

**UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

**Mémoire de fin d'étude**  
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques  
Cycle LMD  
**Spécialité : Modélisation Contrôle et Optimisation**

**Thème :**  
**Sur un Problème de Stabilité des Systèmes Hybrides**

**Présenté par :**  
HAKIKI Kheira

**Soutenu le 05/06/2013.**

**Les membres de jury**

OULD ALI	Mohand	<b>Président</b>	MCA	<b>U. MOSTAGANEM.</b>
SAIDANI	Mansouria	<b>Examineur</b>	MAA	<b>U. MOSTAGANEM.</b>
BOUAGADA	Djillali	<b>Encadreur</b>	MCA	<b>U. MOSTAGANEM.</b>

---

# Dédicace

---

Aucune dédicace ne saurait exprimer ma reconnaissance, mon grand attachement et mon  
profond amour pour toi,

Papa tu as toujours tout fait pour nous préserver une part de bonheur et de réconfort

Que Dieu puisse m'aider à te prouver ma sincère gratitude  
pour ces nombreuses années de sacrifice

Que dieu te protège et t'accorde longue vie afin que je puisse te combler à mon tour.

Je dédie ce mémoire à mes chères mères qui m'ont tant soutenu

Que ce travail soit à la hauteur des longues nuits de veille  
et des moments d'angoisse qu'elles avaient endurées

pendant toutes mes années d'étude

Que dieu les protège.

À mes frères et mes soeurs pour toute leur compréhension et encouragements  
dans la réalisation de ce travail

Qu'ils trouvent l'expression de ma gratitude et ma grande affection.

Je le dédie également à toutes mes copines qui m'ont comblé d'amour et d'encouragement  
et aux étudiants de ma promotion 2013 M.C.O.

À la mémoire de mon très cher oncle "Noureddine"

J'aurai tant aimé que tu sois là parmi nous pour m'encourager comme tu l'as toujours fait

Tu me manques énormément.

---

# Remerciements

---

En préambule à ce mémoire, j'adresse ces quelques mots pour remercier notre grand Dieu tout puissant pour exprimer ma reconnaissance envers sa grande générosité. Dieu m'a donné la volonté, le courage, la santé et la confiance durant toutes mes années d'études.

Je remercie monsieur BOUAGADA.D, qui, en tant que mon encadreur, était toujours à l'écoute tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour son aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

Mes plus sincères remerciements à monsieur OULD ALI.M d'avoir bien voulu présider mon jury et madame SAIDANI.M d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je tiens à remercier également mes professeurs et enseignants d'avoir été présent, de m'avoir énormément appris par la qualité de leurs savoir qu'ils m'ont prodigués.

Je voudrais remercier aussi les employeurs de l'université, mes ami(e)s et tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de mon mémoire.

Je souhaite remercier mes parents d'être si patients, si généreux et tellement merveilleux, ils ont toujours été la source de motivation et d'encouragement.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Définitions de Bases et Propriétés</b>	<b>5</b>
1.1 La transformée de Laplace . . . . .	5
1.1.1 Définition . . . . .	5
1.1.2 Définition . . . . .	5
1.1.3 Propriétés . . . . .	5
1.1.4 Transformée inverse de Laplace . . . . .	6
1.2 La Z-transformée . . . . .	6
1.2.1 Définition . . . . .	6
1.2.2 Propriétés . . . . .	7
1.2.3 Z-Transformée inverse . . . . .	8
1.3 Outils d'algèbre linéaire . . . . .	9
1.3.1 Polynôme caractéristique . . . . .	9
1.3.2 Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice	10
1.3.3 Définition : Matrice de permutation . . . . .	10
1.4 Systèmes linéaires singuliers unidimensionnel (1D) . . . . .	11
1.4.1 Définition . . . . .	11
1.4.2 Définition . . . . .	11
1.4.3 Remarque . . . . .	11
1.4.4 Remarque . . . . .	11
1.4.5 Faisceau régulier . . . . .	12
1.5 Théorème de Weierstrass : Cas d'un Faisceau Régulier . . . . .	12
<b>2 L-Z Transformée : Définitions et Propriétés</b>	<b>13</b>
2.1 Définition 1 . . . . .	13
2.2 Définition 2 . . . . .	13
2.3 Définition 3 . . . . .	14
2.4 Définition 4 . . . . .	14
2.5 Propriétés . . . . .	14
2.6 Définition : La distribution de Dirac . . . . .	15

2.6.1	Propriétés . . . . .	15
2.7	Solution du modèle régulier bidimensionnel (2D) continu-discret . . . . .	15
2.7.1	Théorème . . . . .	17
2.7.2	Exemple . . . . .	24
2.7.3	Remarque . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Stabilité des Modèles Unidimensionnels</b>	<b>28</b>
3.1	Lien entre différents types de stabilités . . . . .	28
3.2	Définitions . . . . .	29
3.3	Conditions de stabilité . . . . .	29
3.3.1	Cas continu . . . . .	29
3.3.2	Cas discret . . . . .	29
3.4	Conditions de Lyapunov . . . . .	30
3.4.1	Théorème 1 . . . . .	30
3.4.2	Théorème 2 . . . . .	30
3.4.3	Théorème 1 . . . . .	31
3.4.4	Théorème 2 . . . . .	31
3.5	Cas des modèles linéaires singuliers . . . . .	31
<b>4</b>	<b>LMI et LMI Toolbox Matlab</b>	<b>33</b>
4.1	Définition . . . . .	33
4.1.1	Remarques . . . . .	33
4.1.2	Exemple 1 . . . . .	34
4.1.3	Exemple 2 . . . . .	34
4.2	Différentes représentations . . . . .	34
4.3	Propriétés . . . . .	35
4.3.1	Remarque . . . . .	35
4.4	Applications . . . . .	36
4.4.1	Problème de faisabilité . . . . .	36
4.4.2	Optimisation . . . . .	36
4.4.3	Problème de la valeur généralisée . . . . .	36
4.4.4	La stabilité de Lyapunov . . . . .	36
4.5	LMI toolbox matlab . . . . .	37
4.5.1	Première étape . . . . .	37
4.5.2	Deuxième étape . . . . .	37
4.5.3	Spécification d'un système de LMI . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Tests de Stabilité des Systèmes Bidimensionnels Hybrides</b>	<b>40</b>
5.1	Définition de stabilité . . . . .	40
5.2	Théorème . . . . .	40
5.3	L'approche LMI pour la stabilité . . . . .	41
5.3.1	Théorème . . . . .	41
5.3.2	Théorème . . . . .	41
5.3.3	Exemple . . . . .	43

<b>Conclusion</b>	<b>46</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>47</b>

---

# INTRODUCTION

---

De manière générale, l'automatique est une discipline permettant l'étude des systèmes, et dont les domaines d'application sont très nombreux, tels que l'électricité, la mécanique, l'aérospatial, la robotique, la chimie, la biologie, ect... Comme indique le titre de ce mémoire, nous nous intéressons dans la suite à l'étude de stabilité qui occupe une place importante dans ce domaine.

Ce travail entre dans le cadre de l'analyse de stabilité d'une classe très importante qui représente les systèmes hybrides.

Un système hybride est décrit simultanément par une dynamique continue et une dynamique discrète.

Afin d'illustrer correctement ces systèmes, nous donnerons quelques exemples et nous étudierons leurs stabilité par la méthode de Lyapunov.

La stabilité au sens de Lyapunov signifie que la solution peut être gardée arbitrairement près de l'équilibre, si l'on prend une condition initiale suffisamment proche de ce dernier. La stabilité asymptotique signifie que non seulement l'équilibre est stable mais que de plus la solution d'une condition initiale appartenant au voisinage de l'équilibre, tend vers l'équilibre lorsque le temps tend vers l'infini. Enfin, nous rappelons de l'instabilité si tout simplement l'équilibre n'est pas stable.

Pour ce faire, nous allons utiliser un outil très important, dit Linear Matrix Inequality (LMI). En effet, il est apparu que la très grande majorité des problèmes d'analyse et de commande de systèmes Linéaire à Temps Invariants (LTI) pouvant être résolus efficacement et se formulent comme des problèmes d'optimisation convexe sous contraintes LMI.

Pour un nombre significatif de problèmes d'analyse et de commande LTI, la formulation sous forme de problèmes d'optimisation LMI pouvait être (parfois avantageusement) remplacée par des formulations utilisant par exemple des équations de Lyapunov ou de Riccati. Par contre, contrairement à l'optimisation LMI, ces outils alternatifs n'ont pas permis de formuler un large spectre de problèmes sortant du cadre LTI "classique".

Afin d'accomplir au mieux cette étude, le mémoire est structuré en cinq chapitres en plus de l'introduction et de la conclusion générale.

- Dans le premier chapitre, nous donnerons quelques définitions de bases et propriétés, notamment de la transformée de Laplace et la transformée en  $Z$ .
- Pour ensuite s'intéresser à la transformée bidimensionnelle des systèmes mixtes continus-discret.
- La partie qui succède c'est un chapitre traitons le problème de la stabilité. Des conditions nécessaires et suffisantes concernant la stabilité des systèmes unidimensionnels.
- Dans le quatrième chapitre, des conditions LMIs seront énoncées avec des exemples d'application sur le Simulink/Matlab.
- Enfin, nous terminerons par des tests de stabilité des systèmes bidimensionnels hybrides par l'approche LMI.

# Définitions de Bases et Propriétés

---

Dans cette section, nous proposons quelques définitions et propriétés concernant la transformée de Laplace et la Z-transformée pour le cas 1D ; pour ensuite définir et décrire toutes les propriétés de la transformée mixte qui est la L-Z transformée. Pour ce faire, nous nous basons sur les références suivantes [1], [2], [3] et [4].

## 1.1 La transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un outil important et très puissant pour résoudre les équations et les systèmes différentiels linéaires en temps continu.

### 1.1.1 Définition

Une fonction est dite Causale, si elle est nulle pour  $t < 0$ .

### 1.1.2 Définition

Soit  $f$  une fonction du temps  $t$  et causale, sa transformée de Laplace notée  $F(p)$  est donnée par,

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt} dt. \quad (1.1.1)$$

où,  $p$  est à priori un nombre complexe.

### 1.1.3 Propriétés

Pour tout  $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$  et pour  $f, g$  deux fonctions causales, nous décrivons les propriétés importantes et utiles pour répondre à certains problèmes de résolution,

1. Linéarité :

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(p) + \beta G(p). \quad (1.1.2)$$



2. Dérivation :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0). \quad (1.1.3)$$

3. Intégration :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p}. \quad (1.1.4)$$

4. Retard temporelle :

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-p\tau} F(p). \quad (1.1.5)$$

5. Convolution :

$$\mathcal{L}[f(t).g(t)] = F(p).G(p). \quad (1.1.6)$$

6. Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t). \quad (1.1.7)$$

à condition que ces limites existent.

### 1.1.4 Transformée inverse de Laplace

La transformée inverse de Laplace notée  $f(t)$  dite aussi originale d'une fonction  $F(p)$  est définie par,

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{+\infty} F(p).e^{pt} dp, \quad (1.1.8)$$

où, le chemin d'intégration peut être choisi quelconque dans le plan complexe à condition de rester dans le domaine de convergence de  $F(p)$ .

## 1.2 La $Z$ -transformée

La  $Z$ -transformée est aussi un outil important et très puissant pour résoudre les équations et les systèmes différentielles linéaires mais en temps discret.

### 1.2.1 Définition

La transformée en  $Z$  d'une séquence  $x(n)$  est définie comme la série  $X(z)$ , calculée comme suit,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}, \quad (1.2.1)$$

où,  $z$  est une variable complexe. On appelle encore l'équation (1.2.1), la transformée directe car c'est la relation qui permet d'obtenir  $X(z)$  à partir de  $x(n)$ .

Cette transformation est qualifiée de bilatérale par opposition à unilatérale.

La transformée en  $Z$  unilatérale est définie par  $X_u(z)$ , calculée comme suit,

$$X_u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}. \quad (1.2.2)$$

**Remarques**

- Dans le cas de séquences causales, ces deux transformations sont les mêmes.
- Toute transformée en  $Z$  doit être accompagnée de la région pour laquelle elle converge. Pour déterminer la région de convergence (RC), on utilise le critère de Cauchy sur la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots, \quad (1.2.3)$$

qui converge si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{1/n} < 1. \quad (1.2.4)$$

Quelques propriétés importantes seront cependant données,

**1.2.2 Propriétés**

Pour tout  $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$  et  $x_1(n), x_2(n)$  deux séquences, nous avons,

1. Linéarité :

Si

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n),$$

alors,

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ax_1(n)z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} bx_2(n)z^{-n} \\ &= aX_1(z) + bX_2(z). \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

2. Décalage et transformée bilatérale :

Soit

$$y(n) = x(n - n_0),$$

la transformée en  $Z$  de  $y(n)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n - n_0)z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)z^{-(m+n_0)} \\ &= z^{-n_0} X(z). \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

3. Dérivation :

Comme,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n},$$

on a aussi

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-n)x(n)z^{-n-1},$$

et donc,

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx(n)z^{-n}. \quad (1.2.7)$$

De ce fait, il apparait que  $-z \frac{dX(z)}{dz}$  est la transformée de  $nx(n)$ .

#### 4. Convolution :

Cette propriété est une des plus importantes et justifie à elle seule l'usage qui est fait de la transformée en Z pour étudier les systèmes linéaires permanents en temps discret.

Si  $y(n)$  est obtenue par convolution de  $x(n)$  et  $g(n)$ , on a que :

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)g(n-m),$$

donc,

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)g(n-m)z^{-n} \\ &= \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)z^{-m} \right] \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n-m)z^{-(n-m)} \right] \\ &= X(z)G(z). \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

#### 5. Valeur initiale :

La transformée en Z,  $X(z)$  d'une séquence Causale  $x(n)$  est donnée par,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + \frac{x(1)}{z^1} + \frac{x(2)}{z^2} + \dots + \frac{x(n)}{z^n} + \dots, \quad (1.2.9)$$

donc,

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} X(z) = x(0), \quad (1.2.10)$$

cette propriété n'a de sens que pour des valeurs Causales.

### 1.2.3 Z-Transformée inverse

Pour inverser une transformée en Z, on peut s'aider utilement du théorème de Cauchy qui établie que :

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{l-1} dz = \begin{cases} 1 & \text{pour } l = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.2.11)$$

où,  $\Gamma$  est un contour qui entoure l'origine du plan complexe et parcouru dans le sens anti horlogique.

En reprenant la définition de la transformée en  $Z$  donnée par (1.2.1), en multipliant les deux membres par  $z^{l-1}$  et on intègre le long d'un contour entourant l'origine et appartenant au domaine de convergence, on trouve :

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} X(z)z^{l-1}dz &= \oint_{\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n)z^{-n+l-1}dz \\ &= x(n) \oint_{\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} z^{-n+l-1}dz, \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

où, l'inversion de l'intégrale de la somme est licite compte tenu du fait que l'on opère dans la zone de convergence de la transformée.

En utilisant le théorème de Cauchy, on a finalement,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} z^{-n+l-1}dz. \quad (1.2.13)$$

## 1.3 Outils d'algèbre linéaire

Dans cette petite section, nous proposons quelques outils d'algèbre linéaire qui sont très utiles dans notre travail. On va citer donc quelques notions.

### 1.3.1 Polynôme caractéristique

Soit  $\mathbb{k}$  un corps commutatif et  $n \in \mathbb{N}^*$  un entier non nul. On définit le polynôme caractéristique d'une matrice  $A \in M(\mathbb{k})$  comme le polynôme,

$$\chi_A = \det(XI_n - A), \quad (1.3.1)$$

tel que  $\chi_A$  annule  $A$ , i.e

$$\chi_A = 0. \quad (1.3.2)$$

#### Remarque

Attention au raisonnement naïf et faux évidemment qui consiste à dire, on remplace  $X$  par  $A$  dans la formule (1.3.1), ce qui donne,

$$\chi_A(A) = \det(AI_n - A) = \det(A - A) = 0,$$

donc, on écrit les choses proprement comme,

$$\chi_A(A) = [\det(XI_n - A)](A). \quad (1.3.3)$$

On calcule le déterminant dans l'anneau  $\mathbb{k}[x]$ , puis on évalue ce polynôme en la matrice  $A$  dans l'anneau  $M_n(\mathbb{k})$ .

### 1.3.2 Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice

Les opérations élémentaires sont d'un intérêt important et servant à répondre à de nombreux problèmes de contrôle en général.

Utiles pour la résolution des systèmes singuliers et même standards qu'ils soient unidimensionnels ou bidimensionnels.

Soit  $(A, +, \times)$  un anneaux euclidien, on prendra le plus souvent  $A = \mathbb{Z}$ . Soit aussi  $\mathbb{k}$  un corps commutatif.

#### Description des opérations élémentaires

Soient  $m, n \in \mathbb{N}^*$  et  $M$  une matrice à  $m$  lignes et  $n$  colonnes à coefficients dans  $A$ .

**Définition** On appelle opération élémentaire sur  $M$  toute opération de l'un des types suivants :

- En notant  $L_i$  la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $M$
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on ajoute à la  $L_i$  la  $j^{\text{ème}}$  ligne de  $M$  multipliée par  $\lambda$ .
- $L_i \leftarrow L_j$  et  $L_j \leftarrow L_i$ , permutation de deux lignes de  $M$ .

**Remarque** On peut effectuer des opérations similaires sur les colonnes (on note  $C_i$  la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $M$ ).

### 1.3.3 Définition : Matrice de permutation

Une matrice de permutation est une matrice carrée qui vérifie les propriétés suivantes :

- Les coefficients sont 0 et 1.
- Il n'y a qu'un seul 1 par ligne.
- Il n'y a qu'un seul 1 par colonne.

#### Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

#### Remarque

Toute opération élémentaire sur les lignes et les colonnes de  $M$  transforme  $M$  en une matrice équivalente.

## 1.4 Systèmes linéaires singuliers unidimensionnel (1D)

Nous rappelons brièvement dans cette section l'expression des trajectoires d'états et des réponses de systèmes linéaires singuliers en temps continu. Nous nous basons sur [5] et [7].

Considérons le système linéaire continu suivant,

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.4.1)$$

où,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie et  $E, A, B, C$  et  $D$  sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

### 1.4.1 Définition

Le système (1.4.1) est dit singulier si  $\det E = 0$ .

- Dans le cas contraire, c'est à dire si  $\det E \neq 0$ , il est dit standard.
- Si  $E = I_n$ , le système est aussi appelé standard (ou explicite).

### 1.4.2 Définition

Le système (1.4.1) est dit régulier si et seulement si  $\det(Es - A) \neq 0$  pour un certain  $s \in \mathbb{C}$ .

### 1.4.3 Remarque

si  $\det E \neq 0$ , alors multiplions la première équation du système (1.4.1) par  $E^{-1}$ , on obtient le système suivant,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.4.2)$$

qui est un système explicite.

Pour un système singulier, on supposera pour la suite que  $\det(Es - A) \neq 0$  pour un certain  $s \in \mathbb{C}$ . Dans ce cas on peut écrire la matrice résolvante comme unique série de Laurent autour de l'infini [7],

$$(Es - A)^{-1} = s^{-1} \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i s^{-i}, \quad (1.4.3)$$

où,  $\mu$  est appelé indice de nilpotence du faisceau  $(Es - A)$ , il est décrit par,

$$\mu = \text{rg}E - \deg[\det(Es - A)] + 1, \quad (1.4.4)$$

et  $\phi_i$  est appelée la matrice fondamentale de (1.4.2).

### 1.4.4 Remarque

Ces propriétés restent vraies pour le cas discret et la matrice résolvante s'écrit comme,

$$(Ez - A)^{-1} = z^{-1} \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i z^{-i}. \quad (1.4.5)$$

### 1.4.5 Faisceau régulier

Un faisceau de matrices est une matrice dont les coefficients sont des polynômes de degré 1, il est dit régulier si :

1.  $E$  et  $A$  sont des matrices carrées de même ordre.
2. Le déterminant  $|Es - A|$  ne s'annule pas identiquement.

Notons que dans le cas où le déterminant  $|Es - A| = 0$ , le faisceau est dit singulier.

## 1.5 Théorème de Weierstrass : Cas d'un Faisceau Régulier

Tout faisceau régulier  $A + \lambda B$  peut être réduit en une forme quasi-diagonale canonique (strictement équivalente) :

$$\begin{bmatrix} J + \lambda I & & & \\ & N^{\mu_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & N^{\mu_s} \end{bmatrix}$$

où la forme normale du premier bloc diagonal  $J + \lambda I$  est déterminée d'une façon unique par les diviseurs élémentaires de  $A + \lambda B$  et les  $s$  derniers blocs diagonaux correspondent aux diviseurs élémentaires infinis  $\mu_1, \dots, \mu_s$ .

Avec,

$$\begin{aligned} N^{\mu_1} &= I^{\mu_1} + \mu_1 H = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & 1 & & \dots \\ \dots & & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 1 & \dots \\ \dots & & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

# L-Z Transformée : Définitions et Propriétés

---

Dans ce chapitre on s'intéresse à la transformée bidimensionnel qui fera l'objet nécessaire pour l'étude de la solvabilité d'un système à temps continu-discret dit "Hybride" ou "Mixte". Nous nous basons sur les références [6] et [3] pour les signaux et systèmes 2-D continus-discrets, on établie les définitions suivantes :

## 2.1 Définition 1

On définit la transformée de Laplace 1-D d'un signal 2-D continu-discret  $x(t, n)$  de la première variable comme suit,

$$X(s, n) = \int_0^{+\infty} x(t, n) \cdot e^{-st} dt, \quad (2.1.1)$$

et on la note,

$$X(s, n) = \mathcal{L}_t [x(t, n)]. \quad (2.1.2)$$

On définit de même la transformée en  $Z$  de la deuxième variable comme suit,

$$X(t, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(t, n) z^n, \quad (2.1.3)$$

et on la note,

$$X(t, z) = z_n [x(t, n)]. \quad (2.1.4)$$

## 2.2 Définition 2

Les transformées inverses de Laplace ainsi que la  $Z$ -transformée inverse sont définies respectivement par,

$$x(t, n) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(s, n) e^{st} ds, \quad (2.2.1)$$



où,  $\sigma > 0$  un nombre réel qui est plus grand que la partie réelle de n'importe quelle singularité de  $X(s, n)$ .

Et,

$$x(t, n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Omega} X(t, z) z^{n-1} dz. \quad (2.2.2)$$

On les note

$$x(t, n) = \mathcal{L}_t^{-1}[X(s, n)], \quad (2.2.3)$$

et,

$$x(t, n) = z_n^{-1}[X(t, z)]. \quad (2.2.4)$$

## 2.3 Définition 3

La 2-D Laplace- $Z$  transformée d'un signal 2-D continu-discret  $x(t, n)$  est définie par,

$$X(s, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x(t, n) e^{-st} dt z^{-n}, \quad (2.3.1)$$

on la note

$$X(s, z) = \mathcal{L}_t z_n [x(t, n)]. \quad (2.3.2)$$

## 2.4 Définition 4

La 2-D Laplace- $Z$  transformée inverse d'un signal 2-D continu-discret  $x(t, n)$  est définie par,

$$x(t, n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Omega} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x(t, n) e^{-st} z^{n-1} ds dz, \quad (2.4.1)$$

et on la note

$$x(t, n) = \mathcal{L}_t^{-1} z_n^{-1} [X(s, z)]. \quad (2.4.2)$$

Nous exposons par la suite les propriétés suivantes servant à résoudre les équations différentielles linéaires bidimensionnelles.

## 2.5 Propriétés

Si en 2-D, la transformée de Laplace et en  $Z$  les signaux continus-discrets  $x_1(t, n)$  et  $x_2(t, n)$  sont  $X_1(s, z)$  et  $X_2(s, z)$ , alors

1.

$$\mathcal{L}_t z_n [ax_1(t, n) + bx_2(t, n)] = aX_1(s, z) + bX_2(s, z). \quad (2.5.1)$$

2.

$$\mathcal{L}_t z_n [x(t, n)] = z_n \mathcal{L}_t [x(t, n)]. \quad (2.5.2)$$

3.

$$(\mathcal{L}_t z_n)^{-1} [X(s, z)] = (z_n \mathcal{L}_t)^{-1} [X(s, z)]. \quad (2.5.3)$$

4.

$$\mathcal{L}_t z_n [\dot{x}(t, n)] = sX(s, z) - X(0, z). \quad (2.5.4)$$

5. Si  $x(t, 0) \neq 0$ ,

$$\mathcal{L}_t z_n [(t, n + 1)] = zX(s, z) - X(s, 0). \quad (2.5.5)$$

6.

$$\mathcal{L}_t z_n [\dot{x}(t, n + 1)] = szX(s, z) - sX(s, 0) - zX(0, z) + x(0, 0). \quad (2.5.6)$$

Nous donnons une définition de la fonction de Dirac qui nous sera utile par la suite,

## 2.6 Définition : La distribution de Dirac

La distribution de Dirac, appelée aussi impulsion et notée  $\delta(t)$ , est la modélisation mathématique d'un signal d'amplitude infinie sur une durée "infiniment brève" à la date 0 et vérifiant,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (2.6.1)$$

### 2.6.1 Propriétés

–  $\delta(t)$  vérifie également pour toute fonction  $\varphi$  définie et continue au voisinage de 0,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot \varphi(t) dt = \varphi(0) \quad (2.6.2)$$

–  $\delta(t)$  permet de définir une dérivée de l'échelon unitaire  $u(t)$ .

## 2.7 Solution du modèle régulier bidimensionnel (2D) continu-discret

Une nouvelle classe de systèmes linéaires singuliers continu-discret à deux dimensions est introduite par T.Kaczorek, Fornasini-Marchesini, J.Klamka, J.Kurek [9] ainsi que d'autres scientifiques. Dans les systèmes à deux dimensions continus-discrets, l'une des variables indépendante est continue, la seconde est discrète. Ces systèmes trouvent leurs applications en biomathématique, en économie et en électronique.

Nous considérons alors le système linéaire à deux dimensions continu-discret suivant,

$$\begin{cases} E\dot{x}(t, k + 1) = A_1\dot{x}(t, k) + A_2x(t, k + 1) + A_0x(t, k) + B_0u(t, k) + B_1\dot{u}(t, k) + B_2u(t, k + 1) \\ y(t, k) = Cx(t, k) + Du(t, k) \end{cases} \quad (2.7.1)$$

où,  $\dot{x} = \frac{\partial x(t,k)}{\partial t}$ ,  $x(t,k) \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur d'état,  $u(t,k) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée et  $y(t,k) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie du système, et où,  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ .

Le polynôme caractéristique du modèle (2.7.1) est représenté par :

$$\det[Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z] = \sum_{i=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{n_2} d_{i,k} s^i z^k. \quad (2.7.2)$$

On suppose que le système est régulier, i.e,  $\det[Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z] \neq 0$  pour  $(s, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  d'où,

$$[Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z]^{-1} = \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)}, \quad (2.7.3)$$

où,  $\mu_1, \mu_2$  sont les indices de nilpotence,  $T_{i,k}$  sont les matrices de transition définies par, [8] et [10]

$$ET_{i,k} = \begin{cases} A_0 T_{-1,-1} + A_1 T_{-1,-1} + A_2 T_{-1,-1} \text{ pour } i = k = 0 \\ A_0 T_{i,k} + A_1 T_{i,k} + A_2 T_{i,k} \text{ pour } i \neq 0 \text{ et/ou } k \neq 0 \end{cases} \quad (2.7.4)$$

avec,

$$T_{i,k} = 0 \text{ pour } i < -\mu_1 \text{ et/ou } k < -\mu_2. \quad (2.7.5)$$

Ce modèle a pour fonction de transfert,

$$H(s, z) = C[Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z]^{-1} B + D. \quad (2.7.6)$$

### 2.7.1 Théorème

La solution du modèle (2.7.1) avec conditions initiales est donnée par,

$$\begin{aligned}
x(t, n) = & \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} E x(t, 0) \delta^i + \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} E \int_0^t \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} x(t-\tau, 0) d\tau \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i, n-k} E x(0, k) \delta^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-k} E x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{i=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} A_1 x(0, k) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-k-1} A_1 x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
& - \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} A_2 \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} x(t-\tau, 0) d\tau - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} A_2 x(t, 0) \delta^{i-1} \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i, n-k} B_0 u(t, k) \delta^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} B_0 \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} u(t-\tau, 0) d\tau \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} B_1 u(t, k) \delta^i + \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-k-1} B_1 \int_0^t \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} u(t-\tau, k) d\tau \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} B_1 u(0, k) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} B_1 u(0, k) \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i, n-k} B_2 u(t, k) \delta^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i, n-k} B_2 \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} u(t-\tau, k) d\tau \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} B_2 u(t, 0) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} B_2 \int_0^t \frac{\tau}{i!} u(t-\tau, 0) d\tau \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} E x(0, 0) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} E x(0, 0) \frac{t^i}{i!}
\end{aligned} \tag{2.7.7}$$

et la sortie est,

$$\begin{aligned}
y(t, n) = & C \left[ \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} E x(t, 0) \delta^i + \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} E \int_0^t \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} x(t-\tau, 0) d\tau \right. \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i, n-k} E x(0, k) \delta^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-k} E x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{i=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} A_1 x(0, k) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-k-1} A_1 x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
& - \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} A_2 \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} x(t-\tau, 0) d\tau - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} A_2 x(t, 0) \delta^{i-1} \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i, n-k} B_0 u(t, k) \delta^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} B_0 \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} u(t-\tau, 0) d\tau \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} B_1 u(t, k) \delta^i + \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-k-1} B_1 \int_0^t \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} u(t-\tau, k) d\tau \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} B_1 u(0, k) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} B_1 u(0, k) \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i, n-k} B_2 u(t, k) \delta^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i, n-k} B_2 \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} u(t-\tau, k) d\tau \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} B_2 u(t, 0) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} B_2 \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} u(t-\tau, 0) d\tau \\
& \left. - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} E x(0, 0) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} E x(0, 0) \frac{t^i}{i!} \right] + Du(t, n)
\end{aligned} \tag{2.7.8}$$

### Preuve

Appliquons la transformée de Laplace à la première équation du système, on obtient,

$$\begin{aligned}
EsX(s, k+1) - EX(0, k+1) &= A_0X(s, k) + A_1sX(s, k) - A_1X(0, k) \\
&+ A_2X(s, k+1) + B_0U(s, k) + B_1sU(s, k) \\
&- B_1U(0, k) + B_2U(s, k+1)
\end{aligned}$$

Puis on applique la transformée en  $Z$ ,

$$\begin{aligned}
EsZ(s, z) - EsX(s, 0) - EzX(0, z) + EX(0, 0) &= A_0X(s, z) + A_1sX(s, z) - A_1X(0, z) \\
&+ A_2zX(s, z) - A_2X(s, 0) + B_0U(s, z) \\
&+ B_1sU(s, z) - B_1U(0, z) + B_2zU(s, z) \\
&- B_2U(s, 0)
\end{aligned}$$

Etant donnée que  $[Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z]^{-1}$  existe pour  $(s, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  alors,

$$X(s, z) = [Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z]^{-1} \begin{bmatrix} EsX(s, 0) + EzX(0, z) - A_1X(0, z) - A_2X(s, 0) \\ + B_0U(s, z) + B_1sU(s, z) - B_1U(0, z) + B_2zU(s, z) \\ - B_2U(s, 0) - EX(0, 0) \end{bmatrix}$$

Par suite on remplace  $[Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z]^{-1}$  par sa définition,

$$\begin{aligned} X(s, z) &= \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)} \begin{bmatrix} EsX(s, 0) + EzX(0, z) - A_1X(0, z) - A_2X(s, 0) \\ + B_0U(s, z) + B_1sU(s, z) - B_1U(0, z) + B_2zU(s, z) \\ - B_2U(s, 0) - EX(0, 0) \end{bmatrix} \\ &\quad \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-i} z^{-(k+1)} EX(s, 0) + \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-k} EX(0, z) \\ &\quad - \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)} A_1X(0, z) - \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)} A_2X(s, 0) \\ &= + \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)} B_0U(s, z) + \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-i} z^{-(k+1)} B_1U(s, z) \\ &\quad - \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)} B_1U(0, z) + \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-k} B_2U(s, z) \\ &\quad - \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)} B_2U(s, 0) - \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)} EX(0, 0) \end{aligned}$$

L'inverse de la transformée en  $Z$  donne,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} [X(s, z)z^{n-1}]dz &= \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-i} \frac{1}{2\pi j} \oint z^{n-k-1-1} EX(s, 0)dz \\
&+ \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} \frac{1}{2\pi j} \oint z^{n-k-1} EX(0, z)dz \\
&- \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} \frac{1}{2\pi j} \oint z^{n-k-1-1} A_1 X(0, z)dz \\
&- \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} \frac{1}{2\pi j} \oint z^{n-k-1-1} A_2 X(s, 0)dz \\
&+ \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} \frac{1}{2\pi j} \oint z^{n-k-1-1} B_0 U(s, z)dz \\
&+ \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-i} \frac{1}{2\pi j} \oint z^{n-k-1-1} B_1 U(s, z)dz \\
&- \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} \frac{1}{2\pi j} \oint z^{n-k-1-1} B_1 U(0, z)dz \\
&+ \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} \frac{1}{2\pi j} \oint z^{n-k-1} B_2 U(s, z)dz \\
&- \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} \frac{1}{2\pi j} \oint z^{n-k-1-1} B_2 U(s, 0)dz \\
&- \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=-\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} \frac{1}{2\pi j} \oint z^{n-k-1-1} EX(0, 0)dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X(s, n) = & \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} T_{i,n-1} s^{-i} EX(s, 0) + \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i,n-k} s^{-(i+1)} EX(0, k) \\
& - \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} s^{-(i+1)} A_1 X(0, k) - \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} T_{i,n-1} s^{-(i+1)} A_2 X(s, 0) \\
& + \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} s^{-(i+1)} B_0 U(s, k) + \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} s^{-i} B_1 U(s, k) \\
& - \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,k} s^{-(i+1)} B_1 U(0, k) + \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i,n-k} s^{-(i+1)} B_2 U(s, k) \\
& - \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} T_{i,n-1} s^{-(i+1)} B_2 U(s, 0) - \sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} T_{i,n-1} s^{-(i+1)} EX(0, 0)
\end{aligned}$$

Par la transformée de Laplace inverse, il vient,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[X(s, n)] = & \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} T_{i,n-1} s^{-i} EX(s, 0)\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i,n-k} s^{-(i+1)} EX(0, k)\right] \\
& - \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} s^{-(i+1)} A_1 X(0, k)\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} T_{i,n-1} s^{-(i+1)} A_2 X(s, 0)\right] \\
& + \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} s^{-(i+1)} B_0 U(s, k)\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,n-k-1} s^{-i} B_1 U(s, k)\right] \\
& - \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i,k} s^{-(i+1)} B_1 U(0, k)\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i,n-k} s^{-(i+1)} B_2 U(s, k)\right] \\
& - \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} T_{i,n-1} s^{-(i+1)} B_2 U(s, 0)\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=-\mu_1}^{+\infty} T_{i,n-1} s^{-(i+1)} EX(0, 0)\right]
\end{aligned}$$

Par les propriétés de la transformée de Laplace et en particulier du produit de convolution,



on a,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[X(s, n)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} s^i EX(s, 0)\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} s^{-i} EX(s, 0)\right] \\
&+ \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i, n-k} s^{i-1} EX(0, k)\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i, n-k} s^{-(i+1)} EX(0, k)\right] \\
&- \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} s^{i-1} A_1 X(0, k)\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} s^{-(i+1)} A_1 X(0, k)\right] \\
&- \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} s^{i-1} A_2 X(s, 0)\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} s^{-(i+1)} A_2 X(s, 0)\right] \\
&+ \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} s^{i-1} B_0 U(s, k)\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} s^{-(i+1)} B_0 U(s, k)\right] \\
&+ \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} s^i B_1 U(s, k)\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} s^{-i} B_1 U(s, k)\right] \\
&- \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} s^{i-1} B_1 U(0, k)\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} s^{-(i+1)} B_1 U(0, k)\right] \\
&+ \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i, n-k} s^{i-1} B_2 U(s, k)\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i, n-k} s^{-(i+1)} B_2 U(s, k)\right] \\
&- \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} s^{i-1} B_2 U(s, 0)\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} s^{-(i+1)} B_2 U(s, 0)\right] \\
&- \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} s^{i-1} EX(0, 0)\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} s^{-(i+1)} EX(0, 0)\right]
\end{aligned}$$

D'où la solution,

$$\begin{aligned}
x(t, n) = & \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} E x(t, 0) \delta^i + \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} E \int_0^t \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} x(t-\tau, 0) d\tau \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i, n-k} E x(0, k) \delta^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i, n-k} E x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} A_1 x(0, k) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} A_1 x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} A_2 X(t, 0) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} A_2 \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} x(t-\tau, 0) d\tau \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} B_0 u(t, k) \delta^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} B_0 \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} u(t-\tau, 0) d\tau \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} B_1 u(t, k) \delta^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} B_1 \int_0^t \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} u(t-\tau, 0) d\tau \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} B_1 u(0, k) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} B_1 u(0, k) \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i, n-k} B_2 u(t, k) \delta^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i, n-k} B_2 \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} u(t-\tau, 0) d\tau \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} B_2 u(t, 0) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} B_2 \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} u(t-\tau, 0) d\tau \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} E x(0, 0) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} E x(0, 0) \frac{t^i}{i!}
\end{aligned}$$

et la sortie est de la forme,

$$\begin{aligned}
y(t, n) = & C \left[ \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} E x(t, 0) \delta^i + \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} E \int_0^t \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} x(t-\tau, 0) d\tau \right. \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i, n-k} E x(0, k) \delta^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i, n-k} E x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} A_1 x(0, k) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} A_1 x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} A_2 X(t, 0) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} A_2 \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} x(t-\tau, 0) d\tau \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} B_0 u(t, k) \delta^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} B_0 \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} u(t-\tau, 0) d\tau \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} B_1 u(s, k) \delta^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} B_1 \int_0^t \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} u(t-\tau, 0) d\tau \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} B_1 u(0, k) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} B_1 u(0, k) \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i, n-k} B_2 u(t, k) \delta^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i, n-k} B_2 \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} u(t-\tau, 0) d\tau \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} B_2 u(t, 0) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} B_2 \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} u(t-\tau, 0) d\tau \\
& \left. - \sum_{i=0}^{\mu_1} T_{-i, n-1} E x(0, 0) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} T_{i, n-1} E x(0, 0) \frac{t^i}{i!} \right] + D u(t, n)
\end{aligned}$$

Pour illustrer cela, un exemple sera alors donné.

### 2.7.2 Exemple

$$\begin{aligned}
E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B_0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1], \quad D = 1
\end{aligned}$$

Dans ce cas on a  $n = 3$ ,  $m = 1$ ,  $p = 1$ .

On a,

$$\begin{aligned} [Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z] &= \begin{bmatrix} sz & 0 & 0 \\ 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} sz & 1 & -z \\ 0 & sz & 0 \\ -s & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \det[Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z] &= \begin{vmatrix} sz & 1 & -z \\ 0 & sz & 0 \\ -s & 1 & 0 \end{vmatrix} = -s(zsz) = -s^2 z^2 \\ \text{adj}[Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z] &= \begin{bmatrix} 0 & -z & sz^2 \\ 0 & -sz & 0 \\ s^2 z & -s - sz & s^2 z^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} [Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z]^{-1} &= \frac{-1}{s^2 z^2} \begin{bmatrix} 0 & -z & sz^2 \\ 0 & -sz & 0 \\ s^2 z & -s - sz & s^2 z^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & s^2 z^{-1} & -s^{-1} \\ 0 & s^{-1} z^{-1} & 0 \\ -z^{-1} & s^{-1} z^{-2} + s^{-1} z^{-1} & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les indices de nilpotence sont  $\mu_1 = 1$  et  $\mu_2 = 1$ .

En appliquant la relation (2.7.2), on obtient,

$$\begin{aligned} [Es z - A_0 - A_1 s - A_2 z]^{-1} &= \sum_{i=\mu_1}^{+\infty} \sum_{k=\mu_2}^{+\infty} T_{i,k} s^{-(i+1)} z^{-(k+1)} \\ &= T_{-1,-1} + T_{-1,0} z^{-1} + T_{-1,1} z^{-2} + T_{0,-1} s^{-1} + T_{0,0} s^{-1} z^{-1} \\ &\quad + T_{0,1} s^{-1} z^{-2} + T_{1,-1} s^{-2} + T_{1,0} s^{-2} z^{-1} + T_{1,1} s^{-2} z^{-2} \end{aligned}$$

Les matrices de transitions sont,

$$\begin{aligned} T_{-1,-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_{-1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{0,-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ T_{0,0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{0,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{1,0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi la solution du système est,

$$\begin{aligned}
x(t, n) = & \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i, n-k} Ex(0, k) \delta^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i, n-k} Ex(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} A_1 x(0, k) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} A_1 x(0, k) \frac{t^i}{i!} \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} B_0 u(t, k) \delta^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} B_0 \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} u(t-\tau, 0) d\tau \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} B_1 u(s, k) \delta^i + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} B_1 \int_0^t \frac{\tau^{i-1}}{(i-1)!} u(t-\tau, 0) d\tau \\
& - \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{-i, n-k-1} B_1 u(0, k) \delta^{i-1} - \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2-1} T_{i, n-k-1} B_1 u(0, k) \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \\
& + \sum_{i=0}^{\mu_1} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{-i, n-k} B_2 u(t, k) \delta^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+\mu_2} T_{i, n-k} B_2 \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} u(t-\tau, 0) d\tau
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
x(t, n) = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x(0, n+1) \delta^{-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(0, n+1)t - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\lambda} & 0 & 0 \end{bmatrix} x(0, n) \delta^{-1} \\
& - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(0, n) \delta^{-2} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t, n) \delta^{-2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} u(t-\tau, 0) d\tau \\
& + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t, n) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(0, n-1) \delta^{-1} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t, n) \delta^{-1}
\end{aligned}$$

et la sortie est,

$$\begin{aligned}
y(t, n) = & C \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x(0, n+1) \delta^{-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(0, n+1)t - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\lambda} & 0 & 0 \end{bmatrix} x(0, n) \delta^{-1} \\
& - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(0, n) \delta^{-2} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t, n) \delta^{-2} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} u(t-\tau, 0) d\tau \\
& + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t, n) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(0, n-1) \delta^{-1} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t, n) \delta^{-1} + Du(t, n) \\
= & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x(0, n+1) \delta^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(0, n+1)t - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(0, n) \delta^{-2} \\
& - \int_0^t \frac{\tau^i}{i!} u(t-\tau, 0) d\tau + 3u(t, n) - 2u(0, n-1) \delta^{-1}
\end{aligned}$$

### 2.7.3 Remarque

On a vu que si  $\det E \neq 0$  on utilise les propriétés de la L-Z transformée. Maintenant si  $\det E = 0$ , que doit-on faire ?

Réponse : On a plusieurs possibilités, autre que

- L'application de la L-Z transformée comme exposé ci-dessus.
- Utilisation de l'inverse généralisé (Drazin) [11] ou Moore Penrose.
- Ou l'application du théorème fondamental de "Weierstrass", (voir chapitre 1).

# Stabilité des Modèles Unidimensionnels

---

Dans ce chapitre des conditions nécessaires et suffisantes concernant la stabilité des systèmes unidimensionnels seront énoncées. Pour ce faire nous nous basons sur [12].

Par la transformée de Laplace, on peut trouver la solution du système en état d'équilibre non modifié lorsque le système est abandonné à lui même (*i.e*  $u = 0$ ).

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.0.1)$$

où,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  
qui est donnée par,

$$\begin{cases} x(t) = \phi(t)x_0 \\ y(t) = C\phi(t)x_0 \end{cases} \quad (3.0.2)$$

où,  $x_0$  un état initial et  $\phi(t)$  la matrice de transition, elle est donnée par,

$$\phi(t) = e^{At}. \quad (3.0.3)$$

On peut de même trouver la solution  $x(t)$  pour les systèmes à temps discret mais en appliquant la transformée en  $Z$ , où la matrice de transition est donnée comme suit,

$$\phi(t) = A^t. \quad (3.0.4)$$

## 3.1 Lien entre différents types de stabilités

Pour des raisons pratiques on choisit la stabilité asymptotique et non autres.

## 3.2 Définitions

1. Un système est asymptotiquement stable si pour tout  $x_0$  on a,

$$\|\phi(t)x_0\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0. \quad (3.2.1)$$

2. Un système est simplement stable si pour tout  $x_0$  il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $t$

$$\|\phi(t)x_0\| \preceq c. \quad (3.2.2)$$

3. Un système est faiblement instable s'il n'est pas stable et si pour tout  $x_0$ ,  $\exists c > 0$  et  $n > 0$  tel que pour tout  $t$

$$\|\phi(t)x_0\| \preceq ct^n. \quad (3.2.3)$$

4. Un système est fortement instable s'il est ni stable ni faiblement instable.

## 3.3 Conditions de stabilité

### 3.3.1 Cas continu

Pour le cas des systèmes linéaires continus, nous énonçons les conditions suivantes :

- Le système est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$  satisfont

$$\operatorname{Re} \lambda_i \prec 0. \quad (3.3.1)$$

- Le système est stable si

$$\operatorname{Re} \lambda_i \preceq 0. \quad (3.3.2)$$

- Le système est fortement instable si

$$\operatorname{Re} \lambda_i \succ 0, \quad (3.3.3)$$

pour au moins une valeur propre  $\lambda_i$ .

### Remarque

Notons que si le système possède une matrice diagonalisable  $A$ , il ne peut pas être faiblement instable.

### 3.3.2 Cas discret

Nous adaptons dans ce qui suit les mêmes tests de stabilité pour le cas des systèmes à temps discrets.

- Le système est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres  $z_i$  de  $A$  satisfont

$$|z_i| \prec 1. \quad (3.3.4)$$

- Le système est stable si

$$|z_i| \preceq 1. \quad (3.3.5)$$

- Le système est fortement instable si

$$|z_i| \succ 1, \quad (3.3.6)$$

pour au moins une valeur propre  $z_i$ .



## 3.4 Conditions de Lyapunov

Dans cette section on va énoncer les conditions de Lyapunov servant à étudier la stabilité des différents systèmes. On va s'intéresser tout d'abord au système linéaire continu suivant,

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.4.1)$$

par la méthode de Lyapunov.

La fonction candidate de Lyapunov est donnée par,

$$v(x) = x^t P x, \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad P^t = P \quad (3.4.2)$$

donc,

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= \dot{x}^t P x + x^t P \dot{x} \\ &= x^t A^t P x + x^t P A x \\ &= x^t (A^t P + P A) x \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

posons,

$$C = A^t P + P A, \quad C = C^t \quad (3.4.4)$$

### 3.4.1 Théorème 1

1. L'équilibre  $x = 0$  du système est stable s'il existe une matrice  $P$  réelle symétrique de  $(n \times n)$  définie positive telle que la matrice  $C$  est semi définie négative.
2. L'équilibre  $x = 0$  du système est exponentiellement stable s'il existe une matrice  $P$  réelle symétrique de  $(n \times n)$  définie positive telle que la matrice  $C$  est définie négative.
3. L'équilibre  $x = 0$  du système est dit instable s'il existe une matrice  $P$  réelle symétrique de  $(n \times n)$  définie négative ou indéfinie telle que la matrice  $C$  est définie négative.

### 3.4.2 Théorème 2

Supposons que toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  possèdent des parties réelles non nulles. Si toutes les parties réelles de valeurs propres de  $A$  sont négatives, ou si au moins une des valeurs propres de  $A$  a une partie réelle positive, alors il existe une fonction de Lyapunov quadratique,

$$v(x) = x^t P x, \quad P = P^t \quad (3.4.5)$$

dont la dérivée le long des solutions du système est définie (c-à-d qu'elle est soit définie négative ou définie positive).

Une autre adaptation au cas discret est comme suit :

Considérons le système LTI à temps discret suivant,

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (3.4.6)$$

Si on choisit la fonction de Lyapunov telle que,

$$v(x) = x^t P x, \quad P = P^t \quad (3.4.7)$$

nous évaluons la première différence de  $v$ , on trouve,

$$\begin{aligned} Dv(x(k)) &= v(x(k+1)) - v(x(k)) \\ &= x(k+1)^t P x(k+1) - x(k)^t P x(k) \\ &= x(k)^t A^t P A x(k) - x(k)^t P x(k) \\ &= x(k)^t (A^t P A - P) x(k) \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$Dv(x) = x^t (A^t P A - P) x = x^t C x \quad (3.4.8)$$

où,

$$A^t P A - P = C, \quad C = C^t \quad (3.4.9)$$

### 3.4.3 Théorème 1

1. L'équilibre  $x = 0$  est stable s'il existe une matrice  $P$  réelle symétrique définie positive telle que la matrice  $C$  donnée en (3.4.4) est semi définie négative.
2. L'équilibre  $x = 0$  du système est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $P$  réelle, symétrique et définie positive telle que  $C$  donnée en (3.4.4) est définie négative.
3. L'équilibre  $x = 0$  est instable s'il existe une matrice  $P$  réelle, symétrique de  $(n \times n)$  définie négative ou indéfinie telle que  $C$  donnée en (3.4.4) est définie négative.

### 3.4.4 Théorème 2

Si  $A$  est stable (toutes ses valeurs propres sont dans le cercle unité du plan complexe), alors l'équilibre  $x = 0$  du système (3.4.6) est asymptotiquement stable.

Si au moins une des valeurs propres de  $A$  est en dehors du cercle unité du plan complexe et aucune valeur propre est sur le cercle, alors l'équilibre  $x = 0$  du système (3.4.6) est instable.

## 3.5 Cas des modèles linéaires singuliers

Maintenant on va s'intéresser à l'étude de la stabilité du système singulier suivant,

$$E\dot{x} = Ax, \quad A, E \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.5.1)$$

par la méthode de Lyapunov.

Le polynôme caractéristique de (3.5.1) est représenté par,

$$B(s) = \det[Es - A]. \quad (3.5.2)$$

La fonction candidate de Lyapunov est donnée par,

$$v(x) = x^t E^t P x, \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad E^t P = P^t E \quad (3.5.3)$$

donc,

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= (E\dot{x})^t P (Ex) + (Ex)^t P (E\dot{x}) \\ &= x^t A^t P E x + x^t E^t P A x \\ &= x^t (A^t P E + E^t P A) x \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

posons,

$$C = A^t P E + E^t P A, \quad C = C^t \quad (3.5.5)$$

et les théorèmes vus ci-dessus restent vrais dans ce cas.

# LMI et LMI Toolbox Matlab

---

Le terme IML (Inégalité Matricielle Linéaire), (LMI : Linear Matrix Inequality en anglais) est maintenant couramment employé dans la littérature liée à l'analyse et à la commande des systèmes, voir [16], [13]. Nous rappelons néanmoins quelques notions IMLs.

## 4.1 Définition

Une inégalité matricielle linéaire (IML) est une expression de la forme

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \succ 0, \quad (4.1.1)$$

où,  $x = (x_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$  est un vecteur de nombres réels (variables de décisions) et  $F_i$ ,  $i = 0, \dots, m$  sont les matrices réelles symétriques, i.e :  $F_i = F_i^t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, m$ .

### 4.1.1 Remarques

– L'inégalité " $\succ$ " dans (4.1.1) signifie "définie positive", c-à-d :

$$u^t F(x) u \succ 0 \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}_*^n$$

ce qui est équivalent à ce que la plus petite valeur propre de  $F(x)$  est positive.

–  $F$  est une fonction affine d'un espace vectoriel de dimension fini  $V$  vers un ensemble

$$S^n := \{M/M = M^t \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\}_{n \succ 0}$$

de matrices réelles symétriques.

### 4.1.2 Exemple 1

$$\begin{bmatrix} x_1 - 3 & x_1 + x_2 & -1 \\ x_1 + x_2 & x_2 - 4 & 0 \\ -1 & 0 & x_1 \end{bmatrix} \succ 0$$

est une IML à deux variables. On peut alors l'écrire comme des IMLs

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \succ 0$$

### 4.1.3 Exemple 2

Des IMLs simples dans le plan

$$\begin{aligned} - y \succ x &\Rightarrow y - x \succ 0 \\ - y \succ x^2 &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & y \end{bmatrix} \succ 0 \\ - x^2 + y^2 \succ 1 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix} \succ 0 \end{aligned}$$

On note à ce propos que le qualificatif d'affine plutôt que linéaire serait sans doute approprié.

## 4.2 Différentes représentations

- Dans la plupart des applications, les LMIs ne se posent naturellement pas dans la forme canonique (4.1.1), mais plutôt sous la forme,

$$L(X_1, \dots, X_m) \prec R(X_1, \dots, X_m), \quad (4.2.1)$$

où,  $L(\cdot)$  et  $R(\cdot)$  sont des fonctions affines des variables de certaines matrices structurées  $X_1, \dots, X_m$ , par exemple

$$AX + XA' \prec 0 \quad (4.2.2)$$

est une LMI.

Où,  $X$  est une variable de décision. LMI (4.2.2) peut être représentée sous la forme (4.1.1) en utilisant les propriétés algébriques.

- Certains auteurs préfèrent utiliser

$$F(x) = x_1 F_1 + \dots + x_n F_n \succ -F_0. \quad (4.2.3)$$

Notons que le côté gauche de (4.1.1) est affine tandis qu'ici est linéaire en  $x$ .

→ Linéarité : La fonction  $f(x)$  est linéaire en  $x$  si

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2),$$

pour tout scalaire  $\alpha$  et  $\beta$ .

→ Affinité : La fonction  $g(x)$  est affine en  $x$  si elle s'écrit sous la forme

$$g(x) = f(x) + a,$$

où,  $f(x)$  est une fonction linéaire et  $a$  est une constante.

- Un système de plusieurs LMIs est un ensemble fini de LMI tel que pour deux LMIs données on peut avoir une LMI

$$\begin{aligned} F_0(X_0) &\prec Q_0 \\ F_1(X_1) &\prec Q_1 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

ceci est équivalent à  $F(X) \prec Q$ .

Où,

$$F(X) = \text{diag}(F_0(X_0), F_1(X_1)),$$

et

$$Q = \text{diag}(Q_0, Q_1),$$

i.e

$$\begin{bmatrix} F_0(X_0) & 0 \\ 0 & F_1(X_1) \end{bmatrix} \prec \begin{bmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix}. \quad (4.2.5)$$

## 4.3 Propriétés

- L'ensemble des solutions réalisables de l'ensemble (4.1.1) définie par,  $\{x/F(x) \succ 0\}$  est un ensemble convexe.

### 4.3.1 Remarque

Cette propriété est très importante car de nombreuses techniques de résolution numérique sont disponibles pour les problèmes impliquant des ensembles de solutions convexes.

**Convexité** : Un ensemble  $C \in \mathbb{R}^n$  est convexe si,

$$\mu x_1 + (1 - \mu)x_2 \in C \quad \forall x_1, x_2 \in C \text{ et } \forall \mu \in [0, 1] \quad (4.3.1)$$

- LMI (4.1.1) est une inégalité stricte. On peut de même avoir la non strict inégalité.

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i(x) \succeq 0. \quad (4.3.2)$$

### – Complément de Schur :

Un outil très intéressant et utile durant toute notre étude par la suite, il s'agit du lemme de Schur qui est un résultat préliminaire qui permettra dans ce qui suit, de simplifier des expressions matricielles.

– **Lemme 4.3.1** *L'LMI*

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^t & R \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.3.3)$$

où,  $Q = Q^t$  et  $R = R^t$  sont équivalentes à  $R \succ 0$ ,  $Q - SR^{-1}S^t \succ 0$  ou encore  $Q \succ 0$ ,  $R - SQ^{-1}S^t \succ 0$

Parmi d'autres propriétés importantes nous citerons la mise à échelle,

– **Mise en échelle :**

Pour  $\alpha \succ 0$ , on a  $G(x) \succ 0$  équivalent à  $\alpha G(x) \succ 0$

## 4.4 Applications

### 4.4.1 Problème de fesabilité

Consiste à trouver la solution  $x \in \mathbb{R}^n$  pour un système LMI  $F(x) \prec 0$ .

### 4.4.2 Optimisation

La minimisation d'une fonction objective convexe sous certaines contraintes LMIs est également un problème convexe, en particulier, un problème de minimisation linéaire

$$\begin{cases} \min C^t x \\ F(x) \prec 0 \end{cases} \quad (4.4.1)$$

joue un rôle important dans les conceptions basées sur les LMIs, ce problème est appelé "Problème de valeur propre".

On peut généraliser ce genre de problème et il devient,

### 4.4.3 Problème de la valeur généralisée

Minimiser le scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$  sous certaines contraintes

$$\begin{cases} G(x) \prec \lambda F(x) \\ F(x) \succ 0 \\ G(x) \succ 0 \end{cases} \quad (4.4.2)$$

### 4.4.4 La stabilité de lyapunov

Comme on a vu dans le chapitre précédent, le système linéaire à temps invariant donné par,

$$\dot{x} = Ax \quad (4.4.3)$$

est stable si chaque valeur propre de  $A$  est à partie réelle négative.

La matrice  $A$  qui satisfait cette condition est appelée de "Hurwitz". On dira de même que le système est Shur stable.

Un moyen pour trouver les valeurs propres de  $A$  est d'utiliser l'équation de Lyapunov. Ceci peut être citer comme suit :

Toutes les valeurs propres de  $A$  ont une partie réelle négative si pour chaque matrice  $Q$  donnée  $Q = Q^t$ , il existe une unique solution  $P = P^t \succ 0$  pour l'équation de Lyapunov donnée par,

$$AP + PA^t = -Q \text{ ou } (A^tP + PA = -Q). \quad (4.4.4)$$

On peut écrire tout ça d'une autre manière, le système est stable et  $A$  est Hurwitz si l'LMI

$$AP + PA^t + Q \preceq 0 \text{ (} A^tP + PA + Q \prec 0 \text{)} \quad (4.4.5)$$

a une solution admissible (réalisable)

$$P = P^t \succ 0. \quad (4.4.6)$$

## 4.5 LMI toolbox matlab

Matlab LMI toolbox fournit un ensemble de fonctions pratiques pour résoudre des problèmes impliquant des LMIs.

Dans cette section on va voir quelques unes, tout en les appliquant à des exemples.

En général, un problème d'une LMI est résolu en deux étapes sur matlab.

### 4.5.1 Première étape

Elle consiste à,

- Définir l'LMI dans un problème donné.
- Spécifier les variables dans les LMIs et définir les LMIs en fonction de ces variables de décisions.

Comme on a vu précédemment, il existe plusieurs représentations d'une LMI, matlab utilise commodément sous la forme matricielle de variable de décisions donnée par (4.2.1) au lieu de la forme d'un vecteur de variables de décisions donnée par (4.1.1).

### 4.5.2 Deuxième étape

Le problème est résolu numériquement en utilisant les solveurs disponibles ou on peut même faire nos propres solveurs.

Si le problème comprend de la minimisation d'une fonction d'une forme vectorielle de variables de décisions, il suffit de convertir la forme d'une matrice de variables de décisions en une forme d'un vecteur à l'aide des fonctions supplémentaire.

### 4.5.3 Spécification d'un système de LMI

1. Commençons par l'initialisation des LMIs, et cela en utilisant la commande,

$$\text{Setlmi}([\ ])$$



2. Après on définit les variables de décisions en utilisant la fonction,

*lmivar*

Considérons par exemple l'LMI  $CXC^t \prec 0$ . Ici,  $C$  est une matrice constante et  $X$  est la matrice des variables de décisions.

La fonction *lmivar* permet de définir plusieurs formes de matrices de décisions.

Soit  $X$  une matrice symétrique avec une structure diagonale par blocs, i.e

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & & & \\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & X_n \end{bmatrix}$$

Dans ce cas,  $X$  possède  $n$  blocs diagonaux.

Prenons,  $n = 4$  et les dimensions des matrices  $X_i$  sont 5, 3, 1 et 2 toutes non nulles.  $X$  est définie par la commande suivante,

$$\begin{aligned} \text{structure}X &= [5, 1; 3, 1; 1, 0; 2, 1] \\ X &= \text{lmivar}(1, \text{structure}X); \end{aligned}$$

Ici la première entrée 1 stipule que  $X$  est une matrice symétrique par bloc diagonale.

Le numéro de la ligne de *structureX* indique que  $X$  a 4 blocs. Le premier élément de la  $r$ -ième rangée donne la dimension de la  $r$ -ième bloc en  $X$ . Le second élément de la  $r$ -ième bloc définit le type du bloc : 1 pour le plein, 0 pour scalaire, -1 pour le bloc qui égal à zéro.

3. Dans l'étape suivante on définit les LMIs une par une. Pour  $C^tXC \prec 0$ , dans ce cas  $C$  est  $1 \times 1$  matrice constante.

On définit cette LMI par,

$$\begin{aligned} \text{typeLMI1} &= [1 \ 1 \ 1 \ 1]; \\ &\text{lmiterm}(\text{typeLMI1}, C, C'); \end{aligned}$$

cette commande contient trois arguments.

**Premier argument :** Un vecteur qui contient quatre entrées, la première est faite pour indiquer quelle LMI est définie, la deuxième et la troisième indiquent la position de l'expression étant définie et la quatrième indique la variable de décision de LMI impliquée.

Pour cet exemple, puisque nous n'avons qu'une seule matrice de décision  $X$ , cette valeur est simplement 1.

**Deuxième et troisième argument :** Ce sont les matrices multipliées à droite et à gauche par la matrice de décision. Si on veut définir l'LMI  $C^tXC \succ 0$ , on utilise

$$\begin{aligned} \text{typeLMI1} &= [-1 \ 1 \ 1 \ 1]; \\ &\text{lmiterm}(\text{typeLMI1}, C, C'); \end{aligned}$$

4. La dernière étape consiste à utiliser la commande,

$$myLMISystem = getlmis;$$

**Autre :** On peut utiliser directement l'éditeur LMI dans la boîte outil Matlab.

### Exemple

$$\begin{bmatrix} CXC^t + B^tYA & XF \\ F^tX & Y \end{bmatrix} \prec 0 \text{ et } DXD^t \succ 0$$

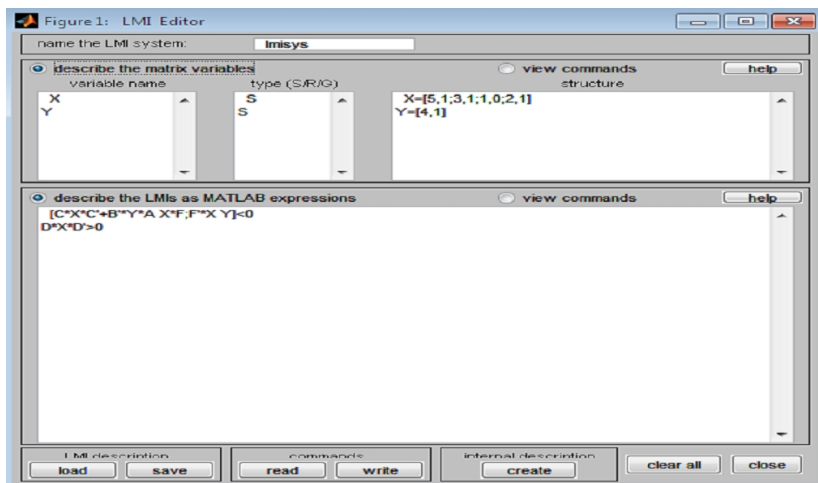
Dans ce cas on a deux matrices de décision,  $X$  et  $Y$  et on a deux LMIs. Soit  $Y$  une matrice symétrique pleine de dimension 4.

```

setlmis([ ])
structureX = [5, 1; 3, 1; 1, 0; 2, 1];
X = lmivar(1, structureX);
structureY = [4, 1];
Y = lmivar(1, structureY);
lmiterm([1 1 1 1], C, C'); % le terme CXC^t
lmiterm([1 1 1 2], B', A); % le terme B^tYA
lmiterm([1 1 2 1], 1, F); % le terme XF
lmiterm([1 2 1 1], F', 1); % le terme F^tX
lmiterm([1 2 2 2], 1, 1); % le terme Y
typeLMI2[-1 1 1 1];
lmiterm(typeLMI2, D, D'); % le terme DXD^t
myLMISystem = getlmis;

```

Cela peut être décrit sous l'éditeur comme suit,



# Tests de Stabilité des Systèmes Bidimensionnels Hybrides

---

Dans ce chapitre, nous considérons le problème de la stabilité des systèmes linéaires à deux dimensions. De nouvelles conditions suffisantes pour l'asymptotique stabilité et dérivées en termes d'inégalités matricielles linéaires (LMI), [14] et [15].

## 5.1 Définition de stabilité

Le système en 2D continu-discret (2.7.1) est asymptotiquement stable si la réponse d'entrée est nulle (*i.e.*  $u(t, k) = 0$  pour  $t \succeq 0, k \succeq 0$ ) avec les conditions aux limites satisfaisant,

$$\sup_t \|x(t, 0)\| \prec \infty, \quad \sup_k \|x(0, k)\| \prec \infty \quad (5.1.1)$$

converge vers zéro, *i.e.*

$$\lim_{t, k \rightarrow \infty} \|x(t, k)\| = 0. \quad (5.1.2)$$

Des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité du système (2.7.1) calculées en fonction du polynôme caractéristique seront cependant dérivées et données dans différentes littératures [14] et [15].

## 5.2 Théorème

Le système hybride (2.7.1) est asymptotiquement stable si et seulement si

$$B(s, 0) \neq 0 \text{ pour } \Re s \succeq 0. \quad (5.2.1)$$

$$B(jw, z) \neq 0 \text{ pour } w \in \mathbb{R} \text{ et } |z| \preceq 1. \quad (5.2.2)$$

## 5.3 L'approche LMI pour la stabilité

Afin de réduire davantage à une formulation LMI, nous aurons besoin du théorème suivant pour caractériser les matrices de polynômes positifs qui dépendent d'un paramètre réel  $w$  sur le cercle unité.

### 5.3.1 Théorème

Une matrice symétrique hermitienne

$$P(w) = \sum_{i=0}^2 P_i w^i, \quad (5.3.1)$$

avec,

$$P_i = P_i^*,$$

est définie positive dans  $w \in \mathbb{R}$  si et seulement si il existe une matrice hermitienne  $X$  tel que,

$$\begin{bmatrix} P_0 & (P_1 + jX)/2 \\ (P_1 - jX)/2 & P_2 \end{bmatrix} \succ 0, \quad X = X^*. \quad (5.3.2)$$

Basons nous sur la définition et les théorèmes ci-dessus, nous proposons maintenant de nouvelles conditions LMIs suffisantes pour la stabilité asymptotique du système 2D décrit par (2.7.1).

### 5.3.2 Théorème

Le système hybride (2.7.1) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices hermitiennes  $X_0, X_1, X_2$  tel que les LMIs suivantes sont réalisables,

$$X_1 \succ 0, \quad X_2 \succ 0, \quad (5.3.3)$$

$$A_1^t X_1 A_0 + A_0^t X_1 A_1 \succ 0, \quad (5.3.4)$$

$$\begin{bmatrix} A_0^t X_2 A_0 - A_2^t X_2 A_2 & A_2^t X_2 E + A_0^t X_2 A_1 - X_0 \\ E^t X_2 A_2 + A_1^t X_2 A_0 - X_0 & A_1^t X_2 A_1 - E^t X_2 E \end{bmatrix} \succ 0. \quad (5.3.5)$$

#### Preuve

Pour démontrer ce théorème, il suffit de vérifier que les deux LMIs (5.3.4) et (5.3.5) sont satisfaisantes.

Pour ce faire nous allons se baser sur l'expression du polynôme caractéristique  $B(s, z)$  qui est donnée par (2.7.2).

Utilisons la condition (5.2.1); le fait que  $B(s, 0) \neq 0$ .

Et plus,

$$B(s, 0) = \det[-sA_1 - A_0] \neq 0 \text{ pour } \Re s \succeq 0$$

D'autre part, cette expression devient équivalente à l'expression du problème (3.5.1) où,  $E := -A_1$ ,  $A_0 := A$  et  $P := X_1$ .

Donc  $C$  devient,

$$C = -A_0^t X_1 A_1 - A_1^t X_1 A_0.$$

Le système 2D continu-discret est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $X_1$  réelle symétrique de  $(n \times n)$  définie positive telle que la matrice  $C$  est semi définie négative, c'est à dire,

$$-A_0^t X_1 A_1 - A_1^t X_1 A_0 \preceq 0,$$

donc,

$$A_0^t X_1 A_1 + A_1^t X_1 A_0 \succeq 0,$$

d'où le résultat.

Maintenant on utilise la condition (5.2.2), le fait que

$$\begin{aligned} B(jw, z) &= \det[Ejwz - A_0 - A_1s - A_2jw] \\ &= \det[z(jwE - A_2) - (jwA_1 + A_0)] \neq 0 \text{ pour } w \in \mathbb{R} \text{ et } |z| \preceq 1 \end{aligned}$$

ceci est équivalent à,

$$\det[zM - N] \neq 0,$$

où,

$$M = jwE - A_2; \quad N = jwA_1 + A_0,$$

qui est satisfaisante si et seulement si l'LMI suivante est réalisable :

$$N^* X_2 N + M^* X_2 M \succ 0, \quad X_2 \succ 0, \quad X_2 = X_2^*. \quad (5.3.6)$$

Si on choisit  $X_2$  constante alors la relation (5.3.6) est équivalente à

$$w^2 P_2 + w P_1 + P_0 = \sum_{i=0}^2 P_i w^i \succ 0, \quad (5.3.7)$$

où,

$$P_0 := A_0^t X_2 A_0 - A_2^t X_2 A_2, \quad (5.3.8)$$

$$P_1 := j[(A_2^t X_2 E - E^t X_2 A_2) + (A_0^t X_2 A_1 - A_1^t X_2 A_0)], \quad (5.3.9)$$

$$P_2 := A_1^t X_2 A_1 - E^t X_2 E. \quad (5.3.10)$$

Avec,  $P_i^* = P_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

Appliquons le théorème précédent, alors

$$\begin{bmatrix} P_0 & (P_1 + jX)/2 \\ (P_1 - jX)/2 & P_2 \end{bmatrix} \succ 0. \quad (5.3.11)$$

Pour certaines matrices hermitiennes  $X$ . Maintenant définissons une nouvelles matrice hermitienne  $X_0$  via l'identité

$$X = 2X_0 - (E^t X A_2 + A_2^t X_2 E) - (A_1^t X_2 A_0 + A_0^t X_2 A_1).$$

Alors on obtient la condition équivalente,

$$\begin{bmatrix} A_0^t X_2 A_0 - A_2^t X_2 A_2 & j(A_2^t X_2 E + A_0^t X_2 A_1 - X_0) \\ -j(E^t X_2 A_2 + A_1^t X_2 A_0 - X_0) & A_1^t X_2 A_1 - E^t X_2 E \end{bmatrix} \succ 0.$$

Donc on obtient finalement le résultat souhaité.  $X_2$  a été imposé constante et cela ce n'est qu'une condition suffisante pour la stabilité.

### 5.3.3 Exemple

Pour faire des tests de stabilité sous Matlab nous allons considérer aléatoirement les matrices  $E$ ,  $A_0$ ,  $A_1$  et  $A_2$ , moyennant la commande (randn) et en tenant compte qu'à chaque execution on obtiendra de nouvelles matrices  $X_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

```
n=3,
E=randn(n);
A0=randn(n);
A1=randn(n);
A2=randn(n);
%Description des lmis par "LMiedt" de matlab
setlmis([])
X0=lmivar(1,[n 1]);
X1=lmivar(1,[n 1]);
X2=lmivar(1,[n 1]);
%1st LMI
lmiterm([-1 1 1 X1],1,1); % le terme X1
%2nd LMI
lmiterm([-2 1 1 X2],1,1); %le terme X2
%3rd LMI
lmiterm([-3 1 1 X1],A1',A0); %le terme A1'*X1*A0
lmiterm([-3 1 1 X1],A0',A1); %le terme A0'*X1*A1
%4th LMI
lmiterm([-4 1 1 X2],A0',A0); % le terme A0'*X2*A0
lmiterm([-4 1 1 X2],A2',-A2); %le terme -A2'*X2*A2
lmiterm([-4 1 2 X2],A2',E); %le terme A2'*X2*E
lmiterm([-4 1 2 X2],A0',A1); %le terme A0'*X1*A1
lmiterm([-4 1 2 X0],-1,1); %le terme -X0
lmiterm([-4 2 1 X2],E',A2); %le terme E'*X2*A2
lmiterm([-4 2 1 X2],A1',A0); %le terme A1'*X2*A0
lmiterm([-4 2 1 X2],-1,1); %le terme -X2
lmiterm([-4 2 2 X2],A1',A1); %le terme A1'*X2*A1
lmiterm([-4 2 1 X2],E',-E); %le terme -E'*X2*E
lmisys=getlmis;
[tmin,Xfeas] = feasp(lmisys)
X0 = dec2mat(lmisys,Xfeas,X0)
X1 = dec2mat(lmisys,Xfeas,X1)
X2 = dec2mat(lmisys,Xfeas,X2)
```

**Execution**

Solver for LMI feasibility problems  $L(x) < R(x)$

This solver minimizes  $t$  subject to  $L(x) < R(x) + t*I$

The best value of  $t$  should be negative for feasibility

Iteration : Best value of  $t$  so far

1	0.110148
2	0.016242
3	0.016242
4	2.853861e-003
5	2.853861e-003
6	3.652337e-004
7	2.516289e-004
8	8.418304e-005
9	6.578116e-005
10	1.590055e-005
11	1.590055e-005
12	3.465998e-006
13	1.793093e-006
14	1.793093e-006
* switching to QR	
15	4.201763e-007
16	6.860373e-008
17	1.132711e-008
18	9.483082e-010
19	1.311464e-010
20	4.002741e-011
21	2.143883e-011
22	2.143883e-011
23	9.959925e-012
24	9.472427e-013
25	8.320817e-013
26	1.938202e-013
27	1.938202e-013
28	1.938202e-013
29	5.800723e-014
30	3.828624e-014

Result : could not establish feasibility nor infeasibility

f-radius saturation : 0.000% of  $R = 1.00e+009$

Termination due to SLOW PROGRESS :

$t$  was decreased by less than 10.000% during  
the last 10 iterations.

Marginal infeasibility : these LMI constraints may be  
feasible but are not strictly feasible

$t_{\min} =$

```
3.8286e-014
Xfeas =
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
-0.0000
115.1722
-150.3835
470.9077
160.7543
-175.6761
228.6433
0.0000
0.0000
-0.0000
0.0000
0.0000
0.0000
X0 =
1.0e-011 *
0.7634 0.1979 0.3144
0.1979 0.0535 0.0915
0.3144 0.0915 -0.2666
X1 =
115.1722 -150.3835 160.7543
-150.3835 470.9077 -175.6761
160.7543 -175.6761 228.6433
X2 =
1.0e-012 *
0.4486 0.0197 0.4371
0.0197 -0.0191 0.0326
0.4371 0.0326 0.4233
```

### Remarques

- Le choix des matrices peut se faire selon le problème donné.
- L'utilisation de la fonction "feasp" nous aide à donner le temps minimale d'itération et la solution réalisable et teste la faisabilité d'un système LMI.
- Enfin la commande "dec2mat" sert à convertir les sorties du solveur aux valeurs des variables de la matrice.



# CONCLUSION

Nous avons dans ce mémoire traité le problème de stabilité des systèmes hybrides, moyennant un outil très puissant servant à donner un traitement numérique optimal dans le cadre de la stabilité asymptotique.

Dans ce cas des conditions suffisantes ont été établies Nous avons mis en évidence.l'approche LMI et des exemples numérique ont été illustrés.

Ce problème a été de même étendu au cas multidimensionnel, par ELOSMANI et BOUAGADA.

En perspective nous optons dans l'avenir détendra les résultats aux cas des modèles à dérivés non entières.

# Bibliographie

- [1] GRAYE Jean-Laurent ; Transformation de Laplace : Definition, proprietes et exemples d'utilisation en physique.
- [2] ENI Val de Loire. Cours de l'Ecole Nationale d'Ingenieurs.
- [3] Poularikas A. D. "Two-Dimensional Z-Transform" The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing. Ed. Alexander D. Poularikas Boca Raton : CRC Press LLC, 1999.
- [4] Serie schaum. Transformation en z
- [5] BOUAGADA.D. These de Doctorat.
- [6] Yang Xiao, member and Moon Ho Lee, nonmember, 2-D Laplace-Z Transformation, IECE TRANS.FUNDAMENTALS, VOL. E89-A, No. 5 May 2006.
- [7] F.L.Lewis, 1984 ; T.Kaczorek, 1993
- [8] T.Kaczorek, Positive 1D and 2D systems, Springer Verlag, Berlin, Academy 2002.431 pages.
- [9] J. Kurek, The General state-space model for a two-dimensional linear digital systems, IEEE, Trans. Autom. Contr., Vol AC-30 N 6, pp. 600-601.
- [10] T. Kaczorek. Two dimensional linear systems, Springer Verlag, Berlin, New York.
- [11] S.L. Campbell, C.D. Meyer, Jr. and N.J.Rose, Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients, SIAM J. App. Math., Vol.31, pp. 411-425, Nov.1976.
- [12] Panos J.Antsaklis and Anthony N.Michel, "A linear Systems Primer" Birkhauser-Boston. Basel. Berlin 2007.
- [13] Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub., A. J., and Chilali, M. (1995). LMI control toolbox. MathWorks, Natick, Massachusetts.
- [14] Djillali BOUAGADA and Paul Van DOOREN. LMI Conditions for the Stability of 2D State-Space Models. Proceeding of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems - MTNS 2010. 5-9 July, 2010. Budapest, Hungary.
- [15] Djillali BOUAGADA and Paul Van DOOREN. On the stability of 2D state-space models ; NUMERICAL LINEAR ALGEBRA WITH APPLICATIONS ; Numer. Linear Algebra Appl. (2011) ; Published online in Wiley Online Library (wileyonlinelibrary.com). DOI : 10.1002/nla.836.

- 
- [16] Dullerud, G. E., and Paganini, F.(2000). A Course in Robust Control Theory : A Convex Approach, Springer, New York.