

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

## MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER  
EN MATHÉMATIQUES CYCLE LMD  
OPTION : MODÉLISATION, CONTRÔLE ET OPTIMISATION



# ESTIMATION DES DÉRIVÉES

## FRACTIONNAIRES ET LEURS APPLICATIONS

PRÉSENTÉ PAR :  
BELARBI ASMA

### LES MEMBRES DE JURY

PRÉSIDENT :	M. BAHRI SIDI MOHAMMED,	MCA	UNIVERSITÉ DE MOSTAGANEM.
EXAMINATEUR :	MME ABLAOUI NAÏMA,	MAA	UNIVERSITÉ DE MOSTAGANEM.
ENCADREUR	M.BELHAMITI OMAR,	MCA	UNIVERSITÉ DE MOSTAGANEM.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>5</b>
<b>1 L'Approximation des Dérivées Fractionnaires</b>	<b>7</b>
1.1 Une Décomposition de l'Intégrale Fractionnaire . . . . .	9
<b>2 La Méthode des Ondelettes de Legendre</b>	<b>16</b>
2.1 Les Ondelettes de Legendre . . . . .	16
2.2 Approximation d'une Fonction . . . . .	17
2.3 La Matrice Opérationnelle d'Intégration . . . . .	17
2.4 Le Produit de Deux Ondelettes . . . . .	18
2.5 Description de la Méthode des Ondelettes de Legendre . . . . .	19
2.6 Technique de Découplage . . . . .	20
<b>3 Application et Simulation</b>	<b>22</b>
3.1 Test des Approximations Fractionnaires . . . . .	22
3.2 La Modélisation de la Transmission de l'Epidémie de Dengue par un Modèle Fractionnaire . . . . .	24
<b>Bibliographie</b>	<b>30</b>



# DEDICACE

A mes parents qui m'ont éclairé mon chemin et qui m'ont encouragé et soutenu toute au long de mes études.

A mes frères Abdelhaq, Aymen Abdessalam et Ilyas Abdelfettah.

A ma belle famille, surtout mes grands-parents.

A tous mes cousines surtout Walid et Ibtissem.

A tous mes amies, surtout Leila, Houria et Maghnia.

A mon mari Samir la personne qui m'a aidé énormément par son soutien surtout morale, je le souhaite tout le bonheur du monde et que dieu me le protège.



# REMERCIEMENT

Nous remercions Dieu de nous avoir accordé des connaissances de la science et de nous avoir aidés à réaliser ce travail.

J'exprime toute ma gratitude à Mon Encadreur Belhamiti Omar, pour l'effort fourni, les conseils prodigués, sa patience et sa persévérance dans le suivi.

J'adresse également mes remerciements, à tous mes enseignants, qui m'ont donnée les bases de la science.

Je remercie très sincèrement, les membres de jury Monsieur Bahri Sidi Mohammed et Madame Ablaoui Naima d'avoir bien voulu accepter de faire partie de la commission d'examineur.

Je remercie toute personne qui a participé de près ou de loin pour l'accomplissement de ce modeste travail.





# Introduction

La question du bien-fondé de la modélisation mathématique se pose lorsqu'il s'agit d'interdisciplinarité entre les sciences. Il s'agira d'abord de définir un minimum ce qu'est la modélisation, en particulier une modélisation mathématique. Nous ne discuterons pas des analyses statistiques et autres recherches de corrélations et de traitement de données. S'il y a mathématisation il n'y pas forcément modélisation au sens où l'entend la physique par exemple. Certaines méthodes mathématiques ont des portées universelles et sont par conséquent indépendantes des sources des données et des objets auxquels elles se trouvent appliquées. Nous restreignons modélisation à des cas où les méthodes permettent la conceptualisation théorique d'un domaine particulier d'objets. La modélisation mathématique aura alors pour but la reconstruction des phénomènes réelles, par des équations différentielles, des équations algébriques, des équations intégrales,...etc. Nous présenterons divers type de modélisations issues des sciences sur la base d'exemples biologiques des niveaux moléculaires aux écosystèmes, en particulier à certains comportements sociaux des animaux.

Dans notre travail on s'intéresse à la modélisation mathématique de certain phénomène biologique par des équations fractionnaires.

La théorie de dérivation fractionnaire remonte de plus de 300 ans, quand en 1695, l'Hôpital a demandé à Leibniz le sens de  $\frac{d^n y}{dx^n}$  pour  $n = \frac{1}{2}$ , ensuite d'autres mathématiciens comme J.Fourier, N.H. Abel, J.Liouville, B.Riemann, ... etc. se sont poncés sur cette théorie. On dénombre plusieurs définitions de la dérivée fractionnaire (dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, Grunwald-Letnikov, Caputo, Miller-Ross). Pendant longtemps, les mathématiciens n'arrivent pas à donner un sens géométrique à la dérivation fractionnaire, c'est la raison principale du développement moins rapide de cette théorie. Ces dernières décennies, la dérivation fractionnaire a trouvé son application dans divers domaines : la physique, la chimie, la biologie, ...etc.

Dans ce mémoire on s'intéresse aux approximations numériques de dérivées fractionnaires et leurs applications dans d'autre science comme la biologie et la biomédicale. On donne une importance particulière à la modélisation et simulation numérique de transmission des épidimies par les équations aux dérivées fractionnaires.

Ce travail est une synthèse de deux travaux du professeur Delfim F.M et al. Torres, le premier est un article de recherche, [4]. Le deuxième est une communication [2].

Ce mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à une description générale de calcul fractionnaire et une approximation numérique de la dérivation d'ordre  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ). Dans le deuxième chapitre on présente la description d'une méthode de résolution numérique d'une équation différentielle basé sur les ondelettes de Legendre. Dans le troisième chapitre, on donne quelque exemple pour illustrer ce qu'on a fait dans le premier et le deuxième chapitre, et on termine

notre document avec une conclusion générale, bibliographie et des annexes.

## L'Approximation des Dérivées Fractionnaires

Dans ce chapitre, on commence par quelques définitions et propriétés sur les intégrales fractionnaires, ensuite on développe une nouvelle décomposition de l'intégrale fractionnaire en séries entières contenant des dérivées ordinaires.

On est tous familiarisés avec l'idée de la dérivée classique. La notation habituelle

$$\frac{df}{dx}(x) = D^1 f(x), \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = D^2 f(x).$$

On est également familiarisés avec les propriétés tel que

$$D^1 [f(x) + g(x)] = D^1 f(x) + D^1 g(x).$$

Mais quelle serait la signification de la notation comme

$$\frac{d^{1/2} f}{dx^{1/2}}(x) = D^{1/2} f(x) \quad ??$$

Plusieurs grands mathématiciens se sont posés la question comme L'Hopital, Euler, Lagrange, Laplace, Riemann, Liouville.

Par exemple pour la fonction exponentielle, on sait que lorsque  $n$  est un entier on a

$$D^1 e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}, D^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}, \dots, D^n e^{\lambda x} = \lambda^n e^{\lambda x},$$

Pourquoi ne pas remplacer  $n$  par  $\frac{1}{2}$ ? Et écrire

$$D^{1/2} e^{\lambda x} = \lambda^{1/2} e^{\lambda x} \quad ??$$

Pourquoi ne pas aller plus loin et prendre  $n$  un nombre irrationnel comme  $\sqrt{2}$  ou un nombre complexe comme  $1 + i$ ?

Supposons que pour toute valeur de  $\alpha$  entière, rationnelle, irrationnelle, ou complexe on ait

$$D^\alpha e^{\lambda x} = \lambda^\alpha e^{\lambda x}.$$

Liouville a utilisé cette approche.

$$e^{\lambda x} = D^1(D^{-1}e^{\lambda x}),$$

donc on aura

$$D^{-1}e^{\lambda x} = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} = \int e^{\lambda x} dx.$$

De même pour

$$D^{-2}e^{\lambda x} = \int \int e^{\lambda x} dx dx,$$

donc il est raisonnable de donner un sens à  $D^\alpha$  quand  $\alpha$  est un entier négative ( $-n$ ).

**Remarque 1.1**  $D^\alpha$  représente une dérivée si  $\alpha$  est un nombre réel positive et une intégrale si  $\alpha$  est un nombre réel négatif (on la note  $I^\alpha$ ).

Et on sait que la dérivée de  $X^p$  (Lacroix,1819) est

$$\begin{aligned} D^0 X^p &= X^p, \\ D^1 X^p &= pX^{p-1}, \\ &\vdots \\ D^n X^p &= p(p-1)\dots(p-n+1)X^{p-n} = \frac{p!}{(p-n)!}X^{p-n} \\ &= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-n+1)}X^{p-n}. \end{aligned}$$

Donc il est naturel, pour un  $\alpha$  réel, de poser

$$D^\alpha X^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}X^{p-\alpha}. \quad (1.1)$$

On a

$$e^{\lambda x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} x^n, \quad (1.2)$$

Et on veut une dérivée d'ordre  $\alpha$  de (1.2), en utilisant (1.1), donc on peut la définir comme suit

$$D^\alpha e^{\lambda x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha}. \quad (1.3)$$

On a aussi

$$D^\alpha e^{\lambda x} = \lambda^\alpha e^{\lambda x}. \quad (1.4)$$

Les deux expressions (1.3) et (1.4) sont différentes.

La formule (1.3) est la dérivation de  $e^{\lambda x}$  au sens de Riemann-Liouville, tandis que la formule (1.4) donne la dérivation de  $e^{\lambda x}$  au sens de Weyl [2].

Maintenant, on va définir l'intégrale fractionnaire.

**Définition 1.1** Soit l'intégrale classique

$${}_a I_t^1 x(t) = \int_a^t x(\tau) d\tau.$$



La formule intégrale de Cauchy

$$\begin{aligned} {}_a I_t^n x(t) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} x(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} x(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.5)$$

En utilisant le caractère continue de  $\Gamma$ , on peut prolonger son domaine de validité sur  $\mathbb{R}_+$ .

L'opérateur défini dans (1.5) peut être défini de la manière suivante

L'intégral fractionnaire à gauche d'ordre  $\alpha > 0$  au sens de Riemann-Liouville d'une fonction  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée par

$${}_a I_t^\alpha x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau, & \alpha > 0 \\ x(t), & \alpha = 0. \end{cases}$$

$I^\alpha$  s'appelle l'opérateur intégrale d'ordre arbitraire  $\alpha > 0$  au sens de Riemann-Liouville.

Quant à l'intégrale fractionnaire à droite au sens de Riemann-Liouville de  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , elle est donnée par

$${}_t I_b^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau, \quad \alpha > 0.$$

### Quelques Propriétés

Si  $\alpha > 0, \beta > 0$ , alors

$${}_a I_{ta}^\alpha I_t^\beta x(t) = {}_a I_t^{\alpha+\beta} x(t) \quad \text{et} \quad {}_t I_{bt}^\alpha I_b^\beta x(t) = {}_t I_b^{\alpha+\beta} x(t).$$

Si  $x \in C^n([a, b])$ , alors on a

$${}_a I_t^\alpha x(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+j+1)} x^{(j)}(a) + {}_a I_t^{\alpha+n} x^{(n)}(t), \quad \text{pour } \alpha > -n.$$

## 1.1 Une Décomposition de l'Intégrale Fractionnaire

Soit  $x$  une fonction analytique dans  $[a, b]$ , alors on peut réécrire une intégrale fractionnaire comme une série entière.

On a

$${}_a I_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau, \quad \alpha > 0, a \leq t \leq b, \quad (1.6)$$

en faisant le changement de variable suivant

$$t - \tau = s \Rightarrow \tau = t - s,$$

on obtient

$${}_a I_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} s^{\alpha-1} x(t-s) ds, \quad \alpha > 0, a \leq t \leq b. \quad (1.7)$$

Ensuite, on a

$$x(t-s) = x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{(k)}(t)}{k!} s^k.$$

On remplace l'expression de  $x(t-y)$  dans (1.7), on obtient

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} y^{\alpha-1} \left[ x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{(k)}(t)}{k!} y^k \right] dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x(t) \int_0^{t-a} y^{\alpha-1} dy + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{(k)}(t)}{k!} y^{\alpha+k-1} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x(t) \left[ \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} \right] + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{(k)}(t)}{k!} \left[ \frac{(t-a)^{k+\alpha}}{k+\alpha} \right] \\ &= \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} x(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{(k)}(t)}{k!} \frac{(t-a)^{k+\alpha}}{k+\alpha}. \end{aligned}$$

Donc

$${}_a I_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t-a)^{k+\alpha}}{(k+\alpha)k!} x^{(k)}(t),$$

pour tout  $t \in [a, b]$  [9].

Du point de vue numérique, on ne peut pas évaluer une somme infinie, c'est la raison qui nous pousse à tronquer cette somme comme suit

$${}_a I_t^\alpha x(t) \approx \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (t-a)^{k+\alpha}}{(k+\alpha)k!} x^{(k)}(t).$$

L'objectif est de présenter une nouvelle formule de décomposition pour les fonctions de classe  $C^n$ , pour illustrer ceci on prend  $n = 3$  ensuite on généralise le résultat pour tout  $n$ .

Soit  $x \in C^3[a, b]$ , on a

$${}_a I_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau, \quad \alpha > 0, a \leq t \leq b$$

une intégration par partie donne

$${}_a I_t^\alpha x(t) = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x(a) + {}_a I_t^{\alpha+1} x'(t), \quad \alpha > -1, \quad (1.8)$$

on sait que

$${}_a I_t^{\alpha+1} x'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^\alpha x'(\tau) d\tau,$$

on intègre par partie l'expression de  ${}_a I_t^{\alpha+1} x'(t)$ , ensuite on la remplace dans (1.8), on obtient pour  $\alpha > -2$

$${}_a I_t^\alpha x(t) = \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x(a) + \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} x'(a) + {}_a I_t^{\alpha+2} x''(t), \quad (1.9)$$



on intègre par partie l'expression de  ${}_a I_t^{\alpha+2} x''(t)$ , et on remplace dans (1.9), on trouve pour  $\alpha > -3$

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha x(t) &= \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x(a) + \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} x'(a) \\ &\quad + \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} x''(a) + {}_a I_t^{\alpha+3} x^{(3)}(t), \\ &= \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x(a) + \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} x'(a) \\ &\quad + \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} x''(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+3)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha+2} x^{(3)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

On applique la formule de binôme (voir annexe A (3.7)) pour le terme  $(t-\tau)^{\alpha+2}$

$$(t-\tau)^{\alpha+2} = [(t-a) - (\tau-a)]^{\alpha+2} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(\alpha-p+3) p!} (t-a)^{\alpha+2-p} (\tau-a)^p$$

alors l'intégrale fractionnaire devient

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha x(t) &= \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x(a) + \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} x'(a) + \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} x''(a) \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha+3)} \int_a^t \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(\alpha-p+3) p!} (t-a)^{\alpha+2-p} (\tau-a)^p x^{(3)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x(a) + \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} x'(a) + \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} x''(a) \\ &\quad + \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(\alpha-p+3) p! (t-a)^p} \int_a^t (\tau-a)^p x^{(3)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Grâce à une propriété de la fonction Gamma (voir Annexe A (3.8)), on trouve

$$\binom{\alpha+2}{p} = \binom{-(-\alpha-2)}{p} = \frac{\Gamma(\alpha+3)}{p! \Gamma(\alpha-p+3)} = \frac{(-1)^p \Gamma(-\alpha-2+p)}{p! \Gamma(-\alpha-2)},$$

donc

$$\frac{(-1)^p \Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(\alpha-p+3)} = \frac{\Gamma(p-\alpha-2)}{\Gamma(-\alpha-2)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha x(t) &= \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x(a) + \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} x'(a) + \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} x''(a) \\ &\quad + \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p-\alpha-2)}{\Gamma(-\alpha-2) p! (t-a)^p} \int_a^t (\tau-a)^p x^{(3)}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

On extrait le premier terme de la somme ( $p=0$ ), on obtient

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha x(t) &= \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x(a) + \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} x'(a) + \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} x''(a) \\ &\quad + \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(p-\alpha-2)}{\Gamma(-\alpha-2) p! (t-a)^p} \int_a^t (\tau-a)^p x^{(3)}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

ensuite, on intègre par partie

$$\begin{aligned}
{}_a I_t^\alpha x(t) &= \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x(a) + \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} x'(a) \\
&\quad + \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} x''(t) \left[ 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(p-\alpha-2)}{\Gamma(-\alpha-2)p!} \right] \\
&\quad + \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-\Gamma(p-\alpha-2)}{(\alpha+2)\Gamma(-\alpha-2)(p-1)!(t-a)^p} \int_a^t (\tau-a)^{p-1} x''(\tau) d\tau \\
&= \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x(a) + \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} x'(a) \\
&\quad + \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} x''(t) \left[ 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(p-\alpha-2)}{\Gamma(-\alpha-2)p!} \right] \\
&\quad + \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(p-\alpha-2)}{\Gamma(-\alpha-1)(p-1)!(t-a)^p} \int_a^t (\tau-a)^{p-1} x''(\tau) d\tau,
\end{aligned}$$

on extrait le deuxième terme de la somme ( $p=1$ ) et ensuite on intègre par partie, on trouve

$$\begin{aligned}
{}_a I_t^\alpha x(t) &= \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x(a) + \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} x'(t) \left[ 1 + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\Gamma(p-\alpha-2)}{\Gamma(-\alpha-1)(p-1)!} \right] \\
&\quad + \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} x''(t) \left[ 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(p-\alpha-2)}{\Gamma(-\alpha-2)p!} \right] \\
&\quad + \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\Gamma(p-\alpha-2)}{\Gamma(-\alpha)(p-2)!(t-a)^p} \int_a^t (\tau-a)^{p-2} x'(\tau) d\tau,
\end{aligned}$$

on réitère le procédé une troisième fois, on obtient

$$\begin{aligned}
{}_a I_t^\alpha x(t) &= \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x(t) \left[ 1 + \sum_{p=3}^{\infty} \frac{\Gamma(p-\alpha-2)}{\Gamma(-\alpha)(p-2)!} \right] \\
&\quad + \frac{(t-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} x'(t) \left[ 1 + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\Gamma(p-\alpha-2)}{\Gamma(-\alpha-1)(p-1)!} \right] \\
&\quad + \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} x''(t) \left[ 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(p-\alpha-2)}{\Gamma(-\alpha-2)p!} \right] \\
&\quad + \frac{(t-a)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{p=3}^{\infty} \frac{\Gamma(p-\alpha-2)}{\Gamma(-\alpha+1)(p-3)!(t-a)^p} \int_a^t (\tau-a)^{p-3} x(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} A_0(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[ 1 + \sum_{p=3}^{\infty} \frac{\Gamma(p-\alpha-2)}{\Gamma(-\alpha)(p-2)!} \right] \\ A_1(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} \left[ 1 + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\Gamma(p-\alpha-2)}{\Gamma(-\alpha-1)(p-1)!} \right] \\ A_2(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+3)} \left[ 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(p-\alpha-2)}{\Gamma(-\alpha-2)p!} \right], \\ B(\alpha, p) = \frac{\Gamma(p-\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)(p-2)!}, \end{cases} \quad (1.10)$$

et

$$V_p(t) = \int_a^t (p-2)(\tau-a)^{p-3} x(\tau) d\tau. \quad (1.11)$$

Donc  ${}_a I_t^\alpha x(t)$  devient

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha x(t) &= A_0(\alpha)(t-a)^\alpha x(t) + A_1(\alpha)(t-a)^{\alpha+1} x'(t) + A_2(\alpha)(t-a)^{\alpha+2} x''(t) \\ &+ \sum_{p=3}^{\infty} B(\alpha, p)(t-a)^{\alpha+2-p} V_p(t). \end{aligned} \quad (1.12)$$

**Remarque 1.2** La fonction  $V_p$  donnée par (1.11) peut être définie comme une solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{dV_p}{dt}(t) = (p-2)(t-a)^{p-3} x(t) \\ V_p(a) = 0, \quad \text{pour } p = 3, 4, \dots \end{cases}$$

**Remarque 1.3** Quand  $\alpha$  n'est pas un entier, on utilise la formule d'Euler [6]

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)},$$

pour simplifier l'expression  $B(\alpha, p)$  dans (1.10).

On déduit la formule générale de décomposition pour les intégrales fractionnaires.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in C^n([a, b])$ , alors

$${}_a I_t^\alpha x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i(\alpha)(t-a)^{\alpha+i} x^{(i)}(t) + \sum_{p=n}^{\infty} B(\alpha, p)(t-a)^{\alpha+n-1-p} V_p(t), \quad (1.13)$$

où pour  $i = 0, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} A_i(\alpha) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+i+1)} \left[ 1 + \sum_{p=n-i}^{\infty} \frac{\Gamma(p-\alpha-n+1)}{\Gamma(-\alpha-i)(p-n+1+i)!} \right], \\ B(\alpha, p) &= \frac{\Gamma(p-\alpha-n+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)(p-n+1)!}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

et

$$V_p(t) = \int_a^t (p - n + 1)(\tau - a)^{p-n} x(\tau) d\tau. \quad (1.15)$$

Pour des raisons techniques, on va considérer que des sommes finies jusqu'à l'ordre  $N$ , avec  $N \geq n$ . Ainsi, notre approximation dépend de deux paramètres :

1.  $n \in \mathbb{N}$  : l'ordre de la dérivée.
2.  $N$  : la valeur maximale de  $p$ .

Finalement, l'intégrale fractionnaire à gauche est approchée par

$${}_a I_t^\alpha x(t) \approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i(\alpha) (t-a)^{\alpha+i} x^{(i)}(t) + \sum_{p=n}^N B(\alpha, p) (t-a)^{\alpha+n-1-p} V_p(t), \quad (1.16)$$

où

$$A_i(\alpha, N) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + i + 1)} \left[ 1 + \sum_{p=n-i}^N \frac{\Gamma(p - \alpha - n + 1)}{\Gamma(-\alpha - i)(p - n + 1 + i)!} \right], \quad (1.17)$$

et  $B(\alpha, p)$  et  $V_p(t)$  sont donnés par les formules (1.14) et (1.15) respectivement.

En utilisant le même procédé pour l'intégrale fractionnaire à droite, on obtient le résultat suivant.

**Théorème 1.1** Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in C^m[a, b]$ . Alors

$${}_t I_b^\alpha x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i(\alpha) (b-t)^{\alpha+i} x^{(i)}(t) + \sum_{p=n}^{\infty} B(\alpha, p) (b-t)^{\alpha+n-1-p} W_p(t),$$

où pour  $i = 0 \dots n-1$ ,

$$\begin{cases} A_i(\alpha) = \frac{(-1)^i}{\Gamma(\alpha + i + 1)} \left[ 1 + \sum_{p=n-i}^{\infty} \frac{\Gamma(p - \alpha - n + 1)}{\Gamma(-\alpha - i)(p - n + 1 + i)!} \right] \\ B(\alpha, p) = \frac{(-1)^n \Gamma(p - \alpha - n + 1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha) (p - n + 1)!} \\ W_p(t) = \int_t^b (p - n + 1) (b - \tau)^{p-n} x(\tau) d\tau. \end{cases}$$

On trouve les mêmes résultats pour la dérivée fractionnaire  ${}_a D_t^\alpha$ , en remplaçant  $\alpha$  par  $-\alpha$  dans le procédé précédent [5].

**Définition 1.2** Soit  $f \in C([a, b])$  la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha < 0$  au sens de Riemann-Liouville est

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= I^{-\alpha} f(t). \end{aligned}$$

On obtient le résultat suivant

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{A}_i(\alpha)(t-a)^{i-\alpha} x^{(i)}(t) - \sum_{p=n}^{\infty} C(\alpha, p)(t-a)^{n-1-p-\alpha} V_p(t),$$

et

$${}_a D_t^\alpha f(t) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \widehat{A}_i(\alpha, N)(t-a)^{i-\alpha} x^{(i)}(t) - \sum_{p=n}^N C(\alpha, p)(t-a)^{n-1-p-\alpha} V_p(t).$$

Pour illustration on choisit  $n = 2$ , on a

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha f(t) \approx & \widehat{A}_0(\alpha, N)(t-a)^{1-\alpha} x(t) + \widehat{A}_1(\alpha, N)(t-a)^{1-\alpha} x'(t) \\ & - \sum_{p=2}^N C(\alpha, p)(t-a)^{1-p-\alpha} V_p(t), \end{aligned} \quad (1.18)$$

où  $V_p'$  représente la dérivée de  $V_p$

$$\begin{cases} V_p'(t) = (1-p)(t-a)^{p-2} x(t), \\ V_p(a) = 0, \quad \text{pour } p = 2, 3, \dots, N. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \widehat{A}_0(\alpha, N) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ 1 + \sum_{p=2}^N \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(p-1)!} \right] \\ \widehat{A}_1(\alpha, N) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ 1 + \sum_{p=1}^N \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(\alpha-1)p!} \right] \\ C(\alpha, p) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha-1)} \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{(p-1)!}. \end{cases}$$

Pour résoudre une équation différentielle fractionnaire on remplace les dérivées fractionnaires par leurs approximations illustrées dans ce chapitre, on obtient une équation différentielle classique (d'ordre entier) qu'on approxime numériquement sa solution, en utilisant une méthode basée sur les ondelettes de Legendre.



## La Méthode des Ondelettes de Legendre

Les ondelettes forment une famille de fonctions  $\Psi_{a,b}(x)$  construites à partir de dilatation et de translation d'une seule ondelette mère  $\Psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ . On définit cette famille par

$$\Psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

avec  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

Si les paramètres de dilatation  $a$  et de translation  $b$  prennent des valeurs discrètes

$$\begin{cases} a = a_0^{-k}, & a_0 > 1, \\ b = nb_0 a_0^{-k}, & b_0 > 1, \end{cases}$$

pour  $n$  et  $k$  des entiers positifs, alors la famille d'ondelettes discrètes est donnée par

$$\Psi_{k,n}(x) = |a_0|^{k/2} \Psi(a_0^k x - nb_0),$$

qui forme une base pour  $L^2(\mathbb{R})$ . [10].

En particulier, lorsque  $a_0 = 2$  et  $b_0 = 1$  alors  $(\Psi_{k,n}(x))$  forment une base orthonormale [10].

### 2.1 Les Ondelettes de Legendre

Les ondelettes de Legendre sont définies sur l'intervalle  $[0, 1]$  par

$$\Psi_{n,k}(x) = \begin{cases} \sqrt{k + \frac{1}{2}} 2^{j/2} L_k(2^j x - 2n + 1), & \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x \leq \frac{n}{2^{j-1}} \\ 0, \dots \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Où

$n = 1, 2, \dots, 2^{j-1}$  est le nombre des niveaux de la décomposition,  $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  
 $k = 0, 1, \dots, nc - 1$  est le degré du polynôme de Legendre,  
 $nc$  : le nombre de points de collocation.



Ici, le coefficient  $\sqrt{k + \frac{1}{2}}$  assure l'orthonormalité,  $a = 2^{-j}$  est le paramètre de dilatation et  $b = (2n - 1)2^{-j}$  est le paramètre de translation.

On définit les polynômes de Legendre  $L_k(x)$  de degré  $k$  par la formule récursive suivante

$$\begin{cases} L_0(x) = 1, \\ L_1(x) = x, \\ L_{k+1}(x) = \left(\frac{2k+1}{k+1}\right)xL_k(x) - \left(\frac{k}{k+1}\right)L_{k-1}(x), \end{cases}$$

avec  $k = 1, 2, 3, \dots$  et  $x$  varie dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

**Remarque 2.1** La base d'ondelette (2.1) forme une base pour  $L^2([0, 1])$ . [8].

## 2.2 Approximation d'une Fonction

D'après la remarque (2.1), toute fonction  $f \in L^2([0, 1])$  peut être décomposée dans la base (2.1) comme suit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{n,k} \Psi_{n,k}(x), \quad (2.2)$$

où

$$C_{n,k} = \langle f, \Psi_{n,k} \rangle,$$

avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définie le produit scalaire dans  $L^2([0, 1])$ .

Pour des raisons techniques, les sommes dans l'expression de la fonction peuvent être tronquées,

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{2^{j-1}nc-1} \sum_{k=0}^{nc-1} C_{n,k} \Psi_{n,k}(x) = C^T \Psi(x),$$

où  $C$  et  $\Psi(x)$  sont des vecteurs de dimension  $2^{j-1}nc$ , donnés par

$$C = [C_{1,0}, C_{1,1}, \dots, C_{1,nc-1}, C_{2,0}, \dots, C_{2,nc-1}, \dots, C_{2^{j-1},0}, \dots, C_{2^{j-1},nc-1}]^T,$$

et

$$\Psi(x) = [\Psi_{1,0}(x), \dots, \Psi_{1,nc-1}(x), \Psi_{2,0}(x), \dots, \Psi_{2,nc-1}(x), \dots, \Psi_{2^{j-1},0}(x), \dots, \Psi_{2^{j-1},nc-1}(x)]^T. \quad (2.3)$$

## 2.3 La Matrice Opérationnelle d'Intégration

Dans cette section on veut trouver une relation entre l'intégrale entre 0 et  $x$  de  $\Psi(x)$  et  $\Psi(x)$  elle-même.

L'intégrale sur  $[0, x]$  du vecteur  $\Psi(x)$  défini dans (2.3) est donné par

$$\int_0^x \Psi(t) dt = \begin{pmatrix} \int_0^x \Psi_{1,0}(t) dt \\ \int_0^x \Psi_{1,1}(t) dt \\ \vdots \\ \int_0^x \Psi_{2^{j-1}, nc-1}(t) dt \end{pmatrix} = P\Psi(x), \quad (2.4)$$

où

$$P = \frac{1}{2^j} \begin{pmatrix} L & F & F & \cdots & F \\ 0 & L & F & \cdots & F \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & F \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & L \end{pmatrix}$$

est la matrice opérationnelle d'intégration de dimension  $(2^{j-1}nc \times 2^{j-1}nc)$  [7].  $F$  et  $L$  sont des matrices carrées de dimension  $nc \times nc$  définies par

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5 \times \sqrt{3}} & & \vdots \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5 \times \sqrt{3}} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\sqrt{(2M-1)}}{(2M-1)\sqrt{(2M-3)}} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\sqrt{(2M-1)}}{(2M-1)\sqrt{(2M-3)}} & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2.4 Le Produit de Deux Ondelettes

Le produit de deux ondelettes de Legendre donne [3]

$$\Psi(x)\Psi^T(x) = \begin{pmatrix} \Psi_{1,0}\Psi_{1,0} & \cdots & \Psi_{1,nc-1}\Psi_{1,0} & \cdots & \Psi_{1,0}\Psi_{2^{j-1},0} & \cdots & \Psi_{1,0}\Psi_{2^{j-1},nc-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Psi_{1,nc-1}\Psi_{1,0} & \cdots & \Psi_{1,nc-1}\Psi_{1,nc-1} & \cdots & \Psi_{1,nc-1}\Psi_{2^{j-1},0} & \cdots & \Psi_{1,nc-1}\Psi_{2^{j-1},nc-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Psi_{2^{j-1},0}\Psi_{1,0} & \cdots & \Psi_{2^{j-1},0}\Psi_{1,nc-1} & \cdots & \Psi_{2^{j-1},0}\Psi_{2^{j-1},0} & \cdots & \Psi_{2^{j-1},0}\Psi_{2^{j-1},nc-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Psi_{2^{j-1},nc-1}\Psi_{1,0} & \cdots & \Psi_{2^{j-1},nc-1}\Psi_{1,nc-1} & \cdots & \Psi_{2^{j-1},nc-1}\Psi_{2^{j-1},0} & \cdots & \Psi_{2^{j-1},nc-1}\Psi_{2^{j-1},nc-1} \end{pmatrix}.$$

En utilisant la propriété

$$\text{si } i \neq k, \Psi_{i,j}(x)\Psi_{k,l}(x) = 0,$$

le produit devient

$$\Psi(x)\Psi^T(x) = \begin{pmatrix} \Psi_{1,0}\Psi_{1,0} & \cdots & \Psi_{1,nc-1}\Psi_{1,0} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Psi_{1,nc-1}\Psi_{1,0} & \cdots & \Psi_{1,nc-1}\Psi_{1,nc-1} & 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots & 0 & \Psi_{2^{j-1},0}\Psi_{2^{j-1},0} & \cdots & \Psi_{2^{j-1},0}\Psi_{2^{j-1},nc-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \Psi_{2^{j-1},nc-1}\Psi_{2^{j-1},0} & \cdots & \Psi_{2^{j-1},nc-1}\Psi_{2^{j-1},nc-1} \end{pmatrix}$$

Pour n'importe quel vecteur  $V$  de dimension  $N$

$$V^T \Psi(t) \Psi^T(t) = \Psi^T(t) \tilde{V}. \quad (2.5)$$

A titre d'exemple, pour  $nc = 3$  et  $j = 2$ , pour

$$V = [V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6]^T,$$

et

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}V_1 & \sqrt{2}V_2 & \sqrt{2}V_3 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}V_2 & \sqrt{2}V_1 + \frac{4}{\sqrt{10}}V_3 & \frac{4}{\sqrt{10}}V_2 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}V_3 & \frac{4}{\sqrt{10}}V_2 & \sqrt{2}V_1 + \frac{20}{7\sqrt{10}}V_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}V_4 & \sqrt{2}V_5 & \sqrt{2}V_6 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}V_5 & \sqrt{2}V_4 + \frac{4}{\sqrt{10}}V_6 & \frac{4}{\sqrt{10}}V_5 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}V_6 & \frac{4}{\sqrt{10}}V_5 & \sqrt{2}V_4 + \frac{4}{\sqrt{10}}V_6 \end{bmatrix}$$

## 2.5 Description de la Méthode des Ondelettes de Legendre

On considère l'équation suivante

$$U'(x) + b(x)U(x) = f(x), \quad x \in \Omega = ]0, 1], \quad (2.6)$$

avec une condition

$$U(0) = U_0, \quad (2.7)$$

où,

$b(x)$ ,  $f(x)$  sont des fonctions données,

$U(x)$  : le vecteur inconnu,

**Remarque 2.2**  $b(x)$ ,  $f(x)$  peuvent dépendre de l'inconnu  $U$  (donc l'équation devient non linéaire).

Pour résoudre le problème (2.6-2.7), en utilisant la décomposition à base ondelette de Legendre (2.2).

On pose

$$U'(x) = U^T \Psi(x), \quad (2.8)$$

on intègre (2.8) sur le domaine  $(0, x)$ , on trouve

$$U(x) = (U^T P + U_0 d^T) \Psi(x) \quad (2.9)$$

avec,

$$U(0) = U_0 d^T \Psi(x),$$

et

$$1 = d^T \Psi(x).$$

On a aussi

$$\begin{cases} b(x) = B^T \Psi(x) \\ f(x) = F^T \Psi(x). \end{cases} \quad (2.10)$$

On substitue les équations (2.8-2.9-2.10) dans (2.6), on obtient

$$\Psi^T(x)U + B^T \Psi(x)\Psi^T(x)(U^T P + U_0 d^T)^T = \Psi^T(x)F.$$

Grâce à l'équation(2.5), on obtient

$$\Psi^T(x)U + \Psi^T(x)\tilde{B}(P^T U + dU_0) = \Psi^T(x)F.$$

Par conséquent, le résultat est un système d'équations algébriques linéaires

$$AU = G$$

où,

$$\begin{cases} A = I + \tilde{B}P^T \\ G = F - U_0\tilde{B}d. \end{cases}$$

La solution de problème (2.6-2.7) est donnée en injectant la solution de ce système linéaire dans l'expression (2.9).

## 2.6 Technique de Découplage

Dans cette section on veut présenter la technique de découplage et quasi-linéarisation qui nous permette d'utiliser la méthode d'ondelette de Legendre pour résoudre un système d'équations différentielles non linéaire [1].

Pour illustrer cette technique itérative, on considère le système d'équations différentielles ordinaires non linéaires couplées suivant

$$\begin{cases} u_1''(x) = f_1(x, u_1', u_2', \dots, u_p', u_1, u_2, \dots, u_p), \\ u_2''(x) = f_2(x, u_1', u_2', \dots, u_p', u_1, u_2, \dots, u_p), \\ \vdots \\ u_p''(x) = f_p(x, u_1', u_2', \dots, u_p', u_1, u_2, \dots, u_p). \end{cases}$$

A chaque itération, cette technique transforme un système couplé non linéaire en un système découplé linéaire qui peut être résolu par la méthode d'ondelette de Legendre, en l'écrivant comme une forme variationnelle avec le schéma suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{profil initial donné pour chaque solution : } u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_{p-1}^{(0)}, u_p^{(0)} . \\ (u_1'')^{k+1}(x) + A_1^{(k)}(u_1')^{(k+1)}(x) + B_1^{(k)}u_1^{(k+1)}(x) = F_1^{(k)} , \\ (u_2'')^{k+1}(x) + A_2^{(k)}(u_1')^{(k+1)}(x) + B_1^{(k)}u_1^{(k+1)}(x) = F_1^{(k)} , \\ \vdots \\ (u_p'')^{k+1}(x) + A_p^{(k)}(u_p')^{(k+1)}(x) + B_p^{(k)}u_p^{(k+1)}(x) = F_p^{(k)} . \end{array} \right.$$

Où

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i^{(k)} = a_i(x, (u_1')^{(k)}, \dots, (u_p')^{(k)}, u_1^{(k)}, \dots, u_p^{(k)}), \\ B_i^{(k)} = b_i(x, (u_1')^{(k)}, \dots, (u_p')^{(k)}, u_1^{(k)}, \dots, u_p^{(k)}), \\ F_i^{(k)} = f_i(x, (u_1')^{(k)}, \dots, (u_{i-1}')^{(k)}, (u_{i+1}')^{(k)}, \dots, (u_p')^{(k)}, u_1^{(k)}, \dots, u_{i-1}^{(k)}, u_{i+1}^{(k)}, \dots, u_p^{(k)}). \end{array} \right.$$

avec,

$u_i^{(k+1)}$  : représente l'approximation de  $u$  à l'itération en cours.

$u_i^{(k)}$  : représente l'approximation de  $u$  à l'itération précédent.

La condition d'arrêt de ce processus itératif est donnée par la formule suivante

$$E_{DQL} = \text{Max} \left( \left\| u_1^{(k+1)} - u_1^{(k)} \right\|_2, \left\| u_2^{(k+1)} - u_2^{(k)} \right\|_2, \dots, \left\| u_p^{(k+1)} - u_p^{(k)} \right\|_2 \right).$$

Finalement, notre procédure donne la solution du problème lorsque  $E_{DQL}$  est inférieure à un certain epsilon donné.



## Application et Simulation

Dans ce chapitre, on présente deux exemples pour tester les approximations des dérivées fractionnaires, qu'on a proposées au premier chapitre. Ensuite, on modélise la transmission de l'épidémie de Dengue par des équations différentielles fractionnaires.

### 3.1 Test des Approximations Fractionnaires

On considère la fonction suivante

$$f(t) = (t - a)^\beta, \quad (3.1)$$

l'intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de cette fonction est donnée par (voir Annexe A (3.10))

$${}_a I_t^\alpha (t - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + \alpha + 1)} (t - a)^{\alpha + \beta}.$$

Si on choisit  $\beta = 3$ ,  $a = 0$  et  $\alpha = 0.5$ , alors on a

$${}_0 I_t^{0.5} t^3 = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4.5)} t^{3.5}.$$

En utilisant l'approximation décrite dans le chapitre 1, on obtient pour  $n = 3$

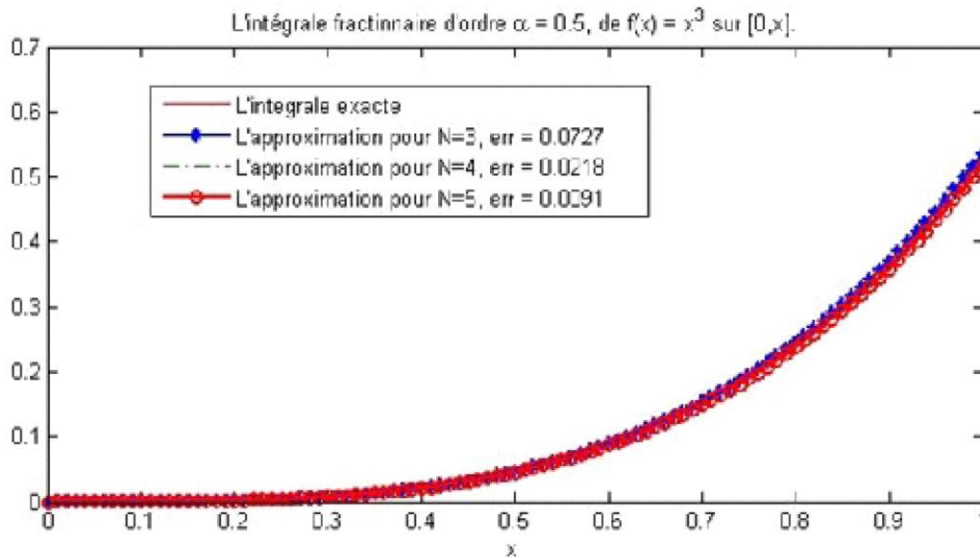
$$\begin{aligned} {}_0 I_t^{0.5} t^3 &= A_0(0.5, N) t^{3.5} + 3A_1(0.5, N) t^{3.5} + 6A_2(0.5, N) t^{3.5} \\ &\quad + B(0.5, 3) t^{-0.5} V_3(t) + B(0.5, 4) t^{-1.5} V_4(t), \end{aligned}$$



avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0(0.5, 4) = \frac{1}{\Gamma(1.5)} \left[ 1 + \frac{\Gamma(0.5)}{\Gamma(-0.5)} + \frac{\Gamma(1.5)}{2\Gamma(-0.5)} \right] = -0.6041, \\ A_1(0.5, 4) = \frac{1}{\Gamma(2.5)} \left[ 1 + \frac{\Gamma(-0.5)}{\Gamma(-1.5)} + \frac{\Gamma(0.5)}{2\Gamma(-1.5)} + \frac{\Gamma(1.5)}{6\Gamma(-1.5)} \right] = 1.4620 \\ A_2(0.5, 4) = \frac{1}{\Gamma(3.5)} \left[ 1 + \frac{\Gamma(-1.5)}{\Gamma(-2.5)} + \frac{\Gamma(-0.5)}{2\Gamma(-2.5)} + \frac{\Gamma(0.5)}{6\Gamma(-2.5)} + \frac{\Gamma(1.5)}{24\Gamma(-2.5)} \right] = -0.0417 \\ B(0.5, 3) = \frac{\Gamma(0.5)}{\Gamma(0.5)\Gamma(0.5)} = 0.5642, \\ B(0.5, 4) = \frac{\Gamma(1.5)}{2\Gamma(0.5)\Gamma(0.5)} = 1.3921, \\ V_3(t) = \int_a^t x(\tau) d\tau \\ V_4(t) = \int_a^t 2(\tau - a)x(\tau) d\tau. \end{array} \right.$$

Pour différentes valeurs de  $N = 3, 4, 5$ , on obtient les résultats suivants.



La dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de cette fonction (3.1) est donnée par

$${}_a D_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}.$$

Si on choisit  $\beta = 3$ ,  $a = 0$  et  $\alpha = 0.5$ , alors on a

$${}_0 D_t^{0.5} t^3 = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3.5)} t^{2.5}.$$

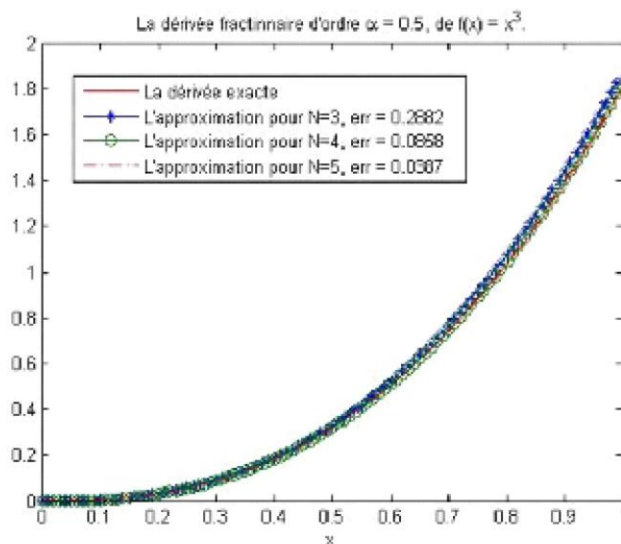
En utilisant l'approximation décrite dans le chapitre 1, on obtient pour  $n = 3$

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^{0.5} t^3 &= \widehat{A}_0(0.5) t^{2.5} + 3\widehat{A}_1(0.5) t^{2.5} + 6\widehat{A}_2(0.5) t^{2.5} \\ &\quad + C(0.5, 3) t^{-1.5} V_3(t) + C(0.5, 4) t^{-2.5} V_4(t), \end{aligned}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{A}_0(0.5, 4) = \frac{1}{\Gamma(0.5)} \left[ 1 + \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(0.5)} + \frac{\Gamma(2.5)}{2\Gamma(0.5)} \right] = 1.5110 \\ \widehat{A}_1(0.5, 4) = \frac{1}{\Gamma(1.5)} \left[ 1 + \frac{\Gamma(0.5)}{\Gamma(-0.5)} + \frac{\Gamma(1.5)}{2\Gamma(-0.5)} + \frac{\Gamma(2.5)}{6\Gamma(-0.5)} \right] = -2.0945 \\ \widehat{A}_2(0.5, 4) = \frac{1}{\Gamma(2.5)} \left[ 1 + \frac{\Gamma(-0.5)}{\Gamma(-1.5)} + \frac{\Gamma(0.5)}{2\Gamma(-1.5)} + \frac{\Gamma(1.5)}{6\Gamma(-1.5)} + \frac{\Gamma(2.5)}{24\Gamma(-1.5)} \right] = 1.5604 \\ C(0.5, 3) = \frac{\Gamma(2.5)}{2\Gamma(1.5)\Gamma(-0.5)} = -2.0881 \\ C(0.5, 4) = \frac{\Gamma(3.5)}{6\Gamma(1.5)\Gamma(-0.5)} = -1.7401 \\ V_3'(t) = t^3 \\ V_4'(t) = 2t^4. \end{array} \right.$$

Pour différentes valeurs de  $N = 3, 4, 5$ , on obtient les résultats suivantes.



### 3.2 La Modélisation de la Transmission de l'Épidémie de Dengue par un Modèle Fractionnaire

Dans cette section on va donner une application des dérivées fractionnaires sur les modèles réels.

On considère le modèle de transmission de l'épidémie de Dengue

$$\begin{cases} \frac{dS_h}{dt}(t) = \mu_h N_h(t) - (B\beta_{mh} \frac{I_m(t)}{N_h} + \mu_h) S_h(t), \\ \frac{dI_h}{dt}(t) = B\beta_{mh} \frac{I_m(t)}{N_h} S_h(t) - (\eta_h + \mu_h) I_h(t), \\ \frac{dR_h}{dt}(t) = \eta_h I_h(t) - \mu_h R_h(t), \\ \frac{dS_m}{dt}(t) = \mu_m N_m - (B\beta_{hm} \frac{I_h(t)}{N_h} + \mu_m) S_m(t), \\ \frac{dI_m}{dt}(t) = B\beta_{hm} \frac{I_h(t)}{N_h} S_m(t) - (\mu_m) I_m(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

où

$S_h(t)$  : susceptible (individuals who can contract the disease),

$I_h(t)$  : infectés (individus capables de transmettre la maladie à d'autres),

$R_h(t)$  : résistant (les personnes qui ont acquis l'immunité).

Il est supposé que la population humaine totale  $N_h$  est constante, donc

$$N_h = S_h + I_h + R_h,$$

Il ya aussi deux autres variables d'état liées aux moustiques femelles

$S_m(t)$  : sensibles (les moustiques qui sont capables de contracter la maladie),

$I_m(t)$  : infectés (moustiques capables de transmettre la maladie aux humains).

Les paramètres du modèle sont

$N_h$  : population totale

$B$  : moyenne quotidienne mordant (par jour),

$\beta_{mh}$  : probabilité de transmission de  $I_m$  (par morsure),

$\beta_{hm}$  : probabilité de transmission de  $I_h$  (par morsure),

$1/\mu_h$  : durée de vie moyenne de l'homme (en jours),

$1/\eta_h$  : signifier période de virémie (en jours),

$1/\mu_m$  : durée de vie moyenne de moustiques adultes (en jours).

On réécrit le modèle classique (3.2) avec des dérivées fractionnaires d'ordre  $\alpha$  de Riemann-Liouville [5], on obtient

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha S_h(t) = \mu_h N_h - (B\beta_{mh} \frac{I_m(t)}{N_h} + \mu_h) S_h(t), \\ {}_0D_t^\alpha I_h(t) = B\beta_{mh} \frac{I_m(t)}{N_h} S_h(t) - (\eta_h + \mu_h) I_h(t), \\ {}_0D_t^\alpha R_h(t) = \eta_h I_h(t) - \mu_h R_h(t), \\ {}_0D_t^\alpha S_m(t) = \mu_m N_m - (B\beta_{hm} \frac{I_h(t)}{N_h} + \mu_m) S_m(t), \\ {}_0D_t^\alpha I_m(t) = B\beta_{hm} \frac{I_h(t)}{N_h} S_m(t) - (\mu_m) I_m(t). \end{cases} \quad (3.3)$$

Donc, lorsque  $\alpha \rightarrow 1$  le système (3.3) se réduit au système(3.2). Notre objectif est de trouver l'ordre  $\alpha$  qui rend le modèle plus réaliste en le comparant à des données expérimentales.

On doit utiliser les approximations des dérivées fractionnaires pour transformer le système (3.3) en un système d'équations ordinaires.

Grâce à l'approximation (1.18), la première équation du système(3.3) peut être réécrite de la façon suivante

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha \widetilde{S}_h(t) &= \mu_h N_h - (B\beta_{mh} \frac{I_m(t)}{N_h} + \mu_h) \widetilde{S}_h(t) = At^{1-\alpha} \widetilde{S}_h(t) \\ &+ \widehat{A}t^{1-\alpha} \frac{d\widetilde{S}_h}{dt}(t) - \sum_{p=2}^N C_p t^{1-p-\alpha} V_p^{S_h}(t), \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{d\widetilde{S}_h}{dt}(t) = \left[ \mu_h N_h - (B\beta_{mh} \frac{\widetilde{I}_m(t)}{N_h} + \mu_h) \widetilde{S}_h(t) - At^{-\alpha} \widetilde{S}_h(t) + \sum_{p=2}^N C_p t^{1-p-\alpha} V_p^{S_h}(t) \right] \widehat{A}^{-1} t^{\alpha-1},$$

et

$$\begin{cases} \frac{dV_p^{S_h}}{dt}(t) = (1-p)(t-a)^{p-2} \widetilde{S}_h(t), & p = 2, 3, \dots, N, \\ V_p^{S_h}(a) = 0. \end{cases}$$

Alors, on fait de même pour les autres équations de (3.3), on obtient le système suivant

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\widetilde{S}_h}{dt}(t) &= \left[ \mu_h N_h - (B\beta_{mh} \frac{\widetilde{I}_m(t)}{N_h} + \mu_h) \widetilde{S}_h(t) - At^{-\alpha} \widetilde{S}_h(t) + \sum_{p=2}^N C_p t^{1-p-\alpha} V_p^{S_h}(t) \right] \widehat{A}^{-1} t^{\alpha-1}, \\ \frac{dV_p^{S_h}}{dt}(t) &= (1-p)(t-a)^{p-2} \widetilde{S}_h(t), \quad p = 2, 3, \dots, N, \\ \frac{d\widetilde{I}_h}{dt}(t) &= \left[ B\beta_{mh} \frac{\widetilde{I}_m(t)}{N_h} \widetilde{S}_h(t) - (\eta_h + \mu_h) \widetilde{I}_h(t) - At^{-\alpha} \widetilde{I}_h(t) + \sum_{p=2}^N C_p t^{1-p-\alpha} V_p^{I_h}(t) \right] \widehat{A}^{-1} t^{\alpha-1}, \\ \frac{dV_p^{I_h}}{dt}(t) &= (1-p)(t-a)^{p-2} \widetilde{I}_h(t), \quad p = 2, 3, \dots, N, \\ \frac{d\widetilde{R}_h}{dt}(t) &= \left[ \eta_h \widetilde{I}_h(t) - \mu_h \widetilde{R}_h(t) - At^{-\alpha} \widetilde{R}_h(t) + \sum_{p=2}^N C_p t^{1-p-\alpha} V_p^{R_h}(t) \right] \widehat{A}^{-1} t^{\alpha-1}, \\ \frac{dV_p^{R_h}}{dt}(t) &= (1-p)(t-a)^{p-2} \widetilde{R}_h(t), \quad p = 2, 3, \dots, N, \\ \frac{d\widetilde{S}_m}{dt}(t) &= \left[ \mu_m N_m - (B\beta_{hm} \frac{\widetilde{I}_h(t)}{N_h} + \mu_m) \widetilde{S}_m(t) - At^{-\alpha} \widetilde{S}_m(t) + \sum_{p=2}^N C_p t^{1-p-\alpha} V_p^{S_m}(t) \right] \widehat{A}^{-1} t^{\alpha-1}, \\ \frac{dV_p^{S_m}}{dt}(t) &= (1-p)(t-a)^{p-2} \widetilde{S}_m(t), \quad p = 2, 3, \dots, N, \\ \frac{d\widetilde{I}_m}{dt}(t) &= \left[ B\beta_{hm} \frac{\widetilde{I}_h(t)}{N_h} \widetilde{S}_m(t) - (\mu_m) \widetilde{I}_m(t) - At^{-\alpha} \widetilde{I}_m(t) + \sum_{p=2}^N C_p t^{1-p-\alpha} V_p^{I_m}(t) \right] \widehat{A}^{-1} t^{\alpha-1}, \\ \frac{dV_p^{I_m}}{dt}(t) &= (1-p)(t-a)^{p-2} \widetilde{I}_m(t), \quad p = 2, 3, \dots, N, \end{aligned} \right.$$



avec les conditions initiales

$$\begin{cases} S_{h0} = N_h - 216, \\ I_{h0} = 216, \\ R_{h0} = 0, \\ S_{m0} = m * N_h, \\ I_{m0} = 0. \end{cases}$$

et

$$V_p^{S_h} = V_p^{I_h} = V_p^{R_h} = V_p^{S_m} = V_p^{I_m} = 0,$$

Pour les données mathématiques

$$\begin{aligned} nc &= 15, \\ j &= 3, \\ Tolérance &= 1e - 5. \end{aligned}$$

et les données physiques

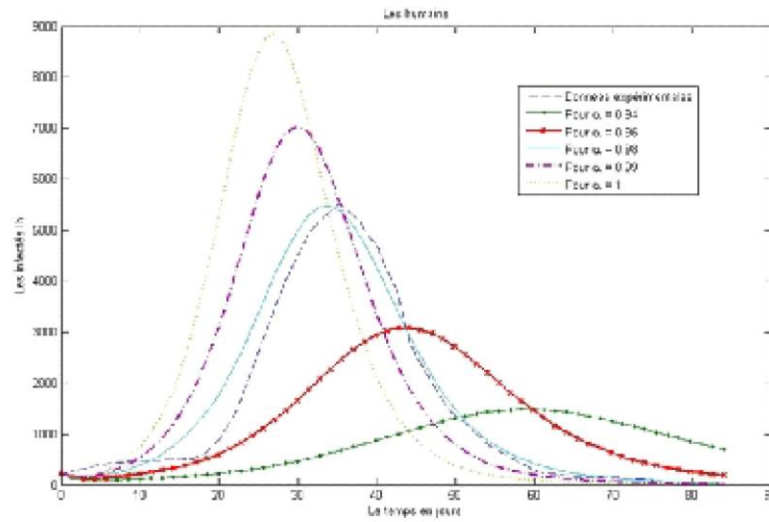
$$\begin{cases} N_h = 56000 \\ B = 0.7 \\ \beta_{mh} = 0.36 \\ \beta_{hm} = 0.36 \\ \mu_h = 1/(71 \times 365) \\ \eta_h = 1/3 \\ \mu_m = 1/10 \\ m = 3. \end{cases}$$

Une enquête a été réalisée au "Cape Verde" Afrique de l'ouest en 2009, sur l'épidémie de Dengue, a donné le tableau suivant [5].

t	0	2.5000	5.4167	8.7500	16.6667	18.3333	20.0000	22.0833	28.3333	30.00
I <sub>h</sub>	210.5	315.8	421.1	473.7	526.3	631.6	894.7	1421.1	4000.0	4526.3
t	31.6667	33.3333	35.4167	37.9167	39.1667	40.0000	40.8333	42.5000	43.3333	44.1667
I <sub>h</sub>	5000.0	5263.2	5526.3	5157.9	4842.1	4736.8	4368.4	3842.1	3368.4	2789.5
t	45.4167	47.0833	49.1667	51.6667	54.1667	56.6667	60.4167	65.8333	70.00	75.00
I <sub>h</sub>	2421.1	2000.0	1473.7	1157.9	789.5	578.9	263.2	157.9	157.9	105.3

En utilisant la méthode de l'ondelette de Legendre combinée avec la technique de décou-

plage et de quasi-linéarisation décrite dans le chapitre 2, on obtient les résultats suivants.



Cette figure montre que le modèle fractionnaire d'ordre  $\alpha = 0.98$  représente mieux les données expérimentales.





## Conclusion et Perspectives

Les techniques utilisées dans ce travail, pour l'approximation des dérivées fractionnaires ont données de très bons résultats. Leurs applications sur des modèles de transmission de l'épidémie de Dengue a donnée des résultats très intéressants, ce qui prouve que plusieurs phénomènes classiques peuvent être modélisés par des dérivées fractionnaires.

Nos perspectives seront d'appliquer cette technique sur d'autres modèles comme par exemple le modèle du diabète, en utilisant la dérivée fractionnaire au sens de Caputo.



# Bibliographie

- [1] A new approach to solve a set of nonlinear split boundary value problems, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 17 (2012) 555 – 565.
- [2] Delfim F. M. Torres, Center for Research and Development in Mathematics and Applications Department of Mathematics, University of Aveiro, 3810-193 Aveiro, Portugal, The International Meeting on Applied Mathematics in Errachidia, April 23 – 27, 2012, Errachidia, Morocco.
- [3] Omar BELHAMITI and Sidi Mohamed BAHRI : Legendre Wavelet method for numerical solution of nonlinear differential systems and split BVPs.
- [4] Shakoor Pooseh, Ricardo Almeida, and Delfim F. M. Torres : Approximation of fractional integrals by means of derivatives
- [5] Shakoor Pooseh, Helena Sofia Rodrigues, and Delfim F. M. Torres : Fractional Derivatives in Dengue Epidemics, *AIP Conf. Proc.* 1389, 739 (2011)
- [6] K. Diethelm, The analysis of fractional differential equations, vol. 2004 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [7] M.RAZZAGHI, S.YOUSEFI. : The Legendre wavelets operational matrix of integration. *International Journal of Systems Science* 2001; 32 : 495 – 502.
- [8] M.RAZZAGHI, S.YOUSEFI. : Legendre wavelets direct method for variational problems. *Mathematics and Computers in Simulation* 53, 2000, 185-192.
- [9] G.E. Andrews, R. Roy, *Special functions*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, 71, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [10] Gu J.S. and Jiang W.S. : The Haar wavelets operational matrix of integration, *Int. J. Syst. Sci.* 27 (1996) 623-628.
- [11] K.S. Miller and B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, A Wiley-Interscience Publication, Wiley, New York, (1993).

## Annexe A

**Définition 3.1** La fonction Gamma est l'un de joyaux mathématique, on la retrouve en l'analyse mathématique.

La fonction Gamma est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Tandis que la fonction Beta

$$B(a, b) = \int_0^1 (1-t)^{b-1} t^{a-1} dt,$$

### Propriétés

–

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \forall z > 0.$$

Pour démontrer cette propriété, on intègre par partie

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt \\ &= -[e^{-t} t^z]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

– Si  $n \in \mathbb{N}$ , alors

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)\dots(z+n-1)\Gamma(z).$$

– Si  $n$  est un entier alors

$$\Gamma(z+n)\Gamma(-z-n+1) = (-1)^n \Gamma(z)\Gamma(1-z), \quad \text{pour tout } n. \quad (3.4)$$

– Comme  $\Gamma(1) = 1$ , alors  $\Gamma(1+n) = n!$

–

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (3.5)$$

Pour démontrer cette dernière propriété, on montre que

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = B(a, b)\Gamma(a+b),$$

on a

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx \int_0^\infty e^{-t}t^{b-1}dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-t}x^{a-1}t^{b-1}dxdt.\end{aligned}$$

On pose

$$x = u - t \quad \text{pour } 0 \leq x \leq u$$

alors

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= \int_0^\infty \int_0^u e^{-u}x^{a-1}(u-x)^{b-1}dxd u & (3.6) \\ &= \int_0^\infty e^{-u} \left( \int_0^u x^{a-1}(u-x)^{b-1}dx \right) du,\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable

$$x = vu,$$

on a

$$\begin{aligned}\int_0^u x^{a-1}(u-x)^{b-1}dx &= \int_0^1 (vu)^{a-1}(u-vu)^{b-1}udv \\ &= u^{a+b-1} \int_0^1 v^{a-1}(1-v)^{b-1}dv \\ &= u^{a+b-1}B(a, b),\end{aligned}$$

alors (3.6) devient

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = B(a, b) \int_0^\infty e^{-u}u^{a+b-1}du,$$

d'où

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = B(a, b)\Gamma(a+b).$$

**Remarque 3.1** Si on pose

$$\begin{aligned}t &= \sin^2 \theta, \\ \Rightarrow 1-t &= \cos^2 \theta,\end{aligned}$$

et

$$dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta,$$

alors

$$B(a, b) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2a-1} (\cos \theta)^{2b-1} d\theta.$$

En particulier, on a

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi,$$

et

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma(1)\pi.$$

D'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

### Binôme de Newton

$$\begin{aligned} (A+B)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} A^{\alpha-n} B^n, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha-n+1)} A^{\alpha-n} B^n. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Par exemple, on écrit le coefficient de binôme :

On utilise (3.4), on trouve

$$\binom{-z}{n} = \frac{\Gamma(1-z)}{n!\Gamma(1-z-n)} = \frac{(-1)^n \Gamma(z+n)}{n!\Gamma(z)} = (-1)^n \binom{z+n-1}{n}. \quad (3.8)$$

Soient  $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ , alors

$$\begin{cases} {}_0I_t^\alpha {}_0I_t^\beta f(t) = {}_0I_t^{\alpha+\beta} f(t), & 0 < t \leq b \\ {}_0I_t^\alpha {}_0I_t^\beta f(t) = {}_0I_t^\beta {}_0I_t^\alpha f(t). \end{cases}$$

**Preuve.** Soient  $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ , alors

$$\begin{aligned} {}_0I_t^\alpha {}_0I_t^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} {}_0I_t^\beta f(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \left( (t-\tau)^{\alpha-1} \int_0^\tau (\tau-\varphi)^{\beta-1} f(\varphi) d\varphi \right) d\tau, \end{aligned}$$

on prend

$$s = \frac{\tau - \varphi}{t - \varphi},$$

une remarque au passage

$$\begin{aligned} 0 &\leq \tau \leq t \\ &\text{et} \\ 0 &\leq \varphi \leq \tau \leq t, \end{aligned}$$

alors

$${}_0I_t^\alpha {}_0I_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\varphi) \left( \int_\varphi^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\varphi)^{\beta-1} d\tau \right) d\varphi, \quad (3.9)$$

comme

$$1-s = 1 - \frac{\tau - \varphi}{t - \varphi},$$



ce qui implique à

$$t - \tau = (1 - s)(t - \varphi),$$

donc (3.9) devient

$$\begin{aligned} {}_0I_t^\alpha {}_0I_t^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\varphi) \left( \int_0^1 ((1-s)(t-\varphi))^{\alpha-1} (s(t-\varphi))^{\beta-1} (t-\varphi) ds \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\varphi) (t-\varphi)^{\alpha-1} (t-\varphi)^{\beta-1} (t-\varphi) d\varphi \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds \\ &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\varphi)^{\alpha+\beta-1} f(\varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} {}_0I_t^\alpha {}_0I_t^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^t (t-\varphi)^{\alpha+\beta-1} f(\varphi) d\varphi \\ &= {}_0I_t^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

Donc

$${}_0I_t^\alpha {}_0I_t^\beta f(t) = {}_0I_t^{\alpha+\beta} f(t) = {}_0I_t^{\beta+\alpha} f(t) = {}_0I_t^\beta {}_0I_t^\alpha f(t).$$

■

L'intégrale fractionnaire de la fonction

$$f(t) = t^\beta,$$

est défini comme suit

$${}_0I_t^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} t^{\alpha+\beta}, \quad \forall \alpha > 0. \quad (3.10)$$

Pour calculer l'intégrale fractionnaire de  $f(t)$ , en effet d'après (1.6) on a

$${}_0I_t^\alpha t^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^\beta d\tau,$$

on pose

$$u = \frac{\tau}{t} \Rightarrow du = \frac{d\tau}{t},$$

alors

$$\begin{aligned} {}_0I_t^\alpha t^\beta &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-ut)^{\alpha-1} (ut)^\beta t du \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\beta du \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta + 1). \end{aligned}$$

Donc d'après (3.5) on trouve

$${}_0I_t^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} t^{\alpha+\beta}.$$

## Annexe B

```
function A = A_alpha(ii,nn,N,alpha)
s = 0;
for p = nn-ii :N
    s = s + gamma(p-alpha-nn+1)/(gamma(-alpha-ii)*factorial(p-nn+ii+1));
end
A = 1/gamma(alpha+ii+1)*(1+s);
```

```
function vf = f(t,m,nn,a,p)
vf = (p-nn+1)*(t-a)^(p-nn)*g(t,m);
```

```
function vg = g(t,m)
vg = t^m;
```

**La dérivée du polynôme**

```
function dx = polynome_derivative(nn,m,t)
dx0 = t^m;
dx(1) = m*t^(m-1);
p = m;
for i=2 :nn-1
    p = p*(m-i+1);
    dx(i) = p*t^(m-i);
end
```

```
function s = sum_alpha(nn,N,alpha,a,t,m)
dx0 = t^m;
if t==0
    s = 0;
else
    s = A_alpha(0,nn,N,alpha) * (t-a)^(alpha)*dx0;
end
dx = polynome_derivative(nn,m,t);
for i = 1 :nn-1
    s = s + A_alpha(i,nn,N,alpha) * (t-a)^(alpha+i)*dx(i);
end
```

```
function b = beta_alpha(p,alpha,nn)
b = gamma(p-alpha-nn+1)/(gamma(alpha)*gamma(1-alpha)*factorial(p-nn+1));
```

```
function s = V_Psimpson(t,nn,m,p,a)
```

```

if t==0
    s = 0;
else
    k = 100;
    tt = a:(t-a)/(k-1):t;
    h = (t-a)/(k-1);
    s = 0;
    for i = 2 :k-1
        s = s + h/6*( f(tt(i),m,nn,a,p) + 4*f((tt(i)+tt(i+1))/2,m,nn,a,p) + ...
f(tt(i+1),m,nn,a,p));
    end
end

```

```

function s = sum_beta(nn,N,alpha,a,t,m)
if t==0
    s = 0;
else
    s = 0;
    for p = nn :N
        s = s + beta_alpha(p,alpha,nn)*(t-a)^(alpha+nn-1-p)*...
V_Psimpson(t,nn,m,p,a);
    end
end

```

### L'intégrale fractionnaire

```

function I = int_alpha(nn,N,alpha,a,t,m)
I = sum_alpha(nn,N,alpha,a,t,m) + sum_beta(nn,N,alpha,a,t,m);

```

### La dérivée fractionnaire

```

function dI = D_alpha(nn,N,alpha,a,t,m,h)
for i = 2 :length(t)-1
    dI(i) = (int_alpha(nn,N,1-alpha,a,t(i+1),m)-...
int_alpha(nn,N,1-alpha,a,t(i-1),m))/(2*h);
end
dI(1) = (int_alpha(nn,N,1-alpha,a,t(2),m)-...
int_alpha(nn,N,1-alpha,a,t(1),m))/h;
dI(length(t)) = (int_alpha(nn,N,1-alpha,a,t(length(t)),m)-...
int_alpha(nn,N,1-alpha,a,t(length(t)-1),m))/h;

```

```

clear all
nn = 3;
a = 0;
t = 0 :0.01 :1;
h = 0.01;
alpha = 0.5;
m = 3;
i = 0;

```

```

for N = 3 :5
    i = i+1;
    for k=1 :length(t)
        I_inex(k) = int_alpha(nn,N,alpha,a,t(k),m);
        I_exact(k) = (gamma(m+1)/gamma(alpha+m+1))*(t(k)-a)^(m+alpha);
    end
    e(i) = norm2(I_exact-I_inex)
    dI = D_alpha(nn,N,alpha,a,t,m,h);
    D_exact = (gamma(m+1)/gamma(-alpha+m+1))*(t-a).^(m-alpha);
    erreur(i) = norm(dI-D_exact);
end
figure(1)
plot(t,I_inex,'*-');
hold on
plot(t,I_exact,'r');
hold off
figure(2)
plot(e,'m');
figure(3)
plot(erreur,'g');
figure(4)
plot(t,D_exact,'*',t,dI,'r')

```

### Polynôme de Legendre

```

function pk = legendre_polynomial(x,k)
    if k == 0
        pk = 1;
    else if k == 1
        pk = x;
    else if k == 2
        pk = 3/2*x.^2-1/2;
    else
        p0 = 1;
        p(1) = x;
        p(2)=3/2*x.^2-1/2;
        for i=3 :k
            p(i)=((2*(i-1)+1)/i *x)*p(i-1)+((-i+1)/i)*p(i-2);
        end
        pk = p(k);
    end
end

```

L'ondelette de Legendre

```
function psi = legendre_wavelet(j,n,k,x)
    Lk = legendre_polynomial(2^j *x-2*n+1,k);
    if (x>=(n-1)/2^(j-1))&(x <= n/2^(j-1))
        psi = sqrt(k+1/2)*2^(j/2)*Lk;
    else
        psi = 0;
    end
end
```

Le vecteur de l'ondelette de Legendre

```
function psi = vect_legendre_wavelet(j,nc,x)
    for n =1 :2^(j-1)
        for k=0 :nc-1
            psi(k+(n-1)*nc+1) = legendre_wavelet(j,n,k,x);
        end
    end
end
```

La matrice d'ondelette de Legendre

```
function psi = matrix_legendre_wavelet(j,nc,x)
    p = 2^(j-1)*nc;
    for i =1 :p
        psi( :,i) = vect_legendre_wavelet(j,nc,x(i));
    end
end
```

La matrice d'intégration

```
function P = matrice_integration(nc,j)
    n = 2^(j-1);
    L = 1/2^j * tri_diag_matrice(nc);
    F = zeros(nc);
    F(1,1) = 1/2^(j-1);
    for i = 1 :n
        P((i-1)*nc+1 :i*nc,(i-1)*nc+1 :i*nc) = L;
        for m = i+1 :n
            P((i-1)*nc+1 :i*nc,(m-1)*nc+1 :m*nc) = F;
        end
    end
end
end
```

Le produit de deux ondelettes



```

function M = Vtild(j,nc,x,V)
    psi = Mat_LW(j,nc,x);
    p = 2^(j-1)*nc;
    for i=1 :p
        s = 0;
        for k=1 :p
            s = s + V(k)*psi(k,i);
        end
        Q(i,i) = s;
    end
    M = inv(psi')*(psi*Q)';

```

La méthode de l'ondelette de Legendre

```

function U = LWM(nc,j,x,a,b,u0,f)

```

```

    psi = Mat_LW(j,nc,x);
    P = Mat_P(nc,j);
    a = inv(psi')*a;
    b = inv(psi')*b;
    Atild = Vtild(j,nc,x,a);
    Btild = Vtild(j,nc,x,b);
    p = 2^(j-1)*nc;
    f = inv(psi')*f;
    d = inv(psi')*ones(p,1);
    AL = (Atild + Btild*P');
    BL = (f - u0 * Btild*d);
    c = matLU(p,AL,BL);
    U = (c*P+u0*d')*psi;
    U = U';

```

```

clc,clear all

```

```

j = 3;
nc = 15;
p = 2^(j-1)*nc;
T = 84;
t = (0 :1/(p-1) :1)';
tt =0 :T/(p-1) :T;
nm = 2;
N = 3;

```

```

m = 3;
or = 0;
for alpha = 0.93 :0.01 :0.96
a = 0;
muh = 1/(71*365);
B_mh = .7*.36;
nuh = 1/3;
Nh = 56000;
Nm = m*Nh;
mum = 1/10;
B_hm = .7*.36;
%tt = 0 :T/(p-1) :T;
Sh = ones(p,1);
Ih = ones(p,1);
Rh = ones(p,1);
Sm = ones(p,1);
Im = ones(p,1);
e = 1;
eps = 1e-5;
Sh0 = 56000-216;
Ih0 = 216;
Rh0 = 0;
Sm0 = Nm;
Im0 = 0;
while e > eps
Sh_p = Sh;
Ih_p = Ih;
Rh_p = Rh;
Sm_p = Sm;
Im_p = Im;
Sh = LWM(1,Sh0,nc,j,a,T,N,mum,nuh,muh,Nm,Nh,B_mh,A_alpha(0,N,alpha),...
alpha,A_alpha(1,N,alpha),Sh,Ih,Rh,Sm,Im,t);
Ih = LWM(2,Ih0,nc,j,a,T,N,mum,nuh,muh,Nm,Nh,B_mh,A_alpha(0,N,alpha),...
alpha,A_alpha(1,N,alpha),Sh,Ih,Rh,Sm,Im,t);
Rh = LWM(3,Rh0,nc,j,a,T,N,mum,nuh,muh,Nm,Nh,B_mh,A_alpha(0,N,alpha),alpha,...
A_alpha(1,N,alpha),Sh,Ih,Rh,Sm,Im,t);
Sm = LWM(4,Sm0,nc,j,a,T,N,mum,nuh,muh,Nm,Nh,B_mh,A_alpha(0,N,alpha),alpha,A_alpha...
(1,N,alpha),Sh,Ih,Rh,Sm,Im,t);
Im = LWM(5,Im0,nc,j,a,T,N,mum,nuh,muh,Nm,Nh,B_mh,A_alpha(0,N,alpha),alpha,...
A_alpha(1,N,alpha),Sh,Ih,Rh,Sm,Im,t);
e = max ([norm(Sh-Sh_p),norm(Ih-Ih_p),norm(Rh-Rh_p),norm(Sm-Sm_p),...
norm(Im-Im_p)])
end
or = or+1;
MSH(:,or)= Sh;
MIH(:,or)= Ih;

```

```
MRH( :,or)= Rh;  
MSM( :,or)= Sm;  
MIM( :,or)= Im;  
figure (1)  
plot(tt,Ih)  
hold on  
drawnow  
end
```