

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

**Mémoire de fin d'étude**

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Cycle LMD

**Spécialité :Modélisation Contrôle et Optimisation**

**Thème :**

# La modélisation mathématique et simulation en diabétologie

**Présenté par :**

HAMOU MAAMAR Maghnia

**Soutenu le 20/06/2013.**

**Les membres de jury**

AMIR	Abdessamad	<b>Président</b>	MCA	<b>U. MOSTAGANEM.</b>
ABLAOUI	Naima	<b>Examineur</b>	MAA	<b>U. MOSTAGANEM.</b>
BELHAMITI	Omar	<b>Encadreur</b>	MCA	<b>U. MOSTAGANEM.</b>

# Table des matières

<b>Remerciments</b>	<b>i</b>
<b>Introduction</b>	<b>ii</b>
<b>1 Modélisation en Diabétologie</b>	<b>2</b>
1.1 La Dynamique du Glucose-Insuline dans le Corps Humain . . . . .	3
1.2 Le Diabète . . . . .	4
1.2.1 Diabète De Type 1 . . . . .	4
1.2.2 Signes et Symptômes du Diabète . . . . .	5
1.2.3 Les Complications du Diabète . . . . .	5
1.3 Modélisation Mathématique En Diabétologie . . . . .	6
1.3.1 Le Modèle Minimal . . . . .	6
1.3.2 Autres Approches . . . . .	9
<b>2 Méthode des Ondelettes de Legendre</b>	<b>11</b>
2.1 Les Propriétés des Ondelettes de Legendre . . . . .	11
2.2 La Matrice Opérationnelle d'Intégration "Matrice Sandwich" . . . . .	13
2.3 Description de la Méthode des Ondelettes de Legendre . . . . .	15
2.3.1 La Résolution d'une Equation Différentielle d'Ordre $n$ . . . . .	15
2.3.2 Récapitulatif de la Méthode . . . . .	18
2.3.3 L'Algorithme de la Méthode . . . . .	18

---

2.4	La Technique de Découplage et Quasi-Linéarisation . . . . .	19
2.4.1	Algorithme . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Tests et Simulation Numérique</b>	<b>21</b>
3.1	Test de la Méthode . . . . .	21
3.2	La Simulation du Modèle Minimal Couplé . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>28</b>
<b>5</b>	<b>Annexe</b>	<b>31</b>
5.1	Annexe A "Diabète" . . . . .	31
5.1.1	Les Tests . . . . .	32
5.1.2	Facteurs de Risque . . . . .	33
5.1.3	Pévention . . . . .	33
5.1.4	Diagnostic et traitement . . . . .	35
5.1.5	Activités de l'OMS pour prévenir et combattre le diabète . . . . .	35
5.2	Annexe B . . . . .	37
5.2.1	Notions De Base . . . . .	37
5.2.2	Polynôme De Legendre . . . . .	37
5.2.3	Bases de $L^2$ . . . . .	41
5.3	Annexe C . . . . .	42
5.3.1	Exemple 1 . . . . .	42
5.3.2	Exemple 2 . . . . .	42
5.3.3	Le Modèle Minimal . . . . .	44
5.3.4	Les sous programmes . . . . .	47

---

# Remerciements

---

---

# INTRODUCTION

---

La modélisation mathématique est une spécialité en plein développement, dans les domaines d'application de plus en plus variés, particulièrement en médecine; elle joue un rôle très important dans la compréhension, l'interprétation des phénomènes et des mécanismes complexes. Des modèles peuvent également être employés pour représenter ce qui ne peut pas être mesuré directement, ce qui permet aux médecins par exemple d'améliorer leurs pratiques. Ils donnent aussi des visions plus synthétiques des problèmes et permettent des approches nouvelles des mécanismes en jeu. L'un des domaines de la médecine où intervient des nombreux modèles mathématiques est la diabétologie. De nombreux travaux de modélisation ont permis de maîtriser les changements du glucose et de l'insuline et :

- La compréhension quantitative de la régulation des sécrétions stimulées par le glucose afin d'étudier le rôle que les différents processus physiologiques jouent dans le diabète et son traitement.
- D'évaluer la sensibilité à l'insuline et au glucose chez les patients.
- De développer un approvisionnement en insuline automatisé par le biais de pompes pour les personnes atteintes de diabète en évaluant le taux du glucose actuel et en utilisant un modèle mathématique et une théorie de contrôle afin de déterminer l'approvisionnement 'optimal' en insuline d'une minute à l'autre.

Un certain nombre de modèles mathématiques qui décrivent l'interaction glucose-insuline ont été rapportés dans la littérature [12],[17],[15] et [14].

Dans ce mémoire, on propose une modélisation mathématique de la dynamique insuline-glucose et une simulation de ce phénomène par des méthodes numériques à base d'ondelettes de Legendre.

La méthode des ondelettes de Legendre a été utilisée par M. Razzaghi et S. Yousefi pour la résolution des problèmes variationnelles [2], par les mêmes auteurs pour un problème de contrôle optimal [5] et par d'autres pour la résolution des équations intégrales différentielles comme l'équation intégrale d'Abel [7], l'équation intégrale de Fredholm [6]. Cette méthode

est basée sur deux approches, la première utilise la matrice opérationnelle de dérivation  $D$  [4], où

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = D\psi(t),$$

avec  $\psi(t) = [\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)]$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et les coefficients de ce vecteur forment une base orthogonales dans  $L^2([0, 1])$ . La deuxième approche consiste à utiliser la matrice opérationnelle d'intégration  $P$  [3], où

$$\int_0^t \psi(\tau) d\tau = P\psi(t).$$

Ces matrices nous permettent de réduire un problème de valeurs aux limites en un système d'équations algébriques.

Ce travail est structuré de manière à présenter dans le premier chapitre, un rappel de la physiologie du métabolisme du glucose et de la sécrétion de l'insuline, ensuite, on résume les modèles les plus connus proposés dans la littérature. Le deuxième chapitre est destiné à décrire la méthode d'ondelette de Legendre où on a développé une nouvelle version de résolution généralisée jusqu'à l'ordre  $n$ . Le troisième chapitre est consacré à montrer l'efficacité de cette méthode en la testant sur deux exemples, puis la simulation numérique du modèle minimal. On clôture ce travail par une conclusion tout en discutant sur les idées fondamentales prises durant tout ce travail et les perspectives à atteindre.

---

# Modélisation en Diabétologie

---

Aujourd'hui le Diabète est devenu l'une des plus grandes maladies dans le monde. Il est classé quatrième cause de décès. Plusieurs millions souffrent de cette maladie et ce nombre est en augmentation (voir figure (1)). C'est ce qui a poussé les chercheurs à trouver des techniques pour diagnostiquer et traiter cette maladie. De l'autre côté les spécialistes en modélisation proposent des approches pour concevoir des modèles mathématiques décrivant la dynamique du Glucose-Insuline. Grâce à ces modèles on peut simuler les différents types de traitement.

## 1.1 La Dynamique du Glucose-Insuline dans le Corps Humain

La concentration du glucose dans le sang est considérée normale chez l'homme si elle est comprise entre 70 mg/dl et 110 mg/dl. La dynamique du Glucose-Insuline nous aide à maintenir cet état d'équilibre.

La figure (2) montre une simple description de cette dynamique. Une personne en bonne santé est dans la zone verte, la plupart du temps ayant une concentration normale de glucose dans le sang.

Si la personne s'alimente, le taux de glucose augmente dans le sang, la personne passe à la zone rouge. Le corps envoie un signal au pancréas pour produire une hormone appelée insuline, l'insuline provoque l'absorption de l'excès du glucose par le foie et d'autres cellules, la personne retourne à la zone verte.

Si la personne est en activité, la concentration du glucose dans le sang baisse, elle se trouve dans la zone bleue, le corps envoie un signal au pancréas pour produire du glucagon, le glucagon atteint le foie et lui ordonne de libérer du glucose. La personne retourne à la zone verte à nouveau [11].



## 1.2 Le Diabète

Le diabète est une affection caractérisée par une hyperglycémie (le niveau de glucose dans le sang est supérieur à 270 mg/dl) provoqué par une incapacité du corps à utiliser le glucose sanguin pour produire de l'énergie.

On distingue trois types de diabètes.

### 1.2.1 Diabète De Type 1

Le diabète de type 1 était autrefois appelé diabète juvénile ou insulino-dépendant. Il est généralement causé par une réaction auto-immune où le système de défense immunitaire du corps attaque les cellules qui produisent l'insuline (dysfonctionnement du pancréas). La raison pour laquelle cela se produit n'est pas entièrement comprise à présent. Les personnes atteintes de diabète de type 1 produisent très peu ou pas d'insuline. La maladie peut affecter des personnes de tout âge, mais se développe habituellement chez les enfants ou les jeunes adultes. Les personnes atteintes de cette forme de diabète ont besoin d'injections d'insuline tous les jours afin de contrôler les niveaux de glucose dans le sang. Si les gens atteints de diabète de type 1 n'ont pas accès à l'insuline, ils mourront [19].

### Diabète De Type 2

Le diabète de type 2 était autrefois appelé diabète non insulino-dépendant ou diabète de l'adulte, et représente au moins 90% de tous les cas de diabète. Il est caractérisé par un fonctionnement normal de pancréas pour des raisons pour lesquelles le corps ne l'utilise pas. Le diagnostic du diabète de type 2 peut survenir à tout âge et peut rester inaperçue pendant de nombreuses années et le diagnostic est souvent fait quand une complication apparaît. Les personnes atteintes par ce type de diabète peuvent souvent initialement gérer leur maladie grâce à l'exercice et l'alimentation. Cependant, au fil du temps la plupart des gens auront besoin des médicaments ou de l'insuline [19].

### Le diabète gestationnel (GDM)

Le diabète gestationnel (GDM) est une forme de diabète constituée de niveaux élevés de glucose dans le sang pendant la grossesse et disparaît généralement après l'accouchement

[19].

### 1.2.2 Signes et Symptômes du Diabète

Les individus peuvent éprouver différents signes et symptômes du diabète [19], et parfois il peut y avoir aucun signe. Certains des signes communément rencontrés sont :

- mictions fréquentes
- Une soif excessive
- augmentation de la faim
- La perte de poids
- fatigue
- Le manque d'intérêt et de concentration
- Une sensation de picotement ou engourdissement dans les mains ou les pieds
- vision floue
- infections fréquentes
- Plaies qui guérissent lentement
- Des vomissements et des douleurs à l'estomac (souvent confondu avec la grippe).

### 1.2.3 Les Complications du Diabète

Les personnes atteintes de diabète ont un grand risque de développer un certain nombre de problèmes de santé graves. Il est la principale cause des maladies cardio-vasculaires, la cécité, l'insuffisance rénale et d'amputation des membres inférieurs ...etc.

Maintenir le niveau de glucose sanguin, la pression artérielle et le cholestérol à niveau ou proche de la normale peut aider à retarder ou prévenir des complications du diabète (D'après la Fédération Internationale du Diabète [19]).

## 1.3 Modélisation Mathématique En Diabétologie

En 1939, Himswork et Ker introduisent la première approche pour mesurer la sensibilité de l'insuline in vivo. En 1961, Bolie [12] proposa le modèle suivant

$$\begin{cases} \frac{dG}{dt}(t) = -a_1 G(t) - a_2 I(t) + p \\ \frac{dI}{dt}(t) = -a_3 G(t) - a_4 I(t). \end{cases}$$

Où

- $G(t)$  représente la concentration du glucose en fonction du temps  $t$ .
- $I(t)$  représente la concentration de l'insuline en fonction du temps  $t$ .
- $p, a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$  sont des paramètres donnés.

Dans les années quatre-vingt le professeur Richard N. Bergman [13] a introduit un modèle appelé "modèle minimal" correspond à une modélisation mathématique relativement simple de l'épreuve d'hyperglycémie provoquée par voie intraveineuse (IVGTT voir annexe A). Ce dernier contient en fait deux modèles minimaux. Le premier, décrivant la cinétique du glucose et le deuxième décrivant la cinétique de l'insuline. Les deux modèles prennent respectivement les données de l'insuline et du glucose comme entrées. Les modèles ont principalement été utilisés pour interpréter la cinétique pendant le test IVGTT.

### 1.3.1 Le Modèle Minimal

Le Modèle Minimal du Glucose est formulé pour  $t \geq 0$  par

$$\begin{cases} G'(t) = -(S_g + X(t))G(t) + S_g G_b \\ X'(t) = -p_3(X(t) + S_i(I(t) - I_b)) \\ G(0) = G_0 \text{ et } X(0) = X_0, \end{cases} \quad (1.3.1)$$

et le Modèle Minimal de l'insuline par

$$\begin{cases} I'(t) = \gamma(G(t) - G_T)^+ t - k(I - I_b) \\ I(0) = I_0, \end{cases} \quad (1.3.2)$$

où

$$(G(t) - G_T)^+ = \begin{cases} (G(t) - G_T), & \text{si } G(t) > G_T \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note par

Paramètres	unité	description
$G(t)$	$[mg/dL]$	La concentration du glucose dans le sang en fonction du temps t
$X(t)$	$[1/\text{min}]$	représentant l'activité des cellules excitable par l'insuline dans l'absorption du glucose
$I(t)$	$[mU/L]$	La concentration de l'insuline en fonction du temps t
$G_b$	$[mg/dL]$	La glycémie
$I_b$	$[mU/L]$	L'insulinémie de base du sujet
$S_g$	$[1/\text{min}]$	assimilation glucidique glucidique
$S_i$	$[L/(\text{min}^2 mU)]$	sensibilité à l'insuline
$p_3$	$[1/\text{min}]$	Augmentation de la capacité d'absorption causée par l'insuline
$k$	$[1/\text{min}]$	Taux de décroissance de l'insuline dans le sang
$G_T$	$[mg/dL]$	Le niveau du glucose cible
$\gamma$	$\frac{mU dL}{L mg \text{ min}}$	Taux du sécrétion du pancréas après un bolus de glucose.

La décernations de la médaille Banting 2006 par l'American Diabètes Association au professeur Bergman montre l'importance du rôle qu'a joué le modèle minimal dans la compréhension de la maladie du diabète.

D'autre part, la figure (3) montre aussi l'impact de ce modèle sur le milieu scientifique [10].

En 2002, Derouich et Boutayeb [14] ont introduit une autre version basée sur le modèle minimal, ils ont amélioré le modèle, en intégrant l'activité physique,

$$\begin{cases} G'(t) = -(1 + q_2) X(t) G(t) + (p_1 + q_1) (G_b - G(t)) \\ X'(t) = -p_2 X(t) + (p_3 + q_3) (I(t) - I_b) \\ G(0) = G_0 \text{ et } X(0) = X_0, \end{cases}$$

où  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  sont des paramètres liés à l'activité physique et définis comme suit :

- $q_1$  : l'effet de l'exercice physique sur l'accélération de l'utilisation du glucose par les muscles et le foie.
- $q_2$  : l'effet de l'exercice physique sur l'augmentation de la sensibilité musculaire et hépatique à l'action de l'insuline.
- $q_3$  : l'effet de l'exercice physique sur l'augmentation de l'utilisation de l'insuline.

On cite aussi, d'autre amélioration du modèle minimal [11, PP25-26], pour  $t \geq 0$

$$\begin{cases} G'(t) = -(p_1 + X(t)) G(t) + p_1 G_b + D(t), G(0) = G_0 \\ X'(t) = -p_2 X(t) + p_3 (I(t) - I_b), X(0) = X_0 \\ I'(t) = -p_4 I(t) + \frac{U(t)}{V_I}, I(0) = I_0 \\ D'(t) = -\text{drate} \cdot D(t), D(0) = D_0 \\ G'_{sc}(t) = \frac{G(t) - G_{sc}(t)}{5} - R_{utln}, G_{sc}(0) = G_0 - R_{utln}, \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} G(0) = G_0 \\ X(0) = X_0 \\ I(0) = I_0 \\ D(0) = D_0 \\ G_{sc}(0) = G_0 - R_{utln}, \end{cases}$$

avec les paramètres

Paramètres	unité	description
$G(t)$	$[mg/dL]$	La concentration du glucose dans le sang en fonction du temps t
$X(t)$	$[1/\text{min}]$	représentant l'activité des cellules excitable par l'insuline dans l'absorption du glucose
$I(t)$	$[mU/L]$	La concentration de l'insuline en fonction du temps t
$D(t)$	$[mg/dL/\text{min}]$	La fonction de perturbation du déjeuner
$G_{sc}(t)$	$[mg/dL]$	La concentration du glucose sous-cutané
$U(t)$	$[mu/\text{min}]$	Insuline exogène
$G_b$	$[mg/dL]$	La glycémie
$I_b$	$[mU/L]$	L'insulinémie de base du sujet
$V_I$	$[L]$	Volume de la piscine de distribution d'insuline
$p_1$	$[1/\text{min}]$	Taux de clairance du glucose indépendant de l'insuline
$p_2$	$[1/\text{min}]$	Taux de clairance de l'insuline actif
$p_3$	$[L/(\text{min}^2 mU)]$	Augmentation de la capacité d'absorption causée par l'insuline
$p_4$	$[1/\text{min}]$	Taux de décroissance de l'insuline dans le sang
drate	$[1/\text{min}]$	Taux de décroissance de la perturbation de repas

Sans diminuer l'importance du Modèle Minimal dans le domaine de la recherche physiologique, un nombre de scientifiques ont souligné quelques inconvénients de ce modèle qui peuvent provoquer dans certains cas des résultats non réalistes (solution non borné) [11, 16].

### 1.3.2 Autres Approches

Un autre modèle de la dynamique du glucose-insuline suppose que le glucose contrôle le taux de production d'insuline du pancréas, et que l'insuline contrôle le taux d'absorption de glucose par le foie et les muscles [15].

Le modèle pour le taux de glucose est

$$\begin{aligned}
 \frac{dG}{dt}(t) &= \text{-(perte de glucose vers les tissus) - (perte de glucose par l'insuline)} \\
 &\quad + \text{(contribution constante du glucose du foie)} \\
 &= -b_1 G(t) - b_2 I(t) G(t) + b_3.
 \end{aligned}$$

Le modèle pour le taux d'insuline est

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt}(t) &= \text{-(catabolisme (i.e. absorption) de l'insuline)} \\ &\quad + \text{(production de l'insuline en fonction de la valeur moyenne de glucose)} \\ &= -b_4 I + \frac{b_5}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t G(s) ds,\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} G(t) \equiv G_b, \forall t \in [-\Delta t, 0] \\ I(0) = I_b. \end{cases}$$

Où  $b_1, \dots, b_5, \Delta t$  sont des constantes.

**Remarque 1.3.1** *Dans notre travail, on s'intéresse au couplage de deux modèles minimaux (1.3.1)-(1.3.2).*

# Méthode des Ondelettes de Legendre

---

Dans ce chapitre, on fait une description détaillée de la méthode des ondelettes de Legendre.

## 2.1 Les Propriétés des Ondelettes de Legendre

Les ondelettes sont générées à partir d'une fonction  $\psi$  de  $L^2(\mathbb{R})$  appelée ondelette mère, par translation et dilatation. Avec  $a$  facteur de dilatation et  $b$  est le facteur de translation où  $a, b$  sont des réels,

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Si  $a, b$  ont des valeurs discrètes

$$\begin{cases} a = a_0^{-k}, a_0 > 0 \\ b = b_0 a_0^{-k} n, b_0 > 1, \end{cases}$$

où  $n$  et  $k$  sont des entiers positifs, on a la famille des ondelettes discrètes suivantes

$$\psi_{j,n}(t) = |a_0|^{\frac{j}{2}} \psi(a_0^j t - nb_0),$$

où  $\{\psi_{j,n}(t)\}_{j,n \in \mathbb{N}}$  est une base de  $L^2(\mathbb{R})$  [1].

**Définition 2.1.1** On définit les polynômes de Legendre sur  $[-1, 1]$  par la formule de récurrence suivante

$$\begin{cases} p_0(t) = 1 \\ p_1(t) = t \\ (m+1)p_{m+1}(t) = (2m+1)tp_m(t) - mp_{m-1}(t). \end{cases}$$



où  $m \in \mathbb{N}^*$  et la famille  $\left\{ \sqrt{\frac{2m+1}{2}} p_m(t) \right\}_{m \in \mathbb{N}}$  est une base orthonormale de l'espace de Hilbert  $L^2(-1, 1)$  [pour plus de détail voir l'annexe B].

**Définition 2.1.2** Les ondelettes de Legendre sont définîtes sur  $[0, 1]$  par

$$\psi_{n,m}(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2m+1}{2}} 2^{\frac{j+1}{2}} p_m(2^{j+1}t - 2n + 1), & \frac{n-1}{2^j} \leq t \leq \frac{n}{2^j} \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

où  $j$  est donnée dans  $\mathbb{N}$ ,  $n = 1, 2, \dots, 2^j$  représente le nombre de niveau de la décomposition et  $m = 0, \dots, M-1$  (où  $M \in \mathbb{N}^*$  est le nombre de points de collocation) est le degré du polynôme de Legendre. Le facteur de dilatation  $a = 2^{-j-1}$  et le facteur de translation  $b = (2n-1)2^{-j-1}$  [2].

**Remarque 2.1.1** Le coefficient  $\sqrt{\frac{2m+1}{2}}$  assure la normalisation.

Les ondelettes de Legendre définies sur  $[0, 1]$ , sont obtenues à travers des translations et dilatations des polynômes de Legendre.

La famille  $\{\psi_{n,m}(t)\}_{n,m \in \mathbb{N}}$  forme une base d'ondelette de  $L^2(0, 1)$  (pour la démonstration voir l'annexe B), donc toute fonction  $f$  de  $L^2(0, 1)$  peut s'écrire comme suit

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{m \in \mathbb{N}} c_{n,m} \psi_{n,m}(t), \quad (2.1.1)$$

où  $c_{n,m} = \langle f, \psi_{n,m} \rangle$  avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le produit scalaire dans  $L^2(0, 1)$ .

**Exemple 2.1.1**  $f(t) = a; a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} c_{n,m} &= \langle f, \psi_{n,m} \rangle \\ &= \int_0^1 f(t) \psi_{n,m}(t) dt \\ &= \int_{\frac{n-1}{2^j}}^{\frac{n}{2^j}} a \sqrt{\frac{2m+1}{2}} 2^{\frac{j+1}{2}} p_m(2^{j+1}t - 2n + 1) dt \\ &= \sqrt{\frac{2m+1}{2}} 2^{\frac{j+1}{2}} a \int_{\frac{n-1}{2^j}}^{\frac{n}{2^j}} p_m(2^{j+1}t - 2n + 1) dt \\ &= \sqrt{\frac{2m+1}{2}} 2^{\frac{j+1}{2}} a \int_{-1}^1 1 \times p_m(t) dt \\ &= \sqrt{\frac{2m+1}{2}} 2^{\frac{j+1}{2}} a \int_{-1}^1 p_0(t) \times p_m(t) dt \\ &= \sqrt{2m+1} 2^{\frac{j}{2}} a \delta_{0,m}, \end{aligned}$$

où  $\delta_{n,m}$  est le symbole de Kronecker.

Pour des raisons de calculs numériques on tronque la série (2.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} f(t) &\approx \sum_{n=1}^{2^j} \sum_{m=0}^M c_{n,m} \psi_{n,m}(t) \\ &= C^T \Psi(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Où } C &= [c_{1,0}, \dots, c_{1,M-1}, \dots, c_{2^j,0}, \dots, c_{2^j,M-1}]^T, \\ \Psi(t) &= [\psi_{1,0}(t), \dots, \psi_{1,M-1}(t), \dots, \psi_{2^j,0}(t), \dots, \psi_{2^j,M-1}(t)]^T. \end{aligned}$$

## 2.2 La Matrice Opérationnelle d'Intégration "Matrice Sandwich"

En 2001, M.Razzaghi & S.Yousefi [3] ont défini l'intégrale de l'ondelette de Legendre sur  $[0, t]$  par

$$\int_0^t \Psi(\tau) d\tau = P \Psi(t);$$

où  $P$  est la matrice opérationnelle d'intégration de dimension  $2^j M \times 2^j M$ , définie par

$$P = \frac{1}{2^{j+1}} \begin{bmatrix} L & F & \dots & F \\ 0 & L & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & F \\ 0 & \dots & 0 & L \end{bmatrix};$$

avec  $F, L$  sont des matrices carrées d'ordre  $M \times M$

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} 2 & 0_{1 \times (M-1)} \\ 0_{(M-1) \times 1} & 0_{(M-1) \times (M-1)} \end{bmatrix}, \\ L &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} & 0 & \frac{5^{\frac{1}{2}}}{5 \times 3^{\frac{1}{2}}} & & \vdots \\ 0 & -\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5 \times 3^{\frac{1}{2}}} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{(2M-1)^{\frac{1}{2}}}{(2M-1)(2M-3)^{\frac{1}{2}}} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{(2M-1)^{\frac{1}{2}}}{(2M-1)(2M-3)^{\frac{1}{2}}} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pour illustrer la démonstration de ce résultat, on prend  $j = 1, m = 3$ . Les six premières ondelettes de Legendre sont données par

$$\begin{cases} \psi_{1,0}(t) = \sqrt{2} \\ \psi_{1,1}(t) = \sqrt{6}(4t - 1) \\ \psi_{1,2}(t) = \sqrt{10}\left(\frac{3}{2}(4t - 1)^2 - \frac{1}{2}\right) \end{cases}, t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad (2.2.1)$$

et

$$\begin{cases} \psi_{2,0}(t) = \sqrt{2} \\ \psi_{2,1}(t) = \sqrt{6}(4t - 3) \\ \psi_{2,2}(t) = \sqrt{10}\left(\frac{3}{2}(4t - 3)^2 - \frac{1}{2}\right) \end{cases}, t \in \left]\frac{1}{2}, 1\right], \quad (2.2.2)$$

par l'intégration (2.2.1) et (2.2.2) sur  $[0, t]$  et l'écriture de chaque élément dans la base d'ondelette de Legendre, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi_{1,0}(\tau) d\tau &= \begin{cases} \sqrt{2}t, t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, t \in ]\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \\ &= \frac{1}{4}\psi_{1,0}(t) + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}\psi_{1,1}(t) + \frac{1}{2}\psi_{2,0}(t) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \Psi(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi_{1,1}(\tau) d\tau &= \begin{cases} \sqrt{6}(2t^2 - t), t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0, t \in ]\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{12}\psi_{1,0}(t) + \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{5}}\psi_{1,2}(t) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{12} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Psi(t), \end{aligned}$$

de même, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi_{1,2}(\tau) d\tau &= -\frac{\sqrt{5}}{20\sqrt{3}}\psi_{1,1}(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{5}}{20\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Psi(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi_{2,0}(\tau) d\tau &= \frac{1}{4}\psi_{2,0}(t) + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}\psi_{2,1}(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix} \Psi(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi_{2,1}(\tau) d\tau &= -\frac{\sqrt{3}}{12}\psi_{2,0}(t) + \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{5}}\psi_{2,2}(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{12} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{5}} \end{bmatrix} \Psi(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \psi_{2,2}(\tau) d\tau &= -\frac{\sqrt{5}}{20\sqrt{3}}\psi_{2,1}(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{20\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \Psi(t). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\int_0^t \Psi(\tau) d\tau = P_{6 \times 6} \Psi(t),$$

où

$$p_{6 \times 6} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix},$$

la matrice  $P$  peut s'écrire comme suit

$$p_{6 \times 6} = \frac{1}{2^2} \begin{bmatrix} L_{(3 \times 3)} & F_{(3 \times 3)} \\ 0_{(3 \times 3)} & L_{(3 \times 3)} \end{bmatrix}$$

où

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}.$$

## 2.3 Description de la Méthode des Ondelettes de Legendre

Dans cette section, on développe cette méthode sur un exemple abstrait.

### 2.3.1 La Résolution d'une Equation Différentielle d'Ordre $n$

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} a_{n+1}(t) y^{(n)}(t) + a_n(t) y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t) y(t) = f(t), t \in (0, 1] \\ y^{(i)}(0) = y_{i+1}, i = 0, \dots, n-1. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

On utilise la méthode des ondelettes de Legendre pour la résolution du problème (2.3.1).

On décompose  $y^{(n)}$  dans la base d'ondelette de Legendre (comme dans la section 2.1)

$$y^{(n)}(t) = Y^T \Psi(t). \quad (2.3.2)$$

La décomposition de  $y^{(n-1)}$ , est obtenue en intégrant l'équation (2.3.2) entre 0 et  $t$ ,

$$\int_0^t y^{(n)}(\tau) d\tau = \int_0^t Y^T \Psi(\tau) d\tau$$

$\Leftrightarrow$

$$y^{(n-1)}(t) - y_n = Y^T P \Psi(t),$$

on trouve

$$y^{(n-1)}(t) = Y^T P \Psi(t) + y_n d^T \Psi(t),$$

où  $d^T = \langle 1, \Psi(t) \rangle$ .

En général,

$$y^{(n-i)}(t) = Y^T P^i \Psi(t) + y_n d^T P^{i-1} \Psi(t) + y_{n-1} d^T P^{i-2} \Psi(t) + \dots + y_{n-i+1} d^T \Psi(t), \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.3.3)$$

Pour  $n = i$ , on obtient

$$y(t) = Y^T P^n \Psi(t) + y_n d^T P^{n-1} \Psi(t) + y_{n-1} d^T P^{n-2} \Psi(t) + \dots + y_1 d^T \Psi(t). \quad (2.3.4)$$

Les coefficients  $a_i$  et le second membre  $f$  de l'équation du problème (2.3.1) se décomposent,

$$f(t) = F^T \Psi(t) \text{ et } a_i(t) = A_i^T \Psi(t), \forall i = 1, \dots, n.$$

En remplaçant les expressions des  $y^{(i)}(t)$ ,  $i = 0, \dots, n$  des équations (2.3.3) dans l'équation du problème(2.3.1), on trouve

$$\begin{aligned} & A_{n+1}^T (\Psi \Psi^T)(t) Y + A_n^T \Psi(t) [Y^T P \Psi(t) + y_n d^T \Psi(t)] \\ & + A_{n-1}^T \Psi(t) [Y^T P^2 \Psi(t) + y_n d^T P \Psi(t) + y_{n-1} d^T \Psi(t)] \\ & + \dots \\ & + A_{n-i+1}^T \Psi(t) [Y^T P^i \Psi(t) + y_n d^T P^{i-1} \Psi(t) + y_{n-1} d^T P^{i-2} \Psi(t) + \dots + y_{n-i+1} d^T \Psi(t)] \\ & + \dots \\ & + A_1^T \Psi(t) [Y^T P^n \Psi(t) + y_n d^T P^{n-1} \Psi(t) + y_{n-1} d^T P^{n-2} \Psi(t) + \dots + y_1 d^T \Psi(t)] \\ = & F^T \Psi(t). \end{aligned}$$

On simplifie cette écriture

$$\left( \sum_{i=1}^{n+1} A_i^T (\Psi \Psi^T) (t) (P^T)^{n+1-i} \right) Y = F^T \Psi (t) - \sum_{i=1}^n A_i^T (\Psi \Psi^T) (t) \sum_{j=i}^n (P^T)^{j-i} y_j d. \quad (2.3.5)$$

On pose

$$nt = 2^j M.$$

On définit

$$t_l = (l - 1) \times h, l = 1, \dots, nt,$$

où  $h = \frac{1}{nt-1}$ .

On discrétise l'équation (2.3.5), on obtient un système de  $nt$  équations linéaires,

$$\left( \sum_{i=1}^{n+1} A_i^T (\Psi \Psi^T) (t_l) (P^T)^{n+1-i} \right) Y = F^T \Psi (t_l) - \sum_{i=1}^n A_i^T (\Psi \Psi^T) (t_l) \sum_{j=i}^n (P^T)^{j-i} y_j d, l = 1, \dots, nt.$$

L'écriture matricielle

$$AL \times Y = BL, \quad (2.3.6)$$

où

$$AL = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n+1} A_i^T (\Psi \Psi^T) (t_1) (P^T)^{n+1-i} \\ \sum_{i=1}^{n+1} A_i^T (\Psi \Psi^T) (t_2) (P^T)^{n+1-i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n+1} A_i^T (\Psi \Psi^T) (t_{nt}) (P^T)^{n+1-i} \end{bmatrix}$$

et

$$BL = \begin{bmatrix} F^T \Psi (t_1) - \sum_{i=1}^n A_i^T (\Psi \Psi^T) (t_1) \sum_{j=i}^n (P^T)^{j-i} y_j d \\ F^T \Psi (t_2) - \sum_{i=1}^n A_i^T (\Psi \Psi^T) (t_2) \sum_{j=i}^n (P^T)^{j-i} y_j d \\ \vdots \\ F^T \Psi (t_l) - \sum_{i=1}^n A_i^T (\Psi \Psi^T) (t_{nt}) \sum_{j=i}^n (P^T)^{j-i} y_j d \end{bmatrix}.$$

avec  $AL$  est une matrice de dimension  $nt \times nt$  et  $BL$  est un vecteur colonne de dimension  $nt$ . Pour la résolution de ce système on utilisera la factorisation LU.

La solution du problème (2.3.1) est obtenue, en substituant la solution du système linéaire (2.3.6) dans l'équation (2.3.4).

### 2.3.2 Récapitulatif de la Méthode

Le principe de la méthode des ondelettes de Legendre est caractérisé par les étapes suivantes :

- On écrit le problème dans la base d'ondelette de Legendre.
- Le résultat de l'étape précédente est un système d'équations algébrique linéaires.
- La solution du système de l'étape précédente est injectée dans la décomposition de la solution du problème.

Dans la suite de ce document, on note La méthode des ondelettes de Legendre par **LWM**.

### 2.3.3 L'Algorithme de la Méthode

$A_i, y_i, i = \overline{1, n}$  données

// Procédure pour la détermination du  $Y$

**Pour l de 1 à nt Faire**

**Pour i de 1 à n+1 Faire**

$$AL_l \leftarrow AL_l + A_i^T \times (\Psi\Psi^T)(t_l) (P^T)^{n+1-i}$$

**Fin pour**

**Pour i de 1 à n Faire**

$$s \leftarrow 0$$

**Pour j de i à n Faire**

$$s \leftarrow s + (P^T)^{j-i} y_j d$$

**Fin pour**

$$BL_l \leftarrow BL_l + A_i^T \times (\Psi\Psi^T)(t_l) \times s$$

**Fin pour**

$$BL_l \leftarrow F^T \Psi(t_l) - BL_l$$

**Fin pour**

**Résoudre le système  $AL \times Y = BL$**

// Procédure pour la détermination de la solution approchée

$$y = Y^T \times (P)^n \times \Psi(t)$$

**Pour i de 1 à n Faire**

$$y \leftarrow y + y_i d^T \times (P)^{i-1} \times \Psi(t)$$

**Fin pour**

## 2.4 La Technique de Découplage et Quasi-Linéarisation

Dans cette section, on va décrire une technique qui nous permet de découpler et de linéariser un système d'équations différentielles couplées et non linéaires.

Soit un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires sur  $[0, 1]$

$$\begin{cases} a_{1,n+1}(t, y_1, y_2, \dots, y_p) \frac{d^n}{dt^n} y_1(t) + \dots + a_{1,1}(t, y_1, y_2, \dots, y_p) y_1(t) = f_1(t, y_2, \dots, y_p) \\ a_{2,n+1}(t, y_1, y_2, \dots, y_p) \frac{d^n}{dt^n} y_2(t) + \dots + a_{2,1}(t, y_1, y_2, \dots, y_p) y_2(t) = f_2(t, y_1, y_3, \dots, y_p) \\ \vdots \\ a_{p,n+1}(t, y_1, y_2, \dots, y_p) \frac{d^n}{dt^n} y_p(t) + \dots + a_{p,1}(t, y_1, y_2, \dots, y_p) y_p(t) = f_p(t, y_1, y_2, \dots, y_{p-1}). \end{cases} \quad (2.4.1)$$

avec les conditions aux limites  $\forall i = \overline{0, n-1}$

$$\begin{cases} \frac{d^i}{dt^i} y_1(0) = y_{1,i+1} \\ \frac{d^i}{dt^i} y_2(0) = y_{2,i+1} \\ \vdots \\ \frac{d^i}{dt^i} y_p(0) = y_{p,i+1}. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Pour découpler et linéariser ce système on procède comme suit :

1. Etant donnés des profils des solutions du problème (2.4.1)-(2.4.2). Eventuellement, on peut prendre

$$\begin{cases} y_1^{(0)}(t) = 1 \\ y_2^{(0)}(t) = 1 \\ \vdots \\ y_p^{(0)}(t) = 1. \end{cases}$$

2. La première itération

$$\begin{cases} A_{1,n+1}(t, y_1^{(0)}, \dots, y_p^{(0)}) \frac{d^n}{dt^n} Y_1^{(1)}(t) + \dots + A_{1,1}(t, y_1^{(0)}, \dots, y_p^{(0)}) Y_1^{(1)}(t) = F_1(t, y_1^{(0)}, \dots, y_p^{(0)}) \\ A_{2,n+1}(t, y_1^{(0)}, \dots, y_p^{(0)}) \frac{d^n}{dt^n} Y_2^{(1)}(t) + \dots + A_{2,1}(t, y_1^{(0)}, \dots, y_p^{(0)}) Y_2^{(1)}(t) = F_2(t, y_1^{(0)}, \dots, y_p^{(0)}) \\ \vdots \\ A_{p,n+1}(t, y_1^{(0)}, \dots, y_p^{(0)}) \frac{d^n}{dt^n} Y_p^{(1)}(t) + \dots + A_{p,1}(t, y_1^{(0)}, \dots, y_p^{(0)}) Y_p^{(1)}(t) = F_p(t, y_1^{(0)}, \dots, y_p^{(0)}). \end{cases}$$

On obtient un système d'équations différentielles linéaires découplées (ce schéma n'est pas unique),

$$\begin{cases} \hat{a}_{1,n+1}^{(0)}(t) \frac{d^n}{dt^n} y_1^{(1)}(t) + \dots + \hat{a}_{1,1}^{(0)}(t) y_1^{(1)}(t) = \hat{f}_1^{(0)}(t) \\ \hat{a}_{2,n+1}^{(0)}(t) \frac{d^n}{dt^n} y_2^{(1)}(t) + \dots + \hat{a}_{2,1}^{(0)}(t) y_2^{(1)}(t) = \hat{f}_2^{(0)}(t) \\ \vdots \\ \hat{a}_{p,n+1}^{(0)}(t) \frac{d^n}{dt^n} y_p^{(1)}(t) + \dots + \hat{a}_{p,1}^{(0)}(t) y_p^{(1)}(t) = \hat{f}_p^{(0)}(t), \end{cases}$$



où

$$\widehat{a}_{i,j}^{(0)}(t) = a_{i,j} \left( t, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_p^{(0)} \right) \text{ et } \widehat{f}_i^{(0)}(t) = f_i \left( t, y_2^{(0)}, y_3^{(0)}, \dots, y_p^{(0)} \right), \forall i = \overline{1, p} \text{ et } j = \overline{1, n+1},$$

on obtient les solutions  $y_i^{(1)}$  ( $i = 1, \dots, p$ ), en appliquant la méthode **LWM** pour chaque équation indépendamment.

3. On continue la procédure, à la  $k^{\text{ième}}$  itération, on a le système suivant

$$\begin{cases} \widehat{a}_{1,n+1}^{(k)}(t) \frac{d^n}{dt^n} y_1^{(k+1)}(t) + \dots + \widehat{a}_{1,1}^{(k)}(t) y_1^{(k+1)}(t) = \widehat{f}_1^{(k)}(t) \\ \widehat{a}_{2,n+1}^{(k)}(t) \frac{d^n}{dt^n} y_2^{(k+1)}(t) + \dots + \widehat{a}_{2,1}^{(k)}(t) y_2^{(k+1)}(t) = \widehat{f}_2^{(k)}(t) \\ \vdots \\ \widehat{a}_{p,n+1}^{(k)}(t) \frac{d^n}{dt^n} y_p^{(k+1)}(t) + \dots + \widehat{a}_{p,1}^{(k)}(t) y_p^{(k+1)}(t) = \widehat{f}_p^{(k)}(t), \end{cases}$$

où

$$\widehat{a}_{i,j}^{(k)}(t) = a_{i,j} \left( t, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_p^{(k)} \right) \text{ et } \widehat{f}_i^{(k)}(t) = f_i \left( t, y_2^{(k)}, y_3^{(k)}, \dots, y_p^{(k)} \right), \forall i = \overline{1, p} \text{ et } j = \overline{1, n+1}.$$

Les itérations se poursuivent jusqu'à ce  $\text{Max}(\|y_1^{(k+1)} - y_1^{(k)}\|, \|y_2^{(k+1)} - y_2^{(k)}\|, \dots, \|y_p^{(k+1)} - y_p^{(k)}\|)$  soit suffisamment petit pour terminer la procédure.

Dans la suite de ce document, on note La méthode de découplage et quasi-linéarisation par **TDQL**.

### 2.4.1 Algorithme

#### Etape(1)

Donner  $\left\{ y_i^{(0)} \right\}_{i=\overline{1,p}}$  (profils initiaux),  $k = 0, \varepsilon$ .

#### Etape (2)

Calculer  $\widehat{a}_{i,j}^{(k)}(t), \widehat{f}_i^{(k)}(t)$

#### Etape (3)

$y_i^{(k+1)} = \text{LWM} \left( \left( \widehat{a}_{i,j}^{(k)}(t) \right)_{j=\overline{1,n+1}}, \widehat{f}_i^{(k)}(t) \right), \forall i = \overline{1, p}$ .

Si  $\text{Max} \left\{ \|y_1^{(k+1)} - y_1^{(k)}\| \right\}_{i=\overline{1,p}} < \varepsilon$ , stop

sinon  $k = k + 1$ , aller à l'étape (2).

# Tests et Simulation Numérique

---

Dans le premier chapitre, on a vu plusieurs modèles mathématiques qui décrivent la dynamique du glucose-insuline et on a choisi le modèle minimal couplé pour la simulation numérique. Ensuite, dans le deuxième chapitre, on a vu la méthode **LWM** et **TDQL** pour la résolution des systèmes des équations différentielles non linéaires.

Dans ce chapitre, on va tester et prouver l'efficacité, la stabilité numérique et la précision de cette méthode (la combinaison de **LWM** avec **TDQL**). Puis, on simule le modèle minimal couplé de la dynamique du glucose-insuline décrit dans le chapitre 1.

## 3.1 Test de la Méthode

Dans un premier temps, On va tester la méthode **LWM** sur un exemple.

On considère le problème de valeurs aux limites suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} a_6(t) y^{(5)}(t) + a_5(t) y^{(4)}(t) + a_4(t) y^{(3)}(t) + a_3(t) y''(t) + a_2(t) y'(t) + a_1(t) y(t) = f(t), t \in ]0, 1] \\ \left\{ \begin{array}{l} y^{(4)}(0) = y^{(3)}(0) = 1 \\ y''(0) = 3 \\ y'(0) = 2 \\ y(0) = 0; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} a_6(t) = t \\ a_5(t) = \exp(-t) \\ a_4(t) = \frac{1}{t+1} \\ a_3(t) = -1 \\ a_2(t) = 1 \\ a_1(t) = -1 \\ f(t) = \frac{t^2}{t+1} \exp(t) - t^2 + t + 1. \end{array} \right.$$

La solution analytique de ce problème est donnée par

$$y(t) = \exp(t) + t^2 + t - 1.$$

On définit l'erreur commise entre la solution exacte et la solution approchée par,

$$E = \|y_{ap} - y\|_2, \quad (3.1.1)$$

où

$y_{ap}$  : représente la solution tirée de **LWM**.

$y$  : représente la solution exacte en  $M \times 2^j$  points de collocations.

$\|\cdot\|_2$  est la norme euclidienne.

**Remarque 3.1.1** Cette erreur est globale, elle comporte l'erreur de troncature due à l'ordinateur et l'erreur de la méthode.

Pour  $j = 0, 1, 2$  et  $M = 1, 2, \dots, 9$ , les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant

$M$	$j$	$E$	$M$	$j$	$E$	$M$	$j$	$E$
1		$4.4087e - 001$	1		$1.1638e - 001$	1		$3.2472e - 002$
2		$2.0760e - 002$	2		$2.8742e - 003$	2		$4.1694e - 004$
3		$1.3345e - 003$	3		$1.0282e - 004$	3		$7.5629e - 006$
4		$8.4294e - 005$	4		$3.0007e - 006$	4		$1.0795e - 007$
5	0	$3.3191e - 006$	5	1	$6.6657e - 008$	5	2	$1.2253e - 009$
6		$1.5739e - 007$	6		$1.3498e - 009$	6		$1.2108e - 011$
7		$4.3086e - 009$	7		$2.1310e - 011$	7		$1.0090e - 013$
8		$1.7180e - 010$	8		$3.3823e - 013$	8		$2.4202e - 015$
9		$3.3096e - 012$	9		$4.1997e - 015$	9		$2.1444e - 015$

Dans un deuxième temps, on teste la combinaison de LWM avec TDQL.

On considère le système d'équations différentielles non linéaires

$$\begin{cases} y_2(t) y_1''(t) + y_3(t) y_2(t) y_1'(t) - y_2(t) y_1^2(t) = y_3(t) - \exp(t) + 1 \\ y_2^{(3)}(t) + y_2''(t) + y_1(t) y_2(t) = 1 \\ -y_3'(t) + y_3(t) = t; \end{cases}, t \in ]0, 1]$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} y_1(0) = y_1'(0) = 1 \\ y_2''(0) = -y_2'(0) = y_2(0) = 1 \\ y_3(0) = 1. \end{cases}$$

La solution exacte de ce problème est

$$\begin{cases} y_1(t) = \exp(t) \\ y_2(t) = \exp(-t) \\ y_3(t) = t + 1. \end{cases}$$

On utilisant la formule de l'erreur (3.1.1) et pour  $j = 0, 1, 2$  et  $M = 1, 2, \dots, 9$ , on obtient les résultats suivants.

L'erreur pour  $y_1$

$j$	$M$	$E$	$j$	$M$	$E$	$j$	$M$	$E$
0	1	$1.7434e - 001$	1	1	$5.9184e - 002$	2	1	$1.6954e - 002$
	2	$1.9101e - 002$		2	$2.8498e - 003$		2	$4.1460e - 004$
	3	$1.3074e - 003$		3	$1.1006e - 004$		3	$8.0867e - 006$
	4	$7.8569e - 005$		4	$2.9673e - 006$		4	$1.0714e - 007$
	5	$3.3879e - 006$		5	$7.2858e - 008$		5	$1.3569e - 009$
	6	$1.4308e - 007$		6	$1.3263e - 009$		6	$1.7391e - 011$
	7	$4.6546e - 009$		7	$2.9738e - 011$		7	$7.3025e - 012$
	8	$1.3769e - 010$		8	$6.6628e - 012$		8	$7.4468e - 012$
	9	$1.2855e - 011$		9	$6.5208e - 012$		9	$3.2349e - 015$

L'erreur pour  $y_2$

$j$	$M$	$E$	$j$	$M$	$E$	$j$	$M$	$E$
0	1	$6.6667e - 002$	1	1	$1.9983e - 002$	2	1	$5.8765e - 003$
	2	$7.0847e - 003$		2	$1.0415e - 003$		2	$1.5202e - 004$
	3	$4.8624e - 004$		3	$3.8453e - 005$		3	$2.8125e - 006$
	4	$2.8260e - 005$		4	$1.0842e - 006$		4	$3.9286e - 008$
	5	$1.2574e - 006$		5	$2.5095e - 008$		5	$4.3033e - 010$
	6	$5.0573e - 008$		6	$5.3907e - 010$		6	$1.2363e - 010$
	7	$1.4927e - 009$		7	$1.0403e - 010$		7	$1.2715e - 010$
	8	$7.9167e - 011$		8	$1.1016e - 010$		8	$1.3196e - 010$
	9	$1.1856e - 010$		9	$1.1248e - 010$		9	$3.3620e - 015$

L'erreur pour  $y_3$

$j$	$M$	$E$	$j$	$M$	$E$	$j$	$M$	$E$
0	1	$2.2204e - 016$	1	1	$3.8459e - 016$	2	1	0
	2	$5.4390e - 016$		2	$3.1402e - 016$		2	$2.2204e - 016$
	3	$5.8747e - 016$		3	$3.8459e - 016$		3	$4.4409e - 016$
	4	$4.4409e - 016$		4	$1.4390e - 015$		4	$5.8747e - 016$
	5	$3.1402e - 016$		5	$7.0217e - 016$		5	$1.5896e - 015$
	6	$1.0878e - 015$		6	$1.6910e - 015$		6	$1.1749e - 015$
	7	$7.3644e - 016$		7	$2.3394e - 015$		7	$1.5896e - 015$
	8	$5.8747e - 016$		8	$1.6467e - 015$		8	$1.8344e - 015$
	9	$9.1551e - 016$		9	$1.5701e - 015$		9	$3.1106e - 015$

On fait remarquer que dans l'erreur (3.1.1) comporte aussi l'erreur de découplage.

Au vu de ces résultats, il n'est pas difficile de voir que l'augmentation des points de collocations influés d'une façon très claire sur la précision de notre méthode, contrairement, au nombre de niveau de la décomposition.

## 3.2 La Simulation du Modèle Minimal Couplé

Le Modèle Minimal est pour le moment le modèle standard pour l'interprétation de l'IVGTT (Intra Venous Glucose Tolerance Test), dans lequel on administre un bolus intraveineuse de glucose qui accroît de manière aigue le taux de glucose dans le sang, lequel à son tour stimule la sécrétion d'insuline par le pancréas. Les niveaux de glucose et d'insuline dans le sang sont mesurés à des intervalles fréquents pendant trois heures.

Les données suivantes représentent les mesure de glucose et de l'insuline d'une personne normale selon le test IVGTT [17] :

temps [min]	glucose [mg/dl]	insuline [ $\mu$ U/ml]
0	92	11
2	350	26
4	287	130
6	251	85
8	240	51
10	216	49
12	211	45
14	205	41
16	196	35
19	192	30
22	172	30
27	163	27
32	142	30
42	124	22
52	105	15
62	92	15
72	84	11
82	77	10
92	82	8
102	81	11
122	82	7
142	82	8
162	85	8
182	90	7

En comparant ces résultat avec les résultats obtenu lorsqu'on applique notre méthode au modèle minmal couplé, pour  $0 \leq t$  (en minute)  $\leq 182$

$$\begin{cases} G'(t) = -(S_g + X(t))G(t) + S_g G_b, G(0) = G_0 \\ X'(t) = -p_3(X(t) + S_i(I(t) - I_b)), X(0) = X_0 \\ I'(t) = \gamma(G(t) - G_T)^+ t - k(I - I_b), I(0) = I_0, \end{cases}$$

où

$$(G(t) - G_T)^+ = \begin{cases} (G(t) - G_T), & \text{si } G(t) > G_T \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec les données

$G_0$	=	279
$I_0$	=	363.7
$X_0$	=	0
$G_b$	=	92
$I_b$	=	11
$S_g$	=	$2e - 2$
$S_i$	=	$5.0e - 4$
$G_T$	=	83.7
$k_3$	=	0.025
$k$	=	0.27
$\gamma$	=	.0041

Les données mathématiques

$nc$	=	23
$j$	=	2.

Les résultats trouvés sont représentés dans les figures (4) et (5)

**Discussion**

Les figures (4)-(5) montrent que le modèle représente bien l'expérience. Après une injection d'une quantité de glucose ( $G = 75g$ ), on constate une augmentation brusque de glucose qui provoque une augmentation de l'insuline, ensuite, ils diminuent jusqu'à atteindre la normale après 60 minutes.



# Conclusion et Perspectives

---

Les deux premiers exemples à la section 3.1 nous prouvent la stabilité numérique et la précision de cette méthode.

On a appliqué dans ce travail, la combinaison de LWM avec TDQL à la simulation du modèle minimal couplé, elle donne des résultats encourageants

Le choix du modèle est basé sur deux points principaux, l'un c'est qu'il existe dans le milieu scientifique plusieurs travaux qui ont traités ce modèle, ça nous permet de comparer nos résultats avec le leur. L'autre point, c'est que ce modèle n'est pas compliqué avec quelques paramètres données, représenté par des équations différentielles non linéaires.

Les perspectives pour ce travail, on peut proposer un autre modèle minimal basé sur les équations différentielles fractionnaires pour améliorer la représentation de ces données.

# Bibliographie

- [1] J.S. Gu, W.S. Jiang, The Haar wavelets operational matrix of integration, *Int. J. Syst. Sci.* 27 (1996) 623–628.
- [2] Razzaghi, M. and S. Yousefi, Legendre wavelets direct method for variational problems, *Math. Comput. Simul.* 53, 2000, 185-192.
- [3] M.RAZZAGHI, S.YOUSEFI, The Legendre wavelets Operational matrix of integration. *International Journal of Systems Science* 32, 2001, 495-5002.
- [4] F.Mohammadi, M.M.Hosseini, A new Legendre wavelet operational matrix of derivative and its applications in solving the singular ordinary differential equations, *Journal of the Franklin Institute* 348(2011)1787–1796.
- [5] Razzaghi M. and Yousefi S, Legendre wavelets method for constrained optimal control problems, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 25 :529–539, 2002.
- [6] K. Maleknejad, M. Tavassoli Kajani, and Y. Mahmoudi, Numerical solution of linear Fredholm and Volterra integral equation of the second kind by using Legendre wavelets. *Journal Kybernet*, 32 (2003), 1530-1539.
- [7] Yousefi S, Numerical solution of Abel’s integral equation by using Legendre wavelets, *Applied Mathematics and Computation* 175 (2006),574–580.
- [8] Yung-Ji Tarng and Anthony R. G, Nonlinear boundary value problems. A decoupling technique with quasi-linearization and orthogonal collocation, *Industrial & engineering chemistry research Y.* 1987, vol. 26, No. 2, pages 311-318.
- [9] Karen Saxe. *Beginning Functional Analysis*. Springer-Verlag New York, Inc., 2002.

- 
- [10] Richard N. Bergman, Minimal Model : Perspective from 2005, Insulin Sensitivity : Methods, HORMONE RESEARCH, January 20, 2006.
- [11] Esben Friis-Jensen, Modeling and Simulation of Glucose-Insulin Metabolism, 2007.
- [12] Bolie VW : Coefficients of normal blood glucose regulation. J Appl Physiol 1961, 16 :783-788.
- [13] Bergman RN : Toward physiological understanding of glucose tolerance : the minimal model approach. Lilly Award Lecture. Diabetes 1989 ; 38 : 1512–1527.
- [14] Derouich M, Boutayeb A : The effect of physical exercise on the dynamics of glucose and insulin. Journal of Biomechanics 2002, 35 :911-917.
- [15] De Gaetano A, Arino O : Mathematical Modelling of the Intravenous Glucose Tolerance Test. J Math Biol 2000, 40 :136-168.
- [16] S. Panunzi, P. Palumbo, A. De Gaetano, Modeling IVGTT Data With Delay Differential Eq, Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica 2004.
- [17] Pacini, G. and Bergman, R.N. (1986) MINMOD, a computer program to calculate insulin sensitivity and pancreatic responsivity from the frequently sampled intravenous glucose tolerance test. Computer Methods and Programs in Biomedicine 23 : 113-122.
- [18] [www.oms.org](http://www.oms.org).
- [19] [www.idf.org](http://www.idf.org).
- [20] David McCormick, Orthonormal Bases in Hilbert Spaces, MA247 Mathematical Excursions, February 12, 2007.

# **Annexe**

---

## **5.1 Annexe A "Diabète"**

Selon L'atlas du diabète 2012, 371 millions de personnes souffrent de la maladie [19].

### 5.1.1 Les Tests

Le diabète est l'une des raisons pour lesquelles de nombreux modèles mathématiques ont été réalisés pour décrire la dynamique du glucose-insuline. Ces modèles mathématiques sont utilisés pour interpréter des tests.

Les modèles et les tests peuvent contribuer à améliorer la situation de nombreuses personnes souffrant de diabète [11].

#### OGTT (Oral Glucose Tolerance Test)

Le test le plus commun de la tolérance au glucose est le test de tolérance au glucose par voie orale. Vous ne pouvez pas manger ni boire après minuit la veille de l'épreuve. Pour le test, vous serez invité à boire un liquide contenant une certaine quantité de glucose. Votre sang sera pris avant que vous faites cela, et encore une fois toutes les 30 à 60 minutes après que vous buvez la solution. Le test dure jusqu'à 3 heures.

Les résultats du test sont tirés à partir des interprétations suivantes :

moins de 140 mg/dL	La tolérance au glucose normale
à partir 140 a 200 mg/dL	pré-diabète
plus de 200 mg/dL	diabète

#### IVGTT (Intra Venous Glucose Tolerance Test)

Le test de tolérance au glucose par voie intraveineuse (IVGTT) est rarement utilisé. Dans cet essai, le glucose est injecté dans une veine pendant 3 minutes. Les niveaux d'insuline dans le sang sont mesurés avant l'injection, et de nouveau à 1 et 3 minutes après l'injection, même si le calendrier peut varier.

#### FBG (Fasting Blood Glucose)

Un troisième test et un test beaucoup plus facile, est la glycémie à jeun. Voici le sujet / patient doit jeûner pendant une période de 8-10 heures, puis on mesure le taux de glucose.

Les résultats du test peuvent être interprétés comme suit :

à partir 70 a 99 mg/dL	La tolérance au glucose normale
à partir 100 a 125 mg/dL	pré-diabète
plus de 126 mg/dL	diabète

### 5.1.2 Facteurs de Risque

Les facteurs de risque du diabète de type 1 sont encore l'objet de recherches. Toutefois, avoir un membre de la famille atteints de diabète de type 1 augmente légèrement le risque de développer la maladie. Les facteurs environnementaux et l'exposition à certaines infections virales ont également été associés au risque de développer un diabète de type 1.

Plusieurs facteurs de risque ont été associés au diabète de type 2 et comprennent [19] :

- Les antécédents familiaux de diabète
- Embonpoint
- Mauvaise alimentation
- L'inactivité physique
- L'augmentation de l'âge
- L'hypertension artérielle
- Origine ethnique
- Intolérance au glucose (IGT) \*
- Antécédents de diabète gestationnel
- Une mauvaise nutrition pendant la grossesse

Intolérance au glucose (IGT) est une catégorie supérieure à la glycémie normale, mais en dessous du seuil pour le diagnostic de diabète.

Changements dans l'activité physique et l'alimentation liée au développement rapide et l'urbanisation ont conduit à une forte augmentation du nombre de personnes qui développent le diabète.

Les femmes enceintes qui sont en surpoids, ont été diagnostiqués avec la tolérance au glucose (IGT), ou ont des antécédents familiaux de diabète sont tous à un risque accru de développer un diabète gestationnel (GDM). En outre, après avoir été précédemment diagnostiqué avec le diabète gestationnel ou d'être de certains groupes ethniques met les femmes à un risque accru de développer un diabète gestationnel.

### 5.1.3 Prévention

À l'heure actuelle, le diabète de type 1 ne peut être empêchée. Les facteurs environnementaux qui sont censés générer le processus qui aboutit à la destruction des cellules productrices

d'insuline de l'organisme sont encore sous enquête.

Il y a beaucoup de preuves que les changements de style de vie (réalisation d'un poids santé et l'activité physique modérée) peut aider à prévenir le développement du diabète de type 2.

L'obésité, en particulier l'obésité abdominale, est liée au développement du diabète de type 2. La perte de poids améliore la résistance à l'insuline et de réduire l'hypertension. Les gens qui sont en surpoids ou obèses devraient donc être encouragés à atteindre et maintenir un poids corporel sain.

L'activité physique est l'un des principaux piliers de la prévention du diabète. Augmentation de l'activité physique est importante pour maintenir la perte de poids et est liée à la réduction de la pression artérielle, réduit fréquence cardiaque de repos, une sensibilité accrue à l'insuline, l'amélioration de la composition corporelle et le bien-être psychologique.

Un régime alimentaire équilibré et nutritif est essentiel pour la santé. Une alimentation saine réduit les facteurs de risque des maladies cardio-vasculaires.

D'autres comportements à considérer [19] :

### **Tabac**

Un facteur de risque bien établi pour de nombreuses maladies chroniques, dont le diabète et ses complications. Ainsi que d'autres effets néfastes, le tabagisme augmente accumulation de graisse abdominale et la résistance à l'insuline. Tous les fumeurs devraient être encouragés à arrêter de fumer. Toutefois, le gain de poids est fréquente quand cesser de fumer et donc des conseils diététiques à éviter le gain de poids devrait également être accordée (par exemple la gestion des fringales et les symptômes de sevrage à l'aide de courtes périodes d'activité physique comme une activité anti-stress, plutôt que de manger des collations).

### **Le stress et la dépression**

Il existe des preuves d'un lien entre la dépression et le diabète et les maladies cardiovasculaires.

## Les habitudes de sommeil

deux courts (<6h) et à long (> 9h) durées de sommeil peuvent être associés à un risque plus élevé de développer un diabète de type 2. La privation de sommeil peut nuire à l'équilibre des hormones régulant la prise alimentaire et l'équilibre énergétique. Durées longues de sommeil peuvent être un signe de troubles respiratoires du sommeil ou la dépression et doivent être traités de façon appropriée. Il y a aussi un lien étroit entre l'obésité et le syndrome d'apnée obstructive du sommeil (AOS), la forme la plus fréquente de troubles respiratoires du sommeil.

### 5.1.4 Diagnostic et traitement

On peut poser un diagnostic précoce à l'aide d'un test sanguin relativement peu coûteux.

Le traitement du diabète impose l'abaissement de la glycémie et la réduction des autres facteurs de risque de lésion des vaisseaux sanguins. L'arrêt du tabac est également important pour éviter les complications.

Les interventions économiques et réalisables dans les pays en développement sont les suivantes :

- contrôle de la glycémie modérée. Les personnes atteintes de diabète de type 1 ont besoin d'insuline; celles atteintes de diabète de type 2 peuvent être traitées par une médication par voie orale, mais peuvent également avoir besoin d'insuline.
- contrôle de la tension artérielle.
- soin des pieds.

Les autres interventions économiques comprennent :

- le dépistage de la rétinopathie (qui provoque la cécité).
- le contrôle des lipides sanguins (afin de réguler les concentrations de cholestérol).
- le dépistage des premiers signes d'une maladie rénale liée au diabète [18].

### 5.1.5 Activités de l'OMS pour prévenir et combattre le diabète

L'OMS vise à susciter et à soutenir l'adoption de mesures efficaces de surveillance, de prévention et de lutte contre le diabète et ses complications, en particulier dans les pays à revenu faible et intermédiaire. À cette fin, elle :

- fournit des lignes directrices scientifiques sur la prévention du diabète;



- établit des normes et des critères de soins pour cette maladie ;
- sensibilise à l'épidémie mondiale de diabète, notamment en partenariat avec la Fédération internationale du Diabète pour la célébration de la Journée mondiale du diabète (14 novembre) ;
- assure la surveillance du diabète et de ses facteurs de risque.

La Stratégie mondiale de l'OMS pour l'alimentation, l'exercice physique et la santé vient compléter les travaux de l'OMS sur le diabète en se concentrant sur des approches à l'échelle des populations visant à promouvoir un régime alimentaire sain et un exercice physique régulier, réduisant ainsi le problème mondial toujours plus grand posé par le surpoids et l'obésité [18].

## 5.2 Annexe B

### 5.2.1 Notions De Base

**Définition 5.2.1** *L'espace  $L^2(a, b)$  est l'espace des fonctions carrées sommables ou carrées intégrables i.e.  $f \in L^2(a, b)$  si et seulement si  $\int_a^b f^2(x) dx < \infty$ .*

On définit le produit scalaire sur  $L^2(a, b)$  par,

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x) dx; u, v \in L^2(a, b).$$

Soit  $v = \{v_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset L^2(a, b)$ .

**Définition 5.2.2** *On dit que  $v$  est orthogonale si,*

$$\int_a^b (v_i v_j)(x) dx = 0, i \neq j, \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

**Définition 5.2.3** *On dit que  $v$  est orthonormale, si  $v$  est orthogonale et de plus*

$$\int_a^b v_i^2(x) dx = 1, \forall i \in \mathbb{N}.$$

### 5.2.2 Polynôme De Legendre

On appelle polynôme de Legendre de degré  $m + 1$ , le polynôme défini par la relation de récurrence

$$(m + 1)p_{m+1}(t) = (2m + 1)tp_m(t) - mp_{m-1}(t), m = 1, 2, \dots,$$

initialisé par

$$p_0(t) = 1, p_1(t) = t.$$

Les polynômes de Legendre satisfont les relations de récurrence suivantes

1.  $(2i + 1)p_i(t) = p'_{i+1}(t) - p'_{i-1}(t)$ .
2.  $p'_{i+1}(t) = tp'_i(t) + (i + 1)p_i(t)$ .

---

**Tableau 1** : Les six premiers polynômes de Legendre

---

$$p_0(t) = 1$$

$$p_1(t) = t$$

$$p_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$$

$$p_3(t) = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t$$

$$p_4(t) = \frac{35}{8}t^4 - \frac{30}{8}t^2 + \frac{3}{8}$$

$$p_5(t) = \frac{63}{8}t^5 - \frac{70}{8}t^3 + \frac{15}{8}.$$

---

Les polynômes de Legendre sont solutions de l'équation différentielle

$$(1 - t^2) y''(t) - 2ty'(t) + m(m + 1) y(t) = 0.$$

**Théorème 5.2.1** *Les polynômes de Legendre forme une famille orthogonale sur  $[-1, 1]$  telle que,*

$$\int_{-1}^1 p_i(t) p_n(t) dt = \begin{cases} 0; i \neq j \\ \frac{2}{2i+1}; i = j; \end{cases} \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

**Preuve.** Si  $i \neq j$ , On définit l'équation différentielle de Legendre par

$$(1 - t^2) y''(t) - 2ty'(t) + i(i + 1) y(t) = 0; i \in \mathbb{N}. \quad (5.2.1)$$

Comme les  $p_i$  sont des solutions pour cette équation, alors,

$$(1 - t^2) p_i''(t) - 2tp_i'(t) + i(i + 1) p_i(t) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{d}{dt} ((1 - t^2) p_i'(t)) + i(i + 1) p_i(t) = 0 \quad (5.2.2)$$

de même,

$$(1 - t^2) p_j''(t) - 2tp_j'(t) + j(j + 1) p_j(t) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{d}{dt} ((1 - t^2) p_j'(t)) + j(j + 1) p_j(t) = 0 \quad (5.2.3)$$

On multiplie l'équation (5.2.2) par  $p_j$  et l'équation (5.2.3) par  $p_i$ , on obtien,

$$p_j(t) \frac{d}{dt} ((1 - t^2) p_i'(t)) + i(i + 1) p_i(t) p_j(t) = 0, \quad (5.2.4)$$

et

$$p_i(t) \frac{d}{dt} ((1 - t^2) p_j'(t)) + j(j + 1) p_i(t) p_j(t) = 0 \quad (5.2.5)$$

l'équation (5.2.4)-(5.2.5), on trouve

$$\frac{d}{dt} ((1 - t^2) (p_i'(t) p_j(t) - p_i(t) p_j'(t))) + (i(i + 1) - j(j + 1)) p_i(t) p_j(t) = 0. \quad (5.2.6)$$

On intègre (5.2.6) sur  $[-1, 1]$ , on obtien

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \frac{d}{dt} ((1-t^2) (p'_i(t) p_j(t) - p_i(t) p'_j(t))) + (i(i+1) - j(j+1)) \int_{-1}^1 p_i(t) p_j(t) \\
&= [(1-t^2) (p'_i(t) p_j(t) - p_i(t) p'_j(t))]_{t=-1}^{t=1} + (i(i+1) - j(j+1)) \int_{-1}^1 p_i(t) p_j(t) \\
&= (i(i+1) - j(j+1)) \int_{-1}^1 p_i(t) p_j(t) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Si  $i = j$

Multiplier la relation de réccurence (2) par  $p_i$ , et on intègre sur  $(-1, 1)$ , on obtient

$$i \int_{-1}^1 p_i^2(t) dt = \int_{-1}^1 t p_i(t) p'_i(t) dt - \int_{-1}^1 p_i(t) p'_{i-1}(t) dt. \quad (5.2.7)$$

On intègre par partie le second membre dans l'équation (5.2.7), on obtient,

$$\int_{-1}^1 t p_i(t) p'_i(t) dt = \frac{t}{2} [p_i^2(t)]_{t=-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p_i^2(t) dt$$

$\Rightarrow$

$$\int_{-1}^1 t p_i(t) p'_i(t) dt = 1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p_i^2(t) dt. \quad (5.2.8)$$

Si on remplace l'équation (5.2.8) l'équation dans (5.2.7), on obtient,

$$\int_{-1}^1 p_i^2(t) dt = \frac{2}{2i+1}.$$

□

### 5.2.3 Bases de $L^2$

Si on applique la procédure de Gram-Schmidt aux fonctions

$$1, x, x^2, \dots$$

sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , on obtient la base orthogonale consistée des polynômes de Legendre [9].

**Proposition 5.2.1** [20] *Soit  $v$  une famille orthogonale d'un espace  $H$  de Hilbert.*

*Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1-  $v$  est une base orthonormale de  $H$ .

2-  $\langle x, v_i \rangle = 0, \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0, x \in H$ .

**Théorème 5.2.2** *Les ondelettes de Legendre (déjà cité dans le chapitre 2) forment une base orthonormale sur  $L^2(0, 1)$ .*

**Preuve.** *Pour montrer que  $\{\psi_{n,m}(t)\}_{n,m \in \mathbb{N}}$  est une base de  $L^2(0, 1)$  il suffit de montrer la deuxième propriété de la proposition précédente.* □

## 5.3 Annexe C

### 5.3.1 Exemple 1

```
clc,clear all
for nc = 2 :11 ;
for j = 0 :2;
nt = 2^j*nc;
t = (0 :1/(nt-1) :1)';
a1 = -ones(nt,1);
a2 = ones(nt,1);
a3 = -ones(nt,1);
a4 = 1./(t+1);
a5 = exp(-t);
a6 = t;
y0(1) = 0;
y0(2) = 2;
y0(3) = 3;
y0(4) = 1;
y0(5) = 1;
ft = (t+1./(t+1)-1).*exp(t) -t.^2+t+1;
At = [a1';a2';a3';a4';a5';a6'];
y = MWL(t,At,ft,y0,nc,j);
er(nc-1,j+1) = norm(y - (exp(t)+t.^2+t-1));
end
end
disp(er)
```

### 5.3.2 Exemple 2

```
clc,clear all
for nc = 2 :10;
```

```
for j = 0 :2;
nt = 2^j*nc;
t = (0 :1/(nt-1) :1)';
% Les conditions aux limites
u0(1) = 1;
u0(2) = 1;
% Profile initiaux
p_u = ones(nt,1);
f1 = @(w)(1 - exp(t) + w);
Au = @(w,v)([-ones(1,nt);v'.*w';v']);
u_ex = exp(t);
% Les conditions aux limites
v0(1) = 1;
v0(2) = -1;
v0(3) = 1;
% Profile initiaux
p_v = ones(nt,1);
f3 = ones(nt,1);
Av = @(u)([u';zeros(1,nt);ones(1,nt);ones(1,nt)]);
v_ex = exp(-t);
% Les conditions aux limites
w0(1) = 1;
% Profile initiaux
p_w = ones(nt,1);
f2 = t;
Aw = [ones(1,nt);-ones(1,nt)];
w_ex = t+1;
eps = 1e-5;
er = 1;
while er>=eps
```



```

v = MWL(t,Av(p_u),f3,v0,nc,j);
w = MWL(t,Aw,f2,w0,nc,j);
u = MWL(t,Au(w,v),f1(w),u0,nc,j);
er = max([norm(u-p_u),norm(w-p_w),norm(v-p_v)]);
p_u = u;
p_w = w;
p_v = v;
end
er1(nc-1,j+1) = norm(u-u_ex);
er2(nc-1,j+1) = norm(v-v_ex);
er3(nc-1,j+1) = norm(w-w_ex);
end
end
format short e
er1,er2,er3

```

### 5.3.3 Le Modèle Minimal

```

clc,clear all,close all
% _____|Data of "minimal model"|_____ %
%|
%| Gb : basal glucose
%| Ib : basal insulin
%| G0 : initial glucose
%| GT :
%| I0 : initial insulin
%| X0 : initial insulin
%| Sg : glucose effectiveness
%| Si : insulin sensitivity
%| k3 :
%| n :

```

```
%| gamma :
%| nc : degre of Legendre polyn
%| j : integer
%| t0 : initial time
%| T : maximal time
%|
nc = 23;
j = 2;
% experimental data
s = [0 :2 :16 19 22 27 32 :10 :102 122 :20 :182]';
I_DATA = [11 26 130 85 51 49 45 41 35 30 30 27 30 22 15 15 11 10 8 11 7 8 8 7]';
G_DATA = [92 350 287 251 240 216 211 205 196 192 172 163 142 124 105 92 84 77 82 81 82
82 85 90];
nt = 2^j*nc;
T = 182;
t0 = 0;
% Subdivision of [0 1]
t = (0 :1/(nt-1) :1)';
Gb = 92;
Ib = 11;
G0 = 279;
GT = 83.7;
I0 = 363.7;
X0 = 0;
Sg = 2.6e-2;
Si = 5.0e-4;
k3 = .025;
k = .27;
gamma = .0041;
% Profiles Initiaux
```

```

P_G = ones(nt,1);
P_I = ones(nt,1);
P_X = ones(nt,1);
% Tol
Tol = 1e-4;
%
e = 1;
%
f1 = Sg*Gb*ones(nt,1);
f2 = @(I)(k3*Si*(I-Ib));
f3 = @(G)(gamma*(G-GT).*(t-t0)*T);
%
while e>Tol
G = MWL(t,[T*(Sg + P_X)';ones(1,nt)],T*f1,G0,nc,j);
if G<GT
I = MWL(t,[T*k*ones(1,nt);ones(1,nt)],zeros(nt,1),I0,nc,j);
else
I = MWL(t,[T*k*ones(1,nt);ones(1,nt)],T*f3(G),I0,nc,j);
end
X = MWL(t,[T*k3*ones(1,nt);ones(1,nt)],T*f2(I),X0,nc,j);
e = max([norm(G-P_G),norm(X-P_X),norm(I-P_I)]);
P_G = G;
P_X = X;
P_I = I;
end
% graphic représentation
hold on
figure(1)
plot(s,G_DATA,'+')
plot(T*t,G)

```

```
hold off
figure(2)
hold on
plot(s,I_DATA,'+')
plot(T*t,I)
hold off
figure(3)
plot(T*t,X)
% Variation of glucose & insulin
dG = f1-(Sg + X).*G;
figure(4)
plot(t*T,dG)
%
if G<GT
dI = -k*I;
else
dI = f3(G)-k*I;
end
figure(5)
plot(t*T,dI)
```

### 5.3.4 Les sous programmes

Les polynômes de Legendre

```

function p = legendre_poly(t,nc)

    p = zeros(nc,1);

    p(1) = 1;
    p(2) = t;
    for i = 3 :nc

        p(i) = 1/(i-1)*((2*i-3)*t*p(i-1)-(i-2)*p(i-2));

    end

```

end

La matrice psi

```

function psi = legendre_wavelt(k,nc,t)

    psi = zeros(2^k*nc);

    for l = 1 :length(t)

        for j = 1 :2^k

            p = legendre_poly(2^(k+1)*t(l)-2*j+1,nc);

            if (t(l)>=(j-1)/2^k)&&(t(l)<=(j)/2^k)

                for i = 1 :nc

                    psi((j-1)*nc+i,l) = sqrt(i-.5)*2^((k+1)/2)*p(i);

                end

            else

                for i = 1 :nc

                    psi((j-1)*nc+i,l) = 0;

                end

            end

        end

    end

end

```

La matrice d'intégration P

```

function P = matrice_integracion(nc,k)

    L = 1/2^(k+1) * tri_diag_matrice(nc);

    F = zeros(nc);

    F(1,1) = 2/2^(k+1);

    P = repeat_matrix(F,L,k);

end

```

La matrice  $L$

```

function L = tri_diag_matrice(nc)

    v = zeros(nc-1,1);

    for i = 1 :nc-1

        v(i) = 1/sqrt(4*(i)^2-1);

    end

    L = diag(v,1) + diag([1,zeros(1,nc-1)]) - diag(v,-1);

end

```

Sous programme `repeat_matrix`

```

function M = repeat_matrix(F,L,k)

    nc = size(F);

    M = zeros(2^k*nc);
    for i = 1 :2^k

        M((i-1)*nc+1 :i*nc,(i-1)*nc+1 :i*nc) = L;

        for m = i+1 :2^k

            M((i-1)*nc+1 :i*nc,(m-1)*nc+1 :m*nc) = F;

        end

    end

end

```

end

La méthode des ondelettes de Legendre

```

function y = MWL(t,At,ft,Y0,nc,j)

    nt = 2^j*nc;n = length(Y0);

    psi = legendre_wavelt(j,nc,t);P = matrice_integrat(nc,j);
    d = psi'\ones(nt,1);F = psi'\ft;
    AL = zeros(nt);BL = zeros(nt,1);
    % l'écriture des ai(t) dans la base psi
    for i = 1 :n+1

        At(i, :) = psi'\(At(i, :))';

    end
    % La construction du matrice AL et le second membre BL
    for l = 1 :nt
        for i = 1 : n+1

            AL(l, :) = AL(l, :) + At(i, :)*psi(:,l)*psi(:,l)''*(P')^(n+1-i);
        end
        for i = 1 :n
            ss = 0;
            for j = i :n
                ss = ss + Y0(j)*P'^(j-i)*d;
            end
            BL(l) = BL(l) + At(i, :)*psi(:,l)*psi(:,l)''*ss;
        end
        BL(l) = F'*psi(:,l) - BL(l);
    end
    % détermination de la solution y
    c = AL\BL;
    y = psi'*P'^n*c;
    for i = 1 : n
        y = y + psi'*P'^(i-1)*Y0(i)*d;
    end
end

```