

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE  
UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM  
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

## Mémoire de Master en Mathématiques

Option : Modélisation, Contrôle et Optimisation

présenté par

M<sup>elle</sup>.Bouzid Leila

## La Modélisation Mathématique et Simulation numérique de transmission de l'épidémie de Dengue

soutenue le 20 juin 2013 devant le jury

Président :	M. BAHRI Sidi Mohammed, MCA,	Université de Mostaganem.
Examineur :	Mme ABLAOUI Naïma, MAA,	Université de Mostaganem.
Encadreur	M. BELHAMITI Omar, MCA,	Université de Mostaganem.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>4</b>
<b>1 Les modèles mathématiques en épidémiologie</b>	<b>6</b>
1.1 Symptômes . . . . .	8
1.2 La transmission et prévention du virus . . . . .	9
1.3 La modélisation de l'épidémie de Dengue . . . . .	9
1.4 Elaboration du modèle étudié . . . . .	11
<b>2 La Méthode des ondelettes de Legendre (LWM)</b>	<b>14</b>
2.1 Polynôme de Legendre . . . . .	14
2.2 Les ondelettes . . . . .	15
2.3 Les ondelettes de Legendre . . . . .	15
2.4 Approximation d'une fonction . . . . .	16
2.5 La Matrice Opérationnelle d'intégration . . . . .	17
2.6 Le produit de deux ondelettes . . . . .	20
2.7 Résolution d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 à coefficients non constants . . . . .	21
2.8 La technique de découplage et quasi-linéarisation (DQL) . . . . .	22
<b>3 Application et Simulation</b>	<b>24</b>
3.1 Test de la Méthode . . . . .	24
3.2 La simulation de la transmission de l'épidémie de Dengue . . . . .	26
<b>Bibliographie</b>	<b>30</b>

# Remerciement

Je remercie tout d'abord mon dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage, la patience et la volenté durant toutes mes années d'études.

Mes sincères remerciements s'adressent à mon encadreur Mr.BELHAMITI.Omar, professeur à l'Université de Mostaganem, qui m'a fait l'honneur de m'encadrer en Licence et en Master et de juger ce travail.

Un grand merci pour votre disponibilité, votre implication et vos judicieux conseils.

Veillez trouver ici l'expression de ma profonde et sincère reconnaissance.

Je voudrais remercier les membres du jury, M. BAHRI Sidi Mohammed d'avoir bien voulu présider mon travail, et Mme ABLAOUI Naima d'avoir fait partis de ces membres.

Mes remerciements s'adressent également à tous mes enseignant(e)s en licence et en Master et surtout Mme.Ablaoui qui m'a beaucoup aidé dans la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à remercier particulièrement, ALI MERINA Houria, HAMOU MAAMAR Maghnia et HAKIKI Kheira pour tous les conseils et pour toutes les corrections effectuées.

Je remercie infiniment tous les étudiants de ma promotion et en particulier de ma spécialité Modélisation Contrôl et Optimisation qui m'ont tant soutenu et encouragé.

Je souhaite remercier toutes les secrétaires du département de Mathématiques et Informatiques ainsi que les employeurs de notre Université.

Enfin un grand merci à ma famille Bouzid et surtout mon père Habib et ma mère, aussi la famille Belarbi de m'avoir donné le courage pour mener à terme ce travail, et surtout ma soeur Belarbi Asma.

*A ma famille et mes amies.*

# Introduction Générale

La modélisation mathématique en biologie est un procédé complémentaire aux approches expérimentales traditionnelles. Ces dernières années, de nombreux modèles mathématiques épidémiologiques ont été développés afin d'aider à la compréhension de processus biologiques impliquant des maladies infectieuses. Les simulations issues de ces modèles peuvent remplacer l'expérimentales, voire éviter la réalisation d'expériences biologiques *in vivo* (vivo c-à-d le corps humain) souvent longues et coûteuses.

Dans les pays en voie de développement, la croissance des populations est un facteur important qui contribue à l'augmentation de l'incidence des maladies transmissibles et surtout dans les pays pauvres, parmi les plus touchés les enfants et les plus âgés.

Selon l'Organisation panaméricaine de la santé, l'incidence a été quasiment multipliée par 10 au cours des 20 dernières années. Les scientifiques attribuent cette résurgence à l'augmentation des déplacements internationaux, au changement climatique et à des taux sans précédent d'urbanisation dans les régions tropicales.

Avec le progrès de la médecine en termes de vaccination et d'amélioration des conditions de vie en général, on pensait qu'à partir de la deuxième moitié du 20<sup>ème</sup> siècle, les maladies infectieuses allaient disparaître. A la surprise de tout le monde, on a découvert d'autres maladies encore plus dangereuses comme le cancer, Malaria, fièvre jaune, SIDA, Ebola ... sont des noms qui ont marqué la mémoire de l'humanité pour toujours.

En 1760, Daniel Bernoulli propose l'un des premiers modèle mathématique pour l'épidémie de la variole.

Ensuite en 1911, le médecin anglais *Sir Ronald Ross* développe un modèle compartimental utilisant des équations différentielles. *W.O.Kermack et A.G.McKendrick* [*Kermack and McKendrick, 1927*] ont développé les grands modèles classiques *SIR* (*S* désigne les susceptibles, *I* les infectés et *R* les résistants) de base qui sont des modèles déterministes qui se reposent sur des systèmes d'équations différentielles non linéaires et ont établi le théorème de Seuil, ils supposent que la population est constante et que les individus sont également susceptibles et qu'une infection conduit soit au décès soit confère une complète immunité.



Sir Ronald Ross

Dans ce travail on s'intéresse à la transmission de l'épidémie de Dengue. La Dengue est une arbovirose (de l'anglais Arthropod Borne Virus, virus transmis par un arthropode) originaire du Sud-Est asiatique. On estime que 60 à 100 millions de personnes sont infectées par cette épidémie chaque année dans le monde. Le plus souvent, elle se manifeste par une forte fièvre, des maux de tête, nausées, douleurs musculaires et articulaires. La forme grave de cette maladie est la "fièvre hémorragique de Dengue" qui peut se compliquer à un état de choc souvent mortel. La transmission de l'épidémie de Dengue est décrite par un modèle mathématique formulé par un système d'équations différentielles ordinaires, qui peut être approché numériquement.

Depuis le *XVIII<sup>e</sup>* siècle, de nombreux mathématiciens cherchent une méthode numérique stable et efficace pour approximer la solution de ce type de problème (problème de valeurs aux limites non linéaire).

La théorie des ondelettes est un domaine relativement nouveau. Elle a été appliquée dans plusieurs disciplines, en particulier dans l'analyse du signal, représentation de forme d'onde et segmentations. Dans ce travail, on s'intéresse à l'application des ondelettes pour la solution numérique d'un système d'équations différentielles. On s'intéresse en particulier aux ondelettes de Legendre. On propose la Méthode d'ondelette de Legendre, qui consiste à réduire une équation différentielle ordinaire à un système d'équations algébriques.

Notre travail est une synthèse des deux articles, le premier, *Shakoor Pooseh, Helena Sofia Rodrigues, and Delfim F. M. Torres : Fractional Derivatives in Dengue Epidemics, AIP Conf. Proc. 1389, 739 (2011)* pour le modèle mathématique. Le deuxième, *M.RAZZAGHI, S.YOUSEFI. : Legendre wavelets direct method for variational problems. Mathematics and Computers in Simulation, 53, 2000, 185-192.* pour la méthode d'ondelette de Legendre.

Ce travail est organisé de la façon suivante :

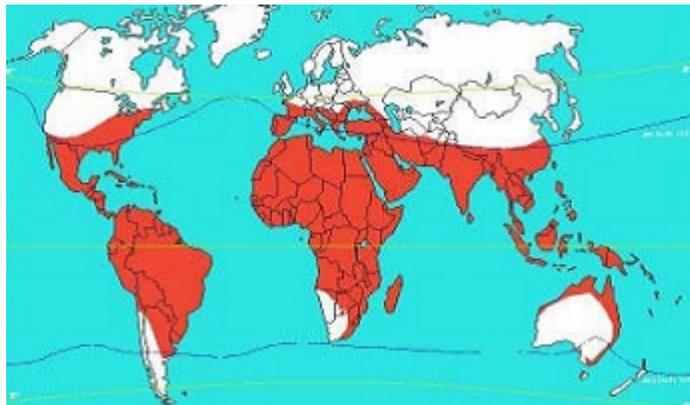
Dans le premier chapitre on donne une description générale de l'épidémiologie, ensuite on développe le modèle de transmission de l'épidémie de Dengue. Le deuxième chapitre aborde la méthode de résolution en détail. Le dernier chapitre est consacré pour l'application et la simulation numérique.

A la fin de ce document on donne une conclusion, des références bibliographiques et des annexes.

# Chapitre 1

## Les modèles mathématiques en épidémiologie

L'objectif de ce chapitre est de faire une illustration sur les maladies transmissibles et infectieuses. On s'intéresse en particulier à des maladies vectorielles pour lesquelles l'agent pathogène (virus, parasite,...) est transmis d'un individu infecté (homme, animal) à un autre par des moustiques (*Aedes aegypti*) et existent sous deux formes : fièvre de Dengue et Fièvre hémorragique de Dengue, et sont répandues principalement dans les régions tropicales et sub-tropicales à travers le monde, voir la figure suivante.



Repartition mondiale de *Aedes aegypti* (Janv 2006)

Seules les femelles de moustique piquent pour se procurer les acides aminés nécessaires à l'ovogenèse, voir la figure suivante.



Un anophele femelle

*Aedes aegypti* est un des moustiques vecteurs les plus redoutables des arbovirus car il est très anthropophile (c-à-d un animal vivant dans un milieu habité par l'homme), en effet il s'agit d'un moustique « domestique », c'est-à-dire qu'il se développe dans divers sites créés par l'homme et donc à proximité de celui-ci. Il se déplace sur de courtes distances, vivant ainsi dans un rayon de 80 m et dans les habitations humaines, et se développe dans tous les endroits où règne une humidité résiduelle : vases à fleurs, citernes d'eau propre, gouttières bouchées, récipients usagés abandonnés, vieux pneus, abreuvoirs à animaux, déchets divers... , mais aussi dans des habitats naturels comme des troncs d'arbres, des aisselles de feuilles, des coques de noix de coco, voir la figure suivante.



Pot de fleur



Gouttière



Aisselles de feuilles

Exemples de gîtes pour les larves d'*Aedes aegypti*

Plusieurs facteurs contribuent à la progression rapide de la Dengue dans le monde :

- l'accroissement démographique considérable dans de nombreux pays tropicaux, conduisant à l'augmentation du nombre de personnes en contact avec le vecteur,
- l'extension des villes sans urbanisation organisée, sans assainissement ni traitement des déchets adéquats,
- l'augmentation des échanges de biens et de personnes, notamment via le transport aérien, permettant une circulation plus étendue du vecteur et du virus,
- l'érosion des programmes d'éradication du moustique vecteur.

## 1.1 Symptômes

La période d'incubation est habituellement de 5 à 6 jours (extrêmes : 3-15 jours).

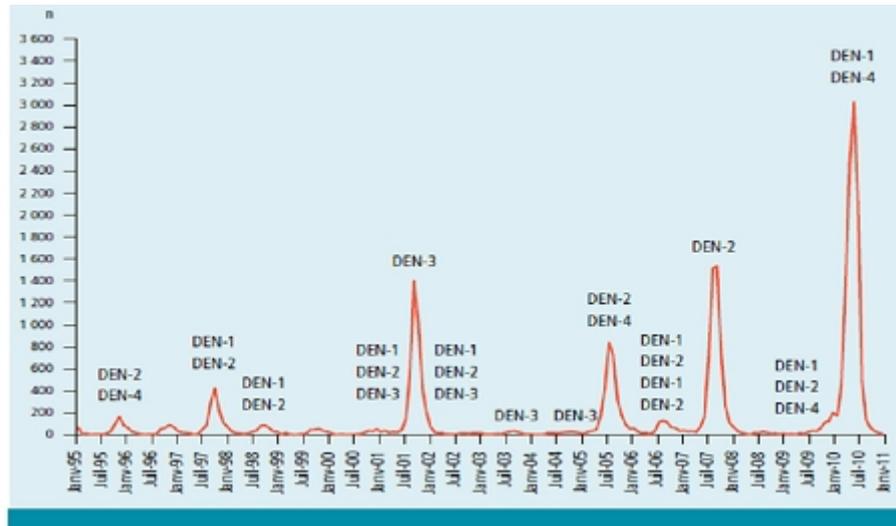
Cependant, lorsque les symptômes apparaissent, ils associent pendant 2 à 7 jours : une fièvre élevée (le plus souvent supérieure à  $39^{\circ}\text{C}$ , pouvant atteindre  $40^{\circ}\text{C}$  –  $41^{\circ}\text{C}$ ) de début brutal.

Des symptômes non-spécifiques tels que :

- des maux de tête frontaux,
- des douleurs rétro-orbitaires,
- des douleurs musculo-articulaires,
- une sensation de fatigue (asthénie),
- une éruption maculo-papulaire survenant de façon inconstante, affectant le tronc et s'étendant vers le visage et les extrémités,
- des signes digestifs (vomissements),
- des manifestations hémorragiques limitées (pétéchies, purpura, saignements
- des gencives, du nez ou digestifs).



On connaît quatre formes de virus (ou sérotypes) dénommés DEN-1 (pour Dengue 1), DEN-2, DEN-3 et DEN-4. L'infection par une de ces 4 formes de virus immunise la personne contre celle-ci, mais pas contre les 3 autres. Une personne peut donc en théorie connaître 4 infections successives avant d'être protégée contre les 4 types de virus, voir la figure suivante.



Surveillance épidémiologique mensuelle des cas de Dengue

## 1.2 La transmission et prévention du virus

Un moustique contracte le virus de la Dengue lorsqu'il pique une personne déjà infectée, les 5 premiers jours de l'infection ne présente aucun symptôme. Le moustique devient alors porteur du virus et peut le transmettre à une autre personne en la piquant. C'est ainsi que se propage l'épidémie. Le virus ne se transmet pas directement d'homme à homme : les personnes atteintes de la Dengue ne sont pas directement contagieuses (sauf par transfusion sanguine).

Il n'existe aucun vaccin, ni traitement antiviral spécifique de la Dengue. Les soins médicaux préventifs augmentent les chances de survie aux formes sévères de la maladie. Actuellement, le seul moyen disponible de lutte contre la maladie consiste à contrôler les populations de moustiques, par la gestion environnementale, les insecticides et l'utilisation de prédateurs des larves de moustiques.

## 1.3 La modélisation de l'épidémie de Dengue

Pour comprendre le mécanisme de transmission de la maladie, de nombreux auteurs ont proposé différents types de modèles épidémiologiques.

Le modèle le plus simple, qui a été établi se compose de deux compartiments : sensibles ( $S$ ), infectés ( $I$ ). Ensuite, *Kermack et McKendrick* en 1927 proposent un autre modèle composé de trois compartiments : sensibles ( $S$ ), infectés ( $I$ ), récupéré ( $R$ ).

Les personnes sensibles qui sont susceptibles d'avoir la maladie, jamais été infectés, et ils sont capables d'attraper la maladie. Une fois qu'ils l'ont, ils se déplacent dans le compartiment infecté.

Les personnes infectées peuvent transmettre la maladie à des personnes sensibles. Le temps qu'ils passent dans le compartiment infecté est la période de contagion, après quoi ils entrent dans le compartiment récupéré.

Les personnes récupérées sont les individus qui ont acquis une immunité ou décédé par la maladie.

**Remarque 1.1** *Ces états sont temporaires, l'individu peut changer d'état.*

Le diagramme suivant schématise le modèle **SIR**.

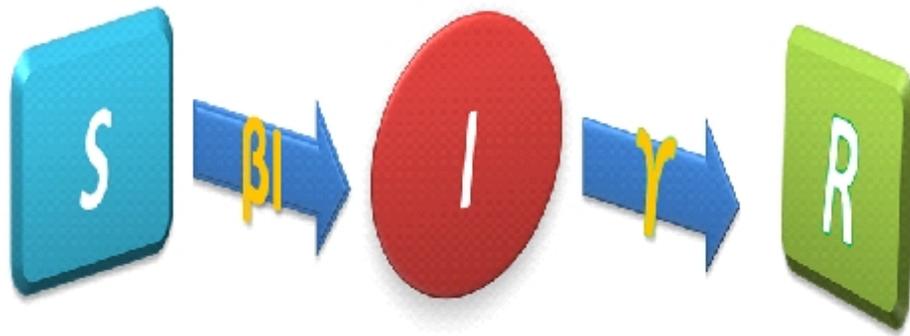


FIG. 1.1 – Le modèle SIR

On peut interpréter ce diagramme par le système suivant pour  $t \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \\ S(0) = S_0, I(0) = I_0 \text{ et } R(0) = R_0, \end{cases}$$

où,

$\beta$  : est le coefficient de transmission de la maladie.

$\gamma$  : est le taux de récupération de l'infection.

$S(t)$  : **sensible(Susceptible)** : Les individus qui sont susceptibles de contracter la maladie à l'instant  $t$ .

$I(t)$  : **infectées** : Les individus qui sont déjà touchés par la maladie et susceptibles de la transmettre à d'autres individus à l'instant  $t$ .

$R(t)$  : **résistants(removed)** : Les individus qui ont acquis une immunité à l'instant  $t$  ou décédé par la maladie.

Un autre modèle appelé **SEIR** est établi, en distinguant parmi la population infectée celle qui est contagieuse ( $I$ ) et celle qui ne l'est pas ( $E$ ), et ceci peut être schématisé dans le diagramme suivant.

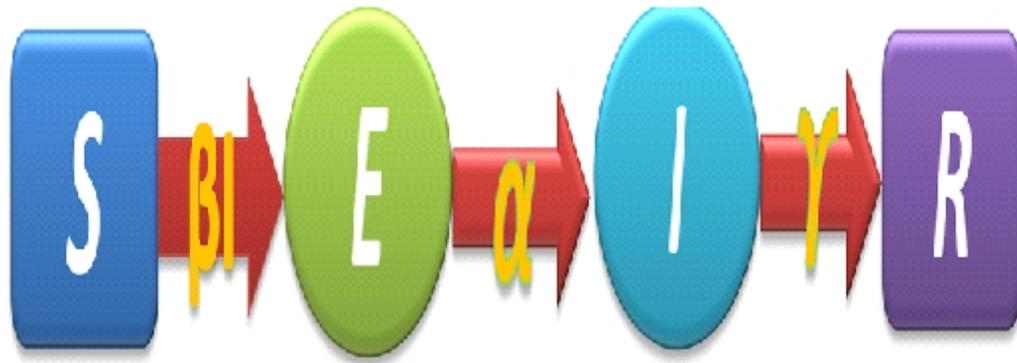


FIG. 1.2 – Le modèle SEIR de base

Le système correspondant

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta I(t)S(t) \\ \frac{dE(t)}{dt} = \beta I(t)S(t) - \alpha E(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha E(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t), \end{cases}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} S(0) = S_0 \\ E(0) = E_0 \\ I(0) = I_0 \\ R(0) = R_0, \end{cases}$$

où  $\alpha$  : est le taux de passer de l'infectieux à l'infecté.

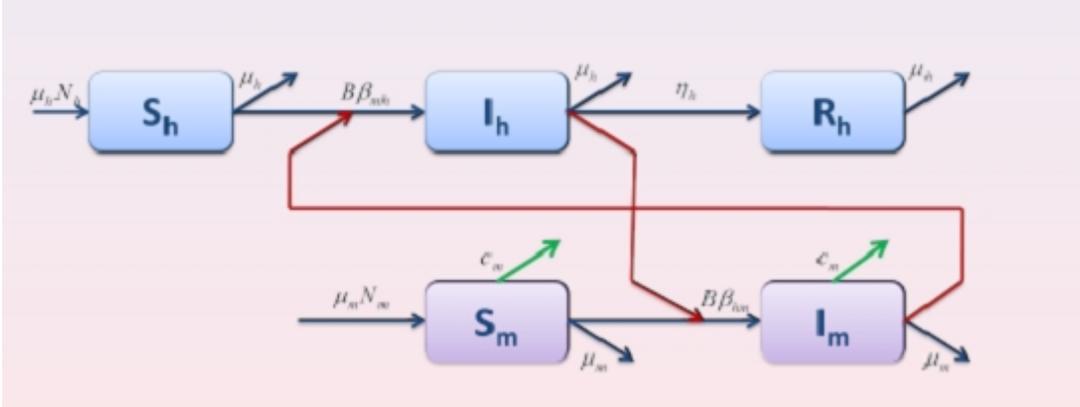
$E(t)$  : infectés non infectieux (exposed).

## 1.4 Elaboration du modèle étudié

Dans le but de décrire la transmission de l'épidémie de Dengue, on dispose de deux populations, humaines de taille  $N_h$  et de vecteurs moustiques de taille  $N_m$ . Les humains sont divisés en trois classes complémentaires : susceptible ( $S_h$ ), infectés ( $I_h$ ) et résistant ( $R_h$ ). Le nombre total des humains est constant, ce qui signifie que  $N_h = S_h + I_h + R_h$ . De même, pour les vecteurs de moustiques, on a deux compartiments : susceptibles ( $S_m$ ) et infectés ( $I_m$ ). On a aussi supposé que  $N_m = S_m + I_m$ .

L'humain ou le moustique vont passer successivement d'un état sain, à un état infecté, puis infectant, puis éventuellement résistant (pour les humains) selon bien sur des probabi-

lités données.



Le modèle dynamique

La transmission de la maladie est régie par un système d'équations différentielles non linéaires définie sur  $[0, T]$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_h(t)}{dt} = \mu_h N_h - (B\beta_{mh} \frac{I_m(t)}{N_h} + \mu_h) S_h(t) \\ \frac{dI_h(t)}{dt} = B\beta_{mh} \frac{I_m(t)}{N_h} S_h(t) - (\eta_h + \mu_h) I_h(t) \\ \frac{dR_h(t)}{dt} = \eta_h I_h(t) - \mu_h R_h(t) \\ \frac{dS_m(t)}{dt} = \mu_m N_m - (B\beta_{hm} \frac{I_h(t)}{N_h} + \mu_m) S_m(t) \\ \frac{dI_m(t)}{dt} = B\beta_{hm} \frac{I_h(t)}{N_h} S_m(t) - \mu_m I_m(t), \end{array} \right. \quad (1.1)$$

avec des conditions initiales

$$S_h(0), I_h(0), R_h(0), S_m(0) \text{ et } I_m(0), \text{ données.}$$

Où,

Les paramètres	La description biologique
$N_h$	Population totale humaine,
$N_m$	Population totale de moustique,
$B$	taux moyen quotidien des individus piqués,
$\beta_{mh}$	probabilité de transmission à partir de $I_m$ (par morsure),
$\beta_{hm}$	probabilité de transmission à partir de $I_h$ (par morsure),
$1/\mu_h$	La durée de vie moyenne d'une infection chez l'homme (en jours),
$1/\eta_h$	signifie la période de virémie (en jours),
$1/\mu_m$	La durée de vie moyenne d'un moustiques adultes (en jours),
$T$	la durée de l'étude (en jours).

On peut réduire le système (1.1) en utilisant le changement suivant

$$\begin{cases} R_h = N_h - S_h - I_h \\ S_m = N_m - I_m, \end{cases}$$

par

$$\begin{cases} \frac{dS_h(t)}{dt} = \mu_h N_h - \left( B\beta_{mh} \frac{I_m(t)}{N_h} + \mu_h \right) S_h(t) \\ \frac{dI_h(t)}{dt} = B\beta_{mh} \frac{I_m(t)}{N_h} S_h(t) - (\eta_h + \mu_h) I_h(t) \\ \frac{dI_m(t)}{dt} = B\beta_{hm} \frac{I_h(t)}{N_h} (N_m - I_m(t)) - \mu_m I_m(t). \end{cases}$$

# Chapitre 2

## La Méthode des ondelettes de Legendre (LWM)

Les ondelettes se sont imposées comme un outil puissant et récent en analyse mathématique et en plusieurs disciplines, on peut distinguer deux rôles principaux des ondelettes,

- outil mathématique d’analyse,
- outil de représentation des fonctions tel que la représentation d’un signal.

Dans le présent chapitre on traite la méthode d’ondelettes de Legendre. Cette dernière consiste à réduire le problème aux limites en un système d’équations algébriques, en utilisant la matrice opérationnelle d’intégration et la décomposition de la solution inconnue dans la base d’ondelettes de Legendre. Les coefficients de cette décomposition deviennent l’inconnu du système algébrique.

### 2.1 Polynôme de Legendre

Introduit en 1784 par le mathématicien français *Adrien-Marie Legendre* (1752 – 1833).

**Définition 2.1** *Il est défini comme un polynôme  $P$  de degré  $k$  sur le domaine  $[-1, 1]$  par la relation récurrente suivante*

$$P_{k+2}(x) = \left(\frac{2k+3}{k+2}\right) x P_{k+1}(x) - \left(\frac{k+1}{k+2}\right) P_k(x), k \in \mathbb{N}, \quad (2.1)$$

avec,

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x. \end{cases}$$

Sa forme analytique est donnée par

$$\forall m \in \mathbb{N}, P_m(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} \frac{(m+k)!}{(m-k)! (k!)^2} x^k$$

et avec une propriété très importante d’orthogonalité

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad (2.2)$$

Pour plus de détails sur le polynôme de Legendre et ses propriétés voir Annexe A.

## 2.2 Les ondelettes

**Définition 2.2** Les ondelettes forment une famille de fonctions construites à partir de la dilatation et translation d'une fonction unique  $\Psi$  dans l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  appelée ondelette mère.

$$\begin{cases} \Psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \\ a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

**Remarque 2.1** Lorsque le paramètre de dilatation  $a$  et de translation  $b$  varient de façon continue, on a une famille d'ondelettes continue. On parle d'une famille d'ondelettes discrètes, si les paramètres  $a$  et  $b$  prennent des valeurs discrètes

$$\begin{cases} a = a_0^{-k}, a_0 > 1 \\ b = nb_0 a_0^{-k}, b_0 > 1, \end{cases}$$

pour  $n$  et  $k$  des entiers positifs.

On considère la famille d'ondelettes discrètes

$$\Psi_{n,k}(x) = |a_0|^{-\frac{k}{2}} \Psi(a_0^k x - nb_0),$$

où  $\{\Psi_{n,k}(x)\}_{n,k \in \mathbb{N}}$  est une base de  $L^2(\mathbb{R})$  [16].

## 2.3 Les ondelettes de Legendre

**Définition 2.3** Les ondelettes de Legendre  $\Psi_{n,k}(x) = \Psi(n, k, j, x)$  sont définies sur l'intervalle  $[0, 1]$  par

$$\Psi_{n,k}(x) = \begin{cases} \sqrt{k + \frac{1}{2}} 2^{j/2} L_k(2^j x - (2n + 1)) & \text{Si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}}, \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Avec  $n = 1, \dots, 2^{j-1}$  ( $j \in \mathbb{N}^*$ ) représente le nombre des niveaux de la décomposition et  $k = 0, \dots, n-1$  (où  $n \in \mathbb{N}^*$  est le nombre de points de collocation de la discrétisation) est le degré du polynôme de Legendre. Le paramètre de dilatation  $a = 2^{-j}$  et le paramètre de translation  $b = (2n - 1) 2^{-j}$  [11].

**Remarque 2.2** 1. Le coefficient  $\sqrt{k + \frac{1}{2}}$  assure l'orthonormalité.

2. La famille d'ondelettes de Legendre (2.4) est obtenue à travers des translations et dilatations du polynôme de Legendre.

3. La famille  $\{\psi_{n,k}(x)\}_{n,k \in \mathbb{N}}$  forme une base d'ondelette de  $L^2(0, 1)$ .

## 2.4 Approximation d'une fonction

Puisque la famille d'ondelettes (2.4) forme une base de  $L^2(0,1)$ , alors toute fonction  $f$  de cette espace peut s'écrire de la façon suivante

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} C_{n,k} \Psi_{n,k}(x), \quad (2.5)$$

avec  $C_{n,k} = \langle f, \Psi_{n,k} \rangle$ , tel que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire dans  $L^2(0,1)$ . Pour des raisons techniques on tronque la série (2.5), on obtient

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{2^{j-1} nc-1} \sum_{k=0}^{nc-1} C_{n,k} \Psi_{n,k}(x) = C^T \Psi(x), \quad (2.6)$$

où  $C$  et  $\Psi(x)$  sont des vecteurs de dimension  $2^{j-1} nc$  donnés par

$$C = [C_{1,0}, C_{1,1}, \dots, C_{1,nc-1}, C_{2,0}, \dots, C_{2,nc-1}, \dots, C_{2^{j-1},0}, \dots, C_{2^{j-1},nc-1}]^T,$$

$$\Psi(x) = [\Psi_{1,0}(x), \dots, \Psi_{1,nc-1}(x), \Psi_{2,0}(x), \dots, \Psi_{2,nc-1}(x), \dots, \Psi_{2^{j-1},0}(x), \dots, \Psi_{2^{j-1},nc-1}(x)]^T. \quad (2.7)$$

A titre d'exemple, on peut écrire la fonction  $f(x) = 1$  dans la base d'ondelette de Legendre (2.4).

En effet,

$$1 \approx \sum_{n=1}^{2^{j-1} nc-1} \sum_{k=0}^{nc-1} C_{n,k} \Psi_{n,k}(x) = C^T \Psi(x),$$

alors,

$$C_{n,k} = \langle 1, \Psi_{n,k} \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 \Psi_{n,k}(s) ds.$$

Pour illustration, on prend  $j = 2$ ,  $nc = 3$ , on trouve

$$\begin{cases} \Psi_{10}(x) = \sqrt{2} \\ \Psi_{11}(x) = \sqrt{6}(4x - 1) \\ \Psi_{12}(x) = \sqrt{10} \left( \frac{3}{2}(4x - 1)^2 - \frac{1}{2} \right) \end{cases} \quad \text{Sur } \left[ 0, \frac{1}{2} \right), \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \Psi_{20}(x) = \sqrt{2} \\ \Psi_{21}(x) = \sqrt{6}(4x - 3) \\ \Psi_{22}(x) = \sqrt{10} \left( \frac{3}{2}(4x - 3)^2 - \frac{1}{2} \right) \end{cases} \quad \text{Sur } \left[ \frac{1}{2}, 1 \right), \quad (2.9)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{10} = \int_0^1 \Psi_{10}(x)dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ C_{11} = \int_0^1 \Psi_{11}(x)dx = 0 \\ C_{12} = \int_0^1 \Psi_{12}(x)dx = 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{20} = \int_0^1 \Psi_{20}(x)dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ C_{21} = \int_0^1 \Psi_{21}(x)dx = 0 \\ C_{22} = \int_0^1 \Psi_{22}(x)dx = 0, \end{array} \right.$$

et

$$1 = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0 \right]^T \Psi(x).$$

En suivant le même procédé, on obtient

$$x = \left[ \frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{24}, -\frac{\sqrt{10}}{8}, \frac{3\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{6}}{24}, 0 \right]^T \Psi(x).$$

## 2.5 La Matrice Opérationnelle d'intégration

*Razzaghi M.* et *Yousefi S.*[11] sont les premiers qui ont établi la matrice opérationnelle d'intégration.

On intègre sur l'intervalle  $[0, x]$  la fonction  $\Psi(x)$  définie en (2.7), on trouve

$$\int_0^x \Psi(t)dt = P\Psi(x). \quad (2.10)$$

où  $P$  est la matrice opérationnelle d'intégration de dimension  $(2^{j-1}nc) \times (2^{j-1}nc)$ .

Pour le calcul de cette matrice, on prend  $nc = 3$  et  $k = 2$ , on intègre (2.8)-(2.9) sur  $(0, x)$ ,

on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^x \Psi_{10}(t) dt &= \begin{cases} \sqrt{2}x & \text{Si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{Si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases} \\ &= \frac{1}{4}\Psi_{10} + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}\Psi_{11} + \frac{1}{2}\Psi_{20} \\ &= \left[ \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0 \right]^T \Psi_6(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^x \Psi_{11}(t) dt &= \begin{cases} 2\sqrt{6}x^2 - \sqrt{6}x & \text{Si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{Si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{12}\Psi_{10} + \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{5}}\Psi_{12} \\ &= \left[ -\frac{\sqrt{3}}{12}, 0, \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{5}}, 0, 0, 0 \right]^T \Psi_6(x). \end{aligned}$$

$$\int_0^x \Psi_{12}(t) dt = -\frac{\sqrt{5}}{20\sqrt{3}}\Psi_{11} = \left[ 0, \frac{-\sqrt{5}}{20\sqrt{3}}, 0, 0, 0, 0 \right]^T \Psi_6(x),$$

$$\begin{aligned} \int_0^x \Psi_{20}(t) dt &= \int_0^x \sqrt{2}L_0(4t-1) dt \\ &= \frac{1}{4}\Psi_{20} + \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}\Psi_{21} = \left[ 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{6}}, 0 \right]^T \Psi_6(x), \end{aligned}$$

$$\int_0^x \Psi_{21}(t) dt = -\frac{\sqrt{3}}{12}\Psi_{20} + \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{5}}\Psi_{22} = \left[ 0, 0, 0, \frac{-\sqrt{3}}{12}, 0, \frac{\sqrt{3}}{12\sqrt{5}} \right]^T \Psi_6(x).$$

$$\int_0^x \Psi_{22}(t) dt = -\frac{\sqrt{5}}{20\sqrt{3}}\Psi_{21} = \left[ 0, 0, 0, 0, \frac{-\sqrt{5}}{20\sqrt{3}}, 0 \right]^T \Psi_6(x).$$

Alors,

$$\int_0^x \Psi_{6 \times 1}(t) dt = P_{6 \times 6} \Psi_6(x),$$

avec

$$P_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} L_{3 \times 3} & F_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & L_{3 \times 3} \end{pmatrix},$$

où

$$L_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$F_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En général, on obtient

$$P = \frac{1}{2^j} \begin{pmatrix} L & F & F & F & \dots & F \\ 0 & L & F & F & \dots & F \\ 0 & 0 & L & F & \dots & F \\ 0 & 0 & 0 & L & F & F \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

avec,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{3}}{5 \times 3} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{5} \times \sqrt{3}}{5 \times 3} & 0 & \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{5}}{7 \times 5} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{7} \times \sqrt{5}}{7 \times 5} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k-1}}{(2k+1)(2k-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k-1}}{(2k+1)(2k-1)} & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$F = \begin{pmatrix} 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec  $L$  et  $F$  sont deux matrices carrées de dimension  $(nc \times nc)$ .

**Remarque 2.3** Avec le même raisonnement on peut obtenir une autre matrice opérationnelle de dérivation noté  $D$ , tel que

$$\Psi'(x) = D\Psi(x).$$

## 2.6 Le produit de deux ondelettes

Dans cette section, on développe une expression simple du produit de deux ondelettes,

$$\Psi(x)\Psi^T(x) = \begin{pmatrix} \Psi_{1,0}\Psi_{1,0} & \dots & \Psi_{1,nc-1}\Psi_{1,0} & \dots & \Psi_{1,0}\Psi_{2^{j-1},0} & \dots & \Psi_{1,0}\Psi_{2^{j-1},nc-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Psi_{1,nc-1}\Psi_{1,0} & \dots & \Psi_{1,nc-1}\Psi_{1,nc-1} & \dots & \Psi_{1,nc-1}\Psi_{2^{j-1},0} & \dots & \Psi_{1,nc-1}\Psi_{2^{j-1},nc-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Psi_{2^{j-1},0}\Psi_{1,0} & \dots & \Psi_{2^{j-1},0}\Psi_{1,nc-1} & \dots & \Psi_{2^{j-1},0}\Psi_{2^{j-1},0} & \dots & \Psi_{2^{j-1},0}\Psi_{2^{j-1},nc-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Psi_{2^{j-1},nc-1}\Psi_{1,0} & \dots & \Psi_{2^{j-1},nc-1}\Psi_{1,nc-1} & \dots & \Psi_{2^{j-1},nc-1}\Psi_{2^{j-1},0} & \dots & \Psi_{2^{j-1},nc-1}\Psi_{2^{j-1},nc-1} \end{pmatrix}$$

En utilisant la propriété suivante

$$\Psi_{i,j}(x)\Psi_{k,l}(x) = 0 \text{ si } i \neq k,$$

on a

$$\Psi(x)\Psi^T(x) = \begin{pmatrix} \Psi_{1,0}\Psi_{1,0} & \dots & \Psi_{1,nc-1}\Psi_{1,0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Psi_{1,nc-1}\Psi_{1,0} & \dots & \Psi_{1,nc-1}\Psi_{1,nc-1} & 0 & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \Psi_{2^{j-1},0}\Psi_{2^{j-1},0} & \dots & \Psi_{2^{j-1},0}\Psi_{2^{j-1},nc-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \Psi_{2^{j-1},nc-1}\Psi_{2^{j-1},0} & \dots & \Psi_{2^{j-1},nc-1}\Psi_{2^{j-1},nc-1} \end{pmatrix}.$$

Pour  $nc = 3$  et  $j = 2$ , ainsi que les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \Psi_{i,0}(x)\Psi_{i,j}(x) = \sqrt{2}\Psi_{i,j}(x) \\ \Psi_{i,1}(x)\Psi_{i,1}(x) = \frac{4}{\sqrt{10}}\Psi_{i,2}(x) + \sqrt{2}\Psi_{i,0}(x). \end{cases}$$

On obtient

$$\Psi(x)\Psi^T(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\Psi_{1,0} & \sqrt{2}\Psi_{1,1} & \sqrt{2}\Psi_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\Psi_{1,1} & \sqrt{2}\Psi_{1,0} + \frac{4}{\sqrt{10}}\Psi_{1,2} & \frac{4}{\sqrt{10}}\Psi_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\Psi_{1,2} & \frac{4}{\sqrt{10}}\Psi_{1,1} & \sqrt{2}\Psi_{1,0} + \frac{20}{7\sqrt{10}}\Psi_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\Psi_{2,0} & \sqrt{2}\Psi_{2,1} & \sqrt{2}\Psi_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\Psi_{2,1} & \sqrt{2}\Psi_{2,0} + \frac{4}{\sqrt{10}}\Psi_{2,2} & \frac{4}{\sqrt{10}}\Psi_{2,1} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\Psi_{2,2} & \frac{4}{\sqrt{10}}\Psi_{2,1} & \sqrt{2}\Psi_{2,0} + \frac{20}{7\sqrt{10}}\Psi_{2,2} \end{pmatrix}$$

Maintenant, on peut écrire pour un vecteur  $V$  de dimension 6

$$V^T \Psi(x) \Psi^T(x) = \Psi^T(x) \tilde{V}, \quad (2.12)$$

où  $\tilde{V}$  est une matrice de dimension  $6 \times 6$ , définie par

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} V_1 & \sqrt{2} V_2 & \sqrt{2} V_3 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} V_2 & \sqrt{2} V_1 + \frac{4}{\sqrt{10}} V_3 & \frac{4}{\sqrt{10}} V_2 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} V_3 & \frac{4}{\sqrt{10}} V_2 & \sqrt{2} V_1 + \frac{20}{7\sqrt{10}} V_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} V_4 & \sqrt{2} V_5 & \sqrt{2} V_6 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} V_5 & \sqrt{2} V_4 + \frac{4}{\sqrt{10}} V_6 & \frac{4}{\sqrt{10}} V_5 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} V_6 & \frac{4}{\sqrt{10}} V_5 & \sqrt{2} V_4 + \frac{20}{7\sqrt{10}} V_6 \end{pmatrix}$$

On peut généraliser ceci par

$$A^T \Psi(x) \Psi^T(x) = \Psi^T(x) \tilde{A}, \quad (2.13)$$

où  $A, \Psi(x)$  sont deux vecteurs de dimension  $(2^{j-1}nc)$  et  $\tilde{A}$  est une matrice  $(2^{j-1}nc) \times (2^{j-1}nc)$ .

## 2.7 Résolution d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 à coefficients non constants

On considère l'équation suivante

$$a(x)U'(x) + b(x)U(x) = f(x), \quad x \in \Omega = [0, 1], \quad (2.14)$$

avec la condition

$$U(0) = U_0, \quad (2.15)$$

où,

$a(x), b(x)$  : sont des fonctions,

$U(x)$  : le vecteur inconnu,

$f(x)$  : le second membre.

Pour résoudre le problème (2.14-2.15), on utilise la décomposition à base d'ondelettes de Legendre (2.5).

En effet,

$$U'(x) = U^T \Psi(x). \quad (2.16)$$

et

$$f(x) = F^T \Psi(x).$$

On intègre (2.16) sur le domaine  $(0, x)$ , on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^x U'(s)ds &= \int_0^x U^T \Psi(s)ds & (2.17) \\ U(x) - U(0) &= U^T P \Psi(x) \\ U(x) &= U^T P \Psi(x) + U(0) \\ U(x) &= (U^T P + U_0 d^T) \Psi(x) \end{aligned}$$

avec,

$$U(0) = U_0 d^T \Psi(x).$$

On a aussi

$$\begin{cases} a(x) = A^T \Psi(x) \\ b(x) = B^T \Psi(x) \\ f(x) = F^T \Psi(x). \end{cases} \quad (2.18)$$

On substitue les équations (2.16-2.17-2.18) dans (2.14), on obtient

$$A^T \Psi(x) \Psi^T(x) U + B^T \Psi(x) \Psi^T(x) (U^T P + U_0 d^T)^T = F^T \Psi(x).$$

Grâce à l'équation (2.13), on obtient

$$\Psi^T(x) \tilde{A} U + \Psi^T(x) \tilde{B} (P^T U + d U_0) = \Psi^T(x) F.$$

Par conséquent, on obtient un système d'équations algébriques linéaire

$$A_L U = B_L,$$

où

$$\begin{cases} A_L = (\tilde{A} + \tilde{B} P^T) \\ B_L = (F - U_0 \tilde{B} d). \end{cases}$$

La méthode  $LU$  peut nous donner la solution de ce système (pour  $LU$  voir Annexe B).

La solution du problème (2.14-2.15) est donné par la substitution de la solution du système dans l'expression (2.17).

## 2.8 La technique de découplage et quasi-linéarisation (DQL)

Dans cette section on va décrire une technique qui permet de résoudre un système d'équations différentielles non linéaires, en utilisant la méthode d'ondelette de Legendre. Cette technique s'appelle la technique de découplage et quasi-linéarisation.

Soit un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires sur un domaine  $\Omega$

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Dans ce genre de système, les équations sont souvent couplées et non linéaires. La technique itérative de découplage et linéarisation permet à chaque itération de transformer ce système en un système d'équations différentielles découplées et linéaires, en écrivant le système sous une forme variationnelle par le schéma le plus simple suivant

$$\begin{cases} (y'_1)_x^{(k+1)} = f_1(x, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}) \\ (y'_2)_x^{(k+1)} = f_2(x, y_1^{(k+1)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}) \\ \vdots \\ (y'_{n+1})_x^{(k+1)} = f_n(x, y_1^{(k+1)}, y_2^{(k+1)}, \dots, y_n^{(k)}) \end{cases}$$

Le procédé de cette technique consiste tout d'abord à donner des profils initiaux pour chacune des variables dépendantes, ces derniers doivent vérifier les conditions aux limites du problème. On a alors l'algorithme suivant

$y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, y_3^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$	données (profils initiaux)
<b>Tant que</b> Erreur > à une tolérance	<b>Faire</b>
$y_1^{(k+1)} = \text{solver}(x, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, y_3^{(k)}, \dots, y_n^{(k)})$	
$y_2^{(k+1)} = \text{solver}(x, y_1^{(k+1)}, y_2^{(k)}, y_3^{(k)}, \dots, y_n^{(k)})$	
$y_3^{(k+1)} = \text{solver}(x, y_1^{(k+1)}, y_2^{(k+1)}, y_3^{(k)}, \dots, y_n^{(k)})$	
$\vdots$	
$y_n^{(k+1)} = \text{solver}(x, y_1^{(k+1)}, y_2^{(k+1)}, \dots, y_{n-1}^{(k+1)}, y_n^{(k)})$	
Erreur = Max (	$\ y_1^{(k+1)} - y_1^{(k)}\ , \ y_2^{(k+1)} - y_2^{(k)}\ , \dots, \ y_n^{(k+1)} - y_n^{(k)}\ $
<b>Fin de Tant que</b>	

avec,

- $y^{(k+1)}$  : représente l'approximation de  $y$  à l'itération en cours.
- $y^{(k)}$  : représente l'approximation de  $y$  à l'itération précédente.
- *solver* : la procédure de résolution de l'équation par la méthode à base ondelette de Legendre (**LWM**).

# Chapitre 3

## Application et Simulation

Ce chapitre est consacré à l'évaluation des capacités de notre méthode (**LWM**) avec la technique de découplage et quasi-linéarisation, en utilisant Matlab. Ensuite, on simule la transmission de l'épidémie de Dengue.

### 3.1 Test de la Méthode

On considère le système différentielle suivant

$$\begin{cases} u'(x) + 2u(x) = v + \exp(x)(3x + 1) + (1 - x) \\ v'(x) + v(x) = u + x(1 - \exp(x)), \end{cases} \text{ Sur } (0, 1], \quad (3.1)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ v(0) = -1. \end{cases} \quad (3.2)$$

La solution analytique de ce problème est

$$\begin{cases} u_{ex}(x) = x \exp(x) \\ v_{ex}(x) = x - 1. \end{cases}$$

Appliquons la méthode d'ondelettes de Legendre combinée avec la technique de découplage et quasi-linéarisation sur cet exemple.

On définit l'erreur global par

$$E = \|u - u_{ex}\|_2,$$

où  $u, v$  sont les solutions numériques obtenues par (**LWM**) avec (**DQL**),

$u_{ex}, v_{ex}$  : les solutions exactes de ce problème,

$\|\cdot\|_2$  : est la norme euclidienne.

Cette erreur rassemble les erreurs de troncatures, les erreurs de la méthode et les erreurs de la technique de découplage.

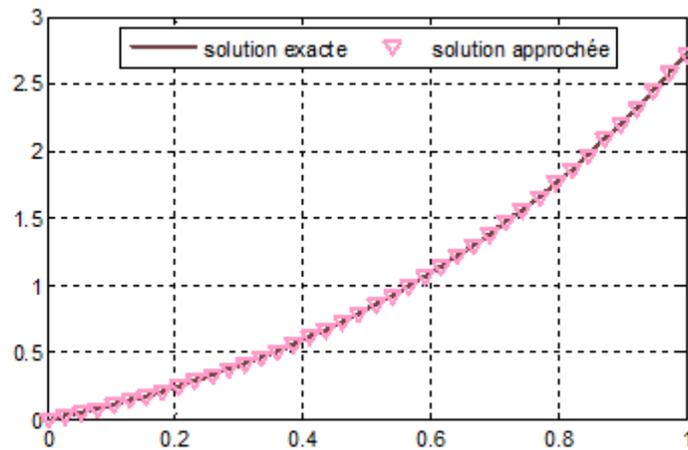
Pour différentes valeurs de  $nc$  et de  $j$ , on obtient les résultats suivants.

Le tableau des erreurs pour  $u$

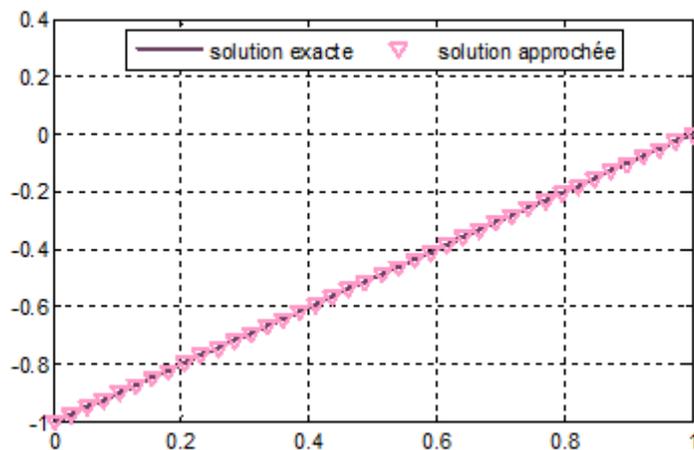
Erreur1	$nc = 3$	$nc = 5$	$nc = 8$	$nc = 12$	$nc = 15$
$j = 1$	0.0540	$3.7825e - 4$	$3.1441e - 8$	$1.2800e - 8$	$1.3434e - 8$
$j = 2$	0.0101	$1.6106e - 5$	$1.3482e - 8$	$1.5368e - 8$	$1.6592e - 8$
$j = 3$	0.0015	$5.8981e - 7$	$1.6984e - 8$	$1.9889e - 8$	$2.1834e - 8$
$j = 4$	$2.3048e - 4$	$2.6893e - 8$	$2.2447e - 8$	$2.6864e - 8$	$2.9756e - 8$

Le tableau des erreurs pour  $v$

Erreur2	$nc = 3$	$nc = 5$	$nc = 8$	$nc = 12$	$nc = 15$
$j = 1$	0.0130	$4.3353e - 5$	$2.6596e - 9$	$1.0868e - 9$	$1.1351e - 9$
$j = 2$	$3.1332e - 4$	$5.5374e - 7$	$1.1512e - 9$	$1.2871e - 9$	$1.3849e - 9$
$j = 3$	$1.2512e - 4$	$6.4958e - 8$	$1.4165e - 9$	$1.6511e - 9$	$1.8089e - 9$
$j = 4$	$2.2924e - 5$	$2.1781e - 9$	$1.8590e - 9$	$2.2192e - 9$	$2.4555e - 9$



La solution  $u$



La solution  $v$

On remarque que l'augmentation du nombre des niveaux améliore légèrement l'erreur mais par contre l'augmentation du nombre de collocation l'améliore sensiblement.

## 3.2 La simulation de la transmission de l'épidémie de Dengue

On considère le modèle suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_h(t)}{dt} = \mu_h N_h - (B\beta_{mh} \frac{I_m(t)}{N_h} + \mu_h) S_h(t) \\ \frac{dI_h(t)}{dt} = B\beta_{mh} \frac{I_m(t)}{N_h} S_h(t) - (\eta_h + \mu_h) I_h(t) \\ \frac{dR_h(t)}{dt} = \eta_h I_h(t) - \mu_h R_h(t) \\ \frac{dS_m(t)}{dt} = \mu_m N_m - (B\beta_{hm} \frac{I_h(t)}{N_h} + \mu_m) S_m(t) \\ \frac{dI_m(t)}{dt} = B\beta_{hm} \frac{I_h(t)}{N_h} S_m(t) - \mu_m I_m(t), \end{array} \right.$$

avec les conditions initiales

$$\left\{ \begin{array}{l} S_h(0) = 55784 \\ I_h(0) = 216 \\ R_h(0) = 0 \\ S_m(0) = 168000 \\ I_m(0) = 0. \end{array} \right.$$

Les données physiques du problème

$N_h = 56000$	Population totale humaine,
$N_m = m \times N_h$	Population totale de moustique,
$B = 0.7$	taux moyen quotidien des individus piqués,
$\beta_{mh} = 0.36$	probabilité de transmission à partir de $I_m$ (par morsure),
$\beta_{hm} = 0.36$	probabilité de transmission à partir de $I_h$ (par morsure),
$1/\mu_h = 1/(71 \times 365)$	La durée de vie moyenne d'une infection chez l'homme (en jours),
$1/\eta_h = 1/3$	signifie la période de virémie (en jours),
$1/\mu_m = 1/10$	La durée de vie moyenne d'un moustiques adultes (en jours),
$T = 84$	la durée de l'étude (en jours).

Les données mathématiques

$$\left\{ \begin{array}{l} nc = 15 \\ j = 3 \\ Tol = 1e - 5. \end{array} \right.$$

Pour  $m = 3$ , on obtient les résultats suivants

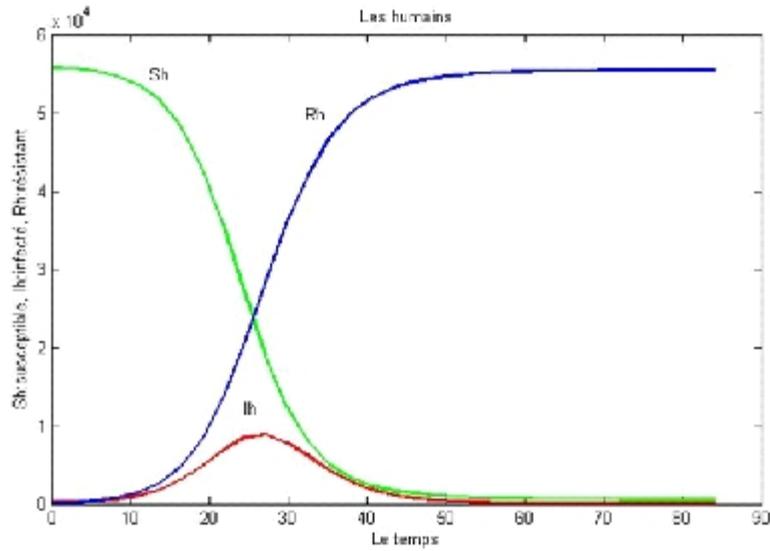


Figure 1

On remarque sur la figure 1 que le nombre d'infectés humain commence à augmenter à partir d'un certain temps  $T \approx 10$  jours pour atteindre un maximum à  $T \approx 25$  jours, ensuite il diminue jusqu'à 0 après 40 jours. Ce qui explique dans ces temps que le nombre de susceptibles diminue, en même temps, le nombre des résistants augmente et se croise à  $T \approx 25$  jours pour se stabiliser à partir de 40 jours.

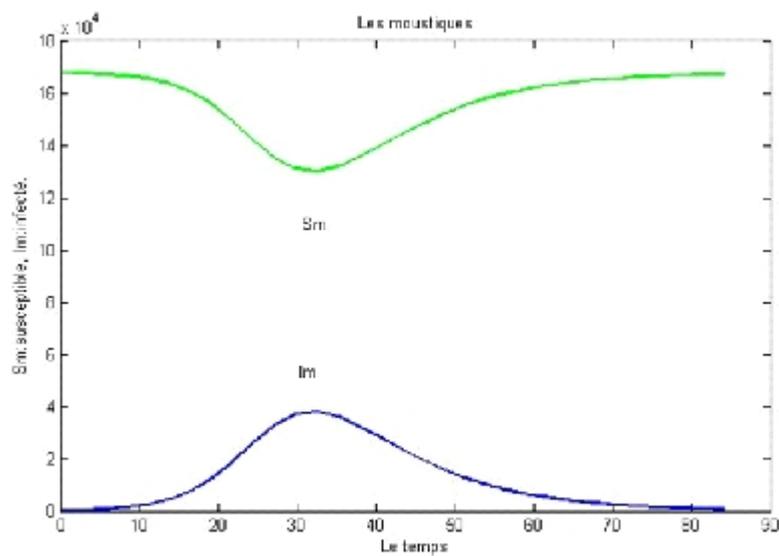
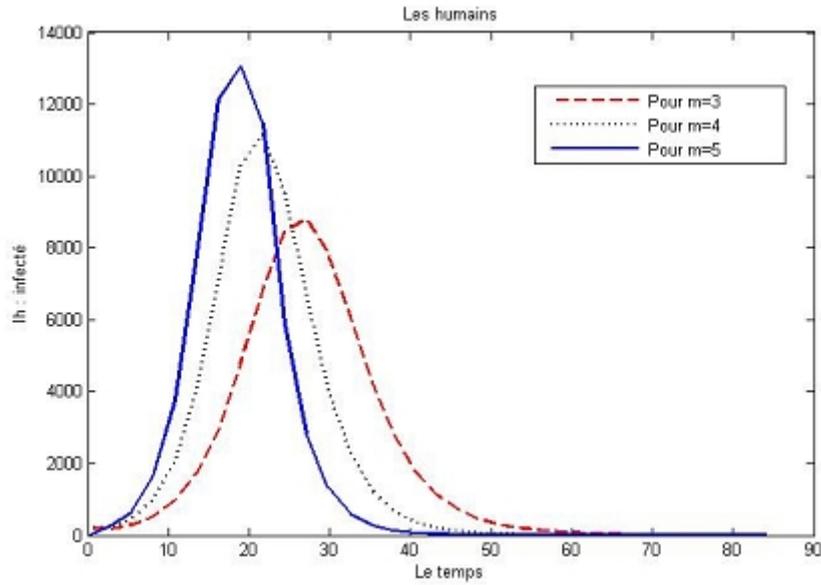


Figure 2

Dans la figure 2, on constate aussi que le nombre de susceptibles (resp. infectés) moustiques diminue (resp. augmente) jusqu'à atteindre un minimum(resp.max), ensuite il augmente (resp. diminue) pour se stabiliser à partir d'un certain temps  $T \approx 65$  jours.

Pour différentes valeurs de  $m = 3, 4, 5$ , on obtient les résultats suivants



Dans cette figure, quand  $m$  augmente le nombre d'infectés  $I_h$  augmente aussi et la durée de guérison diminue.

# Conclusion et Perspectives

Les tests de la méthode d'ondelette de Legendre sur plusieurs exemples nous ont révélé que cette méthode donne des résultats très intéressants pour un nombre réduit de point de collocation.

Depuis les deux dernières décennies, les équations différentielles fractionnaires attirent de plus en plus l'attention de nombreux chercheurs. Des simulations numériques montrent que, dans certains cas, les modèles fractionnaires correspondent mieux à la réalité qu'un modèle avec dérivées entières. Des travaux ont été réalisés dans ce sens, avec des modèles basés sur des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville. Notre perspective est de développer dans un premier temps des approximations des dérivées fractionnaires au sens de Caputo, ensuite les appliquer pour la construction de modèles mathématiques.

# Bibliographie

- [1] Omar BELHAMITI and Sidi Mohamed BAHRI : Legendre Wavelet method for numerical solution of nonlinear differential systems and split BVPs.
- [2] NagmaIrfan & S.Kapoor : QUICK GLANCE ON DIFFERENT WAVELETS AND THEIR OPERATIONAL MATRIX PROPERTIES : A REVIEW, Vol8Issue1/IJRRAS July 2011.
- [3] Mohammadi F. and Hosseini M.M. : A new Legendre wavelet operational matrix of derivative and its applications in solving the singular ordinary differential equations, Journal of the Franklin Institute 348 (2011) 1787-1796.
- [4] Shakoor Pooseh, Helena Sofia Rodrigues, and Delfim F. M. Torres : Fractional Derivatives in Dengue Epidemics, AIP Conf. Proc. 1389, 739 (2011)
- [5] G.Sallet INRIA & IRD 2010 Modélisation et simulation en épidémiologie.
- [6] Suzanne TOUZEAU : Modèles épidémiologiques, UR341 Mathématiques et Informatique Appliquées, Jouy-en-Josas, France, 18 octobre 2010.
- [7] Xiaoyang Zheng and Xiaofan Yang : Techniques for solving integral and differential equations by Legendre wavelets, International Journal of Systems Science Vol. 40, No. 11, November 2009, 1127 – 1137.
- [8] D. Chapman, N.D. Evans : The structural identifiability of susceptible-infective – recovered type epidemic models with incomplete immunity and birth targeted vaccination, Biomedical Signal Processing and Control 4 (2009) 278–284.
- [9] Aurélie MALON : DETECTION ET INVESTIGATION DES FOYERS EPIDEMIQUES DE DENGUE EN MARTINIQUE. UNIVERSITE HENRI POINCARÉ - NANCY 1, FACULTE DES SCIENCES PHARMACEUTIQUES ET BIOLOGIQUES, 9 février 2007.
- [10] La thèse de Mohamed DEROUICH : Modélisation et Simulation de modèles avec et sans structure d'âge en 2001 N°37/01.
- [11] M.RAZZAGHI, S.YOUSEFI. : Legendre wavelets direct method for variational problems.Mathematics and Computers in Simulation53, 2000, 185-192.
- [12] Zhilan Feng, Jorge X. Velasco-Hernandez : Competitive exclusion in a vector-host model for the dengue fever, March 1996, J. Math. Biol. (1997)35 : 523D544.
- [13] Gideon A. Ngwa, William S. Shu : A MATHEMATICAL MODEL FOR ENDEMIC MALARIA WITH VARIABLE HUMAN AND MOSQUITO POPULATIONS, IC/99/158.
- [14] Fred Brauer, C. Castillo-Chavez, J. X. Velasco-Hernández : RECRUITMENT EFFECTS IN HETEROSEXUALLY TRANSMITTED DISEASE MODELS.

- [15] Abdoul Aziz FALL : Etudes de quelques modèles épidémiologiques : application à la transmission du virus de l'hépatite B en Afrique subsaharienne (cas du Sénégal).
- [16] Gu J.S. and Jiang W.S. : The Haar wavelets operational matrix of integration, *Int. J. Syst. Sci.* 27 (1996) 623628.

# Annexes

## Annexe A

### Rappelles sur des notions mathématiques

Dans cette partie, on rappellons quelques notions mathématiques de base.

**Définition 3.1** *l'espace de Hilbert  $L^2(0, 1)$  est l'espace des fonctions à carrées sommables*

$$f \in L^2(0, 1) \text{ si et seulement si } \int_a^b f^2(x)dx < \infty.$$

**Définition 3.2** *Le produit scalaire de deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $L^2(0, 1)$  est défini par*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

**Définition 3.3** *on dit qu'une famille de fonctions  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est orthogonale si*

$$\int_a^b (f_i f_j)(x)dx = 0; \quad i \neq j; \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

**Définition 3.4** *on dit qu'une famille de fonctions  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est orthonormale si elle est orthogonale et de plus*

$$\int_a^b f_i^2(x)dx = 1, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

### Les ondelettes

La théorie des ondelettes a été développée par *Y.Meyer* à l'université de Paris, *I.Daubchies*, *S.Mallat* et d'autre dans la fin de 1980, on peut dire que les ondelettes sont une extension de l'analyse de Fourier. Il existe plusieurs types d'ondelettes, la plus ancienne de toutes les ondelettes et la plus simple est l'ondelette de Haar (1911).

Selon *Meyer* 1993, deux types fondamentaux d'ondelettes peuvent être considérés, les ondelettes de *Grossmann-Morlet* et les ondelettes de *GaborMalvar*, on peut citer les ondelettes de *Daubechies* parmi celle les plus couramment utilisées.

L'analyse en ondelette consiste à décomposer les signaux (fonctions) sur une famille de fonctions obtenues en dilatant et translatant une ondelette dite "Ondelette Mère" ou analysante.

**Définition 3.5 Physiquement :** une ondelette est une petite onde qui a un début et une fin.

Nous commençons avec la base d'ondelettes la plus simple est la base de *Haar* dont l'ondelette mère est définie par

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Parmi les premières ondelettes utilisées ont été l'ondelette de *Morlet*, et le *chapeau mexicain*.

*Ondelette de Morlet*

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-iw_0x}.$$

**Remarque 3.1** Les ondelettes de Morlet ne permettent pas de construire une base orthogonale.

*Chapeau mexicain*

$$\Psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1-x^2) e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

### Polynôme De Legendre

Les polynômes de Legendre (*Adrien-Marie Legendre*, mathématicien Français (1752 – 1833)) sont les solutions de l'équation différentielle de Legendre. Ces polynômes sont définis sur  $[-1, 1]$ , possèdent un certain nombre de propriétés mathématiques utiles et intéressantes telle que l'orthogonalité.

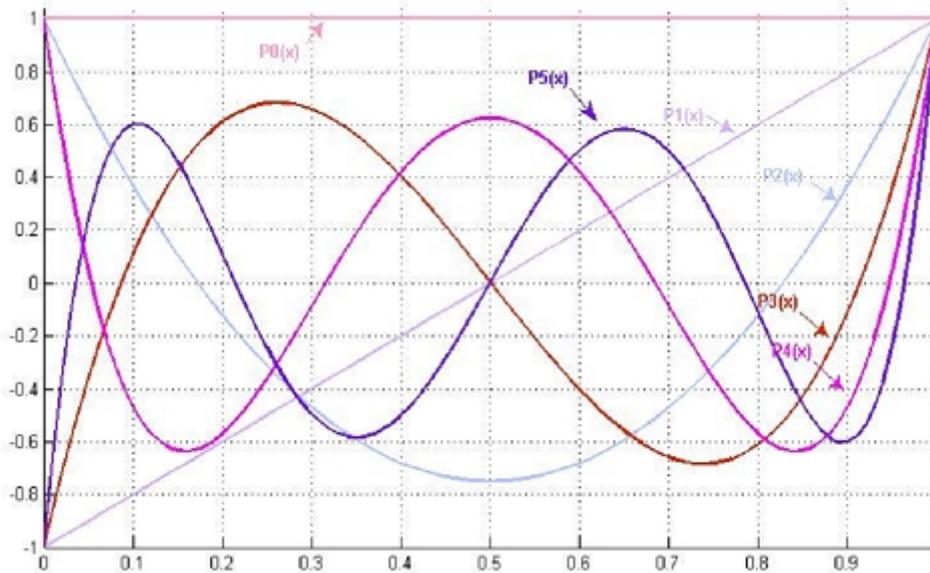
Ils sont utilisés dans plusieurs reconnaissance des formes et des applications de traitement d'image, se sont les solutions de l'équation de Legendre

$$(1-x^2)U'' - 2xU' + n(n+1)U = [(1-x^2)U']' + n(n+1)U = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

On donne les six premiers polynômes de Legendre

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \\ P_3(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8} \\ P_4(x) = \frac{63}{8}x^5 - \frac{70}{8}x^3 + \frac{15}{8}x \\ P_5(x) = \frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2 - \frac{5}{16}, \end{array} \right.$$

qui sont représentés par la figure suivante



Courbes de polynomes de Legendre

On doit démontrer la propriétés d'orthogonalité qui est donnée par la formule(2.1).  
Pour  $m \geq 0$  et  $n \geq 0$  ( $m \neq n$ ) ona

$$v = P_m(x) \text{ et } w = P_n(x); n \neq m.$$

Alors, d'après l'équation différentielle de Legendre on a

$$((1 - x^2)v')' + m(m + 1)v = 0, \quad (3.3)$$

$$((1 - x^2)w')' + n(n + 1)w = 0. \quad (3.4)$$

On multiple (3.3) par  $w$  puis on intègre sur  $[-1, 1]$ , on trouve

$$\int_{-1}^1 ((1 - x^2)v')'w dx + m(m + 1) \int_{-1}^1 v w dx = 0.$$

La première intégration par partie nous donne

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - x^2)v'w \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1 - x^2)v'w' dx + m(m + 1) \int_{-1}^1 v w dx &= 0, \\ - \int_{-1}^1 (1 - x^2)v'w' dx + m(m + 1) \int_{-1}^1 v w dx &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

De la même manière, on multiple (3.4) par  $v$  et on intègre sur  $[-1, 1]$ , on obtient

$$- \int_{-1}^1 (1 - x^2)v'w' dx + n(n + 1) \int_{-1}^1 v w dx = 0. \quad (3.6)$$

La soustraction entre (3.5) et (3.6) nous donne

$$(m(m+1) - n(n+1)) \int_{-1}^1 v w dx = 0,$$

puisque  $v = P_m(x)$  et  $w = P_n(x)$  alors

$$(m(m+1) - n(n+1)) \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0.$$

Cela donne la relation d'orthogonalité

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

On peut déterminer aussi le carré d'un polynôme de Legendre

$$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

Il existe plusieurs définitions d'un polynôme de Legendre l'une de ces définitions est

### La Formule de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

## Annexe B

### La méthode LU

On considère le problème suivant

$$Ax = b$$

où,

$A$  : une matrice carré, inversible.

$b$  : un vecteur donné.

$x$  : l'inconnue à chercher.

La méthode  $LU$  consiste à décomposer la matrice  $A$  sous la forme d'un produit de deux matrices triangulaires l'une inférieure à diagonal unité  $L$  (lower) et l'autre supérieure  $U$  (upper). Alors le problème (2.2) peut s'écrire sous la forme

$$(LU)x = b$$

Algorithme de détermination de  $L$  et  $U$  (La factorisation de Crout).

```

Pour j de 1 à n faire
  Pour i de 1 à j faire
    ui,j → ui,j
    pour k de 1 à i - 1 //Calcul de ui,j
      ui,j → ui,j - li,kuk,j
    fin pour
  fin pour
  pour i de j + 1 à n faire
    li,j → ai,j
    pour k de 1 à j - 1 faire
      li,j → li,j - li,kuk,j
    fin pour
    li,j →  $\frac{l_{i,j}}{u_{j,j}}$  //Calcul de Li,j
  fin pour
fin pour

```

Où on pose  $l_{i,i} = 1 \forall i = 1 : n$  avec  $n$  est le dimension de la matrice  $A$ .

Une fois les matrices  $L$  et  $U$  calculées, la résolution du système linéaire consiste simplement à résoudre successivement les deux systèmes triangulaires

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = b. \end{cases}$$

Pour la résolution du premier en appliquant une substitution avant ( $L$  est triangulaire inférieure)

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{1,1}},$$

$$y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}y_k \quad / \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

Pour la deuxième en appliquant une substitution arrière ( $U$  est triangulaire supérieure)

$$x_n = \frac{b_n}{l_{n,n}},$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n-1} U_{i,j}x_j}{U_{i,i}} \quad / \quad i = n - 1, \dots, 1.$$

## Annexe C

Cette partie concerne l'implémentation Matlab.

### Les sous programmes

#### Polynôme de Legendre

```

function pk = legendre_polynomial(x,k)
    if k == 0
        pk = 1;
    else if k == 1
        pk = x;
    else if k == 2
        pk = 3/2*x.^2-1/2;
    else
        p0 = 1;
        p(1) = x;
        p(2)=3/2*x.^2-1/2;
        for i=3 :k
            p(i)=((2*(i-1)+1)/i *x)*p(i-1)+((-i+1)/i)*p(i-2);
        end
        pk = p(k);
    end
end

```

#### L'ondelette de Legendre

```

function psi = legendre_wavelet(j,n,k,x)
    Lk = legendre_polynomial(2^j *x-2*n+1,k);
    if (x>=(n-1)/2^(j-1))&(x <= n/2^(j-1))
        psi = sqrt(k+1/2)*2^(j/2)*Lk;
    else
        psi = 0;
    end
end

```

#### Le vecteur de l'ondelette de Legendre

```

function psi = vect_legendre_wavelet(j,nc,x)
    for n =1 :2^(j-1)
        for k=0 :nc-1
            psi(k+(n-1)*nc+1) = legendre_wavelet(j,n,k,x);
        end
    end
end

```

#### La matrice d'ondelette de Legendre

```

function psi = matrix_legendre_wavelet(j,nc,x)
    p = 2^(j-1)*nc;
    for i =1 :p
        psi( :,i) = vect_legendre_wavelet(j,nc,x(i));
    end

```

La matrice d'intégration

```

function P = matrice_integracion(nc,j)
    n = 2^(j-1);
    L = 1/2^j * tri_diag_matrice(nc);
    F = zeros(nc);
    F(1,1) = 1/2^(j-1);
    for i = 1 :n
        P((i-1)*nc+1 :i*nc,(i-1)*nc+1 :i*nc) = L;
        for m = i+1 :n
            P((i-1)*nc+1 :i*nc,(m-1)*nc+1 :m*nc) = F;
        end
    end
end

```

Le produit de deux ondelettes

```

function M = Vtild(j,nc,x,V)
    psi = Mat_LW(j,nc,x);
    p = 2^(j-1)*nc;
    for i=1 :p
        s = 0;
        for k=1 :p
            s = s + V(k)*psi(k,i);
        end
        Q(i,i) = s;
    end
    M = inv(psi')*(psi*Q)';

```

La méthode de l'ondelette de Legendre

```

function U = LWM(nc,j,x,a,b,u0,f)
    psi = Mat_LW(j,nc,x);
    P = Mat_P(nc,j);
    a = inv(psi')*a;
    b = inv(psi')*b;
    Atild = Vtild(j,nc,x,a);
    Btild = Vtild(j,nc,x,b);
    p = 2^(j-1)*nc;
    f = inv(psi')*f;
    d = inv(psi')*ones(p,1);
    AL = (Atild + Btild*P');
    BL = (f - u0 * Btild*d);
    c = matLU(p,AL,BL);
    U = (c*P+u0*d')*psi;
    U = U';

```

### Le programme principal

#### – L'exemple académique

```

clear all
j = 4;
nc = 5;
b1 = 2;
b2 = 1;
e = 1;
eps = 1e-5;
p = 2^(j-1)*nc;
x = (0 :1/(p-1) :1)';
f = @(V)(V + (exp(x).*(3.*x+1))+(1-x));
g = @(U)(U + x.*(1-exp(x)));
u0 = 0;
v0 = -1;
U = ones(p,1);
V = ones(p,1);
while e > eps
    U_p = U;
    V_p = V;
    U = MLW(nc,j,b1,u0,f(V));
    V = MLW(nc,j,b2,v0,g(U));
    e = max (norm(U-U_p),norm(V-V_p));
end
U_ex = x.*exp(x);
V_ex = x-1;

```

```

err1 = norm(U_ex-U)
err2 = norm(V_ex-V)
figure (1)
plot(x,U_ex,'r',x,U,'g+')
figure (2)
plot(x,V_ex,'r',x,V,'b+')
- Le modèle de la transmission de l'épidémie de Dengue
clc,clear all
j = 3;
nc = 25;
p = 2^(j-1)*nc;
x = (0 :1/(p-1) :1)';
T = 84;
xx = 0 :T/(p-1) :T;
mu = 1/(71*365);
be = 0.7*0.36;
ga = 1/3;
Nm = 7*56000;
Nh = 56000;
mup = 1/10;
bep = 0.7*0.36;
SH = ones(p,1);
IH = ones(p,1);
RH = ones(p,1);
SM = ones(p,1);
IM = ones(p,1);
e = 1;
eps = 1e-5;
Sh0 = 56000-216;
Ih0 = 216;
Rh0 = 0;
Sm0 = Nm;
Im0 = 0;
while e > eps
SH_p = SH;
IH_p = IH;
RH_p = RH;
SM_p = SM;
IM_p = IM;
Nh = SH + IH + RH;
Nm = SM + IM;
b1 = T*(mu*Nh + be*IM);
f1 = T*mu*Nh.^2;
SH = LWM(nc,j,x,Nh,b1,Sh0,f1);
b2 = T*Nh*(mu + ga);
f2 = T*be*SH.*IM;

```

```

IH = LWM(nc,j,x,Nh,b2,Ih0,f2);
b3 = T*mu*ones(p,1);
f3 = T*ga*IH;
RH = LWM(nc,j,x,ones(p,1),b3,Rh0,f3);
b4 = T* (mup*Nh + bep*IH);
g1 = T*(mup * Nm .* Nh);
SM = LWM(nc,j,x,Nh,b4,Sm0,g1);
b5 = T*mup*Nh;
g2 = T*bep * IH.*SM;
IM = LWM(nc,j,x,Nh,b5,Im0,g2);
e = max ([norm(SH-SH_p),norm(IH-IH_p),norm(RH-RH_p),norm(SM-SM_p),norm(IM-
IM_p)])
end
figure (1)
plot(xx,SH,'g',xx,IH,'r',xx,RH,'b');
figure(2)
plot(xx,SM,'g',xx,IM,'b');

```

# Abstract

Dans ce travail, on fait une modélisation de la transmission de l'épidémie de Dengue, en utilisant pour la simulation numérique une méthode basée sur les ondelettes de Legendre adaptée à la technique de découplage et quasi-linéarisation. Pour illustrer ce travail on donne un exemple académique pour étudier l'erreur de la méthode, ensuite, on simule le phénomène de la transmission de la fièvre de Dengue.