UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master de Mathématiques
Cycle LMD
Spécialité :Modélisation Contrôle et Optimisation

Thème :

Analyse et Contrôle des Systèmes Positifs

Présenté par :
DJELLOUL Amen

Soutenu le 05/06/2013.

Les membres de jury

LAID	Djillali	**Président**	MAA	**U. MOSTAGANEM.**
BENZIDANE	AEK	**Examinateur**	MBA	**U. MOSTAGANEM.**
BOUAGADA	Djillali	**Encadreur**	MCA	**U. MOSTAGANEM.**

Dédicace

A ma très chère mère,

Affable, honorable, aimable : Tu représentes pour moi le symbole de la bonté par excellence, la source de tendresse et l'exemple du dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi. Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études.

Je te dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Dieu, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

A mon cher Père,

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous.

A mes adorables sœurs, Amira et Dounia

A mes très chers frères, Sidehmed et Zoubir

A mon futur mari inchalah Sofiane

A mes très chers amis

A tous ceux qui me sont chers

A tous ceux qui m'aiment

A tous ceux que j'aime

Je Dédie ce travail

Remerciements

Merci Allah de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel.
Je remercie infiniment mon encadreur le Maître de conférence BOUAGADA Djillali pour sa disponibilité, le savoir faire et le soutien ne m'ont jamais fait défaut.
Mes remerciements vont également à Mr LAID Djillali, Maitre de conférence à l'Université de Mostaganem, d'avoir accepté d'avoir présidé le jury.
Mes remerciements vont également à Monsieur BENZIDANE AEK, Maitre de conférence à l'université de Mostaganem, d'avoir accépté et pris le temps d'examiner ce travail.
Je remercie aussi tous ceux qui m'ont aidé à réaliser ce travail, particulièrement Ma chère Kheira.
Je voudrais exprimer à toute ma famille, et plus particulièrement à mes parents, ma profonde reconnaissance pour leur patiente et leur réconfort dans les moments de doutes et de découragements, Qu'ils trouvent dans ce travail le témoignage de mon affection.
Enfin, je remercie tous les professeurs de la faculté.

Merci à tous, très sincèrement

Table des matières

Notations

R	Corps des nombres réels.
R^n	Espace des vecteurs à n entiers réelles
R_+	Corps des nombres réels non-négatifs.
$R^{m\times n}$	Espace des matrices réelles de dimension $m \times n$.
$R_+^{m\times n}$	Espace des matrices à entrées réelles non-négatives.
A^T	Transposée de la matrice A.
A^{-1}	Matrice inverse de A.
I_n	Matrice identité d'ordre n.
$\underline{n}$	Ensemble des n premiers entiers naturels.

INTRODUCTION

Dans de nombreux systèmes physiques les variables sont par nature positives or les modèles usuels en particulier linéaires n'intègrent en général pas cette contrainte.

Des modèles particuliers ont été développés par nombreux scientifiques, les modèles à compartiments pour la médecine et la biologie, les modèles électriques (circuits RLC), d'autres modèles apparaissent dans les sciences de la communication et l'information voir [2] et [3].

Dans ce mémoire, on s'intéresse aux systèmes positifs qui sont d'un intérêt pratique et qui sont définis dans des cônes et non pas des espaces vectoriels.

L'objectif du chapitre 1 est de rappeler certains concepts élémentaires concernant l'étude des systèmes positifs.

Dans le deuxième chapitre on va étudier les systèmes linéaires en temps continu connaissant ses réponses ; quelques définitions et des exemples sur les systèmes à compartiments ont été décrits.

Dans la dernière section de ce chapitre, on s'intéresse au problème de positivité de systèmes linéaires continus.

Nous adapterons dans le chapitre suivant les mêmes procédures du chapitre précédent mais pour les systèmes à temps variables.

On terminera ce mémoire par la notion de l'atteignabilité pour les systémes positifs qui diffère de l'atteignabilité pour un problème dont les variables d'état sont réelles.

Chapitre 1

Définitions et Préliminaires

Nous proposons quelques définitions et propriétés trés utiles pour l'étude de la classe des systèmes positifs, en se basant sur [1].

Soient $A = (a_{ij})_{i,j}$ et $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ des matrices à coefficients réels. Par la suite, nous notons I_n la matrice identitée d'ordre n ou plus brièvement I, A^T la transposée de la matrice A, $\underline{n}$, l'ensemble des n premiers entiers naturels, $1, ..., n$.

1.1 Matrices non-négatives

1.1.1 Définition

A est une matrice **non-négative** si $\forall\ i \in \underline{n}\ ,\forall\ j \in \underline{m} : a_{ij} \geqslant 0$, autrement dit toutes ses entrées sont non-négatives.

1.1.2 Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

est une matrice non-négative.

1.2 Matrices de Metzler

1.2.1 Définition

A est une matrice de **Metzler** si $\forall\ i \in \underline{n}\ ,\forall\ j \in \underline{m}\ ,i \neq j\ :\ a_{ij} \geqslant 0$, autrement dit toutes ses entrées hors diagonales sont non-négatives.

1.2.2 Exemple

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

est une matrice de Metzler.

1.2.3 Proposition

A est une marice de Metzler si et seulement si $\forall\ t \geqslant 0$; $e^{At} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.

Preuve

Nécessité :

Supposons que A est une matrice de Metzler, on peut trouver un réel $\lambda > 0$ tel que $(A+\lambda I) > 0$.

Sachant que,

$$(A + \lambda I)(-\lambda I) = (-\lambda I)(A + \lambda I)$$

il s'ensuit que,

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{(A+\lambda I)t(-\lambda I)t} \\ &= e^{(A+\lambda I)t} e^{(-\lambda I)t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \end{aligned}$$

du fait que, $e^{(A+\lambda I)t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ et $e^{(-\lambda I)t} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.

Suffisance :

Supposons que $\forall\ t \geqslant 0$, $e^{At} \geqslant 0$. Ainsi, puisque

$$A = \frac{d}{dt}(e^{At})_{t=0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{At} - I}{t}$$

Prenons comme e_j le j^{me} vecteur la base canonique, nous obtenons pour $i \neq j$,

on a,

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{< e^{At}e_j - e_j; e_i >}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \left\{ \frac{< e^{At}e_j - e_i >}{t} - \frac{< e_j; e_i >}{t} \right\} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{< e^{At}e_j; e_i >}{t}
\end{aligned}$$

puisque $< e_j; e_i >= 0$.

Dés lors, $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et la matrice A est donc une matrice de Metzler.

1.3 Matrices monomiales

1.3.1 Définition

Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n,

A est une matrice **monomiale** ou matrice de permutation généralisée si les entrées de A sont toutes nulles sauf une, dans chaque ligne et chaque colonne, qui,est strictement positive.

1.3.2 Exemple

La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est une matrice de permutation généralisée.

En particulier, une matrice de permutation est une matrice monomiale dans laquelle chaque entrée non nulle est égale à 1.

1.3.3 Proposition

Une matrice A non singulière telle que, $A^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ si et seulement si, A est une matrice monomiale.

1.4 Impulsion de Dirac

1.4.1 Définition

L'impulsion de Dirac notée $\delta(t)$ est la modélisation mathématique d'un signal d'amplitude infinie vérifiant,

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Chapitre 2

Les systèmes Linéaires en Temps Continu

2.1 Trajectoire d'états et réponse des systèmes en temps continu

Nous rappelons brièvement dans cette section l'expression des trajectoires d'états et des réponses des systèmes linéaires en temps continu,[1].
Considérons le système linéaire continu suivant,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

où,

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie et A, B, C et D sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

Donnons le circuit à quatre mailles représenté par la figure 1.

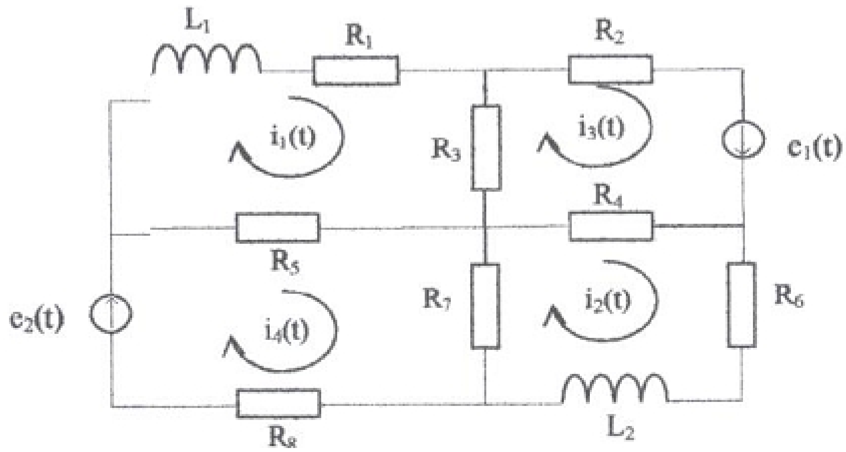


figure1 : Circuit RLC

où,

R_i, $i = 1, 2, ..., 8$ sont les résistances données, L_1, L_2 les inductances et e_1, e_2 les sources de voltages. On note par i_1, i_2, i_3, i_4 les intensités du courant dans les quatre mailles.
En appliquant la lois des mailles, on obtient alors :

$$\begin{cases} L_1 \frac{d_{i_1(t)}}{dt} = -(R_1 + R_2 + R_3)i_1(t) + R_3 i_3(t) + R_5 i_4(t) \\ L_2 \frac{d_{i_1(t)}}{dt} = -(R_4 + R_6 + R_7)i_2(t) + R_4 i_3(t) + R_7 i_4(t) \\ 0 = R_3 i_1(t) + R_4 i_2(t) - (R_2 + R_3 + R_4)i_3(t) + e_1 \\ 0 = R_5 i_1(t) + R_7 i_2(t) - (R_5 + R_7 + R_8)i_4(t) + e_2 \end{cases},$$

et si on pose $x_1(t) = i_1(t)$, $x_2(t) = i_2(t)$, $x_3(t) = i_3(t)$, et $x_4(t) = i_4(t)$, on peut cependant écrire les quatre équations sous la forme suivante,

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

avec,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} -\frac{R_{11}}{L_1} & 0 & \frac{R_{13}}{L_1} & \frac{R_{14}}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_{22}}{L_2} & \frac{R_{23}}{L_2} & \frac{R_{24}}{L_2} \\ R_{31} & R_{32} & -R_{33} & 0 \\ R_{41} & R_{42} & 0 & R_{44} \end{bmatrix}, \ x(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \end{bmatrix},$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où,

$$R_{11} = R_1 + R_3 + R_5 \ , R_{22} = R_4 + R_6 + R_7, \ \ R_{24} = R_{42} = R_7$$

$$R_{13} = R_{31} = R_3, R_{14} = R_{41} = R_5, \ \ R_{23} = R_{32} = R_4$$

$$R_{33} = R_2 + R_3 + R_4, \ \ R_{44} = R_5 + R_7 + R_8.$$

Ce modèle est un bon exemple de systèmes positifs.

2.2 Réponse des systèmes linéaires en temps continu

Considérons le système linéaire standard en temps invariant suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{2.2.1}$$

pour tout $t \geq t_0$, nous obtenons,

Trajectoire d'état :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-t_0-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{2.2.2}$$

Réponse de système :

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-t_0-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \tag{2.2.3}$$

Matrice de réponse impulsionnelle :

$$G(t, t_0) = Ce^{A(t-t_0)}B + D\delta(t - t_0) \tag{2.2.4}$$

2.3 Les systèmes à compartiments

Dans cette section, la notion des systèmes à compartiments est décrite. Nous rappelons les principaux définitions et propriétés de ces systèmes, tout en liant cela à la notion de positivité.

2.3.1 Définition

Un système à compartiment est un système constitué d'un nombre fini de sous systèmes appelés compartiments. La notion de système à compartiment est utilisée pour désigner une vaste classe de système dont la dynamique peut être décrite par des équations de bilan. Elles trouvent leurs applications dans de nombreux domaines des sciences de l'ingénieur tel que le génie chimique . . . , mais aussi en sciences économiques et sociales.

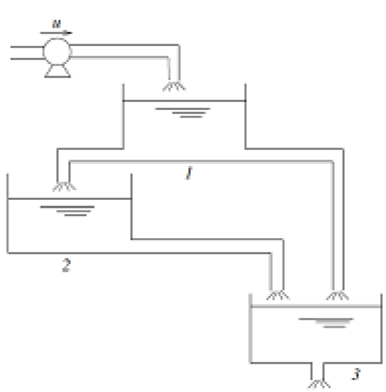
2.3.2 Définition

Un compartiment est un réservoir conceptuel qui contient des produits quantifiables est indiqué par deux flux qui sont toujours positifs exprimés en quantité de contenu par unité de temps qui sont : les flux d'alimentation et du soutirage du compartiment.

2.3.3 Définition

Un système à compartiment sera donc représenté par différentes manières citons, les équations de bilan, la représentation graphique et la représentation matricielles.

2.3.4 Exemple d'un système à compartiment



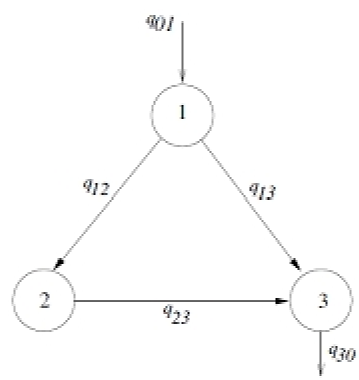
Ce modéle est représenté par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = q_{01} - q_{12} - q_{13} \\ \dot{x}_2 = q_{12} - q_{23} \\ \dot{x}_1 = q_{13} - q_{23} - q_{30} \end{cases}$$

Avec, $x_{1,}$ x_2, x_3 sont les variables d'état qui désignent les volumes d'eau contenus dans le réservoir.

q_{ij} : Les flux représentent les débits qui s'écoulent des réservoirs supérieurs vers les réservoirs inférieurs.

Une représentation graphique est mise en évidence,



2.4 Positivité des systèmes linéaires en temps continu

Considérons à présent les définitions et quelques résultats de positivité en temps continu.

2.4.1 Positivité externe

Tout d'abord, donnons la première définition de positivité des systèmes linéaires, la positivité externe.

Définition

Un système linéaire standard (2.2.1) est dit externement positif si la sortie correspondante à l'état initial nul est non-négative pour chaque entrée non-négative, i.e. pour, $x_0 = x(0) = 0$ et pour tout $u(t) \in R_+^m$, pour $t \geq 0$, on a $x(t) \in R_+^n$ et $y(t) \in R_+^p$.

Théorème (Condition pour la positivité externe)

Un système linéaire standard (2.2.1) est externement positif si et seulement si sa réponse impulsionnelle est non-négative, i.e $G(t) \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$ pour $t \geq 0$.

2.4.2 Positivité interne

A présent, nous pouvons donner la seconde définition de la positivité, qui peut être appelée positivité interne.

Définition

Le système (2.2.1) est dit internement positif si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, et tout contrôle $u(t) \in R_+^m$ pour $t \geq 0$ on a $x(t) \in R_+^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$, $t \geq 0$.
Cette définition indique que toutes les trajectoires emmenant de n'importe quel point dans l'orthant non-négatif R_+^n (frontières incluses) de l'espace d'état $\mathbb{R}$, obtenues en appliquant une entrée non-négative au système, demeurent dans l'orthant non-négatif et mènent à une sortie non-négative.

2.4.3 Théorème

Le système (2.2.1) est dit internement positif si et seuleument si les matrices B, C et D sont positives et A est de metzler.

2.4.4 Preuve

Nécessité :
On sait que,

$$x(t) \in R_+^n \text{ et } y(t) \in \mathbb{R}_+^p$$

tel que,

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

et

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + D(\tau).$$

Donc les matrices B, C et D sont positives et

$$e^{At} \in \mathbb{R}_+^{n\times n},\ \forall t \geqslant 0,$$

alors A est de metzler.

Suffisance :

Si on suppose que la matrice A est de metzler et les matrices B, C et D sont positives, alors e^{At} est positif d'après la proposition(1.2.3).

D'ou,

$$x(t) \in R_+^n \text{ et } y(t) \in \mathbb{R}_+^p,\ t \geq 0.$$

2.4.5 Remarque

La positivité interne implique la positivité externe mais l'inverse n'est pas vrai.

Chapitre 3

Les Systèmes à Temps Variables

Nous présentons dans ce chapitre les systèmes positifs à temps variables.

Nous adaptons les résultats obtenus dans le chapitre 2 sur les systèmes en temps continu. Prendrons donc exactement la même structure prise dans chapitre précédent.

Rappelons qu'une vue d'ensemble de la situation actuelle de la théorie des systèmes positifs est donnée par [2].

Les équations d'espace d'états peuvent être résolus pour les systèmes variant dans le temps, mais la solution est beaucoup plus compliquée que le cas invariant. Notre équation d'état variante est donnée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{array} \right. . \tag{3.0.1}$$

On considère le modèle :

$$x(t) = \Phi(t_, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_{0,} t - \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \tag{3.0.2}$$

avec,

la fonction $\Phi(t_{0,} t)$ est appelée la matrice de transition d'état, car elle contrôle le changement d'états dans l'équation d'état.

3.1 Propriétés

1.

$$\Phi(t_, t) = I.$$

2.

$$\Phi^{-1}(t,\tau) = \Phi(\tau,t).$$

3.

$$\Phi(t_1,t_2) = \Phi(t_1,t_0)\Phi(t_0,t_2).$$

4.

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,\tau) = A(t)\Phi(t,\tau).$$

5.

$$\overline{\Phi}(t,t_0) = \exp(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau). \tag{3.1.1}$$

3.2 Théorème

La solution du système

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{3.2.1}$$

est donnée par,

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

3.2.1 Preuve

On sait que

$$x(t_0) = \Phi(t_0,t_0)x_0 = x_0$$

et

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t_0,t-\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau.$$

On dérive la solution $x(t)$, on obtient,

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt}\Phi(t,t_0)x_0 + \Phi(t,t)B(t)u(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\
&= A(t)\Phi(t,t_0)x_0 + B(t)u(t) + \int_{t_0}^{t} A(t)\Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\
&= A(t)[\Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau] + B(t)u(t) \\
&= A(t)x(t) + B(t)u(t)
\end{aligned}$$

3.2.2 Remarque

Si la matrice A est constante, alors on a,

$$\Phi(t,\tau) = I + \int_{\tau}^{t} Ad\sigma_1 + \int_{\tau}^{t} A\int_{\tau}^{\sigma_1} Ad\sigma_2 d\sigma_1 + \int_{\tau}^{t} A\int_{\tau}^{\sigma_1} A\int_{\tau}^{\sigma_2} Ad\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 + ...,$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\tau}^{t} Ad\sigma_1 &= (t-\tau)A \\
\int_{\tau}^{t} A\int_{\tau}^{\sigma_1} Ad\sigma_2 d\sigma_1 &= \frac{(t-\tau)^2}{2!}A^2 \\
\int_{\tau}^{t} A\int_{\tau}^{\sigma_1} A\int_{\tau}^{\sigma_2} Ad\sigma_3 d\sigma_2 d\sigma_1 &= \frac{(t-\tau)^3}{3!}A^3,
\end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned}
\Phi(t,\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-\tau)^k}{k!}A^k \\
&= e^{(t-\tau)A}.
\end{aligned}$$

3.3 Positivité des systèmes à temps variables

3.3.1 La positivité externe

Définition 1

Le système (3.0.1) est dit externement positif si pour tout contrôle $u(t) \in R_+^m$ pour $t \geq t_0$ et pour la condition initial $x_0 = 0$, la sortie $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$, pour $t \geq t_0$.
soit $g(t) \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$ la Matrice de réponse impulsionnelle pour le système (3.0.1).
Pour $x_0 = 0$, la sortie $y(t)$ pour l'entré $u(t)$ est donné par la formule

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t,\tau)u(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0 \tag{3.3.1}$$

où,

$$g(t,\tau) = C(t)\Phi(t,\tau)B(t) + D(t)\delta(t-\tau), \tag{3.3.2}$$

Pour $t \geq \tau$ et $\delta(t)$ impulsionnelle Dirac.

Théorème

Le système (3.0.1) est externement positive si et seulement si

$$g(t) \in \mathbb{R}_+^{p\times m} \text{ pour } t \geq t_0. \tag{3.3.3}$$

Preuve

La nécessité découle immédiatement de la définition 1 et la définition de la réponse impulsionnelle.

Et pour montrer la suffisance, on a, (3.3.3) est vérifiée, puis à partir de (3.3.1), pour $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$, on a $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$ pour $t \geq t_0$.

3.3.2 La positivité interne

Nous donnons dans ce qui suit une caractérisation sur la positivité.

Définition

Le système (3.0.1) est dit internement positif si pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$, et tout contrôle $u(t) \in R_+^m$, $t \geq 0$ on a $x(t) \in R_+^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$, $t \geq t_0$.

Lemme

La matrice de transition

$$\Phi(t_, t_0) \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \text{ pour } t \geq t_0 \tag{3.3.4}$$

si et seulement si les entrés hors diagonales a_{ij}, tel que $i \neq j$, $i, j = \underline{n}$, on a

$$\int_{t_0}^{t} a_{ij}(\tau)d\tau \geq 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j, \quad i,\ j = \underline{n}. \tag{3.3.5}$$

Preuve D'abord, on va montrer que (3.3.5) implique (3.3.4).

Soit le vecteur $x(t)$ (resp $z(t)$) et

$$x_i(t) = z_i(t) \exp(\int_{t_0}^{t} a_{ii}(\tau)d\tau), \quad i = \underline{n}. \tag{3.3.6}$$

On remplace (3.3.6) dans (3.2.1), pour $u(t) = 0$, $t \geq t_0$

$$\dot{z}(t) = \overline{A}(t)z(t) \tag{3.3.7}$$

où $\overline{A}(t) = [\overline{a_{ij}}(t)] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, et

$$\overline{a_{ij}}(t) = \begin{cases} a_{ij}(t)\exp(\int_{t_0}^{t}[a_{jj}(\tau) - a_{ii}(\tau)]d\tau) & \text{pour } i \neq j \\ 0 \quad \text{pour } i = j \end{cases} \tag{3.3.8}$$

De (3.3.6), il s'ensuit que

$$z_i(t) = x_i(t_0) \geq 0 \quad \text{pour } i = \underline{n} \quad \text{si } x_0 \in \mathbb{R}_+^n. \tag{3.3.9}$$

En utilisant (3.0.2) pour $u(t) = 0$, $t \geq t_0$ et par (3.3.7), on obtient

$$z(t) = \Phi(t_, t_0)z_0 \tag{3.3.10}$$

Ou

$$\Phi(t_, t_0) = I + \int_{t_0}^{t}\overline{A}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t}\overline{A}(\tau)\int_{t_0}^{t}\overline{A}(\tau_1)d\tau_1 d\tau + ... \tag{3.3.11}$$

De (3.3.8) il s'ensuit que si (3.3.6) détient, alors $\overline{A}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\Phi(t_, t_0) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ et $z(t) \in \mathbb{R}_+^n$, $t \geq t_0$.

Alors, de (3.3.7) et (3.3.9),on a $x(t) \in R_+^n$, $t \geq t_0$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$.

La nécessité il s'ensuit immédiatement que pour (3.1.1) et $\overline{\Phi}(t_, t_0) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ si et seulement si $\int_{t_0}^{t}\overline{A}(\tau)d\tau$ est de Metzler pour tout $t \geq t_0$.

3.3.3 Théorème

le système (3.0.1) est internment positif si est seulement si

– Les entrées hors diagonales de $A(t)$ satisfont (3.3.5).

– $B(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$, $D(t) \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$ pour $t \geq 0$.

preuve

Nécessité :

Soit $u(t) = 0$ pour $t \geq t_0$ et $x_0 = e_j$. La trajectoire ne quitte pas l'orthant $\mathbb{R}_+^n$ seulement si $\dot{x}(t_0) = A(t_0)e_j \geq 0$, ce qui implique (3.3.5).

Pour la même raison, pour $x_0 = 0$, on a $\dot{x}(t_0) = Bu(t_0) \geq 0$, ce qui implique $B(t) \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $t \geq t_0$ tel que $u(t_0) \in \mathbb{R}_+^m$ peut être arbitraire.

De (3.0.1) pour $u(t_0) = 0$ on a $y(t_0) = C(t_0)x_0 \in \mathbb{R}_+^p$ et $C(t) \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$, $t \geq 0$ depuis $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ peut être arbitraire.

Même de (3.0.1), pour $x_{_0} = 0$ on obtient, $y(t_0) = D(t_0)u(t_0) \in \mathbb{R}_+^p$ et $D(t) \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$ pour $t \geq 0$ tel que, $u(t_0) \in \mathbb{R}_+^m$ peut être arbitraire.

Suffisance :

Si la condition (3.3.5) est satisfaite, alors par le lemme, et (3.3.4), et de (3.0.2), alors, on obtien $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^m$ et $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$, $t \geq t_0$, alors $B(t) \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$.

Si $C(t) \in \mathbb{R}_+^{p\times n}$ et $D(t) \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$ pour $t \geq 0$, alors de (3.0.1) on obtient $y(t) \in \mathbb{R}_+^p$, donc $y(t) \in \mathbb{R}_+^n$ et $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ pour tout $t \geq t_0$.

Chapitre 4

L'atteignabilité

4.1 Définition

L'état $x_f(t) \in \mathbb{R}_+^n$ est dit atteignable au temps $t_f - t_0$ s'il existe un vecteur d'entré $u(t) \in \mathbb{R}_+^n$ pour $[t_f - t_0]$ qui oriente l'état du système de $x_0 = 0$ jusqu'à x_f.

4.2 Définition

Si tout état $x_f(t) \in \mathbb{R}_+^n$ est atteignable au temps $t_f - t_0$ alors le système est dit atteignable au temps $t_f - t_0$.

Nous énnonçons dans ce qui suit quelques caractérisations tout en dérivant des résultats sur l'atteignabilité des systèmes positifs. Pour ce faire nous nous basons sur les référencse suivantes [2].

4.3 Théorème

Le système internement positif est atteignable dans le temps $t_f - t_0$ si

$$R(t_f, t_0) := \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) B(\tau)^T \Phi^T(t_f, \tau) d\tau \tag{4.3.1}$$

est une matrice monomiale.

Le vecteur d'entré qui oriente le vecteur d'état de $x_0 = 0$ vers x_f, est donné par,

$$u(t) = B(t)^T \Phi^T(t_f, t) R^{-1}(t_f, t) x_f, \tag{4.3.2}$$

pour $t \in [t_f - t_0]$.

4.3.1 Preuve

Notons que d'après la proposition (1.3.3) du chapitre 1 si $R(t_f, t_0)$ est une matrice monomiale, alors $R^{-1}(t_f, t_0) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ et $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ pour $[t_f - t_0]$.

On va montrer que le contrôle défini par (4.3.2) sert à transférer l'état du système (1) de $x_0 = 0$ vers la cible finale x_f.

Substituant (4.3.2) dans (2) pour $t = t_f$ et $x_0 = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} x(t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)B(\tau)^T \Phi^T(t_f, \tau)R^{-1}(t_f, t_0)x_f d\tau \\ &= [\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)B(\tau)^T \Phi^T(t_f, \tau)d\tau]R^{-1}(t_f, t_0)x_f = x_f. \end{aligned}$$

Donc, si (4.3.1) est une matrice monomiale, alors le système positif (3.0.1) est atteignable pour $t_f - t_0$.

4.4 Théorème

Le système internement positif est atteignable au temps $t_f - t_0$ si

$$A(t) = diag[a_1(t), a_2(t), ..., a_n(t)], \tag{4.4.1}$$

($a_i(t)$, $i = \underline{n}$ la fonction dépendant du temps continu) et $B(t) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ est une matrice monomiale continue en t.

4.4.1 Preuve

On voit bien que si $A(t)$ est de la forme (4.4.1), alors l'égalité $A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1)$ est satisfaite pour $t_1, t_2 \in [t_0, \infty)$ et $\Phi(t, t_0) = \exp(\int_{t_0}^t A(\tau)d\tau)$ est une matrice monomiale pour tout $t \geq t_0$.

il s'ensuit alors que la matrice de transition $\Phi(t, t_0)B(t) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ est une matrice monomiale et

$$\begin{aligned} R(t_f, t_0) \quad : &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)B(\tau)^T \Phi^T(t_f, \tau)d\tau \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)[\Phi(t_f, \tau)B(\tau)]^T d\tau. \end{aligned}$$

En conséquence d'après le thèoréme(4.3), le système (3.0.1) est atteignable au temps $t_f - t_0$.

4.5 Exemple

On considère le système (3.0.1) avec

$$A(t) = \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & t \end{matrix}, \quad B(t) = \begin{matrix} 0 & e^t \\ \sqrt{t} & 0 \end{matrix}.$$

d'après le théorème (4,4), le système est atteignable au temps $t_f - t_0$. ; soit alors, il existe un vecteur d'entrée servant à transférer $x_0 = 0$ vers la cible finale $x_f = [2\ 1]^T$ au temps $t_f = 1$. Utilisant (3.1.1),(4.3.1) et (4.3.2), on obtient,[2]

$$\Phi(1,\tau) = \exp(\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau) = \begin{pmatrix} \exp(2(1-\tau)) & 0 \\ 0 & \exp(\frac{1}{2}(1-\tau^2)) \end{pmatrix},$$

$$R(t_f,t_0) = R(1,0) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(1,\tau)B(\tau)B(\tau)^T\Phi^T(1,\tau)d\tau = \begin{pmatrix} \frac{e^4}{2}(2(1-e^{-2})) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(e-1) \end{pmatrix},$$

$$u(t) = B(t)^T\Phi^T(1,t)R^{-1}(1,0)x_f = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2t}{e-1}\exp(\frac{1}{2}(1-t^2)) \\ \frac{4\exp(-t)}{e^2-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

CONCLUSION

Dans ce travail, l'accent est mis sur une nouvelle qui est la classe des systèmes positifs.
Nous avons consacré, notre étude au cas des modèles à temps variables où nous avons traité le problème de solvabilité autrement dit, la recherche de la solution de tels modèles.
Par ailleurs et dans deux chapitres différents, les caractérisations sur la positivité ont été mis en évidence. Enfin nous avons traité l'aspect analyse de ce type de modèles plus particulièrement, nous nous sommes intéressé à l'atteignabilité des modèles à temps variables positifs, chose qui diffère de l'atteignabilité pour un problème dont les variables d'état sont réelles.

Bibliographie

[1] BOUAGADA.D These de Doctorat.

[2] T.Kaczorek, Positive linear systems and their relationship with electrical circuits, XX-SPETO : 33-41. 1997.

[3] R.F.Brown, Biomedical systems analysis via compartemental concepts (Abacus Press, Tunbridge Wells, 1985).

[4] L.Cacceta and V.G. Rumchev, A Survey of reachability and controllability for positivelinear systems, Annals of Operation Research 98, 101-122, 2000.

[5] T.Kaczorek, Positive 1D and 2D systems, Springer Verlag, Berlin, Academy 2002.431 pages.

[6] A.Berman, M.Neumann, R.J.Stern, Nonnegative matrices in dynamic systems, John .Wiley and Sons, 1989.

[7] Linear Control Systems Lecture # 23 Time-Varying Systems Solution of the State Equation.

[8] Linear Time-Varying Systems ; MAE 280A ; Maur cio de Oliveira.

[9] Panos J.Antsaklis and Anthony N.Michel,"A linear Systems Primer" Birkhauser Boston. Basel. Berlin 2007