REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MinistèredeL'EnseignementSupérieureetdelaRechercheScientifique

UNIVERSITEABDELHAMIDIBNBADIS
–MOSTAGANEM–

FacultédeSciencedeLaVieetdeLaNature

DépartementdeMathématiques

PROJETDEFIND'ETUDESENVUEDEL'OBTENTION

DUDIPLOMEDE$LISCENCE$

en
Mathématiques

Sujet

PRESENTE PAR :

Soutenu le Juin 2013
Devant le jury :

Président :	, Professeur, Université de Mostaganem.
Examinateur :	, Professeur, Université de Mostaganem.
Encadreur	,Mr.Zoubire Dahmani, Université de Mostaganem.

Promotion : 2012-2013

Remerciement

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciement à tous qui m'ont aidé de prés ou de loin à réaliser ce travail.

Je remercie tout particulièrement mon encadreur : M. Zoubir DAHMANI de m'avoir encadré en étant toujours disponible et encourageant, pour son aide et conseils et pour ses grandes valeurs humains

Je tiens d'abord à remercier Monsieur M. OULED ALI Professeur de l'université de Mostaganem, d'avoir accepté la présidence du jury de ma soutenance.

Je remercie également M. SEAIDANI Professeur de l'université de Mostaganem d'avoir accepté d'examiner mon manuscrit de thèse.

Mes vifs remerciements à tous les Enseignants de l'université de Mostaganem.

Dédicace

Louange à Allah de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout de rêve.

Je dédie ce modeste travail à celle qui ma donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère.

A mon père, école de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie à m'encourager, à me donner l'aide et à me protéger

A mes sœurs Hanane et Nada.

A mes frères Houari, Fayçal et Aimane.

A mes collèges de la promotion et mes amies surtout Siham chaalal

A tous ceux qui m'aimes.

A tous ceux que j'aime.

Je dédie ce travail.

Table des matières

Objectifs de ce travail

Ce mémoire est organisé en trois chapitres :

-Dans le premier chapitre, on a une introduction générale où on va motiver ce travail, puis on présente une base théorique du calcul fractionnaire nécessaire pour le développement des chapitres qui suivant.

-Le deuxième chapitre illustre les concepts de base et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire y sont répertoriés.

-Dans le dernier chapitre, on présente une petite contribution aux inégalités intégrales d'ordre arbitraire.

Chapitre 1

Introduction Générale

1.1 Historique

Le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul différentiel. Son histoire remonte[1] au début du $17^{ème}$ siècle alors que Leibniz a écrit une lettre à L'Hôpital et lui a soulevé la question suivante : "est ce qu'on a un sens de dérivée d'ordre non entier".

L'Hôpital était un peut curieux au sujet de la question et répondit par une autre simple de Leibniz "que faire si l'ordre sera 1/2 ".

Cette lettre de L'Hopital datée du 30 septembre 1695 est considérée comme la naissance exacte du calcul fractionnaire.

Cette théorie était au début comme un jeu d'esprit pour certains mathématiciens de renommée, qui voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordre entier par des opérateurs d'ordre fractionnaire permettant le calcul de la dérivée α réel d'une fonction différentiable $f(t)$, soit $D^{\alpha}\{f(t)\} = \dfrac{d^{\alpha}f(t)}{dt^{\alpha}}$ perméttant de quelques spéculations de G. W Leibniz(1695-1697) et Euler (1730).

Cette théorie à été largement développée jusqu'à nos jours de nombreux mathématiciens ont contribué à ce développement jusqu'à la moitié du siècle passé dont nous pouvons citer :

P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel ($1823-1826$), J. Liouville ($1823-1826$), B. Riemann (1847), H. Holmgren ($1865-1867$), A.K. Grunwald ($1867-1872$),

A.V. Letnikov ($1868-1872$), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890),

J. Hadamard (1892), O. Heavisid ($1892-1912$), S. Pincherle (1902), H. Weyl (1917),

P. L'evy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis ($1924-1936$), A. Zygmund ($1935-1945$),

E.R. Amour ($1938-1996$), A. Erd'elyi ($1939-1965$), H. Kober (1940), D.V. Wider (1941), M. Riez (1949).

1.2 Motivation

1.2.1 Modélisation d'ordre non entier

Parallèlemenet au progrès théoriques, quelques aspects pratiques limités du calcul fractionnaire, ont été développés par Abel ($1823-1825$), Boole (1824), Heavisid ($1892-1922$) et Germant (1936) pour résoudre certains problèmes physiques.

Ce n'est qu'au début des années 1950 que Van Der Ziel dans ses recherches sur les spectres de bruits des semi-conducteurs, puis Davidson et Cole dans leurs travaux sur la relaxation diélectrique dans certains liquides ont pu modéliser des phénomènes naturels en faisant appel à la dérivée fractionnaire.

Depuis ces découvertes, beaucoup de contributions autant théoriques que pratiques ont montré l'importance des systémes d'ordre fractionnaires et leurs intérêt dans différentes disciplines telle que : l'éléctricité, la chimie, la biologie, l'économie, l'automatique et le traitement du signal.

De même, les systèmes d'ordre fractionnaires ont été utilisés dans d'autres domaines de la physique comme la rhéologie, l'électronique,...[2]. Dans tous les cas, ces systèmes sont particulièrement adaptés pour modéliser soit des phénomènes physiques de nature diffusive[3], soit des phénomènes intervenant sur un support physique de nature fractale.

1.2.2 Modèles Rhéologiques Elémentaires

Ce paragraphe concerne l'étude de modèles rhéologiques permettant de décrire le comportement linéaire des matériaux viscoélastiques [4] - [5].

L'assemblage plus ou moins complexe des modèles rhéologiques de base constitués uniquement de ressorts ou d'amortisseurs visqueux ($Figure 1$) est utilisé habituellement pour décrire le comportement des corps viscoélastiques linéaires. On se limite ici au cas unidimensionnel.

L'élasticité est définie par la loi de Hooke : $\sigma(t) = E\varepsilon(t)$. Le ressort représente un élément élastique idéal : la contrainte σ est proportionnelle à la déformation ε.

La loi du frottement visqueux de Newton : $\sigma(t) = \eta\cdot\varepsilon(t)$ se représente par un amortisseur : la contrainte σ est proportionnelle à la vitesse de déformation ε.

FIG 1 : Eléments rhéologiques usuels en viscoélasticité

En combinant ces éléments purement élastiques et purement dissipatifs, nous obtenons des modèles viscoélastiques linéaires classiques de la littérature ($Figure.2$).

Ils sont au nombre de trois : Kelvin-Voigt, Maxwell et Zener.

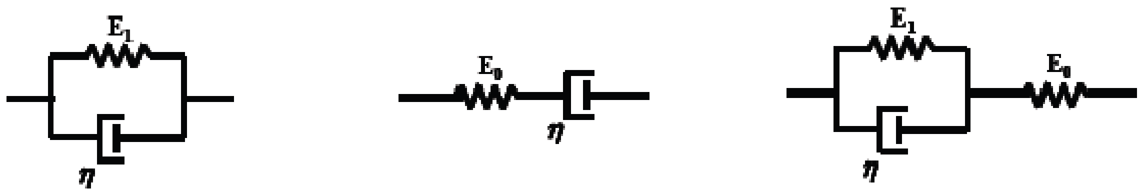

FIG 2 :Modèles rhéologiques usuels

Modèle de Kelvin-Voigt

Ce modèle résulte de l'association en parallèle d'un ressort de module d'élasticité E_1 et d'un amortisseur de viscosité η.

L'équation différentielle de comportement du modèle s'écrit donc :

$$\sigma(t) = E_1\varepsilon(t) + \eta\cdot\varepsilon(t).$$

Modèle de Maxwell

Ce modèle est formé de l'association en série d'un ressort et d'un amortisseur.
L'équation différentielle de comportement du modèle est :

$$\varepsilon^{\cdot}(t) = \frac{1}{E_0}\sigma^{\cdot}(t) + \frac{1}{\eta}\sigma(t).$$

Modèle de Zener

Le modèle de Zener est constitué d'un modèle de Kelvin-Voigt de paramètres (E_1,η) en série avec un ressort de module d'élasticité E_0.

Si ε_0 et ε_1 représentent respectivement la déformation de chacun des ressorts et σ la contrainte associée, on a :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_{1,}$$

$$\sigma = E_0\varepsilon_{0,}$$

$$\sigma = E_1\varepsilon_1 + \eta^{\cdot}\varepsilon_1(t),$$

où ε est la déformation totale du modèle.

En combinant ces trois relations ci-dessus, l'équation de comportement s'écrit :

$$(E_0 + E_1)\varepsilon(t) + \eta\sigma^{\cdot}(t) = E_0(E_1\varepsilon + \eta^{\cdot}\varepsilon(t)).$$

1.2.3 Modèles Rhéologiques Fractionnaires

Les modèles rhéologiques présentés dans la section précédente sont constitués de ressort et d'amortisseur.

En introduisant l'opérateur différentiel non entier D^{α} la relation contraite-déformation pour le ressort et l'amortisseur s'écrit classiquement :

$$\sigma(t) = E\tau^{\alpha}D^{\alpha}\varepsilon(t).$$

Pour $\alpha = 0$, on retrouve un ressort pur de module d'élasticité E.
Pour $\alpha = 1$, on retrouve un amortisseur pur visqueux de viscosité $\eta = E\tau$.
Et pour $0 < \alpha < 1$, on introduit un nouvel élément nommé "spring pot".

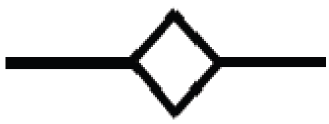

FIG 3 : Spring pot

En remplaçant dans les modèles classiques vus précédemment, l'amortisseur visqueux par le spring-pot, nous obtenons des modèles rhéologiques fractionnaires que nous appellerons : Kelvin-Voigt fractionnaire, Maxwell fractionnaire, Zener fractionnaire.

Ces modèles sont décrits sur la ($Figure4$) ci-dessous :

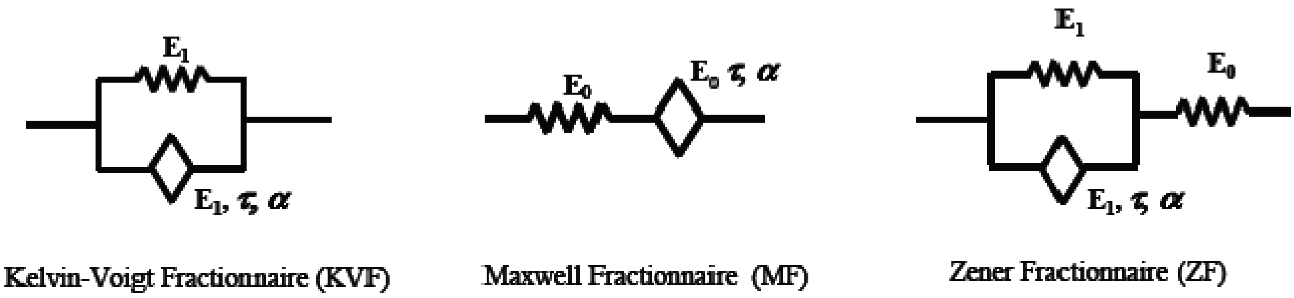

FIG 4 :Modèles frectionnaires

Les lois de comportement de ces modèles sont de type :

$$\sigma(t)+\sum_{k=1}^{N}a_k\frac{d^{\alpha_k}\sigma}{dt^{\alpha_k}}=E\varepsilon(t)+\sum_{k=1}^{N}b_k\frac{d^{\beta_k}\sigma}{dt^{\beta_k}},$$

où α_k et β_k représentent des ordres de dérivation non entiers.

L'orsqu'ils sont entiers, on retrouve les modèles rhéologiques usuels en unidimensionnel de type :

$$\sigma(t)+\sum_{k=1}^{N}a_k\frac{d^{k}\sigma}{dt^{k}}=E\varepsilon(t)+\sum_{k=1}^{N}b_k\frac{d^{k}\sigma}{dt^{k}},$$

avec N entier, a_n et b_n sont des coefficients caractéristiques du matériau.

La loi constitutive du modèle Bagley et Torvik s'écrit alors :

$$\sigma(t)+aD^{\alpha}(\sigma(t))=E\varepsilon(t)+bD^{\alpha}(\varepsilon(t)).$$

Bagley et Torvik [17] ont montré que ce modèle peut être utilisé pour modéliser beaucoup de matériaux viscoélastiques. C'est une référence pour la modélisation et l'identification du comportement des polymères et des élastomères, d'autre part ils ont fait l'étude thermodynamique d'un tel modèle et ont montré qu'avoir une énergie de déformation positive impose sur les coefficients les restricions suivantes :

$$a\geq 0, b\geq 0, E\geq 0,\ \alpha=\beta,\ \frac{a}{b}\geq E.$$

Ce qui restreint considérablement le domaine de recherche des paramètres, l'élasticité infinie de ce modèle étant donnée par le coefficient E, et l'élasticité instantanée par le rapport $\frac{a}{b}$.

Modèle de Kelvin-Voigt Fractionnaire(KVF) :

Le modèle de Kelvin-Voigt fractionnaire est constitué d'un ressort en parallèle avec un spring-pot. La loi correspondante est :

$$\sigma(t)=E_1\varepsilon(t)+E_1\tau^{\alpha}D^{\alpha}\varepsilon(t)+bD^{\alpha}\varepsilon(t).$$

Modèle de Zener Fractionnaire :

En substituant l'élément amortissement visqueux par un spring-pot dans le modèle classique de Zener, nous obtenons un modèle dit de Zener Fractionnaire (ZF) représenté à la ($Figure4$), on en déduit la loi de comportement du modèle Zener Fractionnaire (ZF) :

$$\varepsilon+\frac{E_0}{E_1}\tau^{\alpha}D^{\alpha}(\sigma)=E_{\varepsilon}+E\tau^{\alpha}D^{\alpha}(\varepsilon).$$

1.3 Fonctions usuelles du calcul fractionnaire

dans ce paragraphe on s'intéresse aux fonctions spéciales du calcul fractionnaire, on cite par exemple les fonctions d'Euler(fonction Gamma, fonction Beta), les fonctions de Mittag-Leffler et la fonction de Wright.

1.3.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.1 *:C'est l'une des fonctions de base utilisée dans le calcul fractionnaire, elle prolonge la factoriel aux valeurs réelles.*

La définition intégrale de la fonction Gamma est [6] :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \; z > 0. \tag{1.1}$$

Proppriétés

1.

$$\forall z > 0, \; \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Preuve. pour démontrer cette propriété fondamentale, on intègre par partie ■

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

D'où

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{z} dt \\ &= -e^{-t} t^{z}\Big]_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

2. Si $n \in N$, alors

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)...(z+n-1)\Gamma(z).$$

3.

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

1.3.2 Fonction Beta d'Euler

Définition 1.2 *: On définie la fonction Béta par [6] :*

$$B(a,b) = \int_0^1 (1-t)^{b-1} t^{a-1}, \; a > 0, \; b > 0. \tag{1.2}$$

propriétés

1.

$$B(a,b) = B(b,a), \; a > 0, \; b > 0.$$

2.

$$aB(a,b+1) = bB(a+1,b).$$

3. Si $n = b + 1$, alors on obtient :

$$B(a, n) = \frac{n-1}{a} B(a + 1, n - 1).$$

Les fonctions Gamma et Beta sont reliées par la relation :

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a + b)};\ a > 0,\ b > o.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} dt \int_0^\infty e^{-x} x^{b-1} dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t-x} t^{a-1} x^{b-1} dt dx.\end{aligned}$$

On pose $x = u - t$ pour $0 \leq x \leq u$, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} t^{a-1} (u - t)^{b-1} dt du \\ &= \int_0^\infty e^{-u} (t^{a-1} ((u - t)^{b-1} dt) du.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $t = vu$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^u (t^{a-1} (u - t)^{b-1} dt) &= \int_0^1 (vu)^{a-1} (u - vu)^{b-1} u du, \\ &= u^{a+b-1} \int_0^1 v^{a-1} (1 - v)^{b-1} dt, \\ &= u^{a+b-1} B(a, b).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= B(a, b) \int_0^\infty e^{-u} u^{a+b-1} du \\ \Gamma(a)\Gamma(b) &= B(a, b)\Gamma(a + b),\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

1.3.3 Fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.3 *: Dans le cas d'un seul paramètre, la fonction de Mittag-Leffler est donnée par [7] :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},\ \alpha > 0. \tag{1.3}$$

Définition 1.4 *: Dans le cas de deux paramètre α et β, on obtient la fonction de Mittag-Leffler :*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},\ \alpha > 0,\ \beta > 0. \tag{1.4}$$

1.3.4 propriétés

Proposition 1.1 *: Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a la propriété suivante :*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}. \tag{1.5}$$

Preuve. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{\Gamma(\alpha+\beta+\alpha k)}, \\ &= zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}. \end{aligned}$$

Ainsi la propriété (1.5) est démontrée. ■

Proposition 1.2 *: Soient $\alpha > 0$, $\beta > -1$, on a :*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(z) + \alpha z \frac{d}{dz} E_{\alpha,\beta+1}(z). \tag{1.6}$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \beta E_{\alpha,\beta+1}(z) + \alpha z \frac{d}{dz} E_{\alpha,\beta+1}(z) &= \beta E_{\alpha,\beta+1}(z) + \alpha z \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha k+\beta) z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \\ \beta E_{\alpha,\beta+1}(z) + \alpha z \frac{d}{dz} E_{\alpha,\beta+1}(z) &= E_{\alpha,\beta}(z), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

Proposition 1.3 *: Soient $\alpha > 0$, $\beta > m$, on a alors :*

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^m z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(z^\alpha) = z^{\beta-m-1} E_{\alpha,\beta-m}(z^\alpha). \tag{1.7}$$

Preuve. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz}\right)^m z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(z^\alpha) &= \left(\frac{d}{dz}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\alpha k+\beta-1}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{\alpha k+\beta-m-1}}{\Gamma(\alpha k+\beta-m)},\ \beta - m > 0, \end{aligned}$$

comme
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{d}{dz}\right)^m z^{\alpha+\beta-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha k+\beta)}{\Gamma(\alpha k+\beta-m)}z^{\alpha k+\beta-m-1},$$
alors :
$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dz}\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{\alpha k+\beta-1}}{\Gamma(\alpha k+\beta)} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{\alpha k+\beta-m-1}}{\Gamma(\alpha k+\beta-m)},\\ &= z^{\beta-m-1}E_{\alpha,\beta-m}(z^{\alpha}).\end{aligned}$$

D'où la démonstration de la propriété (1.7). ■

Cas particuliers

1. Lorsque $\beta=1$, alors $E_{\alpha,1}(z)=E_{\alpha}(z)$.
2. $E_{1,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z$.
3. $E_{1,2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)!}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{\Gamma(k+1)!}=\frac{1}{z}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{z^r}{r!}=\frac{e^z-1}{z}$.
4. $E_{1,3}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+3)}=\frac{e^z-1-z}{z^2}$.

D'où par récurrence sur n, on obtient :

5. $E_{1,n}(z)=\frac{1}{z^{n-1}}\left[e^z-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{z^k}{k!}\right]$, $n=1,2,...$

Si au lieu de z, on prend z^2, alors :

6. $E_{2,1}(z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)}=ch\ z$.
7. $E_{2,2}(z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)!}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{\Gamma(2k+1)!}=\frac{sh\ z}{z}$.

1.3.5 Fonction de Wright

Cette fonction est trés utilisée dans les EDF$_s$. Elle est donnée par [7] :
$$W(z,\alpha,\beta):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\Gamma(\alpha k+\beta)},\ \alpha>0,\ \beta>0.$$

Cas particuliers

1. $W(z,0,1):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\Gamma(1)}=e^z$.
2. $W(-z,-\alpha,1-\alpha):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^k}{k!\Gamma(-\alpha k-\alpha+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^k}{k!\Gamma(-\alpha(k+1)+1)}$.

Chapitre 2

Opérateurs d'Intégration d'Ordre Non Entier et Quelques Inégalités

2.1 Integration Non Entière

Dans ce paragraphe, on donne les définition de base liées aux intégrales au sens de Riemann -Liouville.

Définition 2.1 *: Soit f une fonction continue sur* $[0,\infty[$.

On définit l'opérateur de l'intégrale fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville par la formule [8] :

$$J^{\alpha}f(t): \ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau;\ \alpha>0,\ t>0. \tag{2.1}$$

$$J^0 f(t): \ = f(t).$$

Propriétés

Proposition 2.1 *: Soit J l'opérateur de l'intégrale fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville. On a :*

$$J^{\alpha}t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}t^{\alpha+\beta},\ \alpha>0,\ \beta>-1,\ t>0. \tag{2.2}$$

Preuve. Par définition, on a : ■

$$J^{\alpha}t^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta}d\tau,$$

ce qui est équivalent à :

$$J^{\alpha}t^{\beta} = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (1-\frac{\tau}{t})^{\alpha-1}\tau^{\beta}d\tau.$$

On pose $\frac{\tau}{t}=y$, on obtien alors :

$$\begin{aligned} J^{\alpha}t^{\beta} &= \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}t^{\beta+1}y^{\beta}dy \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}y^{\beta}dy \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta+1). \end{aligned}$$

Puis, en utilisant la relation entre les deux fonction Γ et β, on a :

$$\begin{aligned} \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Ainsi la propriété (2.2) est prouvée.

Proposition 2.2 *: Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a la propriété du semi-groupe suivante :*

$$(J^{\alpha} \circ J^{\beta}) f(t) = (J^{\beta} \circ J^{\alpha}) f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t) \tag{2.3}$$

Preuve. Par définition, on a : ■

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left[\int_0^{\tau} (\tau-\rho)^{\beta-1} f(\rho) d\rho \right] d\tau$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \left[\int_0^{\tau} (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\rho)^{\beta-1} f(\rho) d\rho \right] d\tau \\ = &\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^{\tau} \left[\int_0^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\rho)^{\beta-1} f(\rho) d\tau \right] d\rho. \end{aligned}$$

On utilise (2.2), on obtient :

$$\begin{aligned} J^{\alpha} J^{\beta} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\tau} (J^{\alpha} (\tau-\rho)^{\beta-1} f(\rho)) d\rho \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\tau} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (\tau-\rho)^{\alpha+\beta-1} f(\rho) d\rho \\ &= J^{\alpha+\beta} f(t) \\ &= J^{\beta+\alpha} f(t). \end{aligned}$$

Proposition 2.3 *: Soient $c > 0$, $\alpha > 0$, on a :*

$$J^{\alpha}_{-\infty} e^{ct} = c^{-\alpha} e^{ct}. \tag{2.4}$$

Preuve. Avec les mêmes arguments que précédement, on obtient : ■

$$J^{\alpha}_{-\infty} e^{ct} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} e^{c\tau} d\tau.$$

Si on pose $(t-\tau) = y$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} J^{\alpha}_{-\infty} e^{ct} &= \frac{-e^{ct}}{\Gamma(\alpha)} \int_{+\infty}^{0} y^{\alpha-1} e^{-cy} dy \\ &= \frac{e^{ct}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} y^{\alpha-1} e^{-cy} dy. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $t = cy$. On a :

$$J_{-\infty}^{\alpha} e^{ct} = \frac{e^{ct}}{c^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

D'où

$$J_{-\infty}^{\alpha} e^{ct} = \frac{e^{ct}\Gamma(\alpha)}{c^{\alpha}\Gamma(\alpha)} = \frac{e^{ct}}{c^{\alpha}},$$

ce qui achève la démonstration de la propriété (2.4).

2.2 Quelques Inégalités Fractionnaires

Dans ce paragraphe on présentera quelques inégalités intégrales fractionnaires qu'on utilisera dans le chapitres suivant [9].

2.2.1 Inégalité de Cauchy Schwarz

Soient f, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que $\int_a^b f^2(\tau)d\tau < \infty$ et $\int_a^b g^2(\tau)d\tau < \infty$, alors :

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b fg(\tau)d\tau\right| &\leq \int_a^b |fg|(\tau)d\tau \\ &\leq \left(\int_a^b f^2(\tau)d\tau\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(\tau)d\tau\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

La généralisation fractionnaire de cette inégalité est la suivante :

Théorème 2.1 *: Soit f, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que $J^{\alpha} f^2(t) < \infty$ et $J^{\alpha}\ g^2(t) < \infty$, $\alpha > 0$, $t \in [a,b]$. Alors :*

$$J^{\alpha} |fg|(t) \leq \left(J^{\alpha} f^2(t)\right)^{1/2} \left(J^{\alpha} g^2(t)\right)^{1/2}. \tag{2.6}$$

Preuve. 0n cherche à démonter que : ■

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} fg(\tau)d\tau\right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} |fg|(\tau)d\tau \\ &\leq \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f^2(\tau)d\tau\right)^{1/2} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} g^2(\tau)d\tau\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre :

$$\begin{aligned} F(\tau) :&= (t-\tau)^{\frac{\alpha-1}{2}} f(\tau),\ \tau \in [a,t],\ a \leq t \leq b, \\ G(\tau) :&= (t-\tau)^{\frac{\alpha-1}{2}} g(\tau),\ \tau \in [a,t],\ a \leq t \leq b. \end{aligned}$$

On remarque tout de suit que :

$$\int_a^t FG(\tau)d\tau = \int_a^t (t-\tau)^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\alpha-1}{2}} fg(\tau)d\tau,$$

et que

$$\int_a^t F^2(\tau)d\tau = \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f^2(\tau)d\tau,$$

$$\int_a^t G^2(\tau)d\tau = \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} g^2(\tau)d\tau.$$

2.2.2 Inégalité de Hölder

Soient $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifiant : $\int_a^b |f^p(\tau)|\, d\tau < \infty$ et $\int_a^b |g^q(\tau)|\, d\tau < \infty$, $p^{-1}+q^{-1}=1$. Alors l'inégalité :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b fg(\tau)d\tau \right| &\leq \int_a^b |fg|\,(\tau)d\tau \\ &\leq \left(\int_a^b f^p(\tau)d\tau \right)^{1/p} \left(\int_a^b g^q(\tau)d\tau \right)^{1/q}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

est vérifiée.
La généralisation de Hölder est la suivante :

Théorème 2.2 *: $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifiant : $J^\alpha |f^p(t)| < \infty$ et $J^\alpha |g^q(t)| < \infty$,*

$p^{-1}+q^{-1}=1$, alors pour tout $\alpha > 0$ et $t \in [a,b]$ .On a :

$$|J^\alpha fg(t)| \leq J^\alpha |fg|\,(t) \leq (J^\alpha f^p(t))^{1/p} (J^\alpha g^q(t))^{1/q}. \tag{2.8}$$

Preuve. Il suffit de prendre : ■

$$F(\tau) := (t-\tau)^{\frac{\alpha-1}{p}} f(\tau),\ \tau \in [a,t]\ ,\ a \leq t \leq b,$$

$$G(\tau) := (t-\tau)^{\frac{\alpha-1}{q}} g(\tau),\ \tau \in [a,t]\ ,\ a \leq t \leq b,$$

et de remarque que :

$$\Gamma(\alpha) = (\Gamma(\alpha))^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = (\Gamma(\alpha))^{\frac{1}{p}} (\Gamma(\alpha))^{\frac{1}{q}}.$$

Chapitre 3

Quelques Résultats

Le but de ce chapitre est d'établir quelques résultats fractionnaires généralisant des travaux classiques sur les inégalités intégrales.

3.1 Inégalités Intégrales Fractionnaires de Chebyshev

Dans ce paragraphe on considère la fonctionnelle de Chebyshev avec poids [10] définie par :

$$\begin{aligned} T(f,g,p,q) &= \int_a^b q(x)dx \int_a^b p(x)f(x)g(x) + \int_a^b p(x)dx \int_a^b q(x)f(x)g(x)dx \\ &- \left(\int_a^b q(x)f(x)dx\right)\left(\int_a^b p(x)g(x)dx\right) \\ &- \left(\int_a^b p(x)f(x)dx\right)\left(\int_a^b q(x)g(x)dx\right), \end{aligned} \tag{3.1}$$

où f et g sont deux fonctions integrables sur $[a,b]$, p et q deux fonctions integrables positives sur $[a,b]$.

Cette fonctionnelle à beaucoup d'applications [11], on cite par exemple la théorie de transformation, les probabilités et les statistiques.

Pour pouvoir énoncer quelques résultats sur cette fonctionnelle, on se place dans le cadre suivant :

$f' \in L_r[a,b]$, $g' \in L_s[a,b]$, $r > 1$, $r^{-1} + s^{-1} = 1$

3.1.1 Résultat 1

Théorème 3.1 *: Soient p et q deux fonctions positives sur $[0,\infty[$, et soient f et g deux fonctions dérivables sur $[0,\infty[$. Si*

$$f' \in L_r[0,\infty[,\ g' \in L_s[0,\infty[,\ r > 1,\ r^{-1} + s^{-1} = 1,$$

alors pour tout $t > 0$, $\alpha > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} &|J^\alpha q(t)J^\alpha pfg(t) + J^\alpha p(t)J^\alpha qfg(t) - J^\alpha qf(t)J^\alpha pg(t) - J^\alpha pf(t)J^\alpha qg(t)| \\ &\leq \frac{\|f'\|_r \|g'\|_s}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1} |\tau - \rho| p(\tau)q(\rho)d\tau d\rho \\ &\leq \left\|f'\right\|_r \left\|g'\right\|_s tJ^\alpha p(t)J^\alpha q(t). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Preuve. Soit f et g deux fonctions satisfaisant les conditions du théorème 3.1, et soient p et q deux fonctions positives sur $[0, \infty[$. ■

On pose :

$$H(\tau, \rho) := (f(\tau) - f(\rho))(g(\tau) - g(\rho)); \ \tau, \rho \in [0, t], \ t > 0. \tag{3.3}$$

On multiplie (3.3) par $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} p(\tau)$; $\tau \in (0, t)$ et on intègre le résultat par rapport à τ sur $[0, t]$, on aura :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} p(\tau)H(\tau, \rho)d\tau \\ &= J^\alpha pfg(t) - f(\rho)J^\alpha pg(t) - g(\rho)J^\alpha pf(t) + f(\rho)g(\rho)J^\alpha p(t). \end{aligned} \tag{3.4}$$

On multiplie (3.4) par $\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} q(\rho)$; $\rho \in (0, t)$ et on intègre le résultat par rapport à ρ sur $[0, t]$, on aura :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} p(\tau)q(\rho)H(\tau, \rho)d\tau d\rho$$

$$= J^\alpha q(t)J^\alpha pfg(t) + J^\alpha p(t)J^\alpha qfg(t) - J^\alpha qf(t)J^\alpha pg(t) - J^\alpha pf(t)J^\alpha qg(t). \tag{3.5}$$

D'une part, on a :

$$H(\tau, \rho) = \int_\tau^\rho \int_\tau^\rho f'(y)g'(z)dydz. \tag{3.6}$$

On utilise l'inégalité de Hölder pour les intégrales doubles, on aura :

$$|H(\tau, \rho)| \leq \left| \int_\tau^\rho \int_\tau^\rho \left|f'(y)\right|^r dydz \right|^{r^{-1}} \left| \int_\tau^\rho \int_\tau^\rho \left|g'(z)\right|^s dydz \right|^{s^{-1}}. \tag{3.7}$$

Comme

$$\left| \int_\tau^\rho \int_\tau^\rho \left|f'(y)\right|^r dydz \right|^{r^{-1}} = |\tau - \rho|^{r^{-1}} \left| \int_\tau^\rho \left|f'(y)\right|^r dy \right|^{r^{-1}}, \tag{3.8}$$

et

$$\left| \int_\tau^\rho \int_\tau^\rho \left|g'(z)\right|^s dydz \right|^{s^{-1}} = |\tau - \rho|^{s^{-1}} \left| \int_\tau^\rho \left|g'(z)\right|^s dz \right|^{s^{-1}}. \tag{3.9}$$

Alors, nous pouvons estimer H comme suit :

$$|H(\tau, \rho)| \leq |\tau - \rho| \left| \int_\tau^\rho \left|f'(y)\right|^r dy \right|^{r^{-1}} \left| \int_\tau^\rho \left|g'(z)\right|^s dz \right|^{s^{-1}}. \tag{3.10}$$

D'autre part, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}p(\tau)q(\rho)\left|H(\tau,\rho)\right|d\tau d\rho\\
\leq\ &\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}\left|\tau-\rho\right|p(\tau)q(\rho)\left|\int_\tau^\rho\left|f^{'}(y)\right|^r dy\right|^{r^{-1}}\left|\int_\tau^\rho\left|g^{'}(z)\right|^s dz\right|^{s^{-1}}d\tau d\rho.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

On applique l'inégalité de Hölder pour les intégrales doubles au second membre de (3.11), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}p(\tau)q(\rho)\left|H(\tau,\rho)\right|d\tau d\rho\\
\leq\ &\left[\frac{1}{\Gamma^r(\alpha)}\int_0^t\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}\left|\tau-\rho\right|p(\tau)q(\rho)\left|\int_\tau^\rho\left|f^{'}(y)\right|^r dy\right|d\tau d\rho\right]^{r^{-1}}\\
&\times\left[\frac{1}{\Gamma^s(\alpha)}\int_0^t\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}\left|\tau-\rho\right|p(\tau)q(\rho)\left|\int_\tau^\rho\left|g^{'}(z)\right|^s dz\right|d\tau d\rho\right]^{s^{-1}}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Maintenant, on utilise le fait que

$$\left|\int_\tau^\rho\left|f^{'}(y)\right|^r dy\right|\leq\left\|f^{'}\right\|_r^r,\quad \left|\int_\tau^\rho\left|g^{'}(z)\right|^s dz\right|\leq\left\|g^{'}\right\|_s^s, \tag{3.13}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}p(\tau)q(\rho)\left|H(\tau,\rho)\right|d\tau d\rho\\
\leq\ &\left[\frac{\left\|f^{'}\right\|_r^r}{\Gamma^r(\alpha)}\int_0^t\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}\left|\tau-\rho\right|p(\tau)q(\rho)d\tau d\rho\right]^{r^{-1}}\\
&\times\left[\frac{\left\|g^{'}\right\|_s^s}{\Gamma^s(\alpha)}\int_0^t\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}\left|\tau-\rho\right|p(\tau)q(\rho)d\tau d\rho\right]^{s^{-1}}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

De (3.14), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}p(\tau)q(\rho)\left|H(\tau,\rho)\right|d\tau d\rho\\
\leq\ &\frac{\left\|f^{'}\right\|_r\left\|g^{'}\right\|_s}{\Gamma^2(\alpha)}\left[\int_0^t\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}\left|\tau-\rho\right|p(\tau)q(\rho)d\tau d\rho\right]^{r^{-1}}\\
&\times\left[\int_0^t\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}\left|\tau-\rho\right|p(\tau)q(\rho)d\tau d\rho\right]^{s^{-1}}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Comme $r^{-1}+s^{-1}=1$, alors on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}p(\tau)q(\rho)\left|H(\tau,\rho)\right|d\tau d\rho\\
\leq\ &\frac{\left\|f'\right\|_r\left\|g'\right\|_s}{\Gamma^2(\alpha)}\left[\int_0^t\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}\left|\tau-\rho\right|p(\tau)q(\rho)d\tau d\rho\right].\qquad(3.16)
\end{aligned}$$

De (3.5), (3.17) et par l'utilisation de les propriétés du module. Nous obtenons la première inégalité de (3.2).

Maitenant on doit prouver la deuxieme inégalité de (3.2). On a :

$$0\leq\tau\leq t,\ \ 0\leq\rho\leq t.$$

Donc

$$0\leq\left|\tau-\rho\right|\leq t.$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}p(\tau)q(\rho)\left|H(\tau,\rho)\right|d\tau d\rho\\
\leq\ &\frac{\left\|f'\right\|_r\left\|g'\right\|_s t}{\Gamma^2(\alpha)}\left[\int_0^t\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}p(\tau)q(\rho)d\tau d\rho\right]\\
=\ &\left\|f'\right\|_r\left\|g'\right\|_s tJ^\alpha p(t)J^\alpha q(t).\qquad(3.17)
\end{aligned}$$

Le théorème 3.1 est prouvé.

Théorème 3.2 *: Soient p et q deux fonctions positives sur $[0,\infty[$, et soient f et g deux fonctions dérivables sur $[0,\infty[$. Si $f'\in L_r[0,\infty[$, $g'\in L_s[0,\infty[$, $r>1, r^{-1}+s^{-1}=1$, alors pour tout $t>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$, on a :*

$$\begin{aligned}
&J^\alpha p(t)J^\beta qfg(t)+J^\beta q(t)J^\alpha pfg(t)-J^\alpha pf(t)J^\beta qg(t)-J^\beta qf(t)J^\alpha pg(t)\\
\leq\ &\frac{\left\|f'\right\|_r\left\|g'\right\|_s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left[\int_0^t\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}\left|\tau-\rho\right|p(\tau)q(\rho)d\tau d\rho\right]\\
=\ &\left\|f'\right\|_r\left\|g'\right\|_s tJ^\alpha p(t)J^\beta q(t).\qquad(3.18)
\end{aligned}$$

Preuve. On utilise l'identité (3.4). On peut écrire : ■

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left[\int_0^t\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}p(\tau)q(\rho)H(\tau,\rho)d\tau d\rho\right]$$

$$=J^\alpha p(t)J^\beta qfg(t)+J^\beta q(t)J^\alpha pfg(t)dx-J^\alpha pf(t)J^\beta qg(t)-J^\beta qf(t)J^\alpha pg(t).\qquad(3.19)$$

Par la relation (3.10), on peut obtenir l'estimation suivante :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}p(\tau)\left|H(\tau,\rho)\right|d\tau$$

$$\leq\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\left|\tau-\rho\right|p(\tau)\left|\int_\tau^\rho\left|f'(y)^r\right|dy\right|^{r^{-1}}\left|\int_\tau^\rho\left|g'(z)\right|^s dz\right|^{s^{-1}}d\tau.\qquad(3.20)$$

Alors, on a :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left[\int_0^t\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}p(\tau)q(\rho)\left|H(\tau,\rho)\right|d\tau d\rho\right]$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left[\int_0^t\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}\left|\tau-\rho\right|p(\tau)q(\rho)\left|\int_\tau^\rho\left|f'(y)\right|^r dy\right|^{r^{-1}}\left|\int_\tau^\rho\left|g'(z)\right|^s dz\right|^{s^{-1}}d\tau d\rho\right]. \tag{3.21}$$

Par application de Hölder au second membre de (3.21), on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left[\int_0^t\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}p(\tau)q(\rho)\left|H(\tau,\rho)\right|d\tau d\rho\right]\\ \leq\;&\frac{1}{\Gamma^r(\alpha)}\left[\int_0^t\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}\left|\tau-\rho\right|p(\tau)q(\rho)\left|\int_\tau^\rho\left|f'(y)\right|^r dy\right|d\tau d\rho\right]^{r^{-1}}\\ &\times\frac{1}{\Gamma^s(\beta)}\left[\int_0^t\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}\left|\tau-\rho\right|p(\tau)q(\rho)\left|\int_\tau^\rho\left|g'(z)\right|^s dz\right|d\tau d\rho\right]^{s^{-1}}\end{aligned} \tag{3.22}$$

D'aprés (3.13) et (3.22), on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left[\int_0^t\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}p(\tau)q(\rho)\left|H(\tau,\rho)\right|d\tau d\rho\right]\\ &\leq\frac{\left\|f'\right\|_r\left\|g'\right\|_s t}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\left[\int_0^t\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}p(\tau)q(\rho)d\tau d\rho\right].\end{aligned} \tag{3.23}$$

En utilisant (3.19), (3.23) et les propriétés du module, on aura la première inégalité de (3.18).

Remarque : On applique le théorème 3.2 pour $\alpha=\beta$, on obtient le théorème 3.1.

Corollaire 3.1 *: Soient.f et g deux fonctions dérivables sur* $[0,\infty[$. *Si* $f'\in L_r[0,\infty[$, $g'\in L_s[0,\infty[$, $r>1, r^{-1}+s^{-1}=1$, *alors pour tout* $t>0,\alpha>0$, *on a :*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^\alpha fg(t)-J^\alpha f(t)J^\alpha g(t)\right|\\ \leq\;&\left\|f'\right\|_r\left\|g'\right\|_s\frac{t^{2\alpha+1}}{2\Gamma^2(\alpha+1)}.\end{aligned} \tag{3.24}$$

Corollaire 3.2 *: Soient f et g deux fonctions dérivable sur* $[0,\infty[$. *Si* $f'\in L_r[0,\infty[$, $g'\in L_s[0,\infty[$, $r>1$, $r^{-1}+s^{-1}=1$, *alors pour tout* $t>0$, $\alpha>0$, $\beta>0$, *on a :*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J^\beta fg(t)+\frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+1)}J^\alpha fg(t)-J^\alpha f(t)J^\beta g(t)-J^\beta f(t)J^\alpha g(t)\right|\\ \leq\;&\left\|f'\right\|_r\left\|g'\right\|_s\frac{t^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

3.2 Inégalités Intégrale Fractionnaires de Grüss

En 1935, Grüss [12] a prouvé l'inégalité intégrale suivante :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx)(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right) \leq \frac{(\Phi-\phi)(\Psi-\psi)}{4}, \quad (3.26)$$

où f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ et satisfaisant les conditions :

$$\phi \leq f(x) \leq \Phi, \psi \leq g(x) \leq \Psi, \ \phi, \Phi, \psi, \Psi \in \mathbb{R}, x \in [a,b], \quad (3.27)$$

et Dragomir[13] a prouvé que :

$$|T(f,g,p)| \leq \frac{(\Phi-\phi)(\Psi-\psi)}{4}(\int_a^b p(x)dx)^2, \ p>0 \quad (3.28)$$

Dans ce paragraphe, on utilise l'intégrale fracionnaire de Riemann-liouville pour donner quelques résultats fractionnaires liées à (3.26) et (3.28).

On reprend la quantité (3.1).

On donne les résultats suivants :

3.2.1 Résultats 2

Théorème 3.3 *: Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[0,\infty[$ satisfaisant les conditions (3.27), et soient p et q deux fonctions positives sur $[0,\infty[$. Alors pour tout $t>0, \alpha>0$, on obtient :*

$$\begin{aligned}
&(J^\alpha q(t)J^\alpha pfg(t) + J^\alpha p(t)J^\alpha qfg(t)dx - J^\alpha qf(t)J^\alpha pg(t) - J^\alpha pf(t)J^\alpha qg(t))^2 \\
\leq\ & [(\Phi J^\alpha q(t) - J^\alpha f(t)q(t))(J^\alpha p(t)f(t) - \phi J^\alpha p(t)) + (\Phi J^\alpha p(t) - J^\alpha f(t)p(t))(J^\alpha q(t)f(t) - \phi J^\alpha q(t))] \\
&\times [(\Psi J^\alpha q(t) - J^\alpha g(t)q(t))(J^\alpha p(t)g(t) - \psi J^\alpha p(t)) + (\Psi J^\alpha p(t) - J^\alpha g(t)p(t))(J^\alpha q(t)g(t) - \psi J^\alpha q(t))
\end{aligned} \quad (3.2$$

Preuve. On utilise (3.5) et on applique l'inégalité intégrale de Chauchy Schwartz, on peut écrire : ∎

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^t\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} p(\tau)q(\rho)H(\tau,\rho)d\tau d\rho\right)^2 \\
\leq\ & \left(\int_0^t\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} p(\tau)q(\rho)(f(\tau)-f(\rho)^2 d\tau d\rho\right) \\
&\times \left(\int_0^t\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} p(\tau)q(\rho)(g(\tau)-g(\rho))^2 d\tau d\rho\right).
\end{aligned} \quad (3.30)$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} p(\tau)q(\rho)\left((f(\tau)-f(\rho)\right)^2 d\tau d\rho \\
=\ & J^\alpha q(t)J^\alpha pf^2(t) + J^\alpha p(t)J^\alpha qf^2(t) - 2J^\alpha qf(t)J^\alpha pf(t),
\end{aligned} \quad (3.31)$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} p(\tau)q(\rho)(g(\tau)-g(\rho))^2 d\tau d\rho \\
= \quad & J^\alpha q(t) J^\alpha pg^2(t) + J^\alpha p(t) J^\alpha qg^2(t) - 2J^\alpha qg(t) J^\alpha pg(t). \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

De (3.5), (3.31) et (3.32). On peut écrire (3.30) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\left(J^\alpha q(t) J^\alpha pfg(t) + J^\alpha p(t) J^\alpha qfg(t) - J^\alpha qf(t) J^\alpha pg(t) - J^\alpha pf(t) J^\alpha qg(t)\right)^2 \\
\leq \quad & \left[J^\alpha q(t) J^\alpha pf^2(t) + J^\alpha p(t) J^\alpha qf^2(t) - 2J^\alpha qf(t) J^\alpha pf(t)\right] \\
& \times \left[J^\alpha q(t) J^\alpha pg^2(t) + J^\alpha p(t) J^\alpha qg^2(t) - 2J^\alpha qg(t) J^\alpha pg(t)\right]. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
&(\Phi q(\rho) - f(\rho)q(\rho))(p(\tau)f(\tau) - \phi p(\tau)) + (\Phi p(\tau) - f(\tau)p(\tau))(q(\rho)f(\rho) - \phi q(\rho)) \\
&-p(\tau)(\Phi - f(\tau))(f(\tau) - \phi)q(\rho) - q(\rho)(\Phi - f(\rho))(f(\rho) - \phi)p(\tau) \\
= \quad & q(\rho)f^2(\tau)p(\tau) + p(\tau)f^2(\rho)q(\rho) - 2p(\tau)f(\tau)f(\rho)q(\rho). \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Multiplions (3.34) par $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$; $\tau \in (0,t)$ et intégrons le résultat par rapport à τ sur $[0,t]$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&(\Phi q(\rho) - f(\rho)q(\rho))(J^\alpha p(t)f(t) - \phi J^\alpha p(t)) + (\Phi J^\alpha p(t) - J^\alpha f(t)p(t))(q(\rho)f(\rho) - \phi q(\rho)) \\
&-q(\rho)(J^\alpha p(t)(\Phi - f(t))(f(t) - \phi) - q(\rho)(\Phi - f(\rho))(f(\rho) - \phi)J^\alpha p(t) \\
= \quad & q(\rho)J^\alpha pf^2(t) + q(\rho)f^2(\rho)J^\alpha p(t) - 2q(\rho)f(\rho)J^\alpha p(t)f(t). \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

Multiplions (3.35) par $\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$; $\rho \in (0,t)$ et intégrons le résultat par rapport à ρ sur $[0,t]$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&(\Phi J^\alpha q(t) - J^\alpha f(t)q(t))(J^\alpha p(t)f(t) - \phi J^\alpha p(t)) + (\Phi J^\alpha p(t) - J^\alpha f(t)p(t))(J^\alpha q(t)f(t) - \phi J^\alpha q(t)) \\
&-J^\alpha q(t)(J^\alpha J(p(t)(\Phi - f(t))(f(t) - \phi)) - J^\alpha(q(t)(\Phi - f(t))(f(t) - \phi))J^\alpha p(t) \\
= \quad & J^\alpha q(t)J^\alpha pf^2(t) + J^\alpha q(t)f^2(t)J^\alpha p(t) - 2J^\alpha q(t)f(t)J^\alpha p(t)f(t). \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

On applique (3.36) pour $f = g$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&(\Psi J^\alpha q(t) - J^\alpha g(t)q(t))(J^\alpha p(t)g(t) - \psi J^\alpha p(t)) + (\Psi J^\alpha p(t) - J^\alpha g(t)p(t))(J^\alpha q(t)g(t) - \psi J^\alpha q(t)) \\
&-J^\alpha q(t)(J^\alpha(p(t)(\Psi - g(t))(g(t) - \psi)) - J^\alpha(q(t)(\Psi - g(t))(g(t) - \psi))J^\alpha p(t) \\
= \quad & J^\alpha q(t)J^\alpha pg^2(t) + J^\alpha q(t)g^2(t)J^\alpha p(t) - 2J^\alpha q(t)g(t)J^\alpha p(t)g(t). \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Comme

$$-J^\alpha q(t)(J^\alpha(p(t)(\Phi - f(t))(f(t) - \phi)) - J^\alpha(q(t)(\Phi - f(t))(f(t) - \phi))J^\alpha p(t) \leq 0,$$

et

$$-J^\alpha q(t)\left(J^\alpha(p(t)(\Psi - g(t))(g(t) - \psi)) - J^\alpha(q(t)(\Psi - g(t))(g(t) - \psi))J^\alpha p(t) \leq 0,\right.$$

alors, nous avons respectivement :

$$\begin{aligned}
& J^{\alpha}q(t)J^{\alpha}pf^{2}(t)+J^{\alpha}q(t)f^{2}(t)J^{\alpha}p(t)-2J^{\alpha}q(t)f(t)J^{\alpha}p(t)f(t) \\
\leq\ & (\Phi J^{\alpha}q(t)-J^{\alpha}f(t)q(t))(J^{\alpha}p(t)f(t)-\phi J^{\alpha}p(t)) \\
& +(\Phi J^{\alpha}p(t)-J^{\alpha}f(t)p(t))(J^{\alpha}q(t)f(t)-\phi J^{\alpha}q(t)),
\end{aligned} \tag{3.38}$$

et

$$\begin{aligned}
& J^{\alpha}q(t)J^{\alpha}pg^{2}(t)+J^{\alpha}q(t)g^{2}(t)J^{\alpha}p(t)-2J^{\alpha}q(t)g(t)J^{\alpha}p(t)g(t) \\
\leq\ & (\Psi J^{\alpha}q(t)-J^{\alpha}g(t)q(t))(J^{\alpha}p(t)g(t)-\psi J^{\alpha}p(t)) \\
& +(\Psi J^{\alpha}p(t)-J^{\alpha}g(t)p(t))(J^{\alpha}q(t)g(t)-\psi J^{\alpha}q(t)).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

On utilise (3.38) et (3.39), on peut estimer l'inégalité (3.30) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& \left(J^{\alpha}q(t)J^{\alpha}pfg(t)+J^{\alpha}p(t)J^{\alpha}qfg(t)-J^{\alpha}qf(t)J^{\alpha}pg(t)-J^{\alpha}pf(t)J^{\alpha}qg(t)\right)^{2} \\
\leq\ & [(\Phi J^{\alpha}q(t)-J^{\alpha}f(t)q(t))(J^{\alpha}p(t)f(t)-\phi J^{\alpha}p(t))+(\Phi J^{\alpha}p(t)-J^{\alpha}f(t)p(t))(J^{\alpha}q(t)f(t)-\phi J^{\alpha}q(t))] \\
& \times[(\Psi J^{\alpha}q(t)-J^{\alpha}g(t)q(t))(J^{\alpha}p(t)g(t)-\psi J^{\alpha}p(t))+(\Psi J^{\alpha}p(t)-J^{\alpha}g(t)p(t))(J^{\alpha}q(t)g(t)-\psi J^{\alpha}q(t))]
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Le théorème 3.3 est prouvé.

Théorème 3.4 *: Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[0,\infty[$ satisfaisant les conditions (3.27), et soient p et q deux fonctions positives sur $[0,\infty[$. Alors pour tout $t>0,\alpha>0,\beta>0$, on obtient :*

$$\begin{aligned}
& \left(J^{\alpha}p(t)J^{\beta}qfg(t)+J^{\beta}q(t)J^{\alpha}pfg(t)-J^{\alpha}pf(t)J^{\beta}qg(t)-J^{\beta}qf(t)J^{\alpha}pg(t)\right)^{2} \\
\leq\ & \left[(\Phi J^{\beta}q(t)-J^{\beta}f(t)q(t))(J^{\alpha}p(t)f(t)-\phi J^{\alpha}p(t))+(\Phi J^{\alpha}p(t)-J^{\alpha}f(t)p(t))(J^{\beta}q(t)f(t)-\phi J^{\beta}q(t))\right] \\
& \times\left[(\Psi J^{\beta}q(t)-J^{\beta}g(t)q(t))(J^{\alpha}p(t)g(t)-\psi J^{\alpha}p(t))+(\Psi J^{\alpha}p(t)-J^{\alpha}g(t)p(t))(J^{\beta}q(t)g(t)-\psi J^{\alpha}q(t))\right]
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Preuve. On utilise (3.19) et on applique l'inégalité de Cauchy Schwartz pour les intégrales doubles, on obtient : ■

$$\begin{aligned}
& \left(J^{\alpha}p(t)J^{\beta}qfg(t)+J^{\beta}q(t)J^{\alpha}pfg(t)-J^{\alpha}pf(t)J^{\beta}qg(t)-J^{\beta}qf(t)J^{\alpha}pg(t)\right)^{2} \\
\leq\ & J^{\alpha}p(t)J^{\beta}qf^{2}(t)+J^{\beta}q(t)J^{\alpha}pf^{2}(t)-2J^{\alpha}pf(t)J^{\beta}qf(t) \\
& \times J^{\alpha}p(t)J^{\beta}qg^{2}(t)+J^{\beta}q(t)J^{\alpha}pg^{2}(t)-2J^{\alpha}pg(t)J^{\beta}qg(t).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

On multiplie les deux membres de (3.35) par $\frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$; $\rho\in(0,t)$, et on intègre le résultat par rapport à ρ sur $[0,t]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
& J^{\alpha}p(t)J^{\beta}qf^{2}(t)+J^{\beta}q(t)J^{\alpha}pf^{2}(t)-2J^{\alpha}pf(t)J^{\beta}qf(t) \\
=\ & \left[(\Phi J^{\beta}q(t)-J^{\beta}f(t)q(t))(J^{\alpha}p(t)f(t)-\phi J^{\alpha}p(t))+(\Phi J^{\alpha}p(t)-J^{\alpha}f(t)p(t))(J^{\beta}q(t)f(t)-\phi J^{\beta}q(t))\right] \\
& -J^{\beta}q(t)J^{\alpha}((\Phi-f(t))(f(t)-\phi)p(t))-J^{\beta}(q(t)(\Phi-f(t))(f(t)-\phi))J^{\alpha}p(t).
\end{aligned} \tag{3.43}$$

On applique (3.43) pour $f = g$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&J^{\alpha}p(t)J^{\beta}qg^{2}(t) + J^{\beta}q(t)J^{\alpha}pg^{2}(t) - 2J^{\alpha}pg(t)J^{\beta}qg(t) \\
= &\Big[(\Psi J^{\beta}q(t) - J^{\beta}g(t)q(t))(J^{\alpha}p(t)g(t) - \psi J^{\alpha}p(t)) + (\Psi J^{\alpha}p(t) - J^{\alpha}g(t)p(t))(J^{\beta}q(t)g(t) - \psi J^{\beta}q(t))\Big] \\
&-J^{\beta}q(t)J^{\alpha}((\Psi - g(t))(g(t) - \psi)p(t)) - J^{\beta}(q(t)(\Psi - g(t))(g(t) - \psi))J^{\alpha}p(t). \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

Comme

$$(\Phi - f(\tau))(f(\tau) - \phi) \;\geq 0 \text{ et } (\Psi - g(\tau))(g(\tau) - \psi) \geq 0,$$

alors, on a :

$$-J^{\beta}q(t)J^{\alpha}((\Phi - f(t))(f(t) - \phi)p(t)) - J^{\beta}(q(t)(\Phi - f(t))(f(t) - \phi))J^{\alpha}p(t) \leq 0, \qquad (3.45)$$

et

$$-J^{\beta}q(t)J^{\alpha}((\Psi - g(t))(g(t) - \psi)p(t)) - J^{\beta}(q(t)(\Psi - g(t))(g(t) - \psi))J^{\alpha}p(t) \leq 0. \qquad (3.46)$$

Par conséquent

$$J^{\alpha}p(t)J^{\beta}qf^{2}(t) + J^{\beta}q(t)J^{\alpha}pf^{2}(t) - 2J^{\alpha}pf(t)J^{\beta}qf(t)$$

$$\leq \Big[(\Phi J^{\beta}q(t) - J^{\beta}f(t)q(t))(J^{\alpha}p(t)f(t) - \phi J^{\alpha}p(t)) + (\Phi J^{\alpha}p(t) - J^{\alpha}f(t)p(t))(J^{\beta}q(t)f(t) - \phi J^{\beta}q(t))\Big], \qquad (3.47)$$

et

$$J^{\alpha}p(t)J^{\beta}qg^{2}(t) + J^{\beta}q(t)J^{\alpha}pg^{2}(t) - 2J^{\alpha}pg(t)J^{\beta}qg(t)$$

$$\leq \Big[(\Psi J^{\beta}q(t) - J^{\beta}g(t)q(t))(J^{\alpha}p(t)g(t) - \psi J^{\alpha}p(t)) + (\Psi J^{\alpha}p(t) - J^{\alpha}g(t)p(t))(J^{\beta}q(t)g(t) - \psi J^{\beta}q(t))\Big]. \qquad (3.48)$$

Alors de (3.47), (3.48) et (3.42), nous obtenons (3.41).

Remarque : On applique le théorème (3.4) pour $\alpha = \beta$, nous obtenons le théorème (3.1).

3.3 Inégalité Intégrale Fractionnaires de F. Qi

Dans ce paragraphe nous utilisons l'opérateur intégrale de Riemann-liouville pour générer quelques inégalités intégrales fractionnais de type Feng. Qi. D'autre inégalités sont également présentés. Mais avant de passer du résultats, on rappelle que Ngo et al [14], ont prouvé que pour toute fonction f positive et continue sur $[0,1]$ satisfaisants

$$\int_x^1 f(\tau)d\tau \geq \int_x^1 \tau d\tau,$$

et pour $\delta > 0$, les deux inégalités

$$\int_0^1 f^{\delta+1}(\tau)d\tau \geq \int_0^1 \tau^\delta f(\tau)d\tau \tag{3.49}$$

et

$$\int_0^1 f^{\delta+1}(\tau)d\tau \geq \int_0^1 \tau f^\delta(\tau)d\tau, \tag{3.50}$$

sont vérifiées.

Dans [15], W.J. liu, G.S. Cheng et C.C. Li ont établi le résultat suivant :

$$\int_0^1 f^{\alpha+\beta}(\tau)d\tau \geq \int_0^1 (\tau-a)^\alpha f^\beta(\tau)d\tau, \tag{3.51}$$

$\alpha > 0$, $\beta > 0$, et f une fonction positive continue sur $[a,b]$ telle que :

$$\int_x^b f(\tau)d\tau \geq \int_x^b (\tau-a)^\gamma d\tau,\ \gamma = \min(1,\beta),\ x \in [a,b]\,. \tag{3.52}$$

Recement L. Bougoufa [16] a prouvé que pour f et g positives sur $[0,\infty[$, avec $0 < m \leq \dfrac{f(x)}{g(x)} \leq M < \infty$ sur $[a,b]$, alors pour $p > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, nous avons :

$$\int_a^b [f(x)]^{\frac{1}{p}}[g(x)]^{\frac{1}{q}}dx \leq M^{\frac{1}{P^2}} m^{\frac{-1}{q^2}} \int_a^b [f(x)]^{\frac{1}{q}}[g(x)]^{\frac{1}{p}}dx, \tag{3.53}$$

et

$$\int_a^b [f(x)]^{\frac{1}{p}}[g(x)]^{\frac{1}{q}}dx \leq M^{\frac{1}{P^2}} m^{\frac{-1}{q^2}} \left(\int_a^b f(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b g(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.54}$$

3.3.1 Résultat 3

Théorème 3.5 *: Soient $\alpha > 0, p > 1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, et soient f et g deux fonctions positives sur $[0,\infty[$, telles que $J^\alpha f^p(t) < \infty, J^\alpha g^q(t) < \infty, t > 0$.*

Si

$$0 < m \leq \frac{f(\tau)}{g(\tau)} \leq M < \infty,\ \tau \in [0,t],$$

alors les deux inégalités

$$J^\alpha\left[f(t)^{\frac{1}{p}} g(t)\right]^{\frac{1}{q}} \leq M^{\frac{1}{P^2}} m^{\frac{-1}{q^2}} J^\alpha\left[f(t)^{\frac{1}{q}} g(t)^{\frac{1}{p}}\right], \tag{3.55}$$

et

$$J^\alpha\left[f(t)^{\frac{1}{p}} g(t)^{\frac{1}{q}}\right] \leq M^{\frac{1}{P^2}} m^{\frac{-1}{q^2}} \left[J^\alpha f(t)\right]^{\frac{1}{q}} \left[J^\alpha g(t)\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{3.56}$$

sont vérifiées.

Preuve. Comme $[f(\tau)]^{\frac{1}{p}} \leq M^{\frac{1}{p}}[g(\tau)]^{\frac{1}{p}}$, $[g(\tau)]^{\frac{1}{q}} \leq m^{\frac{-1}{q}}[f(\tau)]^{\frac{1}{q}}$, $\tau \in [0,t]$, $t>0$, alors :

$$[f(\tau)]^{\frac{1}{p}}[g(\tau)]^{\frac{1}{q}} \leq M^{\frac{1}{p}} g(\tau), \tag{3.57}$$

et

$$[f(\tau)]^{\frac{1}{p}}[g(\tau)]^{\frac{1}{q}} \leq m^{\frac{-1}{q}} f(\tau). \tag{3.58}$$

Alors

$$\left[[f(\tau)]^{\frac{1}{p}}[g(\tau)]^{\frac{1}{q}}\right]^{\frac{1}{p}} \leq M^{\frac{1}{p^2}}[g(\tau)]^{\frac{1}{p}}, \tag{3.59}$$

et

$$\left[[f(\tau)]^{\frac{1}{p}}[g(\tau)]^{\frac{1}{q}}\right]^{\frac{1}{q}} \leq m^{\frac{-1}{q^2}}[f(\tau)]^{\frac{1}{q}}. \tag{3.60}$$

Par conséquent ■

$$\left([f(\tau)]^{\frac{1}{p}}[g(\tau)]^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{P}}\left([f(\tau)]^{\frac{1}{p}}[g(\tau)]^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq M^{\frac{1}{p^2}} m^{\frac{-1}{q^2}}[f(\tau)]^{\frac{1}{q}}[g(\tau)]^{\frac{1}{p}}. \tag{3.61}$$

On multiplie (3.61) par $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ et on intègre le résultat par rapport à τ sur $[0,t]$, on obtient :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}[f(\tau)]^{\frac{1}{p}}[g(\tau)]^{\frac{1}{q}}\, d\tau d\rho \leq \frac{M^{\frac{1}{p^2}} m^{\frac{-1}{q^2}}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}[f(\tau)]^{\frac{1}{q}}[g(\tau)]^{\frac{1}{p}}\, d\tau d\rho. \tag{3.62}$$

D'où

$$J^{\alpha}\left([f(t)]^{\frac{1}{p}}[g(t)]^{\frac{1}{q}}\right) \leq M^{\frac{1}{P^2}} m^{\frac{-1}{q^2}} J^{\alpha}\left([f(t)]^{\frac{1}{q}}[g(t)]^{\frac{1}{p}}\right). \tag{3.63}$$

Pour prouver l'inégalité (3.56), on utilise l'inégalité de Hölder :

$$J^{\alpha}\left(f(t)^{\frac{1}{q}} g(t)^{\frac{1}{p}}\right) \leq (J^{\alpha} f(t))^{\frac{1}{q}} (J^{\alpha}(g(t))^{\frac{1}{p}}. \tag{3.64}$$

On a

$$J^{\alpha}\left([f(t)]^{\frac{1}{p}}[g(t)]^{\frac{1}{q}}\right) \leq M^{\frac{1}{P^2}} m^{\frac{-1}{q^2}}[J^{\alpha} f(t)]^{\frac{1}{q}}[J^{\alpha}(g(t)]^{\frac{1}{p}}. \tag{3.65}$$

L'inégalité (3.56) est prouvée

Théorème 3.6 *: Pour un entier positive $p \geq 2$ Si $0 < m \leq f(\tau) \leq M < \frac{m^{(p-1)^2}}{\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^p}$ sur $[0, \infty[$, alors :*

$$J^\alpha [f(t)]^{1/p} \leq (J^\alpha f(t))^{1-1/p}. \tag{3.66}$$

Preuve. On prend $g = 1$ dans (3.56), on obtient : ■

$$J^\alpha [f(t)]^{1/p} \leq K [J^\alpha f(t)]^{1-\frac{1}{p}}, \tag{3.67}$$

où $K = \dfrac{M^{\frac{1}{P^2}} \left(\dfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^{\frac{1}{p}}}{m^{(1-\frac{1}{p})^2,}}$.

Comme $M \leq \dfrac{m^{(p-1)^2}}{\left(\dfrac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^p}$, on conclue que $K \leq 1$,

ainsi l'inégalité (3.66) est prouvée.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a commencé par présenter quelques fonctions usuelles du calcul fractionnaire, et on définit l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

Puis, on a présenté quelques résultats intégraux liées à la fonctionnelle de Chebyshev avec poids, et celle de F. Q sous certains conditions sur l'ordre d'intégration et les fonctions considérées.

D'autres résultats ont été démontrés, ils dépendent de deux paramètres non entiers α et β.

Bibliographie

[1] Ross B. (1977) The Development of fractional Calculus 1695-1900. Historia Math 4 :75-89.

[2] X. Moreau, O. Altet, A. Oustaloup, Pheomenological description of the fractional differentiation in rheology, First IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, Borbeaux, France, pp. 74-79, 2004.

[3] D. Riu, N. Retière, M. Ivanes Modélisation fractionnairedes machines électrique tournantes : de leur caractérisation fréquentielle à leur répence temporelle, CIFA, 2002.

[4] Patricia Saad (Modélisation et identification du comportement non linéaire des cales en caoutchouc) Thèse de Doctorat.L'école centrale de Lyon Spécialité : Mécanique Numéro d'ordre : 2003 – 09 Année 2003.

[5] Huynh Kima Long, Alex (Analyse du comportement dynamique d'un élastomère : modélisation rt identification. Thèse Janvier 2005.

[6] I. Podlubny ; Fractional Differential equations, Academic Press, New York, 1999.

[7] Mathai, A. M ; Haubold, H.J, Special functions for applied scientists, 2008,XXVI, 470 p. 10 illus, Hardcover.

[8] R. Gorenflo, F. Mainardi, fractionalcalculus : integral and differential equations of fractional order, Springer Verlag, Wien(1997), 223-276.

[9] ....

[10] Z. Dahmani : Some Results Associated with Fractional Integrals Involving The Extended Chebyshev Functional. Acta Universitatis Apulensis, pp. 217-244, No. 27/2011.

[11] P.Kuman : Inequalities Involving Moments of a Continious Random Variable Defined Over a Finite Intervale.

[12] D.S. Mitrinovic, J.E. Pecaric, and A.M. Fink, "Classical and new inequalities in Analysis," Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[13] S.S. Dragomir, "Some integral inequalities of Gruss type," Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 31, no. 4, pp. 397-415, 2002.

[14] Q. A. Ngo, D. D. T. T. Dat, D. A. Tuan : Notes on an integral inequality. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 3(4), (2002), Art. 54.

[15] W. J.Liu, G. S. Cheng, C.C. Li : Further development of an open problem concerning an integral inequality. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. 9(1) (2008).

[16] L. Bougoffa, Volume 6, Issue 1, Article 27,2005.

[17] D. Matignon, Stability result on fractional differential equations with applications to control processing, in : IMACS-SMC Proceedings. Lille, France, 1996, pp. 963-968.