REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Mémoire de Master en Mathématiques

Option : Modélisation, Contrôle et Optimisation

présenté par

M^{elle}.Ali Merina Houria

La Modélisation Mathématique et Simulation numérique du Diabète et ses complications

soutenue le 20 juin 2013 devant le jury

Président :	M. BAHRI Sidi Mohammed, MCA,	Université de Mostaganem.
Examinateur :	Mme ABLAOUI Naima, MAA,	Université de Mostaganem.
Encadreur	M. BELHAMITI Omar, MCA,	Université de Mostaganem.

Table des matières

Chapitre 1

Dédicaces

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut...
Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude,
L'amour, le respect, la reconnaissance...
Aussi, c'est tout simplement que Je dédie cette thèse ...
À MA CHERE MERE

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que tu as consenti pour mon instruction et mon bien être. Je te remercie pour tout le soutien et l'amour que tu me portes depuis mon enfance et j'espère que ta bénédiction m'accompagne toujours. Que ce modeste travail soit l'exaucement de tes voeux tant formulés, le fruit de tes innombrables sacrifices, bien que je ne t' en acquitterai jamais assez. Puisse Dieu, le Très Haut, vous accorder santé, bonheur et longuevie et faire en sorte que jamais je ne te déçoive.

A MA GRAND MERE AICHA

Qui m'a accompagné par ses prières, sa douceur durant toute sa vie, que son âme repose en paix.

À MES AMIES DE TOUJOURS : MAGHNIA, ASMA,LEILA, ..

En souvenir de notre sincère et profonde amitié et des moments agréables que nous avons passées ensemble. Veuillez trouver dans ce travail l'expression de mon respect le plus profond et mon affection la plus sincère.

À TOUTES LES PERSONNES QUI ONT PARTICIPÉ A L'ÉLABORATION DE CE TRAVAIL À TOUS CEUX QUE J'AI OMIS DE CITER

Remerciements

Tout d'abord je me consterne devant Dieu tout puissant pour la force qu'il m'a donné et qui m'a permis de faire ce modeste travail. Aussi loins que la science pourra aller, ça ne sera qu'une goute devant ce qui est possible de savoir, le bon Dieu nous a donné l'outil pour penser, voir, analyser et trouver des solutions à nos problèmes. Pour celà nous nous devons de remercier notre createur pour ce qu'il nous a donné pour assouvrir notre soif à la science.

Au terme de ce travail, je tiens à remercier toutes les personnes sans qui ce travail n'aurait pu exister.

Je tiens à exprimer ma très profonde gratitude à mon encadrant Mr.Belhamiti Omar qui n'a ménagé aucun effort pour me prendre en charge pour la réalisation de ce travail. Je le remercie pour le temps et les connaissances et la confiance qu'il m'a dispensé. Sans oublier mes proffesseurs qui n'ont pas menager leurs efforts pour me transmettre leurs savoir.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Bahri Sidi Mohammed et Madame Ablaoui Naima qui me faient l'honneur de présider ce jury.

Enfin, je tiens à remercier mes parents. Merci pour la confiance qu'ils m'ont accordée, pour leur soutien sans faille dans les bons moments comme dans les moins bons.

Introduction

La théorie des approximations se préoccupe par la façon dont des phénomènes peuvent mieux être estimées avec des modèles simples et à caractériser quantitativement les erreurs introduites ainsi. L'avantage de ces techniques se trouve en résolvant ces équations dont les résultats nous permettent après interprétation de donner des solutions à nos problèmes réels (des équations non linéaires, équations différentielles ordinaires, équations aux dérivées partielles,...).

Notre intérêt dans ce travail se portera sur la modélisation mathématique et la simulation numérique des phénomènes biologiques.

En un siècle, nos modes de vie ont radicalement changé. L'industrialisation s'est souvent accompagnée de conséquences telles que le stress, la sédentarité ou la mauvaise alimentation. Or, ce sont autant de facteurs de risque dans le développement du diabète.

Le diabète est un trouble de l'assimilation, de l'utilisation et du stockage du sucre apportés par l'alimentation. Cela se traduit par un taux élevé de glucose (glycémie) dans le sang, on parle alors d'hyperglycémie. On distingue principalement deux types de diabète, le diabète de type1 qui touche 10% des diabétiques, le diabète de type 2 qui touche 85 % et les autres types de diabète concernent les 5 % restants. Le but du traitement dans les deux diabètes est de normaliser la glycémie, les hyperglycémies répétées et prolongées entrainent à long terme une altération des nerfs et des vaisseaux sanguins présents dans tous le corps ce sont les complications du diabète. Malgré la recherche médicale qui avance tous les jours le diabète reste une maladie incurable qui se soigne très bien. Une bonne hygiène de la vie est un facteur déterminant qui peut diminuer considérablement le risque d'apparition de la maladie ou en limiter les complications.

Il y a des modèles mathématiques sous forme de système d'équations différentielles ordinaires qui régissent les complications dues au diabète et qu'on peut résoudre numériquement.

Dans ce mémoire une attention particulière est accordée à la théorie des ondelettes. L'utilisation de cette théorie dans les méthodes numériques est relativement nouvelle, c'est un domaine émergent. Au cours des dernières années, les ondelettes ont trouvé leur chemin dans différents domaines de la science et de l'ingénierie. Elles permettent le traitement des divers problèmes des systèmes dynamiques. La première apparition d'ondelettes est attribuée à A. Haar 1909. Une des propriétés de l'ondelette de Haar est qu'elle est à support compact ce qui signifie qu'elle est nulle en dehors d'un intervalle fini. Malheureusement les ondelettes de Haar ne sont pas continûment différentiable ce qui limite quelque peu leur applications. En1985 Stéphane Mallat a donné aux ondelettes un sursaut supplémentaire grâce à son travail dans le traitement numérique du signal. Il a découvert certaines relations entre les filtres en quadrature de miroirs, des algorithmes de pyramide et les bases d'ondelettes orthonormales inspirées en partie par ces résultats, Y. Meyer a construit les premières ondelettes non-triviales.lesquelles Contrairement aux ondelettes de Haar sont continûment différentiable, mais elles ne sont pas à support compact. Après que Ingrid Daubechies s'inspirant des travaux de Mallat, construisait une base orthonormale d'ondelettes, qui est devenue la pierre angulaire des applications actuelles. **[1]** Par la suite d'autres mathématiciens ont proposé les ondelettes de Chebyshev où l'ondelette mère est représentée par les polynômes de Chebyshev translatés sur l'intervalle $[0, 1]$.

La méthode qui fait l'objet de ce travail est basée sur les ondelettes de Chebyshev. Elle réduit une équation différentielle ordinaire en un système algébrique d'équations linéaires, en utilisant la matrice opérationnelle d'intégration.

Notre travail est une synthèse des travaux suivants : le premier, E. Babolian , F. Fattahzadeh, Numerical solution of differential equations by using Chebyshev wavelet operational matrix of integration, Applied Mathematics and Computation, 188 (2007) 417–426. Le deuxième, A Boutayeb, EH Twizell, K Achouayb and A Chetouani,A non-linear population model of Diabetes Mellitus , J. Appl. Math. & Computing Vol. 21(2006), No. 1- 2, pp. 127-139.

Le but de ce travail est de prédire l'évolution des complications diabétiques et de pouvoir agir et épargner les malades du diabète de leurs effets désastreux.

Le mémoire est organisé en trois principaux chapitres en plus d'une introduction générale. Dans le premier chapitre, on présente les modèles mathématiques qui gouvernent les complications du diabète, on donne aussi un aperçu général sur la maladie en citant les symptômes, le diagnostic, les complications engendrées. Le deuxième chapitre est consacré à une description détaillée de la méthode des ondelettes de Chebyshev. Le troisième chapitre est déstiné à l'application et la simulation numérique, deux exemples sont alors présentés pour mieux illustrer l'efficacité de notre méthode.

Une conclusion générale résumera les idées fondamentales citées dans ce travail tout en discutant sur les perspectives et les objectifs à atteindre.

Chapitre 2

Présentation du Diabète

La biomathématique sous-entend l'association de deux sciences : la biologie et les mathématiques. De façon précise les biomathématiques sont constituées par l'ensemble des méthodes et techniques mathématiques, numériques et informatiques qui permettent d'étudier et de modéliser les phénomènes et processus biologiques et biomédicales. Il s'agit donc bien d'une science fortement pluridisciplinaire que le mathématicien seul (ou le biologiste seul) est incapable de développer. Les biomathématiques ont des débouchés tant pratiques que théoriques dans de nombreux domaines comme la dynamique des populations, la physiologie, la génomique, la pharmacologie etc.

L'objectif de la biologie mathématique est de faire un rapprochement aussi fidèle que possible du phénomène réel, le plus souvent par des équations d'évolution, qui caractérise le vivant. Ces équations peuvent être à temps discret (de la forme $X_{n+1} = F(X_n)$) ou plus souvent à temps continu, équations différentielles ordinaires (EDO), ou à retard (EDR), ou équations aux dérivées partielles (EDP). Mais un autre cadre est possible, discret et probabiliste, dans lequel le système passe d'un état donné à l'instant n à plusieurs états possibles à l'instant $n+1$, avec une loi décrite par des probabilités.

Dans ce chapitre on procédera à la présentation du diabète comme maladie et de l'insuline comme médicament, on parlera aussi des différents types de diabète et des complications engendrées. Le modèle D.C.D sera traité en fin de ce chapitre.

2.1 Le Diabète

Le diabète est un désordre par lequel le corps devient incapable de contrôler la quantité de sucre dans le sang. C'est une maladie du **pancréas** caractérisée par son incapacité de secréter suffisamment d'insuline pour contrôler la **glycemie** (le taux du glucose dans le sang).

2.2 L'insuline

L'insuline est l'une des deux hormones (l'autre étant le glucagon) qui aident à maîtriser la quantité de glucose dans le sang. Ces hormones sont fabriquées par le pancréas, une petite glande située juste derrière l'estomac. Le pancréas renferme des petits amas de cellules appelés îlots de Langerhans. Ces cellules à leur tour comprennent des cellules qui produisent des hormones : les cellules alpha (α) produisent du glucagon, et les cellules bêta (β) produisent de l'insuline.

Lorsque on s'alimente, notre taux de glucose dans le sang augmente, ce qui a pour effet d'amener nos cellules bêta à libérer plus d'insuline. De leur côté, les cellules alpha libèrent du glucagon lorsque le taux de glucose dans le sang chute.

L'insuline et le glucagon travaillent toujours de concert pour aider le corps humain à conserver une glycémie stable, soit de 4 à 7 millimoles de glucose par litre de sang.($0,72g/l$ à $1,26g/l$) Chez les personnes atteintes du diabète, ce système peut défaillir, parce que le corps ne produit pas du tout d'insuline (ou pas assez), ou encore, parce que les cellules du corps sont résistantes à l'insuline.

Il existe deux types de diabète([3])

Le diabète insulino-dépendant (DID) ou encore type 1 :(Auto-immune)

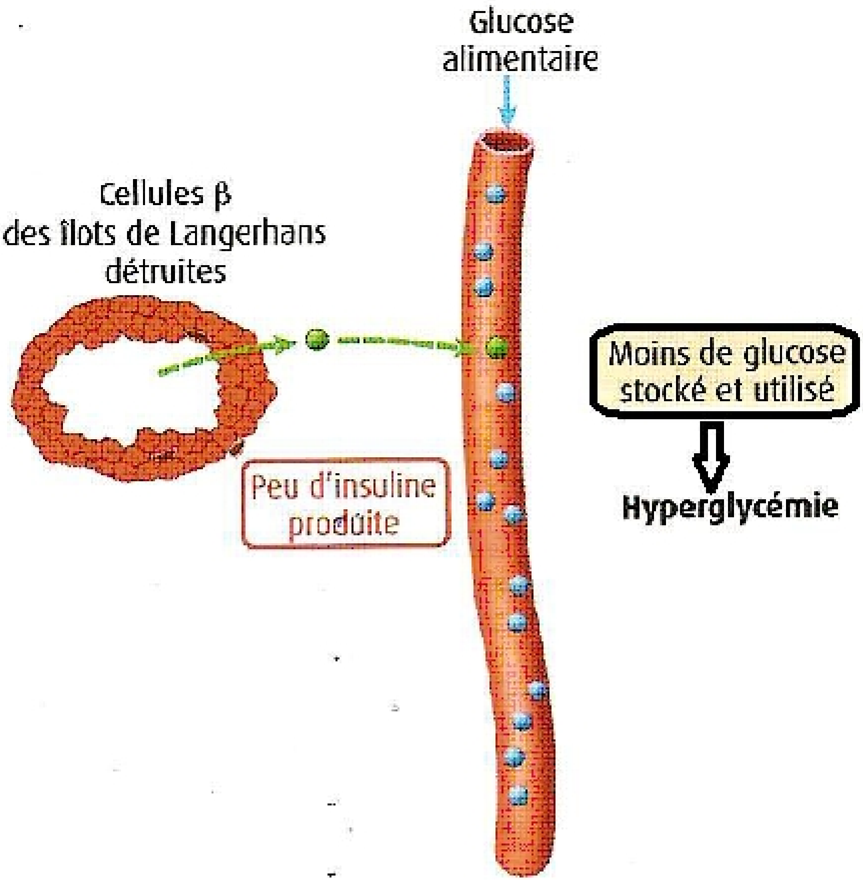
Chez ces diabétiques, le système d'immunisation attaque les cellules β et les détruit, ainsi, le pancréas produit trés peu ou pas du tous d'insuline. Le DID est développé en générale par les enfants et les jeunes adultes, et parfois on le trouve chez les gens qui ont plus de quarante ans. Le nombre des DID augmente avec le temps.

Symptômes

Les symptômes du diabète de type 1 sont très nets. Il s'agit de la polydipsie (soif accrue), de la polyphagie (faim accrue) et de la polyurie (urine fréquente). Ils sont souvent associés à une perte de poids importante, un manque d'énergie et des sensations de nausées.

Diagnostic

Le diabète de type 1 est souvent diagnostiqué après une hospitalisation pour des symptômes causés par une concentration extrêmement élevée de glucose dans le sang (hyperglycémie) ou par une concentration de glucose extrêmement faible dans le sang (hypoglycémie). Les médecins effectuent une série d'examens pour rechercher une acidocétose, pathologie qui peut entraîner le coma et la mort. Des analyses de sang aideront à déterminer votre glycémie et à obtenir une indication de la quantité d'insuline encore produite figure 2.2.



Le Diabete de type1

- Le diabète non insulino-dépendant (DNID) de type 2 :

Chez les DNID ,le pancréas produit toujours de l'insuline mais pour des raisons difficiles à connaitre, le corps ne l'utilise pas d'une manière efficace, et par suite,le niveau du glucose dépasse ses limites dans le sang. On trouve en générale ce type 2 chez les personnes qui ont plus de quarante ans.

Symptômes

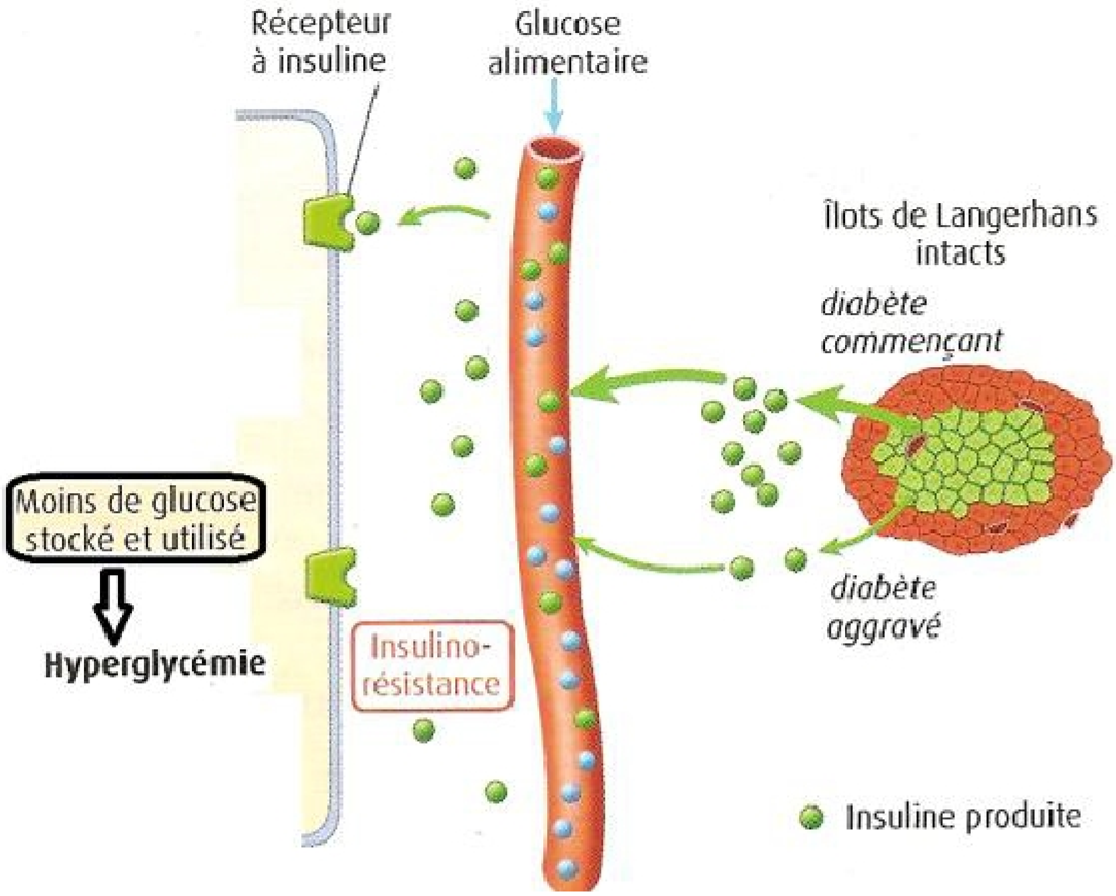
Les symptômes du diabète de type 2 difficiles, peuvent sembler bénins de prime abord, on peut être atteint du diabète de type 2 pendant des années sans le savoir. Les symptômes d'hyperglycémie peuvent être, notamment, une soif accrue et des mictions fréquentes, une faim extrême, de la fatigue et une vision floue.

D'autres problèmes peuvent résulter d'une hyperglycémie prolongée. Ce peut être des infections fréquentes lentes à guérir, des engourdissements ou des fourmillements dans vos mains ou vos pieds. Les hommes diabétiques de type 2 peuvent également avoir des troubles de l'érection. En détectant le diabète assez tôt, on augmente nos chances de rester en bonne santé et de prévenir ces complications figure2.2.

Diagnostic

Les médecins utilisent des analyses du sang à jeun pour dépister le diabète.

Le DNID est plus fréquent et six fois plus grave par ses complications que le DID. Étant donné le nombre de personnes atteintes du diabète, les spécialistes le classe comme d'une épidémie.



Le Diabete de type 2

Le diabète est-il une maladie répandue ?

Du 24 au 29 août 2003, le congrès de la fédération internationale du diabète a réuni plus de 15 000 experts, patients et associations. Ce rendez-vous mondial a succédé au rapport Diabetes Atlas 2003 dont les prévisions sont des plus préoccupante.[4].

Le diabète est l'une des maladies les plus dangereuses, connu aussi avec le nom de "tueur silencieux". Cette maladie est un problème majeur de santé dans les pays industrialisés et en développement (avec plus de 220 millions de personnes diabétiques dans le monde). Il est la quatrième cause de décès. L'augmentation du nombre de diabétique est tellement rapide que l'organisation mondiale de la santé (OMS) l'a identifié comme étant une épidémie.

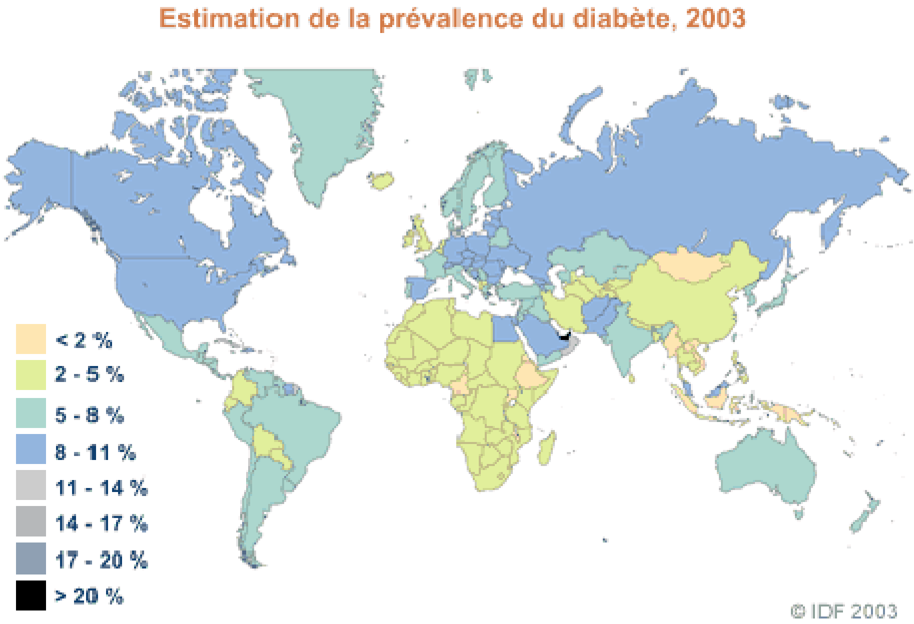


Figure 2

Plus de 300 millions de personnes sont à risque de développer le diabète : c'est ce que révèle un nouveau rapport publié dans le Diabetes Atlas, ouvrage édité par la Fédération Internationale du Diabète (FID). On estime que 314 millions de personnes dans le monde, soit 8,2 % de la population adulte, souffrent de tolérance abaissée au glucose, un état souvent précurseur du diabète. Selon le Pr. Alberti, Président de la FID, "c'est la première fois que des chiffres sur la tolérance abaissée au glucose ont été collectés à l'échelle mondiale. Ces informations nous donnent une image plus juste du fardeau probable du diabète et attestent que nous nous dirigeons vers l'une des plus grandes catastrophes que le monde ait jamais connue". Les personnes atteintes de tolérance abaissée au glucose courent le risque d'évoluer vers le diabète de type 2 et de développer une maladie cardiovasculaire. C'est le cas d'environ 70 % des patients qui souffrent de cette condition.

La proportion de diabétiques devrait passer de 5,1 % aujourd'hui à 6,3 % en 2025 (voir2.2). D'ici 25 ans, la population adulte vivant avec le diabète à travers le monde passera de 194 millions à 333 millions. Deux tiers d'entre elles habitent dans les pays en développement, où les chiffres devraient grimper rapidement. En 2025, la région du monde qui comptera le plus grand nombre de diabétiques sera l'Asie du Sud-Est avec 82 millions de malades.

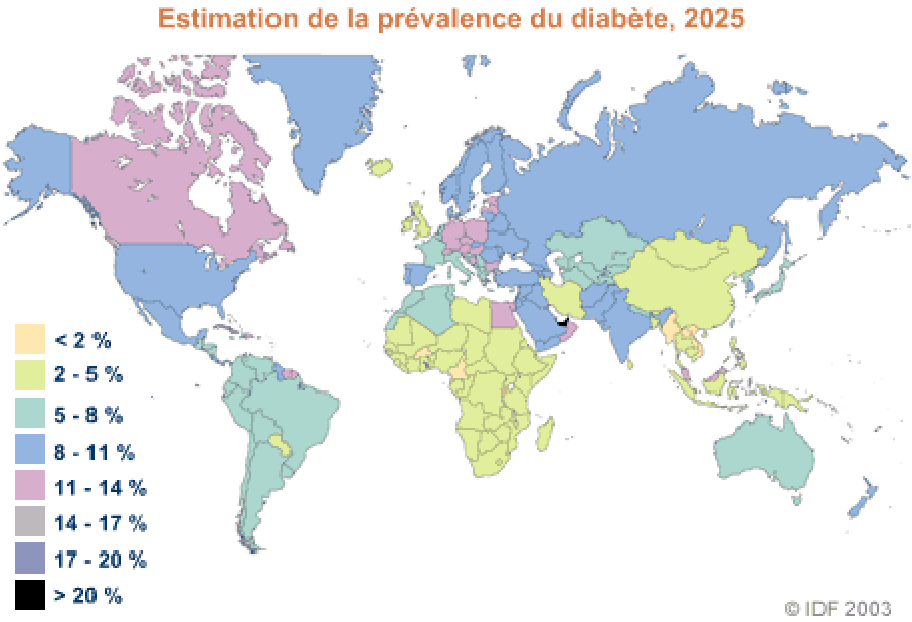


Figure 2

2.3 Les Complications du Diabète

Les complications du diabète sont les effets du diabète (type 1 ou 2) sur différents organes ou fonctions de l'organisme. Elles peuvent se manifester par des symptômes mais sont souvent silencieuses figure2.3

Les plus fréquentes sont (figure [3]) :

La neuropathie diabétique (atteinte des nerfs) est l'une des plus fréquentes complications chroniques du diabète entraînant d'autres complications tristement célèbres.

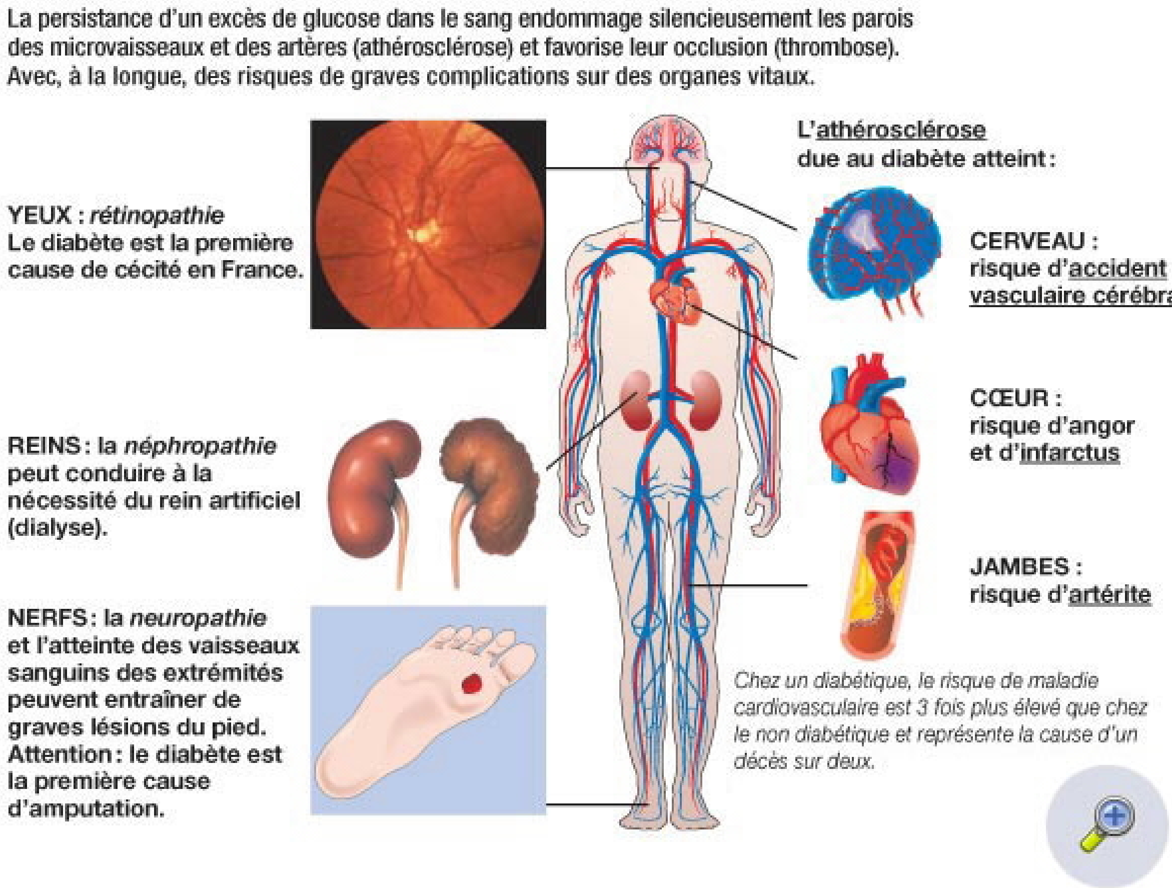
La rétinopathie diabétique (atteinte des yeux : œil et rétine) est une grave complication du diabète qui touche 50% des patients diabétiques de type 2.

Douleurs, fourmis, doigts raides. : les affections des mains empêchant la flexion des doigts et de la paume, comme le syndrome du canal carpien ou la maladie de Dupuytren, sont souvent douloureuses et invalidantes. Le diabète peut être à l'origine de ces affections ou les aggraver.

La néphropathie est aussi une atteinte des petits vaisseaux par excès de sucre dans le sang, mais les organes concernés ne sont pas les yeux mais les reins. On parle de "complication rénale du diabète" ou de "néphropathie diabétique".

Carie dentaire, gingivite, parodontite...souvent sous-estimées, les complications dentaires du diabète cachent un mal évolutif qui peut aller jusqu'à l'infection buccale généralisée et la perte des dents. Ces complications ont un lien étroit avec le diabète, car elles sont à la fois "cause et effet" d'un déséquilibre.

Infections, mycoses, sécheresse vaginale, prostatite, dysfonction érectile, baisse de la libido... les complications du diabète peuvent affecter la sexualité. Ces troubles sexuels liés au diabète ne sont pas irrémédiables. Des moyens existent aussi pour s'en prémunir.



Les complications diabtiques

2.4 Comparaison entre le Diabète de type 1 et le Diabète de type 2

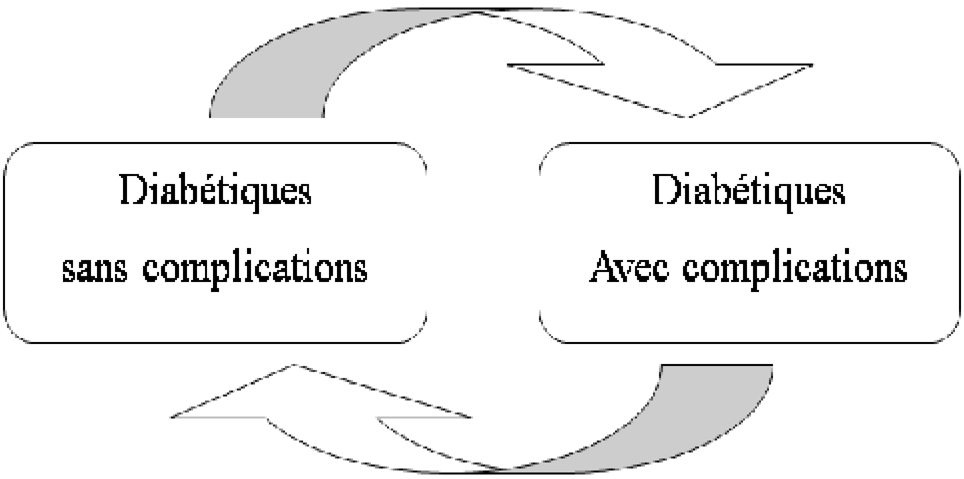
On récapitule la comparaison entre les deux types de diabètes dans le tableau suivant :

Caractéristiques	Diabète de type 1	Diabète de type 2
Age d'apparition	Avant 30 ans	Après 30 ans
Sexe	Prédominante sur les mâles	Prédominance sur les femmes
Forme d'apparition	brusque	Lente, progressive et insidieuse
Indice de masse corporel	Normal	Augmenté, souvent avec obésité
Réserve pancréatique	Très peu ou nulle	Normal ou augmenté (hyperinsulinisme)
Dépendance de l'insuline	Oui	Non, au moins pendant les premières années
Facteur immunologique	Présent	Absent
Hérédité	Dans quelques cas	Presque toujours
Concordance entre jumeaux	Presque 50% des cas	Plus de 95% des cas
Association avec d'autres maladies	Rarement	Souvent
Principal causede décès	Insuffisance rénale due à une néphropathie diabétique	Infarctus du myocarde

2.5 Description du modèle D.C.D

L'intéret d'un modèle est la description de l'aspect réel du phénomène physique ou biologique, auquel on s'intéresse. Le décrivant le plus fidèlement possible, il permet d'en prévoir certains aspects, par exemple son évolution dans le temps. En Diabétologie, certains modèles mathématiques permettent de suivre l'évolution du nombre des diabétiques et des diabétiques avec complications dans une population donnée afin de pouvoir les contrôler et de minimiser les effets de ces complications. C'est ce qui va être traiter dans ce travail.

Dans cette section, on considère une population diabétique (DID et DNID) de dimension $N(t)$ subdivisée en deux sous-populuations, la première est notée par $D(t)$ qui désigne la classe des diabétiques sans complications (DSC) qui peuvent développer au moins une complication, la seconde désigne la classe des diabétiques avec complications (DAC) notés par $C(t)$ On suppose de plus que ces DAC peuvent retourner dans la classe (DSC) par guérison de la complication à un taux γ. Ce modèle est appelé $D.C.D$ (2.5)



L'origine de l'appelation $D.C.D$

Afin de construire le diagramme représentatif du modèle $D.C.D$, on donne les hypothèses suivantes :

- Soit une population donnée, le nombre moyen d'individus susceptible d'attraper le diabète par ans (Incidence) est représenté par le coéfficient constant I (supposé ne pas avoir de complications au moment du diagnostic). Il dépend du temps au cours de la période d'étude([2] et [7]).

On note par

1. μ est le taux de malades sans complications qui décèdent naturellement.

2. λ est le taux des malades qui développent des complications.

3. γ est le taux de ceux qui guérissent de la complication et retournent à $D(t)$.

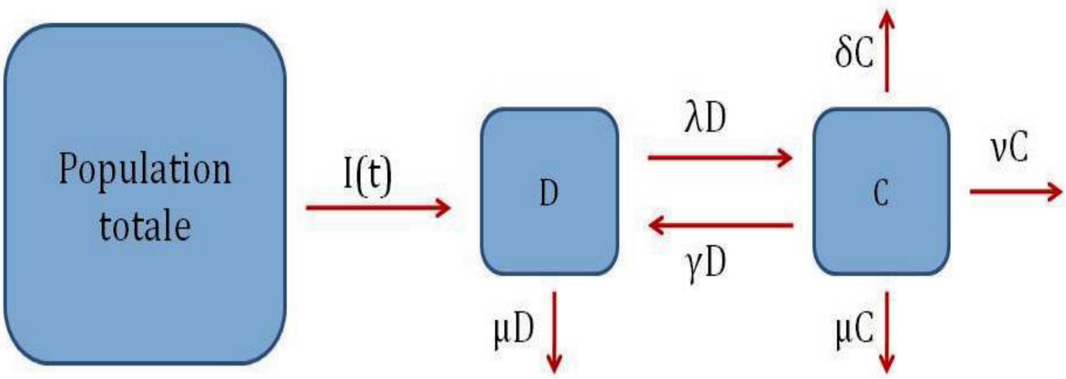
4. μ est le taux des malades qui présentent des complications et qui décèdent naturellement.

5. δ est le taux des malades qui décèdent à cause de leur complications (non traitées à temps).

6. ν est le taux des malades sévèrement handicapés par des complications.

On schématise ceci par le diagramme (2.5)

diagramme



7.jpg

Diagramme reprsentatif du modle $D.C.D$

Mathématiquement, on peut présenter le diagramme par le système d'équations différentielles suivant, pour $t \geqslant 0$

$$\begin{cases} D'(t) = I - (\mu + \lambda)D(t) + \gamma C(t) \\ C'(t) = \lambda D(t) - (\mu + \nu + \delta + \gamma)C(t) \\ D(0) = D_0 > 0, C(0) = C_0 > 0 \\ C(t) + D(t) = N(t). \end{cases} \tag{2.1}$$

où

λ : Probabilité qu'un diabétique ait une complication (taux d'évolution de D à C) .

μ : Taux de mortalité naturelle supposé constant.

δ : Taux de mortalité brusque causé par une complication diabétique .

ν : Taux de hadicap sévère .

$I(t)$: La fonction d'incidence,dépendante du temps,du diabète.

t : Variable de temps.

Ce système étant un système linéaire à deux équations différentielles ordinaires d'ordre 1.

Chapitre 3

Description de la méthode à base ondelette de Chebyshev

Depuis prés de trois décennies, les ondelettes se sont imposées comme un outil puissant en analyse mathématique, et dans des domaines appliqués tels que le traitement du signal et de l'image, les statistiques ...etc. La construction de cet outil est en quasi-totalité effectuée durant la décennie 1980-1990, tout comme l'identification de ses principales propriétés. L'attribution du prix Gauss à Yves Meyer nous donne l'occasion de nous repencher sur cette floraison scientifique, à l'interface entre l'analyse harmonique et le calcul numérique, dont il fut à la fois l'artisan, le chef d'orchestre, et le critique avisé([8]).

Analyser, reconstruire et représenter des fonctions quelconques à l'aide de fonctions élémentaires (polynômiales,trigonométriques,...), parfois surnommées atomes, est une démarche scientifique à l'origine de nombreuses avancées fondamentales et appliquées depuis plusieurs siècles. La possibilité offerte plus récemment par l'ordinateur d'implémenter une telle démarche au moyen d'algorithmes performants lui confère un intérêt supplémentaire pour le calcul numérique et la théorie de décomposition.

L'objectif de ce travail est de donner une approximation aussi précise que possible d'une fonction réelle donnée, pour la résolution des équations différentielles en se basant sur une méthode à base ondelette appelée méthode de Chebyshev.

La méthode d'ondelettes de Chebyshev consiste à réduire le problème aux limites en un système d'équations algébriques, via la matrice opérationnelle d'intégration, en décomposant la solution inconnue dans la base d'ondelettes de Chebyshev et en prenant en compte les conditions aux limites.

Dans ce chapitre, on présentera une méthode basée sur les propriétés des ondelettes et les polynômes de Chebyshev et on le terminera avec les techniques de découplage et quasi-linéarisation.

3.1 Qu'est-ce qu'une ondelette

Physiquement
c'est une petite onde qui a un début et une fin.
Mathématiquement

c'est une fonction à carrée sommable qui vérifie la condition d'admissibilité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|\widehat{\psi}(\omega)\right|^2}{|\omega|} d\omega < \infty,$$

tel que

$$\widehat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega x)\, \psi(x)\, dx,$$

où

– $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, $\widehat{\psi}$:la transformée de fourier de la fonction ψ .

Les ondelettes forment une famille de fonctions construites à partir de la dilatation et translation d'une fonction unique appelée ondelette mère, où a et b sont les paramètres de dilatation et translation respectivement , on définit la famille d'ondelettes continues comme suit

$$\begin{cases} \Psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}}\, \Psi(\frac{t-b}{a}) \\ a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

3.2 Ondelettes et polynômes de Chebyshev

Les ondelettes de Chebyshev $\Psi_{n,m}(t) = \Psi(k, n, m, t)$ ont quatre arguments, elles sont définies par la formule suivante :

$$\Psi_{n,m}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} \widetilde{T_m}(2^k t - 2n + 1) & \text{si} \quad \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq t < \frac{n}{2^{k-1}} \\ 0, \ \text{sinon} \end{cases} \tag{3.2}$$

où

$$\widetilde{T_m}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \text{si } m = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_m(t), \text{si } m > 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Avec

$n = 1, \ldots, 2^{k-1}$représente le nombre des niveaux de la décomposition, $k \in \mathbb{N}^*$

t : est la variable tomporelle.

T_m est le polynôme de Chebyshev de degré $m = 0, ..., M-1$(où $M \in \mathbb{N}^*$ est le nombre de points de collocation)

Les coéfficients dans l'équation 3.3 assurent l'orthonormalité

Les polynômes T_m de Chebyshev sont orthogonaux avec la fonction de pondération $\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$et satisfaient aussi la formule de récurrence suivante

$$\begin{cases} T_0(t) = 1 \\ T_1(t) = t \\ T_{m+1}(t) = 2tT_m(t) - T_{m-1}(t), \ m = 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

Pour plus de détails sur les polynômes de Chebyshev [voir Annexe B]

Remarque : Dans le but d'obtenir une famille des ondelettes de chebyshev orthogonale dans l'espace de Hilbert $L^2_{\omega_n}([0, 1])$ il faut que la fonction de pondération soit translatée et dilatée comme suit

$$\omega_n(t) = \omega(2^k t - 2n + 1).$$

L'ensemble $\{\Psi_{nm}(t)\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ forme une base dans l'espace de Hilbert $L^2_\omega([0,1])$.
L'espace $L^2_\omega\left([0,1]\right)$ est définit par

$$L^2_\omega\left([0,1]\right) = \left\{ f \in L^2\left([0,1]\right) : \int_0^1 |f(x)|^2\, \omega(x) dx < \infty \right\}$$

munit de la norme

$$\|f\|_{2,\omega} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, \omega(x) dx \right)^{1/2}$$

et le produit scalaire associé est donné par

$$\langle f, g\rangle_{2,\omega} = \int_0^1 f(x)g(x)\omega(x)dx. \tag{3.4}$$

3.3 La la fonction orthogonale comme fonction d'approximation

Une attention particulière a été accordée aux applications des fonctions orthogonales, comme les polynômes de Laguerre, les polynômes de Legendre, et les polynômes de Chebyshev. Il existe trois classes d'ensembles de fonctions orthogonales qui sont largement utilisés :

La première comprend les ensembles de fonctions de base constantes par morceaux (comme les fonctions de Walsh, les fonctions d'impulsion blocs, etc.)

La seconde concerne les ensembles des polynômes orthogonaux (comme les polynômes de Legendre et les polynômes de Chebyshev, etc.)

La troisième comprend les ensembles de fonctions sinus et cosinus en série de Fourier largement utilisés.

La principale caractéristique de l'utilisation de fonctions orthogonales est de réduire les problèmes à résoudre à un système d'équations algébriques linéaires avec une matrice creuse.

Dans le travail qui suivera, l'interet sera porté sur le polynôme orthogonale de chebychev comme fonction d'approximation([6].

Une fonction $u \in L^2_{\widetilde{w}}([0,1])(\widetilde{w}(t) = w(2t-1)$ peut être décomposée par

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}\Psi_{nm}(t). \tag{3.5}$$

Avec

$C_{nm} = \langle u, \Psi_{nm}\rangle_{2,\omega_n}$, où $\langle ., .\rangle$ représente le produit scalaire dans l'espace $L^2_{\omega_n}\left([0,1]\right)$ défnit dans (3.4).

Pour des raisons de calcule numérique, la série infnie 3.5, doit être tranquée pour trouver la série finie suivante

$$u(t) \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}}\sum_{m=0}^{M-1} C_{nm}\Psi_{nm}(t) = C^T\Psi(t). \tag{3.6}$$

Où

C et Ψ sont des matrices de dimension $2^{k-1}M \times 1$ données par :

$$C = [C_{10}, C_{11,...,}C_{1M-1}, C_{20}, C_{21}, ..., C_{2M-1}, ..., C_{2^k0}, ..., C_{2^{k-1}M-1}]^T,$$

$$\Psi(t) = [\Psi(t)_{10}, \Psi(t)_{11,...,}\Psi(t)_{1M-1}, \Psi(t)_{20}, \Psi(t)_{21}, ..., \Psi(t)_{2M-1}, ..., \Psi(t)_{2^k0}, ..., \Psi(t)_{2^{k-1}M-1}]^T.$$

3.4 Matrice Opérationnelle d'intégration

L'idée de base de la matrice opérationnelle est :

1. L'équation différentielle est convertie en une équation intégrale par l'intermédiaire d'intégration multiple.
2. Par la suite, les différentes fonctions concernées par l'équation intégrale sont approchées par une représentation sous forme de combinaisons linéaires de fonctions de base orthonormée et les tronquant à un niveau optimal.
3. Enfin, l'équation intégrale est convertie en un système d'équations algébriques par l'introduction de la matrice opérationnelle d'intégration des fonctions de base.

L'intégrale de $\Psi(t)$ entre 0 et t peut s'exprimer en fonction de $\Psi(t)$ et par le biais de la matrice opérationelle d'intégration P

$$\int_0^t \Psi(s)ds = P\Psi(t). \tag{3.7}$$

La matrice P est représentée comme suit :

$$P = \begin{pmatrix} L & F & F & F & \cdots & F \\ 0 & L & F & F & \cdots & F \\ 0 & 0 & L & F & \cdots & F \\ 0 & 0 & 0 & L & F & F \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L \end{pmatrix},$$

avec, L et F de dimension $M \times M$ données par

$$L = 2^{-k} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(-1)^{r-1}}{r-1} - \frac{(-1)^{r+1}}{r+1}\right) & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2(r-1)} & 0 & \frac{1}{2(r+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(-1)^{r-2}}{r-2} - \frac{(-1)M}{M}\right) & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2(M-2)} & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = 2^{-k}\begin{bmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-(-1)^{r+1}}{r+1} - \frac{1-(-1)^{r-1}}{r-1}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-(-1)^{M}}{M} - \frac{1-(-1)^{M-2}}{M-2}\right) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

3.5 Comment écrire une fonction dans la base ondelette

Soit $f(t) = t$, pour $t \in [0,1]$ on veut écrire cette fonction dans la base ondelette (3.2) :

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} C_{nm}\Psi_{nm}(t) = C^T\Psi(t).$$

Où
$C_{nm} = \langle f, \Psi_{nm}\rangle_{2,\omega}$, où $\langle .,. \rangle$ représente le produit scalaire dans l'espace $L^2_\omega\left([0,1]\right)$.
C et Ψ sont des vecteurs de dimension $2^{k-1}M \times 1$ données par :

$$C = [C_{10}, C_{11,...,}C_{1M-1}, C_{20}, C_{21}, ..., C_{2M-1}, ..., C_{2^k0}, ..., C_{2^{k-1}M-1}]^T,$$

$$\Psi(t) = [\Psi(t)_{10}, \Psi(t)_{11,...,}\Psi(t)_{1M-1}, \Psi(t)_{20}, \Psi(t)_{21}, ..., \Psi(t)_{2M-1}, ..., \Psi(t)_{2^k0}, ..., \Psi(t)_{2^{k-1}M-1}]^T.$$

En effet, pour $k = 2$ et $M = 3$
C et $\Psi(t)$ deviennent :

$$C = [C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{20}, C_{21}, C_{22}]^T,$$

$$\Psi(t) = [\Psi_{10}(t), \Psi_{11}, \Psi_{12}(t), \Psi_{20}(t), \Psi_{21}(t), \Psi_{22}(t)]^T,$$

$$t \in [0, \frac{1}{2}[\begin{cases} \Psi_{10}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \\ \Psi_{11}(t) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}(4t-1), \\ \Psi_{12}(t) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}(2(4t-1)^2-1), \end{cases} \tag{3.8}$$

$$t \in [\frac{1}{2}, 1[\begin{cases} \Psi_{20}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \\ \Psi_{21}(t) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}(4t-3), \\ \Psi_{22}(t) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}(2(4t-3)^2-1), \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} C_{10} = \int\limits_0^1 t\Psi_{10}(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right), \\ C_{11} = \int\limits_0^1 t\Psi_{11}(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(4t-1)t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{2\pi}{3}-2\right), \\ C_{12} = \int\limits_0^1 t\Psi_{12}(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(2(4t-1)^2-1)t}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{67}{3}-\frac{4\pi}{3}-\frac{21\sqrt{3}}{2}\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_{20} = \int\limits_0^1 t\Psi_{20}(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}, \\ C_{21} = \int\limits_0^1 t\Psi_{21}(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(4t-3))t}{\sqrt{1-t^2}}dt = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}\right), \\ C_{22} = \int\limits_0^1 t\Psi_{22}(t)\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(2(4t-3)^2-1))t}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(16\pi-29\sqrt{3}\right), \end{cases}$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}, \frac{2\pi}{3}-2, \frac{134-8\pi}{3}-21\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}, -16\pi+29\sqrt{3}\right]\Psi(t).$$

3.6 Résolution d'une équation différentielle ordinaire d'ordre1 à coefficients constants

On propose résoudre un problème aux limites sur l'intervalle $[0,1]$comme suit :

$$\begin{cases} Au'(x)+Bu(x)=f(x) \text{ sur }]0,1] \\ u(0)=u_0. \end{cases} \tag{3.10}$$

où
A, B : sont des constantes données,
$u(x)$: la fonction inconnue,
$f(x)$: une fonction continue sur $[0,1]$.
La solution du problème peut être décomposée dans la base d'ondelette par

$$u(x) = U^T\Psi(x), \tag{3.11}$$

de même que

$$f(x) = F^T\Psi(x).$$

On intègre 3.10 sur le domaine $(0, x)$, on trouve

$$A\int_0^x u^{'}(s)ds + B\int_0^x U^T\Psi(s)ds = \int_0^x F^T\Psi(s)ds,$$

grâce à (3.7), on a

$$A(u(x) - u(0)) + B(U^T P\Psi(x)) = F^T P\Psi(x),$$

$$AU^T\Psi(x) - Au_0 d^T\Psi(x) + B(U^T P\Psi(x)) = F^T P\Psi(x)),$$

$$(AU^T + BU^T P)\Psi(x) = (F^T P + Au_0 d^T)\Psi(x).$$

Par conséquent, on obtient le système algèbriques linéaire de type :

$$AL\ U = BL$$

où

$$\begin{cases} AL = A\ I + B\ P^T \\ BL = FP^T + Au_0 d. \end{cases}$$

La solution du problème 3.10 est donnée en injectant U dans l'experssion (3.11).

3.7 La technique de découplage et quasi-linéarisation

Soit un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires sur un domaine Ω

$$\begin{cases} y_1^{'} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2^{'} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \vdots \\ y_n^{'} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases}$$

Dans ce genre de système, les équations sont souvent couplées. La technique itérative de découplage et linéarisation permet sur chaque itération de transformer ce système en un système d'équations différentielles découplées et linéaires, en écrivant le système sous une forme variationnelle par le schéma le plus simple suivant :

$$\begin{cases} (y_1^{(k+1)})_x^{\prime} = f_1(x, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, ..., y_n^{(k)}) \\ (y_2^{(k+1)})_x^{\prime} = f_2(x, y_1^{(k+1)}, y_2^{(k)}, ..., y_n^{(k)}) \\ . \\ . \\ . \\ (y_n^{(k+1)})_x^{\prime} = f_n(x, y_1^{(k+1)}, y_2^{(k+1)}, ..., y_n^{(k)}), \end{cases}$$

L'objective de cette technique est de séparer et linéariser les variables dépendantes du système, puis résoudre les équations chacune indépendamment par la méthode d'ondelettes de Chebyshev décrite dans la section précédante. Le procédé de cette technique consiste tout d'abord à donner des profiles initiaux pour chacune des variables dépendantes, ces derniers doivent vérifier les conditions aux limites du problème. On a alors l'algorithme suivant :

$y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, y_3^{(0)}, ..., y_n^{(0)}$ données (profiles initiaux)
Tant que Erreur $>$ à une tolérance **Faire**
$y_1^{(k+1)} = \text{solver}(x, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, y_3^{(k)}, ..., y_n^{(k)})$
$y_2^{(k+1)} = \text{solver}(x, y_1^{(k+1)}, y_2^{(k)}, y_3^{(k)}, ..., y_n^{(k)})$
$y_3^{(k+1)} = \text{solver}(x, y_1^{(k+1)}, y_2^{(k+1)}, y_3^{(k)}, ..., y_n^{(k)})$
$\vdots$
$y_n^{(k+1)} = \text{solver}(x, y_1^{(k+1)}, y_2^{(k+1)}, \cdots, y_{n-1}^{(k+1)}, y_n^{(k)})$
Erreur $= \text{Max}(\| y_1^{(k+1)} - y_1^{(k)} \|, ||y_2^{(k+1)} - y_2^{(k)}||, ..., ||y_n^{(k+1)} - y_n^{(k)}||)$
Fin de Tant que

avec
– $y^{(k+1)}$: représente l'approximation de y à l'itération en cours.
– $y^{(k)}$: représente l'approximation de y à l'itération précédente.

solver : la procédure de résolution de l'équation par la méthode à base ondelette de Chebyshev.

Chapitre 4

Application et Simulation

Les chercheurs et les ingénieurs se posent souvent la question : quel est le résultat que j'obtiens si j'exerce telle action sur un élément ? le moyen le plus simple serait de tenter l'expérience, c'est-à-dire d'exercer l'action souhaitée sur l'élément en cause pour pouvoir observer ou mesurer le résultat, dans de nombreux cas l'expérience est irréalisable, trop chère ou contraire à l'éthique. On a alors recours à la simulation, rechercher un élément qui réagit d'une manière semblable à celui que l'on veut étudier et qui permettra de déduire les résultats.

La simulation est un outil utilisé par le chercheur pour étudier les résultats d'une action sur un élément réel sans réaliser l'expérience. Lorsque l'outil de simulation utilise un ordinateur on parle de simulation numérique.

Une simulation numérique peut représenter des phénomènes physiques complexes dont la description repose sur un modèle mathématique comportant des équations différentielles. Pour résoudre ces équations numériquement en utilisant la méthode des éléments finis. C'est le cas, par exemple, pour la modélisation, appuyée sur la mécanique des fluides, de l'écoulement de l'air ou de l'eau autour d'un avion ou d'un navire.

Dans ce chapitre, on prouve l'efficacité de la méthode à base ondelette de Chebyshev sur un exemple académique dont on connait sa solution exacte, ensuite on fait une simulation numérique du modèle D.C.D décrit dans le premier chapitre.

On simule sur le logiciel Matlab pour son rôle important dans la résolution numérique et sa simplicité pour la réalisation des programmes, ainsi que la représentation graphique qu'il apporte.

4.1 Test numérique de la méthode

Dans cette section, on veut étudier l'efficacité de la méthode d'ondelette de Chebyshev, en la testant sur un exemple qu'on connait sa solution analytique.

On considère le problème de cauchy suivant

$$\begin{cases} u^{'}(x) - u(x) = \exp(x) \qquad \text{sur }]0,1] \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

La solution analytique de ce problème est

$$u_{exacte}(x) = x\exp(x).$$

La résolution numérique de ce problème passe par troix étapes :

1. On décompose la solution inconnue et le second membre dans la base d'ondelette (3.2)

$$\begin{aligned} u(x) &= u^T \Psi(x), \\ \exp(x) &= d^T \Psi(x). \end{aligned}$$

2. Intégrer l'équation 4.1 sur le domaine $(0, x)$ .et utiliser 3.7 et les conditions aux limites.
3. le résultat est un système linéaire

$$(I - P)^T U = P^T d.$$

4. La solution de ce système est injectée dans l'expression de $u(x)$, d'ou la solution du problème(4.1).

On note par $ERREUR$ l'erreur comise par la méthode tel que

$$ERREUR = \|u_{approché} - u_{exacte}\|_2 ,$$

Où

$u_{approché}$: représente la solution trouvée par la méthode à base ondelette de Chebyshev.

u_{exacte} : représente la solution exacte en $2^j \times nc$ points de collocations.

$\|.\|_2$: est la norme euclidienne.

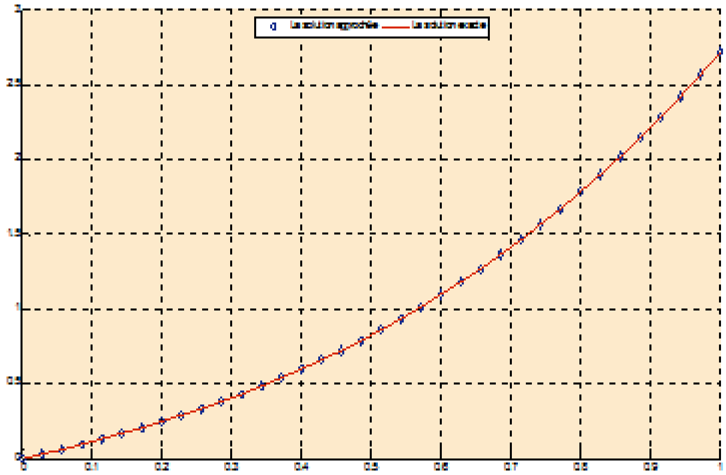
par exemple, pour différentes valeurs de nc et j, on a le tableau représentatif de l'erreur comise suivant

ERREUR	$nc = 1$	$nc = 2$	$nc = 3$	$nc = 4$	$nc = 5$
$j = 1$	2.4006e-001	3.9026e-002	2.3194e-003	2.0755e-004	1.0689e-005
$j = 2$	7.3181e-002	1.5156e-002	2.9909e-004	1.1688e-005	2.8557e-007
$j = 3$	2.6833e-002	9.5106e-003	2.5470e-005	1.4707e-006	6.0869e-009

ERREUR	$nc = 6$	$nc = 7$	$nc = 8$	$nc = 9$
$j = 1$	5.8042e-007	2.2415e-008	8.0163e-010	2.2099e-011
$j = 2$	6.2990e-009	1.1976e-010	1.9141e-012	2.8919e-014
$j = 3$	1.4927e-010	6.6397e-013	1.9846e-014	3.8146e-014

On remarque que l'augmentation de nc améliore sensiblement la précision, par contre l'augementation de j provoque une amélioration légère

Pour un nombre de points de collocation et un nombre de niveau fixé on trouve la figure suivante(4.1).



Le graphe reprsentatif de la solution exacte avec la solution approche

4.2 Simulation numérique du modèle D.C.D

Dans cette section, on fait fixer le nombre de points de collocation nc et le nombre de niveaux de la décomposition dans une période de 100 jours pour simuler le modèle D.C.D 2.1 dont le but d'étudier l'évolution du nombre des diabétiques sans complications et les diabétiques avec complications.

Le modèle D.C.D s'écrit pour $0 \leq t$(en jours) ≤ 100, comme suit

$$\begin{cases} D'(t) = I - (\mu + \lambda)D(t) + \gamma C(t) \\ C'(t) = \lambda D(t) - (\mu + \nu + \delta + \gamma)C(t) \\ D(0) = D_0 > 0, C(0) = C_0 > 0 \\ C(t) + D(t) = N(t). \end{cases}$$

Les données mathématiques du problème

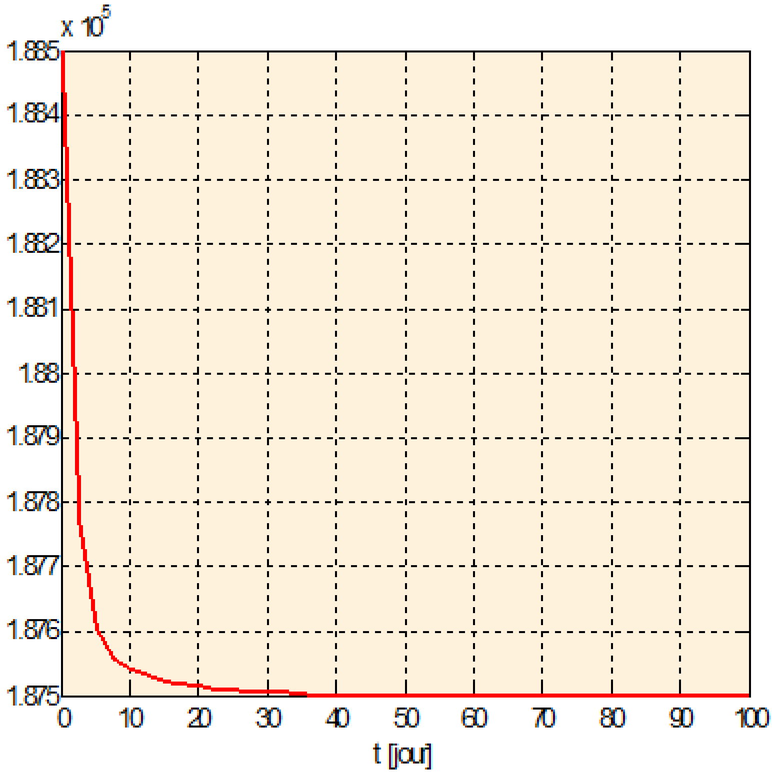
$$\begin{aligned} nc &= 10, \\ j &= 3, \\ Tolérance &= 10^{-5}. \end{aligned}$$

Les données physiques du problème sont représentées dans la tableau suivant

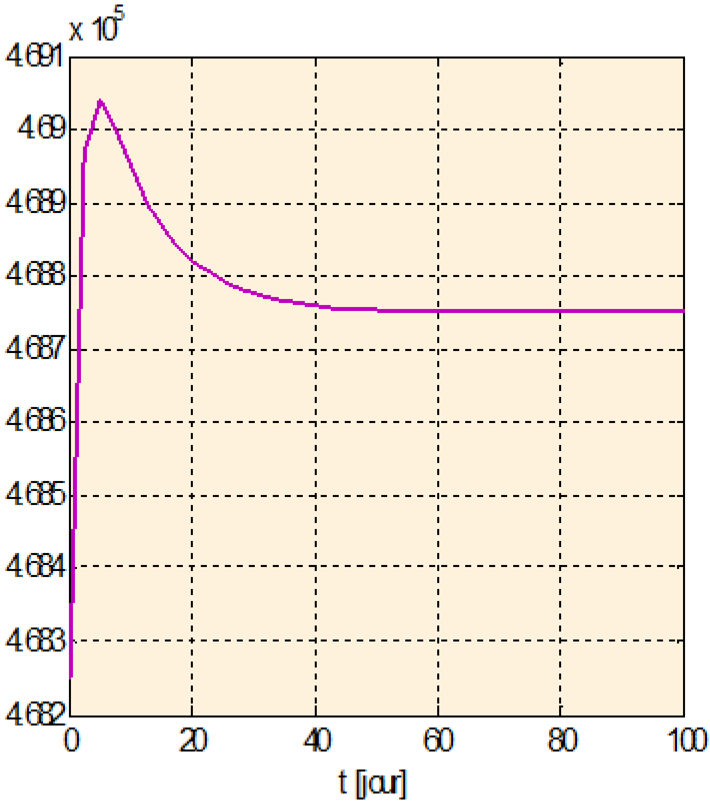
Paramètre	Estimation
Population totale	50.000.000
Incidence (I)	60.000/ans
Probabilité qu'un diabétique ait une complication (λ)	$\lambda = 0.5$
Taux de guérison de complication (γ)	$\gamma = 0.08$
Taux auquel les patients D.A.C deviennent sévèrement paralysés (ν)	$\nu = 0.05$
Taux de mortalité dû aux complications (δ)	$\delta = 0.05$
Taux de mortalité naturelle (μ)	$\mu = 0.02$
Le nombre initiale des diabétique sans complication (D_0)	$D_0 = 188500$
Le nombre initiale des diabétiques avec complications (C_0)	$C_0 = 468250$

Ces données sont prises de la thèse[2].

Par l'utilisation de la méthode d'ondelette de Chebyshev combinée à la technique de découplage et quasi-linéarisation, on obtient les résultats suivants :



L'evolution du nombre de diabetiques sans complications



L'evolution du nombre des diabetiques avec complications

Les figures (4.2-**??**) montrent que le nombre de diabétiques sans complications diminue avec le temps, ce qui veut dire qu'un diabétique peut presque toujours attraper une complication. On constate aussi que sur l'intervalle $[0, 30$ jours$]$ que le nombre des diabétiques avec complication augmente pour atteindre son maximum aprés une semaine, ensuite il diminue pour se stabiliser aprés 30 jours. Cette diminution s'explique par le fait que ces diabétiques avec complications, peuvent sortir de cette catégorie en guérissant de leurs complications et dans ce cas redevenir diabétique sans complicaions ou bien décèdent, suite à leurs complication ou de causes naturelles.

4.3 Conclusion et Perspectives

Le diabète est considéré actuellement comme la maladie du siècle vu le nombre de diabétiques qui ne cesse d'augmenter. Selon une enquête menée par l'institut national de santé publique, le diabète se situe dans la quatrième place des maladies chroniques non transmissibles en Algerie. La prévalence du diabète de type 2 dans l'est et l'ouest du pays varie entre 6.4 % et 8.2 % chez des patients allant de 30 à 64 ans.[5] Le diabète est l'une des maladies les plus répondu au monde avec plus de 220 millions de personnes diabétiques. L'augmentation du nombre de diabétique est tellement rapide que l'organisation mondiale de la santé (OMS) l'a identifié comme étant une épidémie.

Les complications diabétiques entrainent plus de morbidité et de mortalité c'est pourquoi la prévention et l'amélioration de ces complications one été les buts majeurs des recherches récentes. De nombreuses études ont démontré qu'ont pourrait retarder ou empêcher la survenue des complications liées au diabète par un diagnostic précoce et une prise en charge thérapeutique et médicale adéquate. Pour cela une étude de l'évolution de ses complications doit être faite pour pouvoir les prévenir.

Des méthodes numériques sont utilisés pour résoudre les équations qui représentent ces complications, dans notre cas la méthode à base ondelettes de Chebyshev. Les résultats des expériences numériques sont donnés pour le modèle $D.C.D$

La méthode d'ondelette de Chebyshev a beaucoup d'avantages :

La matrice opérationnelle d'intégration P contient beaucoup de zéros ce qui simplifient la résolution numérique du système algébrique

Avec un nombre réduit des niveaux et de points de collocations, on peut atteindre à des bons résultats

Parmis les principales perspectives de recherche qui apparaissent à l'issue de ce travail sont la possibilité d'améliorer le modèle $D.C.D$ en ajoutant d'autres paramètres qui peuvent intervenir pendant le diagnostic et la classification des complications diabétiques.

Bibliographie

[1] Amara Graps, "An Introduction to Wavelets", IEEE, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc vol. 2, num. 2 ,1995.

[2] Mémoire de Magister de Khadidja Achouyab sur la Modélisation mathématique en diabétologie conception et étude numérique,Université Mohamed premier, Oujda,N°d'ordre 155.

[3] site internet :http ://www.doctissimo.fr/html/dossiers/diabete/articles/7020-diabete-fleau-mondial-21e-siecle.htm.

[4] site internet : http ://www.afd.asso.fr/diabete.

[5] Ministère Algérien de la santé de la Population et de la Reforme, Guide du diabétologue du comité médical national de diabétologie, Comité Médical National de Diabétologie et la direction de la prévention avec l'appui de l'organisation mondial de la santé., 2005.

[6] E. Babolian , F. Fattahzadeh, Numerical solution of differential equations by using Chebyshev wavelet operational matrix of integration, Applied Mathematics and Computation, 188 (2007) 417–426.

[7] A Boutayeb, EH Twizell, K Achouayb and A Chetouani,A non-linear population model of Diabetes Mellitus , J. Appl. Math. & Computing Vol. 21(2006), No. 1- 2, pp. 127-139.

[8] Sur la route des ondelettes,Albert Cohen.

Annexe

AnnexeA

Un peu de détails sur les complications diabétiques et comment les prévenir

La neuropathie diabétique (atteinte des nerfs) est l'une des plus fréquentes complications chroniques du diabète entraînant d'autres complications tristement célèbres. Les symptômes, qui varient en fonction des nerfs touchés et des patients, peuvent se traduire par des troubles, accompagnés ou non de douleurs diverses et parfois nocturnes au niveau :

- des membres inférieurs (pieds, jambes,...).
- de l'appareil digestif (diarrhée, constipation,...)
- du système urinaire (mauvais contrôle de la vessie et de la miction)
- du rythme cardiaque et de la pression artérielle, avec des sensations de vertige au lever par chute de la tension artérielle (hypotension orthostatique)
- de l'activité sexuelle (trouble de l'érection, impuissance,...)
- La disparition des réflexes peut également être un signe de neuropathie.

Si un ou plusieurs de ces signes ou symptômes apparaissent, parlez-en à votre médecin. Signalez tout déficit sensitif, même si les symptômes semblent s'estomper avec le temps. Car les variations de la glycémie jouent sur le ressenti des douleurs. Votre médecin pourra pratiquer une recherche plus fine des stigmates de la maladie, grâce à différents instruments de mesure.

Le diabète peut entraîner des complications cardio vasculaires (troubles cardiaques, vasculaires ou artériels) car il altère aussi les gros vaisseaux sanguins (artères du cou, des jambes, du cœur...). Les complications du coeur et des artères sont 2 à 3 fois plus fréquentes chez les diabétiques que dans le reste de la population.

Causes

Des dépôts de graisse (plaques d'athérome) se forment sur les parois internes des artères et s'étendent. L'hypertension, associée à une alimentation trop riche en graisses, accélère ce dépôt. Avec le temps, ces plaques tendent à se durcir en devenant fibreuses et en se calcifiant (athérosclérose). Le diabète est donc en soi un facteur de risque cardiovasculaire. Si le patient diabétique présente plusieurs facteurs de risques associés, son médecin lui prescrira un bilan cardiologique annuel. Si l'on ne peut rien contre les facteurs de risque dit « non modifiables » : l'hérédité, l'âge, le sexe (les hommes sont plus touchés que les femmes), on peut cependant agir efficacement.

La rétinopathie diabétique (atteinte des yeux : œil et rétine) est une grave complication du diabète qui touche 50% des patients diabétiques de type 2. Les yeux sont particulièrement sensibles à l'atteinte des petits vaisseaux. En France, la rétinopathie diabétique est la première cause de cécité avant 65 ans.

Causes et processus de la rétinopathie diabétique

A l'extrémité des artères se trouvent les capillaires, ces petits vaisseaux qui irriguent les parties du corps et les organes. Composée de cellules visuelles et parcourue par une multitude de petits vaisseaux, la rétine est cette fine membrane de l'oeil qui réceptionne les impressions lumineuses venues de l'extérieur. Via le nerf optique, elle les transmet au cerveau qui les traduit en images. L'excès de sucre dans le sang fragilise la paroi des capillaires, entraînant une perte d'étanchéité. Il s'ensuit la rupture puis l'éclatement des vaisseaux rétiniens. Si des traitements existent et sont efficaces (notamment au laser) pour freiner l'évolution de la maladie et empêcher la cécité, le meilleur traitement reste la prévention : par un contrôle régulier (au moins une fois par an) chez un ophtalmologue, l'atteinte de l'équilibre glycémique, une tension artérielle maîtrisée, ainsi qu'une bonne hygiène de vie.

Douleurs, fourmis, doigts raides...les affections des mains empêchant la flexion des doigts et de la paume, comme le syndrome du canal carpien ou la maladie de Dupuytren, sont souvent douloureuses et invalidantes. Le diabète peut être à l'origine de ces affections ou les aggraver. Les diabétiques sont davantage touchés par ces pathologies.

Symptômes

La chéiroarthropathie diabétique, par exemple, désigne un syndrome responsable d'une raideur dans les doigts. Il se caractérise par une limitation sans douleur de la flexion et surtout de l'extension des doigts. Il peut s'accompagner d'un épaississement de la peau. La maladie de Dupuytren, elle, peut provoquer à terme une flexion irréductible d'un ou plusieurs doigts. Elle est due à une fibrose et à une rétractation de la structure fibreuse située à la paume de la main, entre les tendons fléchisseurs des doigts et la peau. Si les traitements sont le plus souvent des infiltrations, de la rééducation ou une intervention chirurgicale, l'équilibre du diabète est là aussi à surveiller dans la majorité des cas. L'équilibre du diabète, la surveillance par votre médecin des premiers symptômes, et ses conseils pour les prévenir et les endiguer sont à suivre avec sérieux, pour ne pas laisser s'installer ces complications.

Les complications du diabète qui touchent les pieds sont étroitement liées à la baisse de sensibilité des nerfs de contact, empêchant la perception des petites blessures ou anomalies du pied (cor, durillon, fissure, crevasse, mycose...), lesquelles finissent par s'amplifier et s'infecter... avec un risque d'amputation. Or, à l'origine d'une plaie infectée ou d'une gangrène, il y a le plus souvent : une petite blessure qui aurait pu être évitée et provoquée par : une chaussure (ampoule due au frottement d'une chaussure neuve), un ongle mal taillé ou un durillon ou "le mal perforant plantaire"que nous avons vu, véritable complication spécifique de la neuropathie.

garder un oeil sur ses pieds !

Si vous avez un pied à risque, un certain nombre de bonnes pratiques est de mise :

- hygiène des pieds, des orteils et des ongles,
- contrôle et surveillance visuels réguliers (par vous-même, un proche ou un spécialiste) de l'état de vos pieds,
- soins et traitement adaptés à la moindre blessure ou anomalie,
- En cas de pied infecté, il faut retrouver un diabète équilibré, arrêter de fumer (car le tabac a des effets sur la circulation sanguine), éviter les facteurs de risque, etc.
- Certaines techniques et ustensiles d'hygiène ou de confort (comme les bouillottes, certains coupe-ongles, etc.) sont à proscrire car peu compatibles avec des pieds fragiles.
- Bien choisir ses chaussures.

La néphropathie est aussi une atteinte des petits vaisseaux par excès de sucre dans le sang, mais les organes concernés ne sont pas les yeux mais les reins. On parle de "complication rénale du diabète" ou de "néphropathie diabétique". Au premier stade, l'atteinte se situe au niveau du filtre rénal.

symptômes

Le rein forme l'urine en filtrant le sang. A cause du diabète, le filtre rénal s'encrasse. Il n'élimine plus certains déchets et laisse passer dans les urines des molécules qui ne le devraient pas (albumine). Les déchets s'accumulant dans l'organisme, il s'ensuit une augmentation de la pression artérielle. Le développement de la maladie se fait sans bruit. Il faut pourtant repérer les premiers signes pour éviter les formes les plus graves de cette complication.

Face à une néphropathie diabétique : adapter le traitement du diabète

Une microalbuminurie positive et répétée indique une anomalie de la fonction rénale. Ce n'est pas nécessairement un signe de gravité, mais c'est un indicateur de risque de développer une maladie rénale chronique ou des maladies cardiovasculaires graves (angine de poitrine, infarctus, accident vasculaire cérébral...). Votre médecin, généraliste ou diabétologue, fixera avec vous en fonction de votre profil de nouveaux objectifs (tensionnels, glycémiques,...). Il adaptera votre traitement, en particulier pour la tension artérielle et pour le diabète, mais il pourra aussi donner un traitement spécifique pour protéger les reins.

Carie dentaire, gingivite, parodontite...souvent sous-estimées, les complications dentaires du diabète cachent un mal évolutif qui peut aller jusqu'à l'infection buccale généralisée et la perte des dents. Ces complications ont un lien étroit avec le diabète, car elles sont à la fois "cause et effet" d'un déséquilibre.

Symptômes

Salive plus sucrée et diminution de la résistance aux infections microbiennes (dont l'origine est aussi le diabète), rendent les personnes diabétiques plus vulnérables aux infections bucco-dentaires. Trois types de lésions sont les plus fréquentes chez les diabétiques.

– La carie dentaire

La carie dentaire est une destruction de l'émail de la dent par la plaque dentaire.

– La gingivite

La gingivite est une inflammation de la gencive par dépôt de bactéries au niveau du collet de la dent. Elle se traduit le plus souvent par des rougeurs, des saignements au moment du brossage et un gonflement de la gencive.

– La parodontite

La parodontite est une inflammation en profondeur des gencives et de l'os qui soutient la dent, entraînant la prolifération de germes le long de la racine dentaire. Les dents bougent, se déchaussent et risquent de tomber.

Les soins bucco-dentaires pour lutter contre les complications

Comme les pieds, les dents et les gencives du diabétique ont donc besoin d'une grande attention, même en l'absence de symptômes. Les complications dentaires peuvent être le signe d'un dérèglement glycémique ou en être la cause. Pour éviter ce genre de complication, il existe des recommandations faciles à appliquer.

Hygiène bucco-dentaire

Brossez-vous les dents méticuleusement après chaque repas, trois minutes minimum avec une brosse adaptée. Utilisez de préférence un dentifrice au fluor et du fil dentaire pour les zones inter-dentaires qui ne sont pas accessibles à la brosse.

Infections, mycoses, sécheresse vaginale, prostatite, dysfonction érectile, baisse de la libido... les complications du diabète peuvent affecter la sexualité. Ces troubles sexuels liés au diabète ne sont pas irrémédiables. Des moyens existent aussi pour s'en prémunir.

Des traitements efficaces contre les troubles sexuels liés au diabète

Il existe actuellement de nombreux traitements efficaces pour traiter les troubles sexuels. Enfin, la sexualité n'est pas seulement une histoire de fonctions organiques ou mécaniques. L'approche psychosexologique ne doit pas être négligée. Pouvoir parler librement de sa sexualité à un professionnel de santé, mais aussi à sa ou son partenaire, pour que la confiance et la complicité remplacent la culpabilisation et la frustration.

Prévention

Il existe des solutions pour prévenir les complications du diabète : des règles de vigilance et d'attention à soi qui permettent d'éviter leur apparition ou de freiner leur développement. Des recommandations spécifiques et des règles générales qui permettent d'agir efficacement contre elles.

Alimentation et complications

Les complications évoluent dans le temps, souvent silencieusement. Mais rien n'est inéluctable en la matière. A l'avancée des complications, on peut opposer l'accumulation des petits gestes qui protègent. C'est donc aussi une attention régulière qui est nécessaire. Car chaque action, chaque mesure, chaque bon réflexe dans la vie de tous les jours, compte. Il n'y a pas de petite victoire sur les complications.

L'itinéraire le plus sûr pour ne pas se diriger vers des ennuis de santé passe par :

– manger selon ses besoins et à heure régulière,
– équilibrer ses menus avec des aliments variés,
– commencer la journée par un vrai petit déjeuner,
– équilibrer ses repas au cours de la journée sans en sauter un,

L'activité physique contre les complications

La pratique d'une activité physique quotidienne permet de maintenir le diabète de type 2 à prudente distance. Elle conduit à améliorer les performances de l'insuline, à faire travailler l'appareil cardiovasculaire, à réduire la tension artérielle et le taux de lipides, etc. Un exercice quotidien, même modique, est déjà une excellente prévention. 30 minutes de marche rapide par jour procurent un bon équilibre entre dépenses énergétiques et apports caloriques. Il suffit de se remuer un minimum et c'est parti pour la forme !

Le rôle de l'autosurveillance dans la lutte contre les complications

Dans le cas du diabète, maladie évolutive sensible à de nombreux facteurs (temps, environnement extérieur et intérieur du corps humain, âge et profil du patient, ect.), tout est affaire d'équilibre et de dosage. Pour éviter les hypoglycémies et les hyperglycémies ou toute forme de complications du diabète, le médecin a besoin de votre implication et des données que vous lui fournirez.

Des informations utiles

La première mention de diabète remonte à 1552 avant Jésus-Christ sur un papyrus égyptien où un médecin décrit la polyurie (besoin fréquent d'uriner), comme un symptôme du diabète.

Certains médicaments peuvent faire monter le taux de glucose dans le sang, ou encore, empêcher l'insuline de l'organisme d'agir comme il faut. C'est le cas **e**notamment des diurétiques thiazidiques et des bêtabloquants, tous deux utilisés pour traiter l'hypertension artérielle, des immunosuppresseurs, pris par les personnes qui ont reçu une transplantation d'organe, et des corticostéroïdes, comme la prednisone, destinés à traiter une vaste gamme d'affections inflammatoires.

Si vous prenez l'un ou l'autre de ces médicaments, parlez-en à votre médecin ou à votre pharmacien.

Les aliments sont composés de lipides (graisses), protides (comme la viande) et glucides (sucres, féculents). Ce sont eux qui fournissent l'essentiel de l'énergie dont a besoin le corps pour fonctionner, passent dans l'intestin, puis rejoignent la circulation sanguine.

La glycémie

Le glucose apporte l'énergie aux différents tissus de l'organisme. Si le taux de glucose dans le sang reste stable même après un repas ou après un effort physique, c'est qu'il existe un système régulateur complexe dans lequel l'insuline joue un rôle primordial. La glycémie est le taux de sucre dans le sang.

– Valeur moyenne : 1 gramme par litre (5,5 mmol/l).
– Elle varie entre 1 et 1,4 g/l deux heures après un repas.
– Elle varie entre 0.8 et 1,26 g/l à jeun le matin.
– Selon les critères de l'OMS (Organisation mondiale de la santé), il y a diabète quand la glycémie à jeun est supérieure ou égale à au moins deux reprises à 7 mmol/l ou 1,26 g/l.
– L'hypoglycémie correspond à une glycémie inférieure à 0,45 g/l.
– La glycémie capillaire fait partie des techniques d'auto-surveillance. Elle se mesure par une piqûre au bout du doigt. La goutte de sang obtenue est déposée sur une bandelette qui est immédiatement lisible par le lecteur de poche du patient.
– La glycosurie est le taux de sucre dans les urines. Lorsque la glycémie atteint 1,60 g/l, le sucre passe dans les urines

L'insuline ne peut plus réguler la glycémie et cette résistance épuise progressivement le pancréas qui finit par ne plus assurer une production suffisante d'insuline. Ces deux mécanismes font que le glucose ne pénètre pas dans les cellules du corps et reste dans la circulation sanguine. Le taux de glucose dans le sang n'est pas régulé par l'insuline.

Les complications du diabète et les moyens qui permettent de les éviter sont encore trop méconnus. C'est pourquoi l'AFD, en tant qu'acteur de santé, lance cette campagne.

Car les complications existent, mais ne sont pas une fatalité.

On peut les éviter ! Vous vivez avec le diabète au quotidien et vous savez combien le diabète réclame vigilance, autosurveillance et soin de soi. Mais nombreuses sont aussi les raisons qui poussent parfois à baisser la garde : refus de la maladie ("j'ai un petit peu de diabète"), lassitude, découragement, méconnaissance de la sévérité de la maladie ou de certains de ses aspects... ou tout simplement l'absence de symptômes, le sentiment "d'être en forme" ou de n'avoir "jamais rien eu de ce côté là" !

Méconnaissance, négligence...

Les études montrent que de nombreux diabétiques méconnaissent les complications du diabète, ou qu'ils n'effectuent pas suffisamment de contrôles réguliers auprès de leur médecin généraliste ou de spécialistes (diabétologue, ophtalmologue, dentiste,...) pour les prévenir. Or, la méconnaissance et la négligence sont un peu comme des portes d'entrée par lesquelles les complications s'invitent trop souvent, subrepticement, avec des conséquences graves pour la santé des diabétiques. En France, sur 2 300 000 diabétiques recensés (on estime qu'il y a aussi 500 000 diabétiques non diagnostiqués, soit un total de près de 3 millions de diabétiques), on compte plus de 30 000 amputés, 35 000 aveugles et 300 000 infarctus. Des chiffres que l'on aimerait voir diminuer. Car des solutions existent...

Des solutions
– une meilleure connaissance de la maladie et de ses effets,
– des contrôles réguliers,
– et de bonnes pratiques de soin au quotidien,
permettent d'éviter et de freiner les complications.

Le diabète : quatrième cause de mortalité dans le monde

Toutes les dix seconde une personne meurt du diabète ou d'une maladie qui y est liée. Toutes les dix secondes aussi, deux personnes développent cette maladie, ce qui nous amène à une croissance générale quasi exponentielle des cas. Selon l'International Diabetes Federation, le diabète est la quatrième cause de mortalité dans le monde, avec plus de 50 pour cent de personnes qui n'ont pas connaissance de leur situation. Rappelons qu'en dehors de la médication, les diabétiques ont grand intérêt à établir un plan d'alimentation et à adopter un bon programme d'exercices physiques. En effet, ces interventions non médicamenteuses peuvent permettre de diminuer le dosage de la médication et de prévenir certaines complications.

Le rôle des vaisseaux sanguins et des nerfs dans l'organisme

Les petits et grands vaisseaux sanguins sont les canaux qui permettent au sang de circuler et d'irriguer tout le corps jusqu'aux organes.

Les nerfs communiquent au cerveau les informations perçues par nos sens (douleur, chaud, froid, etc.) et permettent à l'organisme d'appréhender tous les évènements extérieurs.

Effets du diabète sur les nerfs et les vaisseaux

Les hyperglycémies répétées, prolongées, et le déséquilibre du diabète provoquent une altération des nerfs et des vaisseaux et, par voie de conséquence, une altération de certaines cellules de l'organisme, avec des répercutions sur plusieurs organes.

Diabète et hérédité ?

Le poids de l'hérédité diffère selon qu'il s'agit du diabète de type 1 ou du diabète de type 2. Lorsque l'un des deux parents est diabétique de type 2, le risque de transmission à la descendance est de l'ordre de 40 % et si les deux parents sont atteints, le risque grimpe à 70%. Il n'est que de 5 % dans le diabète de type 1, plus précisément 6 % si le père est diabétique, 2-3 % si c'est la mère (mais 30 % si les deux parents le sont). Il est donc utile de se construire un arbre généalogique pour repérer les personnes de sa famille qui sont diabétiques et connaître son patrimoine génétique.

AnnexeB

Notions De Base

Propriétés des polynômes de Chebyshev

Les premiers polynômes de Chebychev de première espèce sont représentés graphiquement(4.3)

$T_0(t) = 1,$

$T_1(t) = t,$

$T_2(t) = 2t^2 - 1,$

$T_3(t) = 4t^3 - 3t,$

$T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1,$

$T_5(t) = 16t^5 - 20t^3 + 5t,$

$T_6(t) = 32t^6 - 48t^4 + 18t^2 - 1,$

$T_7(t) = 64t^7 - 112t^5 + 56t^3 - 7t,$

$T_8(t) = 128t^8 - 256t^6 + 160t^4 - 32t^2 + 1,$

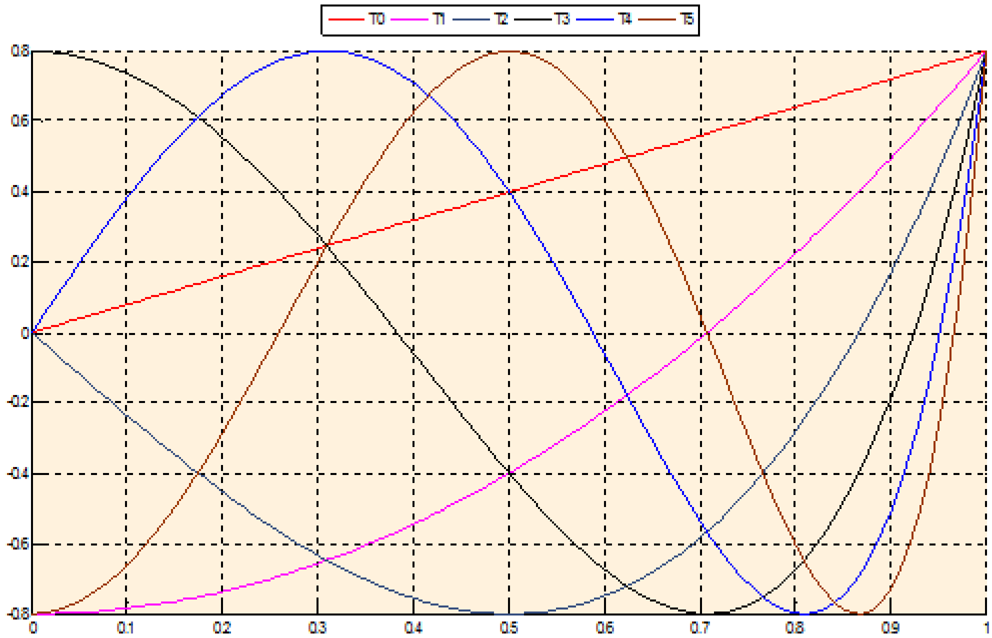
$T_9(t) = 256t^9 - 576t^7 + 432t^5 - 120t^3 + 9t.$

Les $T_n$sont orthogonaux sur l'intervalle $]-1, 1[$ avec la fonction de pondération $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Plus précisément :

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, \text{si } n \neq m \\ \pi, \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2}, \text{si } n = m \neq 0. \end{cases}$$

Ils vérifient l'équation différentielle suivante :

$$(1 - x^2)T_n^{''}(x) - xT_n^{'}(x) + n^2 T_n(x) = 0.$$



Le graphe reprsentatif des premiers polynmes de Chebyshev

Annexe C

Cette partie est consacrée aux programmes matlab qui réalisent la méthode à base ondelette de Chebyshev notée par **MWC**

Les sous programmes de la méthode sont organisés comme suit :

Pour les polynômes de Chebyshev

```
function Tm = chebbyshev(m,x)
if m==0
Tm = 1;
elseif m==1
Tm = x;
else
T(1) = x;
T(2) = 2*x^2 - 1;
for i =2 :m-1
T(i+1) = 2*x*T(i)-T(i-1);
end
Tm = T(m);
end
function T_tilde = chybechev_polynomial_tild(m,x)
```

```
if m == 0
T_tilde = 1/sqrt(pi);
else
T_tilde = sqrt(2/pi)*chebbyshev(m,x);
end
end
```

Pour l'ondelette de Chebyshev

```
function psi = wavelet_chybechev(j,m,n,x)
%if (n-1)/2^(j-1)<=x & x <= n/2^(j-1)
% psi = 2^(j/2) *chybechev_polynomial_tild(m,2^(j)*x-2*n+1);
%else
% psi = 0;
%end
if n~=2^(j-1)
if (n-1)/2^(j-1) <= x & x < n/2^(j-1)
    psi = 2^(j/2) *chybechev_polynomial_tild(m,2^(j)*x-2*n+1);;
else
   psi = 0;
end
end
if n==2^(j-1)
if (n-1)/2^(j-1) <= x & x < n/2^(j-1)+1e-7
  psi = 2^(j/2) *chybechev_polynomial_tild(m,2^(j)*x-2*n+1);;
else
  psi = 0;
end
end
function psi = vect_chebyshev_wavelet(j,nc,x)
for n = 1 :2^(j-1)
  for k = 0 :nc-1
      psi(k+(n-1)*nc+1) = wavelet_chybechev(j,k,n,x);
  end
end
```

Pour la matrice opérationnelle d'intégration

```
function [L,F] = matrix_LF(nc,jj)
L = zeros(nc);
F = zeros(nc);% initialisation de la matrice F
F(1,1) = 2;
F(2,1) = 0;
for i=3 :nc-1
    F(i,1) = sqrt(2)/2 * ((1 - (-1)^(i))/(i) - (1-(-1)^(i-2))/(i-2));
end
F = 1/2^jj*F;
v(1)=1/sqrt(2);
for i=2 :nc-1
  v(i) = 1/(2*i);
```

```
end
w(1) = -(sqrt(2))/4 ;
for i= 2 :nc-1
   w(i) = (-1)/(2*(i-1)) ;
end
y = zeros(nc,1) ;
y(1)=1 ;
L = (diag(v,1) + diag(w,-1) + diag(y)) ;
L(1,1)= 1 ;
L(2,1)= -(sqrt(2))/4 ;
for i=2 :nc-1
  L(i+1,1)=(sqrt(2)/2)*((-1)^(i-1)/(i-1)-(-1)^(i+1)/(i+1)) ;
end
L = 1/2^jj*L ;
function P = matrix_integration(nc,jj)
n = 2^(jj-1) ;% la dimension de la matrice P
[L,F] = matrix_LF(nc,jj) ;
P = zeros(n*nc) ;% initialisation de P
for i = 1 :n
  if (i==1)
for j=i :n
  if (j==i)
for k = 1 :nc
  for h = 1 :nc
P((i-1)*nc+k,(j-1)*nc+h) = L(k,h) ;
  end
end
 else
  for k = 1 :nc
      for h = 1 :nc
P((i-1)*nc+k,(j-1)*nc+h) = F(k,h) ;
     end
  end
end
end
  else
for j=i :n
 if (j==i)
for k = 1 :nc
   for h = 1 :nc
P((i-1)*nc+k,(j-1)*nc+h) = L(k,h) ;
  end
end
else
for k = 1 :nc
 for h = 1 :nc
```

```
P((i-1)*nc+k,(j-1)*nc+h) = F(k,h);
 end
end
  end
end
end
end.
```

Pour la résolution d'une équation différentielle ordinaire par la méthode MWC

```
function y = MWC(nc,j,y0,f,a,b,x)
% On considère le problème suivant :
% _
% | ay'+ by = f sur(0,1)
% (1) <
% |_ y(0) = y0.
%
% On utilise la méthode ondellette de chebyshev pour résoudre (1)
% Les étapes de la résoulution :
% <1> On intègre l'équation du problème (1) sur [0,x],on obtient :
% a*I(y')+ b*I(y) = I(f) <=> a*y + b*I(y) = I(f) + a*y0
% <=> a*c'*psi + b*c'*P*psi = d'*P*psi + a*d0*psi
% <=> c'*(a*eye(2^j*nc)+ b*P) = d'*P* +a*d0
% <=> (a*eye(2^j*nc)+ b*P)'*c = (d'*P* +a*d0)'
% <=> c = inv((a*eye(2^j*nc)+ b*P))'*(d'*P + a*d0)'.
% <2> y_approch = c'*psi.
psi = matrix_chebyshev_wavelet(j,nc,x);
P = matrix_integration(nc,j);
d = inv(psi')*f;
d0 = inv(psi')*a*y0;
c = inv((a*eye(2^(j-1)*nc) + b*P)')*(d'*P + a*d0')';
y = (c'*psi)';
end
```

Maintement , on donne le programme matlab déstiné à l'exmple qu'on a choisit

```
function sol=exp_1(jj,nc,x)
% le premier exemple
psi = matrix_chebyshev_wavelet(jj,nc,x);
P = matrix_integration(nc,jj);
d = inv(psi')*ones(length(x),1);
ex = inv(psi')*exp(x');
c = inv((eye(length(x)) - P'))*(ex-d);
sol = c'*psi;
clear all
close all
format short e
for jj=1 :3
 for nc=2 :10
```

```
a = 1;
b = -1;
x = 0 :1/(nc*2^(jj-1)-1) :1;
psi = matrix_chebyshev_wavelet(jj,nc,x);
P = matrix_integration(nc,jj);
sol=exp_1(jj,nc,x);
E(jj,nc-1) = norm(sol-x.*exp(x));
 end
end
hold on
plot(x,sol)
plot(x,x.*exp(x),'*')
```

Finalement , on donne le programme matlab qui traite le modèle D.C.D

```
clear all
close all
% ******************************************************************%
%
% _ %
% | D' + (u+lamda)*D = I +gamma*C
%
% < %
% |_ C' + (u+v+ro+gamma)*C = lamda*D.
%
% %
% Avec : %
% _ %
% | D(0) = D0 %
% (CI) < %
% |_ C(0) = C0.
% D(t) : la population des diabétiques sans complication
% C(t) : la population des diabétiques avec au moins une complication
% lamda : probabilité qu'un diabétique ait une complication
% u : taux de mortalité naturelle supposé constant
% ro : taux de mortalité brusque causé par une complication diabétique
% v : taux de handicap sévère %
% I : la fonction d'incidence dépendante du temps du diabète
% t : variable de temps
nc = 10;
j = 3;
T = 100;
t = 0 :1/(nc*2^(j-1)-1) :1;
% les paramètres du modele
u = 0.02;
lamda = 0.5;
gamma = 0.08;
v = 0.05;
```

```
ro = .05;
I = 60000;
% les coeffs de l'équation
a = 1;
b = u+lamda;
aa = 1;
bb = u+v+ro+gamma;
ppp = nc*2^(j-1);
% le second membre
f1 = @(C)(I+gamma*C);
f2 = @(D)(lamda*D);
cD0 = 188500*ones(ppp,1);
cC0 = 468250*ones(ppp,1);
D0 = ones(ppp,1);
C0 = ones(ppp,1);
err = 1;
Tol = 1e-5;
% découplage
  while err > Tol
D1 = MWC(nc,j,cD0,T*f1(C0),a,T*b,t);
C1 = MWC(nc,j,cC0,T*f2(D1),aa,T*bb,t);
err = max(norm(D1-D0),norm(C1-C0));
D0 = D1;
C0 = C1;
  end
figure(1)
plot(T*t,D1,'r')
figure(2)
plot(T*t,C1).
```

Abstract

Le diabète est une maladie chronique incurable causée par une carence ou un défaut d'utilisation de l'insuline entraînant un excès de sucre dans le sang. Un diabète non ou mal traité risque de voir apparaître des complications, parfois très graves (rétinopathie, insuffisance rénale, acidocétose, accidents vasculaires, etc.), et peut aussi entraîner toutes sortes de problèmes, voire de sérieux handicaps. Un modèle mathématique a été élaboré pour le suivi de l'évolution des complications du diabète, ce modèle peut être linéaire ou non linéaire, continu ou discret.

Pour résoudre ce modèle mathématique aux équations différentielles. On s'intéressera à un type particulier de méthode numérique, une combinaison d'une méthode à base ondelette de Chebyshev avec la technique de découplage et de quasi-linéarisation, pour approcher la solution d'un système de problèmes à valeurs aux limites couplé et linéaire.