond respect pour avoir eu l'amabilité de vouloir bien faire partie du jury de mon mémoire.

Enfin, je ne pourrais terminer ces remerciements sans une pensée à l'ensemble de mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

Taïeb Amel.

Introduction

La théorie du contrôle (ou théorie de la commande) analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur les quels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard...Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie.... Dans les industries modernes où la notion de rendement est prépondérante, rôle d'automaticien est de concevoir, de réaliser et d'optimiser, tout au moins d'améliorer les méthodes existantes. Ainsi les domaines d'applications sont multiples : aérospatiale, automobile, robotique, aéronautique, internet et les communications en général, mais aussi le secteur médical, chimique, génie des procédés, etc. Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles, intégrales, fonctionnelles, aux différences finies, aux dérivées partielles, stochastiques, etc. Pour cette raison la théorie du contrôle est au carrefour de nombreux domaines mathématiques. Les contrôles sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes. Une fois le problème de contrôlabilité résolu, on peut de plus vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère ; on parle alors d'un problème de contrôle optimal ou de commande optimale. La théorie moderne du contrôle optimal a commencé dans les années 50, avec la formulation du principe du maximum de Pontryaguine, qui généralise les équations d'Euler-Lagrange du calcul des variations. De nos jours, les systèmes automatisés font complètement partie de notre quotidien (nous en sommes souvent inconscients), ayant pour but d'améliorer notre qualité de vie et de faciliter certaines tâches : système de freinage ABS, régulation hygrométrique, circuits frigorifiques, contrôle des flux routiers, ferroviaires, aériens, filtrage et reconstruction d'images, réseaux informatiques, moteurs de recherche sur internet, circuits électriques, électroniques, télécommunications en général, contrôle des procédés chimiques, raffinage pétrolier, chaînes industrielles de montage, systèmes médicaux automatisés, opérations au laser, robotique, satellites, guidages aérospatiaux, ... La liste est infinie, les applications concernent tout système sur lequel on peut avoir une action, avec une notion de rendement optimal.

Ce mémoire est une modeste introduction en cette théorie. En s'appuyant sur les deux théories, à savoir le contrôle et l'optimisation, et en donnant des illustration parfois que conceptuelles en évitent les détails trop technique, on a essayé de donner un exposé assez compréhensible pour un publique aussi large que possible. C'est avec cette esprit qu'on a abordé au premier chapitre le problème de contrôle optimal classique. Le second chapitre à pour but d'établir les conditions d'optimalité données par le Principe du Maximum de Pontryaguine, résultat de résolution, et à la base de tout les approche numérique abordant ce sujet.

Quand les systèmes considérés sont complexes ou peuvent seulement être étudiés sur une échelle macroscopique, il détournent par fois des lois dynamiques d'ordre classique en nombre entier. Dans certain cas leur dynamique suit des lois d'ordre fractionnaire signifiant que leur comportement est régi par les équations différentielles d'ordre fractionnaire. Comme illustration, on peut trouver dans la littérature des processus dynamiques tels que la diffusion du gaz et la conduction de chaleur dans des médias poreux de fractale peuvent plus avec précision être modelés en utilisant des modèles d'ordre fractionnaire qu'en utilisant des modèles d'ordre entier. Ceci, nous a motivé d'abordé en plus du cas classique, le problème du contrôle optimal fractionnaire au dernier chapitre.

Chapitre 1

Contrôle Optimal Classique

Une façon pragmatique de définir une science de decision tel que le contrôle optimal est de présenter les problèmes qu'elle résout. Par un exemple général, nous essayons de définir dans le paragraphe suivant ce qu'est la commande optimale, nous donnons après sa formulation mathématique.

1.1 Etat et Commande

[4]Supposons qu'on dispose :

· d'un système (un robot, un four, une usine, une fusée) dont l'évolution dans le temps est gouvernée par des lois physiques (lois de la mécanique, de la thermodynamique, transfert de la matière, etc.) qui lient ses variables d'état décrites par un vecteur x (position, vitesse), et des commandes u (accélération, flux de matière, poussée, etc.)

· à l'aide des commandes u , on désire faire en sorte que le système suive une trajectoire déterminée ou atteigne un état fixe $\widehat{x}$, et minimiser le long de la trajectoire un critère (énergétique, économique) donné à l'avance.

Précisons un peu le vocabulaire que nous venons d'utiliser. Parlant d'un système, nous avons mentionné des notions de variables d'état et de commande. Plus généralement, un système peut être décrit par des variables exogènes et des variables endogènes. Les variables exogènes comprennent en particulier les commandes, qui influent sur le système, ainsi que toutes les variables extérieures qui n'influent pas sur le système, mais sont connues si nécessaire. Les variables endogènes sont les variables physiques mesurable ou non, qui décrivent la structure intime du système.

Par exemple, supposons que nous ayons à considérer un four industriel. Nous n'avons accès à la température régnant dans le four qu'en des points où se trouvent les capteurs adéquats. D'autre part, les mesures de température se font à des instants discrets (toutes les dix secondes, ou toutes les dix minutes, par exemple). Pourtant, on admettra sans peine qu'il existe une variable, nommée fonction de distribution de la température, qui obéit aux équations de la chaleur, partout dans le four, et à chaque instant. Dans ce cas précis, la variable de la commande peut être simplement une intensité électrique que l'on augmente ou diminue afin de chauffer le four par l'intermédiaire de la résistances électriques. De ce point de vue la commande est connue et c'est une variable exogène. L'état précis du four est inconnu, mais on l'observe partiellement grâce aux capteurs. On est donc conduit à considérer " l'image" ou la mesure exogène des variables endogènes. Cela définit des variables dites d'observation, que l'on note souvent $y(t)$.

Ecrivons le modèle mathématique associé à cette description très générale. On appelle x l'état du système, c'est-à-dire l'ensemble des paramètres du système sujets à des lois physiques et permettant, si on les connaissait tous à un instant donné t_0, de décrire totalement l'évolution ultérieur du système. On suppose que l'état x est solution d'une équation différentielle ou d'une équation aux différences finies, de type :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \tag{1.1}$$

ou

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t), u(t), t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \tag{1.2}$$

où le vecteur d'état $x(t) \in \mathbb{R}^n$, et la loi de commande $u(t) \in \mathbb{R}^p$. On a l'accès à l'observation y, selon l'équation d'observation :

$$y = b(x(t), t) \tag{1.3}$$

ou

$$y(t+1) = b(x(t), t), \tag{1.4}$$

suivant que l'on est en temps discret ou en temps continu.Ces deux équations (1.1) et (1.2) constituent la description entrée-sortie du système considéré, description schématisée sur la figure1.

$$u \longrightarrow \boxed{\dot{x} = f(x(t), u, t)} \longrightarrow y = b(x(t), t).$$

figure1 :description entrée-sortie d'un système.

Un instant (ou horizon) T étant fixé, on peut envisager pour ce système commandé, les objectifs suivants :

· On désire que $\forall\ t \succ T,\quad x(t) \approx \overset{\curlywedge}{x}(t)$, $\overset{\curlywedge}{x}$ étant une trajectoire de référence ou de consigne. Il s'agit par exemple d'un problème de régulation.

· Sur l'ensemble de trajectoire entre $t = 0$ et $t = T$, on désire que la commande minimise le critère

$$J(u) = \int_0^T g(x(t), u(t), t)dt + C(x(T)), \tag{1.5}$$

ou

$$J(u) = \sum_0^{T-1} g(x(t), u(t), t) + C(x(T)). \tag{1.6}$$

Il s'agit alors d'un problème de performance en temps minimal, d'un problème de chemin minimal, etc. Ce coût associé à la trajectoire est naturelement décomposé, en une somme (intégrale) de coûts instantanés et un coût final $C(x(T))$, dont l'intérêt est de favoriser (puisqu'on le minimise aussi) un certain nombre de configurations finales du système. Un problème de contrôle optimal se décompose en deux parties : pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable. C'est le problème de contrôlabilité. Ensuite, une fois ce problème résolu, il faut chercher parmi toutes ces trajectoires possibles celles qui le font en coût minimal. A présent, nous donnons la définition d'un système contrôlable ainsi que les conditions suffisantes assurant ceci, pour une étude approfondi en théorie de contrôle nous renvoyons le lécteure aux ouvrages classiques ([6] et [5]).

Définition 1.1 *([8]) Le système contrôlé* $\dot{x}(t) = A(t)x(t)+B(t)u(t)+r(t)$ *est dit contrôlable en temps* T *si pour tous* x_0, $x_1 \in \mathbb{R}^n$, *il existe un contrôle* u *tel que la trajectoire associée relie* x_0 *et* x_1, *en temps* T.

Théorème 1.1 *([8]) Le système (1.1, 1.3) ou (1.2, 1.4) est commandable si et seulement si la matrice* $M = [B, AB, A^2B, .., A^{n-1}B]$ *est de rang maximal* n, *ou encore si la matrice* $\sum_{i=0}^{n-1} A^iBB^T(A^T)^i$ *est définie positive.*

La matrice M *est appelée matrice de Kalman, et la condition* $rg\ M = n$ *est appelée condition de Kalman.*

Remarque 1.1 *La condition de Kalman ne dépend pas ni de* T *ni de* x_0. *Autrement dit si un système linéaire autonome est contrôlable en temps* T *depuis* x_0 , *alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.*

Exemple 1.1 *Soit le système linéaire à temps invariant (L.T.I) suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 - 2u \end{cases}$$

Question : *Ce système est il commandable ?*

On a : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ *, en calculant :* $M = [B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ *, on obtient* $\det M = 0$.

Réponse : *puisque rang* $M < 2$ *, ce système, n'est pas commandable.*

1.2 Formulation mathématique

La forme la plus générale d'un problème de contrôle optimal est la suivante :

$$\begin{cases} \min J(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t),u(t),t)dt + G(x(t_1),t_1) \\ u \in U \end{cases}. \tag{1.7}$$

Le problème (1.7) comporte une contrainte implicite qui est l'équation d'état. On peut le formuler de manière équivalente en faisant apparaître l'équation d'état comme une contrainte explicite.

$$\begin{cases} \min J(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} g(x(t),u(t),t)dt + G(x(t_1),t_1) \\ \frac{dx}{dt} = f(x(t),u(t),t), \ \text{sur }]t_0,t_1] \text{, avec } x(t_0) = x_0 \\ u \in U \end{cases}. \tag{1.8}$$

Avec $U \subset \mathbb{R}^p$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Où les fonctions f et g, intervenant dans le critère sont au moins C^1 par rapport à leurs deux premiers arguments, et continues en t, l'ensemble ($U \subset \mathbb{R}^p$) des commandes admissibles u est borné. Notons que la valeur de $x(t_1)$ n'est pas fixée (on parle de valeur finale libre), et que les temps t_0 et t_1 peuvent être laissés libres c'est-à-dire traités comme des commandes. La situation où ils sont fixes est plus facile à considérer.

Le problème (1.8) dont la foction coût (ou critère) $J(x, u)$, contient à la fois un terme intégral et un terme final s'appelle problème de Bolza. lorsque seul le terme intégral apparait, c'est un problème de Lagrange, et dans l'autre cas, il s'agit d'un problème de Meyer. En introduisant de nouvelles variables d'état ou de nouvelles contraintes, on peut passer d'un type de problème à un autre type quelconque. C'est pourquoi la plupart des résultas qui suivent seront énoncés pour des problèmes de Lagrange.

Définition 1.2 *([3]) Un contrôle u solution du problème de minimisation précédent s'appelle un contrôle optimal pour le critère J (et le point x_0).*

Chapitre 2

Conditions d'optimalité

Le but de ce chapitre est d'établir les conditions d'optimalité pour un problème de contrôle optimal classique, puis on donne des exemples illustratifs.

2.1 Approche conceptuelle

Nous allons considérer une instance particulière du problème (1.8), le problème de Lagrange sur un horizon fixe $[t_0, t_1]$.

$$\begin{cases} \min\limits_{x(t)\epsilon\mathbb{R}^n, u(t)\epsilon\mathbb{R}^p} J(u) = \int_{t0}^{t1} g(x(t), u(t), t)dt \\ \dot{x} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \end{cases}, \tag{2.1}$$

où f et g sont au moins C^1 par rapport à leurs deux premiers arguments. On notera que la valeur de $x(t_1)$ n'est pas fixée. Pour résoudre au moins conceptuellement ce problème, prenons le point de vue de Lagrange qui consiste à associer à chaque contrainte un multiplicateur.

Soit p le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte : $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$. On peut alors écrire le critère modifié comme suit :

$$\overline{J}(u) = \int_{t0}^{t1} g(x(t), u(t), t)dt = \int_{t0}^{t1} \left\{ g(x(t), u(t), t) + p^T \left[f(x(t), u(t), t) - \dot{x} \right] \right\} dt.$$

Supposons que p soit différentiable. Alors le terme $\int_{t0}^{t1} p^T \dot{x} dt$ peut être intégré par partie, et il vaut $\left[p^T x\right]_{t0}^{t1} - \int_{t0}^{t1} \dot{p}^T x dt$, et $\overline{J}(u)$ se réécrit,

$$\overline{J}(u) = \int_{t0}^{t1} \left\{ g(x(t), u(t), t) + p^T f(x(t), u(t), t) + \dot{p}^T x \right\} dt - p(t_1)x(t_1) + p(t_0)x(t_0).$$

Pour une trajectoire $x(\cdot)$ donnée, associée à la commande $u(\cdot)$, considérons $\varepsilon v(\cdot)$, une perturbation admissible de u et $y(\cdot, \varepsilon)$ la trajectoire d'état correspondante. On suppose que y est différentiable en ε et on notera $y_\varepsilon$la dérivée partielle associée.

On définit :

$$\begin{aligned}
J(u+\varepsilon v) &= \int_{t0}^{t1} g(y(t,\varepsilon), u+\varepsilon v, t)dt \\
\overline{J}(u+\varepsilon v) &= \int_{t0}^{t1} \left\{ g(y(t,\varepsilon), u+\varepsilon v, t) + p^T\ f(y(t,\varepsilon), u+\varepsilon v, t) + \dot{p}^T\ y(\cdot,\varepsilon) \right\} dt \\
&\quad -p(t_1)^T y(t_1,\varepsilon) + p(t_0)^T y(t_0,\varepsilon).
\end{aligned}$$

Si le couple (x, u) est un couple optimal, alors la fonction $g(\varepsilon) = \overline{J}\ (u+\ \varepsilon v)$ admet un minimum en $\varepsilon = 0$, pour toute perturbation v.

Donc on aura :

$$g'(0) = 0, \tag{2.2}$$

d'où

$$g'(0) = \int_{t0}^{t1} \left\{ g_x(x,u,t) + p^T\ f_x(x,u,t) + \dot{p}^T)y_\varepsilon(t,0) + (g_u(x,u,t) + p^T\ f_u(x,u,t))v \right\} dt$$

$$-p(t_1)^T y_\varepsilon(t_1,0) + p(t_0)^T y_\varepsilon(t_0,0) = 0.$$

Notons que la valeur de $x(t_0)$ étant fixée, toute perturbation admissible v est forcément telle que $y_\varepsilon(t_0, 0) = 0$ puisque $y(t_0, \varepsilon) = x_0$. Le dernier terme de $g'(0)$ est donc nul. Par ailleurs, bien qu'on ait supposée son existence, le calcul de $y(t, \varepsilon)$ est plus encore de $y_\varepsilon(t, 0)$, sa dérivée partielle est inatteignable sans informations supplémentaires sur v. C'est là qu'intervient le multiplicateur de Lagrange $p(t)$. En effet, si l'on choisit p (appelé aussi état adjoint tel que

$$\dot{p} = -p^T f_x(x,u,t) - g_x^T(x,u,t), \quad p(t_1) = 0. \tag{2.3}$$

On n'a plus besoin de connaître y_ε, et la condition d'optimalité (2.2) s'écrit simplement comme suit :

$$\int_{t0}^{t1} \left\{ g_u(x,u,t) + p^T\ f_u(x,u,t) \right\} vdt = \int_{t0}^{t1} \frac{\partial}{\partial u} \left\{ g(x,u,t) + p^T\ f(x,u,t) \right\} vdt = 0. \tag{2.4}$$

2.1.1 Formulation Hamiltonienne

Si l'on introduit la fonction de Pontryaguine (qui ressemble beaucoup à un Hamiltonien et que l'on appellera souvent par extension Hamiltonien)

$$H(x,u,p,t) = p^T f(x,u,t) + g(x,u,t)\ ,$$

On constate que la condition d'optimalité (2.3) devienne : $H_u(x, u, p, t) = 0$. Dans le cas où g est convexe et f est linéaire, on voit que H serait convexe, et cette condition d'optimalité correspondrait à un minimum de H, d'où le nom de "principe du minimum". Par ailleurs, l'équation de la dynamique de l'état s'écrit : $\dot{x} = f(x(t), u(t), t) = H_p$ et l'équation de l'état adjoint p est $\dot{p} = -H_x$. En terme de la fonction de Pontryaguine (ou du Hamiltonien), nous sommes donc parvenus aux conditions d'optimalité nécessaires suivantes

$$H_u(x,u,p,t) = 0, \quad \dot{x} = H_p, \quad \dot{p} = -H_x\ . \tag{2.5}$$

2.1.2 Formulation Lagrangienne

Introduisons le Lagrangien instantané

$$L(x, \dot{x}, u, p, t) = g(x, u, t) + p^T \left(f(x, u, t) - \dot{x} \right).$$

On note alors que l'équation différentielle (2.3) n'est autre que l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} = L_x,$$

c'est-à dire une équation d'Euler-Lagrange. Par ailleurs, la condition d'optimalité en u s'écrit aussi sous forme d'une équation d'Euler-Lagrange comme suit :

$$0 = \frac{d}{dt} L_{\dot{u}} = L_u,$$

également l'équation de la dynamique est une équation d'Euler-Lagrange :

$$0 = \frac{d}{dt} L_{\dot{p}} = L_p.$$

Nous avons donc en fait

· introduit un Lagrangien instantané

$$L(x, \dot{x}, u, p, t) = g(x, u, t) + p^T \left(f(x, u, t) - \dot{x} \right),$$

· exploité les conditions d'Euler- Lagrange pour que l'intégrale $\int_{t0}^{t1} L(x, u, p, t)dt$ soit extrémale en x, u et p.

Le principe de minimum que nous allons maintenant présenter dans un cadre un peut plus général, admettra, comme nous venons de voir une forme Lagrangienne et une forme Hamiltonienne, que nous énonçant ci-dessous sans démonstration. On a évité La preuve de ce théorème classique car elle est trop longue et très technique.

Théorème 2.1 ([4]) *On considère le problème de commande optimale*

$$\begin{cases} \min\ J(x, u) = \int_{t0}^{t1} g(x(t), u(t), t)dt \\ \dot{x} = f(x(t), u(t), t),\ t \in [t_0, t_1],\ \ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

avec $U(t) \subset \mathbb{R}^p$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

On suppose que les fonctions f et g sont C^1 par rapport à x et u, et continues en t, on suppose que chaque ensemble $U(t)$ est borné et que les bornes de l'intervalle t_0 et t_1 sont des variables de commandes. On définit la fonction de Pontryaguine $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$;

$$H(x, u, p, p_0, t) = p^T f(x, u, t) + p_0 g(x, u, t)$$

et la fonction de Hamilton (ou Hamiltonien)

$$H(x, p, p_0, t) = \inf_{u(t) \epsilon U(t)} H(x, u, p, p_0, t).$$

Soit (x, u, t_0, t_1) une solution optimale du problème (2.6). Alors il existe un nombre positif p_0, et un vecteur adjoint $p(t)$, non tous nuls tels que le vecteur adjoint p soit solution de l'équation différentiel (2.3),

$$\dot{p} = -H_x = -f_x^T(x, u, t)p - p_0 g_x^T(x, u, t), \quad \textit{avec } p(t_1) = 0$$

pour presque tout $t \in [t_0, t_1]$, $u(t)$ réalise le minimum instantané de $H(x, \cdot, p, p_0, t)$

$$H(x(t), u(t), p(t), p_0, t) = \min_{v \in U(t)} H(x(t), v, p(t), p_0, t) \;= H(x(t), p(t), p_0, t),$$

$H(x(t), p(t), p_0, t)$ est continue sur l'intervalle $[t_0, t_1]$.

Exemple 2.1 *Pour donner toute la force de ce théorème, considérons le problème linéaire quadratique suivant :*

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} \int_{t0}^{t1} \left\{ x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \right\} dt \\ \quad \dot{x} = Ax + Bu, \; x(0) = x_0, \; t \in [0, T] \end{cases},$$

où les matrices $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$ sont définies positives, avec $[A, B]$ commandable. On suppose que $t_1 > 0$ est fixé et n'est pas une variable commandée (sinon, $t_1 = 0$ est une solution optimale car ne rien faire conduit à un coût nul donc optimal). D'après le théorème, si (x, u) est une solution optimale, alors il existe $p(t)$ solution de l'équation de l état adjoint $\dot{p} = -p^T A - p_0 Q x(t)$. La fonction de Pontryaguine prend la forme suivante :

$$H(x, u, p, p_0, t) = p^T(Ax + Bu) + \frac{p_0}{2} \left\{ x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \right\},$$

et le Principe de Minimum s'écrit : $H_u = p^T B - p_0(t) R(t) u(t) = 0$. Supposons que $p_0 = 0$. Alors $\dot{p} = -A^T p$ et $H_u = p^T B = B^T p = 0$. comme $p(t_1) = 0$, cela implique que $p = 0$ et tous les multiplicateurs sont nuls. Ce cas étant exclu, on peut donc prendre $p_0 = 1$. Le calcul de u donne alors :

$$u = R^{-1} B^T p,$$

et nous sommes conduits au système :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BR^{-1}B^T \\ Q & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}, \quad x(0) = x_0, \; p(t_1) = 0,$$

système qui admet une solution optimale. Le principe du Minimum de pontryaguine remplace donc le calcul de la commande optimale par la résolution d'un système d'équations différentielles ordinaires avec conditions aux deux bouts auquel on ajoute un problème d'optimisation élémentaire résolu à chaque instant. On notera par ailleurs que H est continue par rapport à t même si u ne l'est pas.

2.2 Exemple et schéma numérique

2.2.1 Commande en temps minimal

Une application typique du principe du Minimum est la commande en temps optimal des systèmes à dynamique linéaire. Une particularité de ces problèmes est que la commande optimale se trouve nécessairement sur le bord du sous-ensemble des commandes admissibles. Lorsque cette ensemble est un pavé fermé de $\mathbb{R}^p$, la commande "saute" d'une frontière à l'autre, à des "instants de commutation" précis. On parle alors de commande "*bang-bang*" vue qu'on utilise en réalité que les valeurs maximales et minimales admissibles de la commande.

Exemple 2.2 *Considérons le système suivant, d'état* $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = u \\ t_0 = 0 \\ (x_1(0), x_2(0)) = (1,1) \\ u \in [-1,1] \end{array} \right. .$$

La commande u *est l'accélération du système. On désire amener ce système à l'origine* $(0,0)$ *en temps minimal, c'est-à-dire minimiser la fonctionnelle*

$$J(u) = \int_{t_0}^{t1} dt = t_1 - t_0 \ .$$

La fonction de Pontryaguine associée est :

$$H(x_1, x_2, u, p, p_0, t) = p_1 x_2 + p_2 u + p_0 1,$$

le vecteur adjoint p *est solution du système :*

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{p_1} = -H_{x_1} = 0 \\ \dot{p_2} = -H_{x_2} = -p_1 \end{array} \right. ,$$

d'où l'on déduit que p_1 *est une constante, que l'on note* c_1 *et* p_2 *est linéaire, donné par :* $p_2 = -c_1 t + c_2$*. Remplaçons ces valeurs dans* H*,*

$$H = c_1 x_2 + (c_2 - c_1 t)\, u + p_0, \ (\ H_u = c_2 - c_1 t = 0) \implies (t_c = \frac{c_2}{c_1}).$$

Cette fonction est linéaire en u *. Pour atteindre tout le temps son minimum,* u^* *doit être égal soit à* (1)*,soit à* (-1) *. Par ailleurs, il ne peut changer de signe qu'une seule fois. C'est ce qu'on appelle une commutation. Soit* t_c *l'instant de commutation. Par exemple si* $c_2 > 0$ *et* $c_1 > 0$*, on aura :*

$$\textit{pour} \ \ t < t_c = \frac{c_2}{c_1} (\textit{accélération}) \left\{ \begin{array}{c} u^*(t) = 1 \\ x_2(t) = t + 1 \\ x_1(t) = \frac{t^2}{2} + t + 1 \end{array} \right. ,$$

$$\textit{et pour} \ \ t \geq t_c = \frac{c_2}{c_1} (\textit{décélération}) \left\{ \begin{array}{c} u^*(t) = -1 \\ x_2(t) = -(t - t_c) + x_2(t_c) \\ x_1(t) = -\frac{(t-t_c)^2}{2} + x_2(t_c)(t - t_c) + x_1(t_c) \end{array} \right. .$$

En d'autres termes, jusqu'à l'instant de commutation on accélère à fond. A partir de l'instant de commutation, on freine à fond.

2.2.2 Schéma numérique

Appliquons le Principe du Minimum pour la résolution numérique d'un problème linéaire quadratique en temps continu. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \min\limits_{u(t)\epsilon U(t)} J(u) = \frac{1}{2}\int_{t0}^{t1}\left[x^T(t)Rx(t) + u^T(t)Qu(t)\right]dt + \frac{1}{2}x^T(t_1)C(t_1)x(t_1) \\ \dot{x} = Ax + Bu, \;\; x(t_0) = x_0 \end{cases}.$$

Pour simplifier, on suppose que R, Q, A et B sont constantes. On introduit la fonction de Pontryaguine

$$H = p^T(Ax + Bu) + \frac{p_0}{2}\left[x(t)^T Rx(t) + u^T(t)Qu(t)\right].$$

Tout d'abord, si $p_0 = 0$, alors le Principe du Minimum conduit à : $p = 0$, ce qui est exclu. On choisit donc $p_0 = 1$. Le Principe du Minimum conduit alors à l'équation d'optimalité,

$$H_u = B^T p + Qu = 0,$$

l'état adjoint étant solution de l'équation différentielle

$$\dot{p} = -H_x = -A^T p - Rx,$$

avec la condition finale sur p, $p(t_1) = 0$.

On résout donc ce système, additionné de l'équation de l'évolution de x. Nous avons donc à résoudre un système différentiel avec conditions limites au deux bouts. Le schéma d'une méthode numérique générale de résolution d'un tel système Hamiltonien,

$$\begin{cases} \dot{x} = H_p(x,u,p,t) & x(t_0) = x_0 \\ \dot{p} = -H_x(x,u,p,t), & p(t_1) = 0 \\ u(t) \;\epsilon\; \arg\min\limits_{v\;\epsilon\;U(t)} H(x,v,p,t)\;, & \end{cases}$$

est le suivant :

(i) Initialisation : on se donne loi $u^0(t)$ admissible et un seuil τ "petit" par rapport à $\max\limits_{t\;\epsilon\;[t_0,t_1]} |u^0(t)|$.

(ii) A l'itération pricipale k : connaissant $u^k(t)$ et $x(t_0) = x_0$,

(a) en intégrant l'équation différentielle $\dot{x} = H_p(x,u^k,p,t) = f(x,u^k,t)$, on en déduit la trajectoire primale $x^k(t)$.

(b) connaissant la valeur finale de x^k, $x^k(t_1)$, on intègre p en temps rétrograde à l'aide de l'équation différentielle $\dot{p} = -H_x(x^k,u^k,p,t) = -\left[f_x^T(x^k,u^k,t)p + g_x(x^k,u^k,t)\right]$ ce qui donne $p^k(t)$.

(c) ayant les trajectoires x^k et p^k, on peut calculer le gradient (et éventuellement même le Hessien) de H en u pour ces valeurs :

$$\nabla_u H^k(t) = f_u(x^k,u^k,t)^T p^k + g_u(x^k,u^k,t).$$

(d) On peut donc remettre à jour u^k par un "pas de déplacement $\varepsilon(t)$ fixe ou issu d'une recherche linéaire Inéxacte " pour minimiser H

$$u^{k+1}(t) = u^k(t) - \varepsilon(t)\nabla_u H^k(t), \text{ avec } (\varepsilon(t) > 0) \text{ à déterminer.}$$

(e) tant que $\max\limits_{t \in [t_0,t_1]} \left|u^k(t) - u^{k+1}(t)\right| \geq \tau$, faire $k = k + 1$ et aller en (ii)-(a).

Cette méthode s'interprète donc comme une méthode du gradient (ou éventuellement du gradient conjugué, Newton, etc.) pour minimiser H à chaque instant ainsi, pour minimiser J globalement en $u(\cdot)$.

2.3 Une autre Approche

Dans cette section on va présenter une autre approche ([7]) beaucoup plus adapté au contrôle optimal fractionnaire. Pour ce faire considérons la fonctionnelle

$$J : C^k\left([t_0, t_1], \mathbb{R}^n\right) \to \mathbb{R}, \text{ et } x \in C^k\left([t_0, t_1], \mathbb{R}^n\right).$$

2.3.1 Incrément d'une fonction

Définition 2.1 *On appel incrément d'une fonction x, la quantité noté Δx, définit comme suit :*

$$\Delta x \triangleq x\left(t + \Delta t\right) - x\left(t\right) \tag{2.7}$$

où Δt est la variation de t.

Exemple 2.3 *Soit la fonction $x : [a, b] \to \mathbb{R}$, $(t_1, t_2) \mapsto x\left(t_1, t_2\right) = \left(t_1 + t_2\right)^2$. Alors,*

$$\begin{aligned}
& \Delta x \triangleq x\left(t + \Delta t\right) - x\left(t\right) \\
\Delta x &= \left(t_1 + \Delta t_1 + t_2 + \Delta t_2\right)^2 - \left(t_1 + t_2\right)^2 \\
\Delta x &= \left(t_1 + \Delta t_1\right)^2 + \left(t_2 + \Delta t_2\right)^2 + 2\left(t_1 + \Delta t_1\right)\left(t_2 + \Delta t_2\right) - \left(t_1^2 + t_2^2 + 2t_1t_2\right) \\
\Delta x &= 2\left(t_1 + t_2\right)\Delta t_1 + 2\left(t_1 + t_2\right)\Delta t_2 + \left(\Delta t_1\right)^2 + \left(\Delta t_2\right)^2 + 2\Delta t_1 \Delta t_2
\end{aligned}$$

2.3.2 Incrément d'une fonctionnelle

Définition 2.2 *On appel incrément d'une fonctionnelle J, la quantité noté ΔJ , définit comme suit :*

$$\Delta J \triangleq J\left(x(t) + \delta x(t)\right) - J\left(x(t)\right), \tag{2.8}$$

où δx est la variation de la fonction x.

Exemple 2.4 *Considérons la fonctionnelle $J\left(x\right) = \int_{t_0}^{t_1} \left[2x^2(t) + 1\right] dt$, l'incrément de J est donné par :*

$$\begin{aligned}
& \Delta J \triangleq J\left(x(t) + \delta x(t)\right) - J\left(x(t)\right) \ , \\
\Delta J &= \int_{t_0}^{t_1} \left[2\left(x(t) + \delta x(t)\right)^2 + 1\right] dt - \int_{t_0}^{t_1} \left[2x^2(t) + 1\right] dt \ , \\
\Delta J &= \int_{t_0}^{t_1} \left[4x(t)\delta x(t) + 2(\delta x(t))^2\right] dt.
\end{aligned}$$

2.3.3 Différentiel et variation

Ici, nous considérons le différentiel d'une fonction et la variation d'une fonctionnelle
Différentiel d'une fonction : Définissons au point t^* l'incrément de f comme

$$\Delta x \triangleq x\left(t^*+\Delta t\right)-x\left(t^*\right)$$

En développant f en série de Taylor au point t^*, on obtient

$$\Delta x=x\left(t^*\right)+\left(\frac{dx}{dt}\right)\Delta t+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)(\Delta t)^2+\ldots-x\left(t^*\right)$$

En négligeant dans le développement les termes d'ordre supérieur à 2, on obtient

$$\Delta x=\left(\frac{dx}{dt}\right)\Delta t=\dot{x}(t^*)\Delta t=dx, \tag{2.9}$$

Exemple 2.5 *Prenons $x=t^2+2t$. Par définition l'incément Δf est :*

$$\begin{aligned}
&\Delta x \triangleq x\left(t+\Delta t\right)-x\left(t\right) \;,\\
\Delta x &= (t+\Delta t)^2+2\left(t+\Delta t\right)-\left(t^2+2t\right)\\
\Delta x &= 2t\Delta t+2\Delta t+\cdots+O\left(\Delta t\right)^2\\
\Delta x &= 2\left(t+1\right)\Delta t \;,\\
\Delta x &= \dot{x}\left(t\right)\Delta t \;.
\end{aligned}$$

Variation d'une fonctionnelle : Considérons l'incrément de la fonctionnelle J,

$$\Delta J \triangleq J\left(x(t)+\delta x(t)\right)-J\left(x(t)\right).$$

En développant J en série de Taylor au point x^*, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta J &= J\left(x^*(t)\right)+\frac{\partial J}{\partial x}\delta x(t)+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}\left(\delta x(t)\right)^2+\cdots-J\left(x^*(t)\right)\\
\Delta J &= \frac{\partial J}{\partial x}\delta x(t)+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}\left(\delta x(t)\right)^2+\cdots\\
\Delta J &= \delta J+\delta^2 J+\cdots
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Définition 2.3 *Les deux quantités*

$$\delta J=\frac{\partial J}{\partial x}\delta x(t) \quad et \quad \delta^2 J=\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}\left(\delta x(t)\right)^2, \tag{2.11}$$

sont appelées la première variation (ou simplement la variation) et la seconde variation de J , respectivement.

Remarque 2.1 *Notons que le produit dans la relation (2.11) représente le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$, où la fonctionnelle $J : C^k\left([t_0,t_1],\mathbb{R}^n\right)\to\mathbb{R}$, et $x\in C^k\left([t_0,t_1],\mathbb{R}^n\right)$. d'où δJ n'est rien d'autre que la différentielle de J.*

Exemple 2.6 *Nous donnons la fonctionnelle* $J(x(t)) = \int_{t_0}^{t1} \left[2x^2(t) + 3x(t) + 4\right] dt$*, et nous formons l'incrément*

$$\begin{aligned}
\Delta J &= \int_{t_0}^{t_1} \left[2\left(x(t) + \delta x(t)\right)^2 + 3\left(x(t) + \delta x(t)\right) + 4 - \left(2x^2(t) + 3x(t) + 4\right)\right] dt, \\
\Delta J &= \int_{t_0}^{t_1} \left[4x(t)\,\delta x(t) + 2(\delta x(t))^2 + 3\delta x(t)\right] dt.
\end{aligned}$$

Considérons seulement les termes du premier ordre, nous obtenons la première variation comme suit :

$$\delta J\left(x(t), \delta x(t)\right) = \int_{t_0}^{t_1} \left(4x(t) + 3\right) \delta x(t) dt.$$

2.3.4 Optimum d'une fonction et d'une fonctionnelle

Rappelons que x^* est dit un minimum local pour la fonctionnelle J s' il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout x vérifiant $\|x - x^*\| < \varepsilon$ on a,

$$J(x) - J(x^*) \leq 0,$$

d'où

$$\Delta J \leq 0$$

Théorème 2.2 ([7]) *Soit* x^* *soit un optimum de* J*. Alors,*

$$\delta J\left(x^*(t), \delta x(t)\right) = 0 \tag{2.12}$$

pour toutes les valeures admissibles $\delta x(t)$*. c'ette condition est nécessaire, elle serait suffisante pour un minimum si, la seconde variation* $\delta^2 J > 0$*, et pour un maximum* $\delta^2 J < 0$*.*

Le lemme suivant est nécessaire pour la suite. Il exprimera d'une manière simple les conditions d'optimalité.

Lemme 2.1 ([7]) *Si pour toute fonction continue* $g(t)$*,* $\int_{t_0}^{t_f} g(t)\,\delta x(t) dt = 0$*, où* $\delta x(t)$ *est continue sur l''intervalle* $[t_0, t_f]$*, alors* $g(t)$ *est nulle sur* $[t_0, t_f]$*.*

$$g(t) = 0, \, \forall t \in [t_0, t_f].$$

Chapitre 3

Contrôle optimal fractionnaire

Le but de ce chapitre est comme le précédent : établir les conditions d'optimalité pour un problème de contrôle optimal cette fois fractionnaire. Un système dynamique fractionnaire (SDF), est un système dont la dynamique est gouvernée par des équations différentielles fractionnaires (EDFs). On appel un problème de contrôle optimal fractionnaire (PCOF) un problème de contrôle optimal pour un SDF.

Nous commençons par un rappel sur le calcul fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

3.1 Dérivation fractionnaire

Introduisons d'abord, la notion de dérivation et intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

3.1.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler qui prolonge le factoriel aux valeurs non entières.

Définition 3.1 *La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \qquad (\mathrm{Re}\, Z > 0)$$

Quelques propriétées de la fonction Gamma ([2])

Une propriété importante de la fonction $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{3.1}$$

La fonction Gamma d'Euler généralise le factoriel, car $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. On définit le prolongement de $\Gamma(z)$ pour z négatif comme suit :

Supposons $-1 < z < 0$ alors $0 < z+1 < 1$ et $\Gamma(z+1)$ est bien définie par la formule d'Euler, mais pas $\Gamma(z)$.

On convient alors de définir $\Gamma(z)$ par la relation :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z},$$

et on étend le procédé pour $z < -1$. En effet, pour $-(n+1) < z < -n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$, on aura :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad (0 < z+n+1 < 1)$$

Pour $z = 0$, $\Gamma(z)$ est infinie : il en sera de même pour toutes les valeurs entières négatives de z, c'est à dire $\Gamma(-1)$, $\Gamma(-2)$,. . .,$\Gamma(-n)$,. . .sont infinies.

On a $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0^+) = +\infty$. $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.

Le graphe de la fonction $\Gamma(z)$ pour $z = x \in \mathbb{R}$ est tracé sur la figure ci-dessous. Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, le minimum est atteint au point $z_{\min} \approx 1.465$ et $\Gamma(z_{\min}) \approx 0.8856$. Cette dernière valeur est proche de $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.8862$. De plus, $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement croissante pour $z \geq 2$ donc elle est convexe pour $z \in]0, +\infty[$.

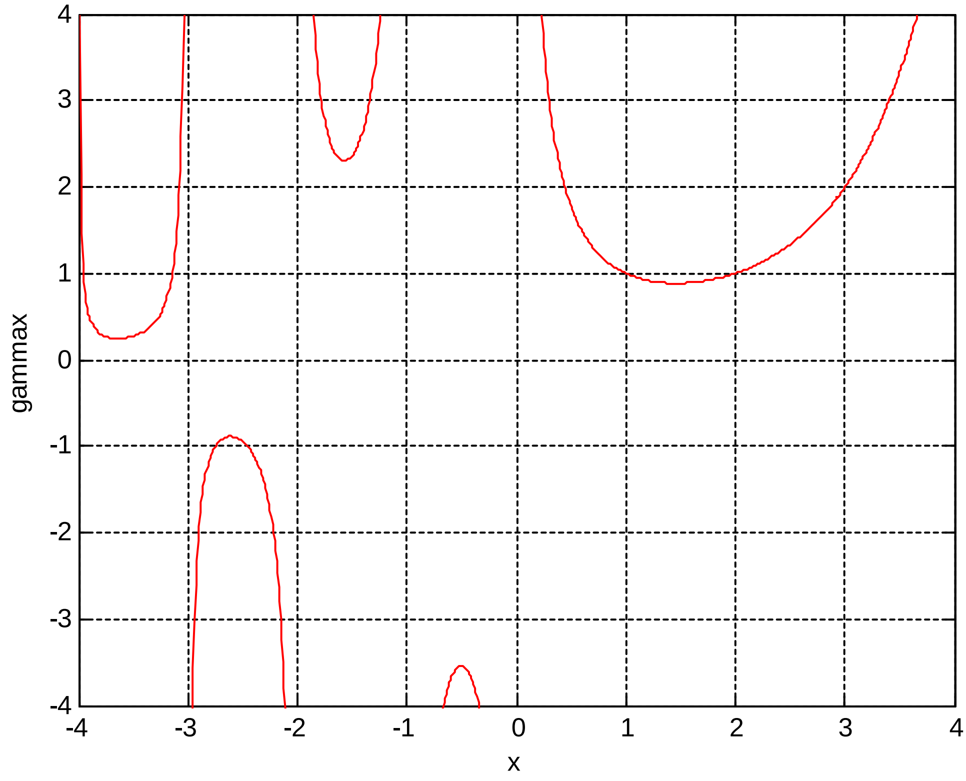


Figure1 : Variation de Γ pour z réel.

3.1.2 Théorie de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est la plus utilisée dans le domaine de contrôle optimal fractionnaire. Nous allons définir d'abord l'intégrale de Riemann-Liouville.

Intégrales d'ordre arbitraire

Définition 3.2 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, une fonction continue. L"intégrale fractionnaire à gauche (resp. à droite) d'ordre* $\alpha > 0$*, au sens de Riemann-Liouville peut être définie par :*

$$\begin{aligned} I_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \ , \ \alpha > 0 \\ I_b^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \ , \ \alpha > 0 \\ I_a^\alpha f(t) &= f(t) \ , \ \alpha = 0 \end{aligned}$$

Exemple 3.1 *Considérons la fonction* $f(t) = (t-a)^\beta$ *. Alors*

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (t-a)^\beta d\tau.$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement $t = a + (t-a)\tau$ *, d'où*

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{(t-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau \\ I_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (t-a)^{\alpha+\beta} . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Proposition 3.1 *Soit* $f \in C^\circ([a, b])$*.Pour* α*,*β *complexes tels que* $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ *et* $\mathrm{Re}(\beta) > 0$ *on a :*

$$I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f,$$

pour $\mathrm{Re}(\alpha) > 1$ *on a :*

$$\frac{d}{dt} I_a^\alpha f = I_a^{\alpha-1} f,$$

pour $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ *on a :*

$$\lim_{\alpha \to 0^+} I_a^\alpha f(t) = f(t).$$

Dérivées d'ordre arbitaire [1]

Définition 3.3 *Soit* $\alpha \ \epsilon \ ]m-1, m[$ *, avec* $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*. On appelle la dérivée fractionnaire à gauche d'ordre* α *au sens de Riemann-Liouville (DGFRL) de* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, la fonction suivante,*

$${}_aD_t^\alpha f(t) = D^m I_a^{m-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} (\frac{d}{dt})^m \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau,$$

et la dérivée fractionnaire à droite d'ordre α (DDFRL) de f est définie par

$$ {}_tD_b^\alpha f(t) = (-D^m)\, I_b^{m-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}(-\frac{d}{dt})^m \int_t^b (\tau - t)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau, $$

lorsque $\alpha = m$,

$$ {}_aD_t^\alpha f(t) = (\frac{d}{dt})^m f(t), \text{ et } {}_tD_b^\alpha f(t) = (-\frac{d}{dt})^m f(t), $$

où l'opérateur $I_a^{m-\alpha}$ représente l'intégrale fractionnaire d'ordre $(m-\alpha)$ au sens de Riemann-Liouville.

Exemple 3.2 *Reprenons l'exemple de la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$, on aura :*

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^\alpha f(t) &= (\frac{d}{dt})^m \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} (t-a)^{\beta+m-\alpha} \right] \\ {}_aD_t^\alpha f(t) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1+m-\alpha)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ {}_aD_t^\alpha f(t) &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha}, \end{aligned} $$

où nous avons utilisé la formule :

$$ (\frac{d}{dt})^m (t-a)^\lambda = \lambda (\lambda-1) \ldots (\lambda - m + 1) (t-a)^{\lambda - m} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-m+1)} (t-a)^{\lambda-m}, $$

pour $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $\beta = 1$ *on a :*

$$ {}_aD_t^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} (t-a)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\pi} \sqrt{(t-a)}, \quad {}_tD_b^{\frac{1}{2}} f(t) = -\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} (t-a)^{\frac{1}{2}} = -\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi} \sqrt{(t-a)}. $$

Remarque 3.1 *si on prend $\beta = 0$, on obtient le résultat suivant :* ${}_aD_t^\alpha (t-a)^0 = {}_aD_t^\alpha 1 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha} \neq 0,$
c'est à dire que la dérivée d'ordre α au sens de R-L d'une constante n'est pas nulle.

Proposition 3.2 *: L'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville ${}_aD_t^\alpha$ possède les propriétées suivantes :*

$$ {}_aD_t^\alpha \text{ est linéaire,} $$

$$ D_a^\alpha I_a^\alpha = id \;, $$

$$ \lim_{\substack{\alpha \to m-1 \\ >}} ({}_aD_t^\alpha f)(t) = f^{(m-1)}(t) \text{ et } \lim_{\substack{\alpha \to m \\ <}} ({}_aD_t^\alpha f)(t) = f^{(m)}(t), $$

$$ [(I_a^\alpha D_a^\alpha) f](t) = f(t) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{j-m+\alpha}}{\Gamma(j-m+\alpha+1)} \left\{ \lim_{\substack{t \to a \\ >}} \left(\frac{d}{dt} \right)^{(j)} \left[I_a^{m-\alpha} f \right](t) \right\}. $$

Corollaire 3.1 *Si $0 < \alpha < 1$ et f de classe C^1, alors*

$$(I_a^\alpha D_a^\alpha)\ f = f\ .$$

La formule de l'"intégration fractionnaire par partie est donnée par :

$$\int_a^b\ ({}_0D_t^\alpha f(t))g(t)\ dt = \int_a^b f(t)({}_tD_b^\alpha g(t))\ dt\ ,\ m-1 < \alpha < m, \tag{3.3}$$

sous les conditions :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m f(t) = 0\ \ ou\ \ \left(\frac{d}{dt}\right)^m g(t) = 0\ ,$$

aux points $t = a$ et $t = b$, pour $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Lorsque $0 < \alpha < 1$, les conditions deviennent : $f(t) = 0$ ou $g(t) = 0$ aux points $t = a$ et $t = b$.

3.2 Conditions d'optimalité

Avant d'établir les conditions d'optimalité, nous donnons une formulation mathématique d'un problème de contrôle optimal fractionnaire [1].

3.2.1 Formulation mathématique

Il s'agit de trouver la commande optimale $u(t)$ gouvernée par le système dynamique fractionnaire

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha x &= f(x,u,t), \text{ (l'équation d'évolution)} \quad (3.4)\\ x(0) &= x_0, \text{ (la condition initiale),} \quad (3.5)\end{aligned}$$

qui minimise le critère :

$$J(u) = \int_0^1 G(x,u,t)dt. \tag{3.6}$$

Où $x(t)$ est la variable d'état, t représente le temps, et f et G sont deux fonctions arbitaires. Notons que l'équation (3.6) peut inclure quelques limites additionnelles contenant la valeur finale des variables d'état. Cette limite on la considère pas ici, pour la simplification. Lorsque $\alpha = 1$, le problème ci-dessus n'est rien d'autre qu'un problème de contrôle optimal classique.

3.2.2 Equations d'Euler-Lagrange

On considère α entre 0 et 1 ($0 < \alpha < 1$), pour trouver la commande optimale nous suivons l'approche classique, et définissons un critère modifié comme :

$$\overline{J}(u) = \int_0^1 [G(x,u,t) + p^T(\ f(x,u,t) -_0 D_t^\alpha x)\ ]\ dt \tag{3.7}$$

ou p est le multiplicateur de Lagrange ou la varible d'état adjoint.

Calculons la variation de la fonctionnelle $\overline{J}$, en utilisant la définition donnée par la relation (2.11). On obtient

$$\delta\overline{J}(u) = \int_0^1 \left[\frac{\partial G}{\partial x}\delta x + \frac{\partial G}{\partial u}\delta u + \delta p(\ f(x,u,t) -_0 D_t^\alpha x) + p^T\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\delta u - \delta_0 D_t^\alpha x\right)\right] dt. \tag{3.8}$$

Où δx, δu et δp sont les variations de x, u et p respictivement .

En utilisant la formule d'intégration fractionnaire (3.3), le dernier terme dans l'équation (3.8) devient,

$$\int_0^1 p\,(\delta_0 D_t^\alpha x)\,dt = \int_0^1 \delta x\,({}_t D_1^\alpha p)\,dt, \tag{3.9}$$

avec

$$\delta x(0) = 0 \quad ou \quad p(0) = 0 \qquad et \qquad \delta x(1) = 0 \quad ou \quad p(1) = 0, \tag{3.10}$$

puisque $x(0)$ est constante, on a $\delta x(0) = 0$ et comme $x(1)$ n'est pas spécifié, on exige que $p(1) = 0$. Avec ces hypothèses la formule identitée dans l'équation (3.9) est vérifiée.

En remplaçant (3.9) dans (3.8) , on obtient :

$$\begin{aligned}
\delta\overline{J}(u) &= \int_0^1 \left[\frac{\partial G}{\partial x}\delta x + \frac{\partial G}{\partial u}\delta u + \delta p\,(f(x,u,t) -_0 D_t^\alpha x\ ) + p^T\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\delta u\right) - \delta x\,({}_t D_1^\alpha p)\right] dt \\
\delta\overline{J}(u) &= \int_0^1 \left[\delta p\,(f(x,u,t) -_0 D_t^\alpha x\ ) + \delta x\left(\frac{\partial G}{\partial x} + p^T\frac{\partial f}{\partial x} -_t D_1^\alpha p\right) + \delta u\left(\frac{\partial G}{\partial u} + p^T\frac{\partial f}{\partial u}\right)\right] dt
\end{aligned} \tag{3.11}$$

En appliquant le Théorème 2.1 et le Lemme 2.2, on obtient :

$$\begin{aligned}
{}_0 D_t^\alpha x &= f(x,u,t), && (3.12)\\
{}_t D_1^\alpha p &= \frac{\partial G}{\partial x} + p^T\frac{\partial f}{\partial x}, && (3.13)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} + p^T\frac{\partial f}{\partial u} = 0, \tag{3.14}$$

et

$$x(0) = x_0 \ \text{ et } \ p(1) = 0. \tag{3.15}$$

Les équations (3.12),(3.13) et (3.14) représentent les conditions d'optimalité, appelées aussi Equations d'Euler-Lagrange pour le problème de contrôle optimal fractionnaire.

Pour $\alpha = 1$, les conditions deviennent

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f(x,u,t),\\
\frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial G}{\partial x} - p^T\frac{\partial f}{\partial x},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} + p^T\frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

qui sont identiques à celles obtenues en contrôle optimale classique.

Exemple 3.3 *Considérons le critère*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\ x^{\top}(t)Qx(t) + u^{\top}(t)Ru(t)\right] dt,$$

où $Q \geq 0$ *et* $R > 0$*, et la dynamique du système est décrite par l'équation différentielle fractionnaire linéaire suivante,*

$$_0D_t^{\alpha}x = Ax + Bu \tag{3.16}$$

pour $0 < \alpha < 1$*, les équations d'Euler-Lagrange donnent*

$$_tD_1^{\alpha}p = Qx + A^Tp, \tag{3.17}$$

et

$$Ru + +B^Tp = 0, \tag{3.18}$$

de l'équation (3.18), on obtient $u = -R^{-1}B^Tp$*. En remplaçant* u *dans (3.16) , on aura :*

$$_0D_t^{\alpha}x \ = Ax - BR^{-1}B^Tp. \tag{3.19}$$

L'état $x(t)$ *et l'état adjoint* $p(t)$ *sont obtenus en résolvant les équations (3.17) et (3.19), sous les conditions données par l'équation (3.15).*

3.3 Commande en temps minimal des systèmes avec dynamique fractionnaire

Comme dans le cas classique, le problème de commande en temps minimal des systèmes avec dynamique fractionnaire est aussi connu sous le nom *bang-bang*, le but est de transférer un système à partir d'un état initial donné à un état final spécifique en un temps minimal. Un problème *bang-bang est définit par un critère de la forme* suivante :

$$J\left(u\right) = \int_a^b 1dt \tag{3.20}$$

dont la dynamique du système est donnée par l'equation d'évolution

$$D_a^{\alpha}x\left(t\right) = f\left(x,u,t\right)\ , \tag{3.21}$$

on désire amener ce système à partir d'un état intiale $x\left(a\right) = x_a$ à un état donné $x\left(b\right) = x_b$, en temps minimal t^*. Pour s'assurer que le problème a une solution, les variables de commandes sont exigées pour être contraintes de la façon suivante :

$$u_{\min}\left(t\right) \leq u\left(t\right) \leq u_{\max}\left(t\right), \tag{3.22}$$

pour trouver la commande optimale nous considérons le critère définit dans l'équation (3.7) :

$$\bar{J}(u) = \int_a^b [1 + p^T\ (\ f(x,u,t) - {}_a\,D_t^{\alpha}x)\ ]\ dt,$$

et la première variation obtenue dans l'équation (3.11) devienne :

$$\delta\overline{J}(u) = \int_a^b \left[\delta p\left(f(x,u,t) -_0 D_t^\alpha x\ \right) + \delta x\left(p^T\frac{\partial f}{\partial x} -_t D_1^\alpha p\right) + \delta u\left(p^T\frac{\partial f}{\partial u}\right)\right] dt. \tag{3.23}$$

Si l'équation d'état et l'équation de l'état adjoint sont vérifiées, on aura :

$$\delta\bar{J} = \int_a^b \left[p^T\frac{\partial f}{\partial u}\right]\delta u dt\ , \tag{3.24}$$

en utilisant l'identitée dans l'équation (2.10), on obtient :

$$\delta\bar{J} = \int_a^b p^T\left[f\left(x^*, u^* + \delta u, t\right) - f\left(x^*, u^*, t\right)\right] dt,$$

dans cet exemple le contrôle est sous une contrainte, alors la condition d'optimalié est :

$$\int_a^b p^T\left[f\left(x^*, u^* + \delta u, t\right) - f\left(x^*, u^*, t\right)\right] dt \geq 0\ ,$$

nous obtenons :

$$p^T f\left(x^*, u^*, t\right) \leq p^T f\left(x^*, u^* + \delta u, t\right).$$

On rappel que l'équation d'état est donnée par :

$$D_a^\alpha x\left(t\right) = f\left(x, u, t\right),$$

et l'équation de l'état adjoint est comme suit :

$$D_a^\alpha x\left(t\right) = f\left(x, u, t\right),\ {}_tD_b^\alpha p = p^T\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Considérons maintenant le cas simple d'un système fractionnaire avec la dynamique suivante :

$$D_a^\alpha x\left(t\right) = Ax + Bu\ .$$

L'équation de l'état adjoint devienne :

$${}_tD_b^\alpha p = A^T p,$$

avec la condition d'optimalité,

$$p^T B u^* \leq p^T B u$$

en poseant $q = B^T p$, on obtient :

$$\begin{array}{rrcl} & u^* q & \leq & uq \\ \text{d'où} & u^* q & = & \min\limits_{u_{\min}\leq u\leq u_{\max}}\{uq\} \end{array}$$

c'est à dire :

$$u^*\left(t\right) = \begin{cases} u_{\max} & \text{si } q < 0 \\ u_{\min} & \text{si } q > 0 \\ \textit{indétermier} & \text{si } q = 0 \end{cases}.$$

Exemple 3.4

$$\min_{u,T} J(u,T) = T, \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ {}_0D^{\alpha} x_2 = u \\ u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max},\ \forall t \in [0,T] \end{cases}, \ avec \begin{cases} x_1(0) = 0,\ x_1(T) = A \\ x_2(0) = 0,\ x_2(T) = 0 \end{cases}, \tag{3.25}$$

prenant $\alpha = 1$, la solution du problème considiré est donnée pour $t \in [0, T_1]$ (accélération)

$$\begin{cases} u(t) = u_{\max} \\ x_2(t) = u_{\max} t \\ x_1(t) = u_{\max} \frac{t^2}{2} \end{cases}, \tag{3.26}$$

pour $t \in [T_1, T]$ (décélération)

$$\begin{cases} u(t) = u_{\min} \\ x_2(t) = u_{\min}(t - T_1) + x_2(T_1) \\ x_1(t) = u_{\min} \frac{(t-T_1)^2}{2} + x_2(T_1)(t - T_1) + x_1(T_1) \end{cases}. \tag{3.27}$$

En utilisant les conditions limites : $x_1(T) = A$ et $x_2(T) = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} x_2(T) = u_{\min}(T - T_1) + x_2(T_1) = 0 \\ x_1(T) = u_{\min} \frac{(T-T_1)^2}{2} + x_2(T_1)(T - T_1) + x_1(T_1) = A \end{cases}, \tag{3.28}$$

de l'équation (3.26), $x_2(T_1) = u_{\max} T_1$ et $x_1(T_1) = u_{\max} \frac{T_1^2}{2}$, en les remplaçant dans le système des équations (3.27), on obtient :

$$\begin{cases} x_2(T) = u_{\min}(T - T_1) + u_{\max} T_1 = 0 \\ x_1(T) = u_{\min} \frac{(T-T_1)^2}{2} + u_{\max} T_1 (T - T_1) + u_{\max} \frac{T_1^2}{2} = A \end{cases}, \tag{3.29}$$

ce qu"il donne les identitées suivantes :

$$u_{\min} \frac{(T-T_1)^2}{2} + u_{\max} \left[-\frac{u_{\min}(T - T_1)}{u_{\max}} \right] (T - T_1) + u_{\max} \frac{\left[-\frac{u_{\min}(T-T_1)}{u_{\max}} \right]^2}{2} - A = 0$$

$$u_{\min} \frac{(T-T_1)^2}{2} - u_{\min}(T - T_1)^2 + \frac{u_{\min}^2 (T - T_1)^2}{2u_{\max}} - A = 0$$

$$-u_{\min}(T - T_1)^2 + \frac{u_{\min}^2 (T - T_1)^2}{u_{\max}} - 2A = 0 \Longleftrightarrow (T - T_1)^2 = \frac{2Au_{\max}}{u_{\min}[u_{\min} - u_{\max}]},$$

en remplaçant cette dernière idenditée dans l'équation (3.29), on déduit que :

$$T_1 = \sqrt{-\frac{2Au_{\min}}{u_{\max}[u_{\max} - u_{\min}]}} \ et \ T = \sqrt{\frac{2Au_{\max}}{u_{\min}[u_{\min} - u_{\max}]}} + T_1$$

on note que T_1 désigne l"instant de commutation. Pour $0 < \alpha < 1$, nous appliquons la même technique, la solution est la suivante :

pour $t \in [0, T_1]$ (accélération), on a :

$$\begin{cases} u(t) = u_{\max}, \\ x_2(t) = u_{\max} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \\ x_1(t) = u_{\max} \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}, \end{cases}$$

et pour $t \in [T_1, T]$ (décélération), on a :

$$\begin{cases} u(t) = u_{\min}, \\ x_2(t) = u_{\min} \frac{(t-T_1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + x_2(T_1) \frac{(t-T_1)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \\ x_1(t) = u_{\min} \frac{(t-T_1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + x_2(T_1) \frac{(t-T_1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + x_1(T_1). \end{cases}$$

En utilisant les conditions limites $x_1(T) = A$ et $x_2(T) = 0$ et en les remplaçant dans le système précédent, on aura :

$$\begin{cases} u_{\min} \frac{(T-T_1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + u_{\max} \frac{T_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{(T-T_1)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = 0, \\ u_{\min} \frac{(T-T_1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + u_{\max} \frac{T_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{(T-T_1)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + u_{\max} \frac{T_1^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} = A, \end{cases}$$

on pose $T_2 = T - T_1$, on obtient :

$$\begin{cases} u_{\min} \frac{T_2^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + u_{\max} \frac{T_1^\alpha T_2^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} = 0 \\ u_{\min} \frac{T_2^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + u_{\max} \frac{T_1^\alpha T_2^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)^2} + u_{\max} \frac{T_1^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} = A \end{cases}$$

$T_1 = \left(-\Gamma(\alpha) \frac{u_{\min}}{u_{\max}} T_2\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Application numérique

Trouvons la solution du prblème pour les valeurs des paramètres suivantes :

· $u_{\min} = -2$,

· $u_{\max} = 1$

· $A = 300$.

Dans les deux types de contrôle optimal la solution analytique pour ce système ($\alpha = 1$) est $T^* = 30$.

Cas classique :$u(t) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq t < 20 \\ -2 & si\ 20 \leq t < 30 \end{cases}$,

$x_1(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & si\ 0 \leq t < 20 \\ -t^2 + 60t - 600 & si\ 20 \leq t < 30 \end{cases}$,

$x_2(t) = \begin{cases} t & si\ 0 \leq t < 20 \\ 60 - 2t & si\ 20 \leq t < 30 \end{cases}$.

Cas fractionnaire :

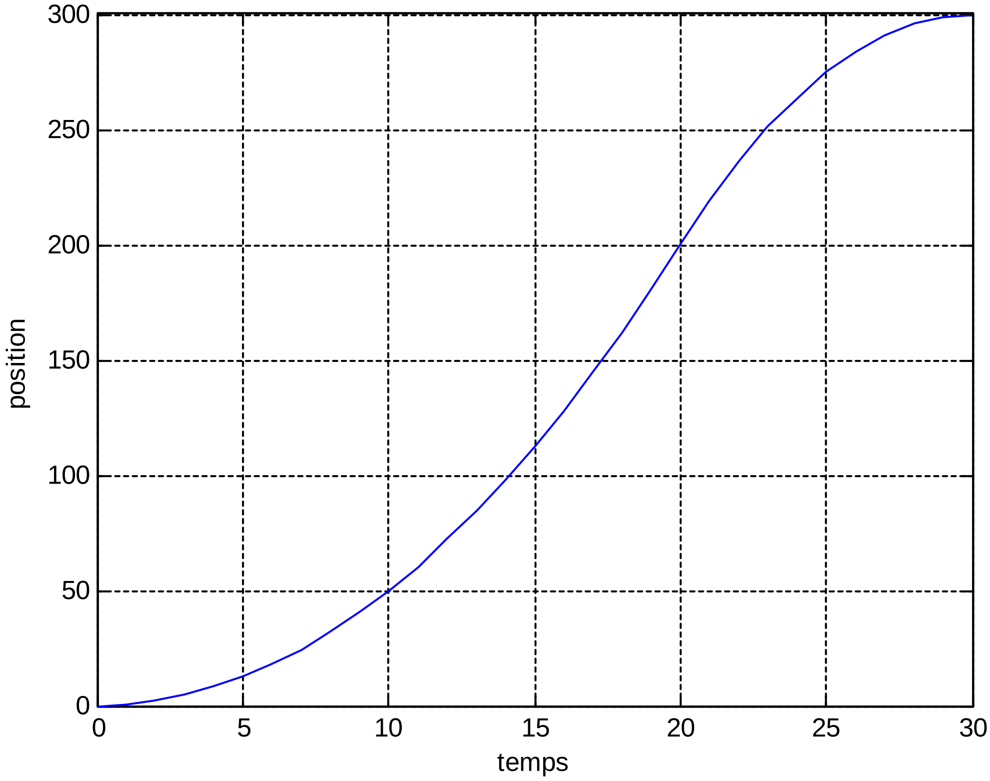
$$\begin{cases} u(t) = 1 \\ x_2(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(2)} = t^\alpha \\ x_1(t) = \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(3)} = \frac{t^2}{2} \end{cases},$$

$$\begin{cases} -2\frac{(T-T_1)}{\Gamma(2)} + \frac{T_1}{\Gamma(2)\Gamma(\alpha)} = 0 \\ -2\frac{(T-T_1)^2}{\Gamma(3)} + \frac{T_1}{\Gamma(2)} \frac{(T-T_1)}{\Gamma(2)} + \frac{T_1^2}{\Gamma(3)} = 300 \end{cases} \iff \begin{cases} -2(T-T_1) + T_1 = 0 \\ -(T-T_1)^2 + T_1(T-T_1) + \frac{T_1^2}{2} = 300 \end{cases},$$

$$\left\{\begin{array}{c} T_1 = \frac{2}{3}T \\ -\left(T - T_1\right)^2 + T_1\left(T - T_1\right) + \frac{T_1^2}{2} = 300 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} T_1 = \frac{2}{3}T \\ -\left(T - \frac{2}{3}T\right)^2 + \frac{2}{3}T\left(T - \frac{2}{3}T\right) + \frac{\left(\frac{2}{3}T\right)^2}{2} = 300 \end{array}\right. ,$$

$$\left\{\begin{array}{c} T_1 = \frac{2}{3}T \\ -\left(T - \frac{2}{3}T\right)^2 + \frac{2}{3}T\left(T - \frac{2}{3}T\right) + \frac{\left(\frac{2}{3}T\right)^2}{2} = 300 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} T_1 = \frac{2}{3}T \\ -\left(\frac{1}{3}T\right)^2 + \frac{2}{3}T\left(\frac{1}{3}T\right) + \frac{2T^2}{9} = 300 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} T_1 = \frac{2}{3}T \\ T^2 = 900 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} T_1 = 20 \\ T = 30 \end{array}\right. .$$



L'état x comme une fonction de temps t pour problème de contrôle bang-bang (α=1)

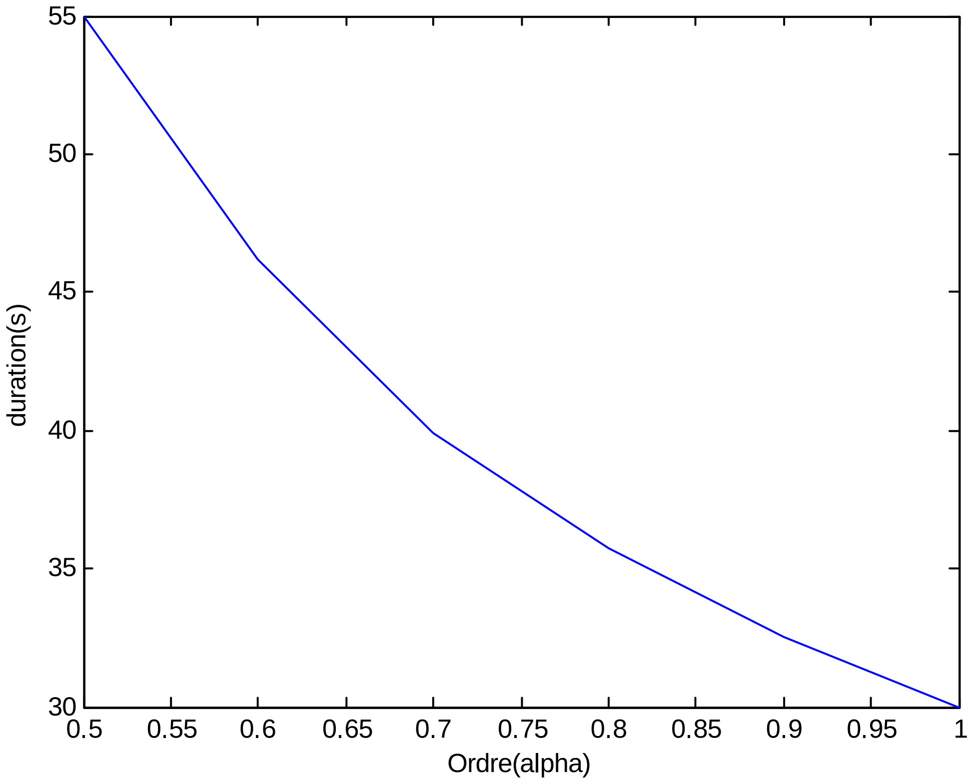


Figure 2 : Le temps minimal comme une fonction d'ordre α

Remarque 3.2 *lorsque* $0 < \alpha < 1$, *le temps soit minimal en* $\alpha = 1$.

Bibliographie

[1] O. P. Agrawal, "A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Contrôl Problems", Nonlinear Dynamic 38 : 323-337, 2004.

[2] F. Bensidhoum, "Problème aux valeurs propres associés à des équations fractionnaires", Thèse de Master, Université Aboubekr Belkaid Tlemcen, 2011.

[3] M. Bergounioux, "Optimisation et Contrôl des systèmes Linéaires", Dunod, Paris, 2001.

[4] J. C. Culioli, "Intrduction à L'Optimisation", Edition Ellipsse 1994, Paris.

[5] F. Jean, Stabilité et commande des systèmes dynamiques, les presses de L'ENSTA, 2011, France.

[6] B. Pradin et G. Garcia. Modélisation, Analyse et Commande.

[7] D.S.Naidu, optimal contrôl systems, vol. 2 of Electrical Engineering, Academic Series, CRC Press, Boca Raton, Flat, USA, 2002.

[8] E.Trélat, "contrôle optimal : Théorie et Application"

[9] C. Tricaud and Y. Q. Chen, "Time- Optimal Contrôl of Systems with Fractional Dynamics", InternationalJournal of DifferentialEquations. Volume2010, ArticleID461048, 16pages.