REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

Département de mathématiques et informatique

Mémoire de fin d'étude

pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Présenté par

M[elle]. **BENCHERKI HAKIMA**

THEME

Sur la croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires

Soutenu le 09 /06/2014 devant le Jury

Mr. BELAÏDI Benharrat	**Président**	**Pr**	**U. MOSTAGANEM**
Mr. HAMOUDA Saâda	**Examinateur**	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM**
M[me]. AZIZ Hamani Karima	**Encadreur**	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM**

Année universitaire: 2013-2014

Remerciements

On dit souvent que le trajet est aussi important que la destination. Les cinq années de maîtrise m'ont permis de bien comprendre la signification de cette phrase toute simple. Ce parcours, en effet, ne s'est pas réalisé sans défis et sans soulever de nombreuses questions pour lesquelles les réponses nécessitent de longues heures de travail.

Je tiens à la fin de ce travail à remercier **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné la foi et de m'avoir permis d'en arriver là.

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont participé, de loin ou de près à la rèalisation de ce mémoire. En particulier notre encadreur Mme **AZIZ HAMANI Karima**, pour sa totale disposition et ses conseils précieux qui ont permis l'accomplissement de ce travail. Nous remercions aussi l'ensemble de nos professeurs pour leur enseignement.

Nous tenons aussi à exprimer nos vifs remerciements aux membres du jury Mr **BELAIDI Benharrat** et Mr **HAMOUDA Saada** qui nous ont fait l'honneur d'examiner ce travail.

Enfin, je voudrais remercier le personnel de département de Mathématiques à L'université de Mostaganem.

Dédicace

Merci Allah (mon dieu) de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire " Ya Allah "

Je dédie ce travail à mes chers parents Bencherki abd alkader et kassoul oudaa que j'aime plus que tout au monde, à mes amies bahi noureddine, à mes chers frères: bencherki fethi et bencherki Islame, à mes soeurs, farida, malika, nadia, samira, wafa, fadhila, rabiaa, dalila, amina mes amis, à toute ma Grande famille"Bencherki".

Que dieu les gardes et les protège.

A mes amies.

A tous mes professeurs.

A tous ceux qui me sont chères.

A tous ceux qui m'aiment.

A tous ceux que j'aime.

Je dédie ce travail.

et spécialement à tout musulmon.

Table des Matières

Introduction

La théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par Rolf Nevanlinna à la fin des années vingt joue un rôle trés important dans l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe.

Dans ce mémoire, on vas étudier l'ordre de croissance et l'hyper- ordre des solutions des équations différentielles linéaires de la forme

$$f^{(k)} + h_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}f^{\ (k-1)} + ... + h_0(z)e^{P_0(z)}f = 0, \tag{0.0.1}$$

où $h_{k-1}(z), ..., h_0(z)$ sont des fonctions entières et $h_0(z) \not\equiv 0$ et $P_{k-1}(z), ..., P_0(z)$ sont des polynômes. On cherche des conditions sur la croissance des coefficients de telle façon que toute solution non nulle soit d'ordre infini. Ensuite on donne des estimations de l'hyper- ordre dans certains cas.

Dans l'étude de l'équation différentielle $f''+A(z)f'+B(z)f = 0$, où $A(z)$ et $B(z) \not\equiv 0$ sont des fonctions entières, Gary G. Gundersen ([9]) a cherché des conditions sur les coefficients de telle façon que chaque solution soit d'ordre infini.

En 2004, Z. X. Chen ([4]) a étudié l'équation différentièlle linéaire

$$f'' + h_1(z)e^{P_1(z)}f' + h_0(z)e^{P_0(z)}f = 0, \tag{0.0.2}$$

où $h_1(z)$, $h_0(z)$ sont des fonctions entières avec $\sigma(h_j) < 1$ $(j = 0, 1)$ et $P_1(z)$, $P_0(z)$ sont des polynômes. Il a cherché des conditions suffisantes sur les coefficients de telle façon que toute solution soit d'ordre infini et dans certains cas, il a donné des estimations précises sur l'hyper- ordre des solutions de l'équation $(0.0.2)$.

Il est très connu que si les coefficients de (0.0.2) sont des fonctions entières alors les solutions le sont aussi. Plusieurs auteurs ([5] , [15] , [17]) cherchent des conditions suffisantes sur les coefficients de l'équation (0.0.2) qui assurent que toute solution $f \not\equiv 0$ de (0.0.2) soit d'ordre infini ;

Plusieurs auteurs ([2] , [3] , [4]) ont étudié l'équation différentielle particulière suivante

$$f'' + e^{-z} f' + Q(z) f = 0, \tag{0.0.3}$$

où $Q(z)$ est une fonction entière d'ordre fini. Toute solution de l'équation (0.0.3) est une fonction entière. De plus, si f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (0.0.3), il y a au moins une des solutions qui doit être d'ordre infini.

Ce mémoire contient deux chapitres. Dans le premier chapitre, on va citer quelques notions fondamentales de la théorie de Nevanlinna nécessaires pour notre travail. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la Croissance des solutions des équations différentielles linéaires de la forme (0.0.1).

Chapitre 1

Quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Soit f une fonction méromorphe non constante. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t,a,f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z)=a$ situées dans le disque $|z|\leq t$, chaque racine étant comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et par $n(t,\infty,f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z|\leq t$.

Notons

$$\begin{aligned} N(r,a,f) &= N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=\int_0^r\frac{[n(t,a,f)-n(0,a,f)]}{t}dt+n(0,a,f)\log r \\ & \quad (a\neq\infty), \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

$$N(r,\infty,f)=N(r,f)=\int_0^r\frac{[n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)]}{t}dt+n(0,\infty,f)\log r, \tag{1.1.2}$$

$N(r,a,f)$ est appelée fonction $a-$ points de la fonction f dans le disque $|z|\leq r$.

Elle caractérise la densité des zéros de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq r$

$$m(r, a, f) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta \quad (a \neq \infty), \tag{1.1.3}$$

$$m(r, \infty, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta, \tag{1.1.4}$$

Remarque 1.1.1: pour tout $x > 0$, on définit

$$\log^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases} \tag{1.1.5}$$

et $m(r, a, f)$ est dite fonction de proximité de la fonction f au point a. Elle exprime la déviation en moyenne de la fonction f au point a.

Définition 1.1.1: ([12]) Soit f un fonction méromorphe non constante. On appelle fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction f, la fonction notée $T(r, f)$ définie par

$$T(r, f) = N(r, f) + m(r, f), \tag{1.1.6}$$

où $0 < r < +\infty$.

Exemple 1.1.1: pour la fonction $f(z) = e^{az}$ $(a \in \mathbb{C}^*)$, on a

$$m(r, f) = \frac{r|a|}{\pi}, \ N(r, f) = 0. \tag{1.1.7}$$

D'où

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f) = \frac{|a| r}{\pi}. \tag{1.1.8}$$

1.2 Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.2.1: ([12]) *Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors pour toute nombre complexe $a \neq \infty$, on a*

$$m(r,a,f) + N(r,a,f) = T(r,f) + \varepsilon(r,a), \tag{1.2.1}$$

où $\varepsilon(r,a) = O(1)$, quand $r \longrightarrow +\infty$.

1.3 Théorème de Liouville

Théorème 1.3.1: *Toute fonction entière bornée dans $\mathbb{C}$ est constante.*

1.4 Ordre et hyper- ordre d'une fonction méromorphe

Définition 1.4.1: ([12]) Soit f une fonction méromorphe. On définit l'ordre $\sigma(f)$ de la fonction f par

$$\sigma(f) = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \sup \frac{\ln T(r,f)}{\ln r}, \tag{1.4.1}$$

et l'hyper ordre $\sigma_2(f)$ de la fonction f par

$$\sigma_2(f) = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \sup \frac{\ln \ln T(r,f)}{\ln r}. \tag{1.4.2}$$

Exemple 1.4.1: Pour la fonction $f(z) = e^z$, on a

$\sigma(e^z) = 1$ et $\sigma_2(e^z) = 0$.

Exemple 1.4.2: Pour la fonction $f(z) = e^{e^z}$, on a

$\sigma(f) = +\infty$ et $\sigma_2(f) = 1$.

Proposition 1.4.1: ([12]) *Soit f et g deux fonctions méromorphes. Alors*

1. $\sigma(f+g) \leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}, \quad \sigma(f \cdot g) \leq \max\{\sigma(f), \sigma(g)\}.$

2. Si $\sigma(f) < \sigma(g)$, alors $\sigma(f+g) = \sigma(f \cdot g) = \sigma(g)$.

Exemple 1.4.3:

Pour la fonction $f(z) = z^3 + z + 1 + \frac{e^z}{z+1}$, on a $\sigma(f) = \sigma\left(\frac{e^z}{z+1}\right) = \sigma(e^z) = 1$.

1.5 Type d'une fonction entière

Définition 1.5.1: ([12]) Soit f une fonction entière. On définit le type $\tau(f)$ de la fonction f par

$$\tau(f) = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \sup \frac{\ln M(r,f)}{r^{\sigma}}, \qquad (0 < \sigma < +\infty), \tag{1.5.1}$$

où $\sigma = \sigma(f)$ est l'ordre de f et $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

Exemple 1.5.1: Pour la fonction $f(z) = e^z$ on a $M(r, e^z) = e^r$, et $\sigma(f) = 1$

D'où

$$\tau(f) = \lim_{r \longrightarrow +\infty} \sup \frac{\ln e^r}{r} = 1.$$

1.6 Mesure linéaire et mesure logarithmique

Définition 1.6.1: ([11]) On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ par

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt, \tag{1.6.1}$$

où χ_E est la fonction caractéristique de l'ensemble E.

Définition 1.6.2: ([11]) La mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty)$ est définie par

$$Lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt. \tag{1.6.2}$$

Exemple 1.6.1: La mesure linéaire de l'ensemble $E = [1,2] \subset [0,+\infty[$ est

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\,dt = \int_1^2 dt = 1.$$

Exemple 1.6.2: La mesure logarithmique de l'ensemble $F = [e, e^4] \subset [1,+\infty[$ est

$$Lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t}dt = \int_e^{e^4} \frac{dt}{t} = 3.$$

1.7 Théorème de Phragmén-Lindelöf

Soit $\alpha > 0$.

Notons

$$S_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha} \right\}, \tag{1.7.1}$$

$$\gamma_r = \left\{ z : z = re^{i\theta},\ z \in S_\alpha \right\} \text{ et } M(r, \gamma_r, f) = \max_{z\in\gamma_r} |f(z)|. \tag{1.7.2}$$

Théorème 1.7.1: ([18]) *Soit f une fonction analytique dans le secteur S_α et continue sur ∂S_α telle que*

$$\forall z \in \partial S_\alpha : |f(z)| \leq M, \tag{1.7.3}$$

où $(M > 0)$ est une constante.

si

$$\lim_{r\longrightarrow+\infty} \sup \frac{\log\log M(r,\gamma_r,f)}{\log r} < \alpha, \tag{1.7.4}$$

alors

$$\forall z \in S_\alpha : |f(z)| \leq M. \tag{1.7.5}$$

Chapitre 2

Croissance des solutions de certaines équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

2.1 Introduction et résultats

Pour les équations différentielles linéaires du second ordre

$$f'' + B(z) f' + A(z) f = 0, \tag{2.1.1}$$

de nombreux auteurs ont etudié la croissance des solutions de (2.1.1), où $A(z) \not\equiv 0$ et $B(z)$ sont des fonctions entières. Il est bien connu que si $\sigma(B) < \sigma(A)$ ou $\sigma(A) < \sigma(B) < \frac{1}{2}$, alors toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.1.1) est de l'ordre infini. $([9, 13])$. Pour le cas où $\sigma(A) < \sigma(B)$ et $\sigma(B) > \frac{1}{2}$, plusieurs mathématiciens ont etudié le problème. En 2000, I. Laine et P.C. Wu ([17]) out prouvé le résultat suivant:

Théorème A : ([17]) *Supposons que* $\sigma(A) < \sigma(B) < \infty$, *et* $T(r, B) \sim \log M(r, B)$, *quand* $r \to +\infty$, *à l'éxitérieur d'un ensemble de mesure logarithmique finie. Alors toute solution non- constante de* (2.1.1) *est d'ordre infini.*

Donc une question naturelle est: quelle condition sur $A(z)$, $B(z)$ lorsque $\sigma(A) = \sigma(B)$ garantira que toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.1.1) est d'ordre infini? pour l'équation différentielle linéaire du second ordre,

$$f'' + h_1(z)\, e^{P(z)} f' + h_0(z)\, e^{Q(z)} f = 0, \qquad (2.1.2)$$

en 1996, K.H. Kwon a étudié la croissance des solutions de (2.1.2) dans le cas où $\deg P = \deg Q$ et a obtenu le résultat suivant:

Théorème B : ([15]) *Soient* $P(z) = a_n z^n + \ldots\ldots$, $Q(z) = b_n z^n + \ldots\ldots$, $(a_n b_n \neq 0)$ *des polynômes non constants tels que* $\arg a_n \neq \arg b_n$ *ou* $a_n = c b_n$ $(0 < c < 1)$, $h_1(z)$ *et* $h_0(z) \neq 0$ *des fonctions entières avec* $\sigma(h_j) < n$ $(j = 0, 1)$. *Alors toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'équation* (2.1.2) *est d'ordre infini avec* $\sigma_2(f) \geq n$.

En 2001, Z.-X. Chen a étudié le problème et a prouvé le théorème suivant:

Théorème C : ([2]) *Soient* $A_j(z) \not\equiv 0$ $(j = 0, 1)$ *des fonctions entières avec* $\sigma(A_j) < 1$, a, b *des nombres complexes constants tels que* $ab \neq 0$ *et* $a = cb$ $(c > 1)$. *Alors toute solution* $(f \not\equiv 0)$ *de l'equation*

$$f'' + A_1(z)\, e^{az} f' + A_0(z)\, e^{bz} f = 0 \qquad (2.1.3)$$

est d'ordre infini.

En combinant les théorèmes B et C, on obtient que si $ab \neq 0$ et $a \neq b$, alors toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.1.3) est d'ordre infini. Pouvons nous obtenir le même résultat pour des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur ayant la même forme que (2.1.3)?. Le corollaire 2.1.3 ci- dessous nous donne une réponse positive.
Pour les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)\; f^{(k-1)} + \ldots + A_0(z)\; f = 0, \qquad (2.1.4)$$

Z.-X. Chen a obtenu les théorèmes suivants:

Théorème D : ([6]) *Soient* $A_j(z) \not\equiv 0$ $(j = 0, ..., k-1)$ *des fonctions entières telles que*

$$\max\{\sigma(A_j), \ (j = 0, ..., k-1)\} < \sigma(A_0) < +\infty.$$

Alors toute solution $f \not\equiv 0$ *de l'equation* (2.1.4) *vérifie* $\sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.

Théorème E : ([3]) *Supposons que* a_j $(j = 0, ..., k-1)$ *sont des nombres complexes, qu'il existe* a_s *et* a_l *tels que* $s < l$, $a_s = d_s e^{i\varphi}$, $a_l = -d_l e^{i\varphi}$, $d_l > 0$, *et pour* $j \neq s$, l, $a_j = d_j e^{i\varphi}$ $(d_j \geq 0)$ *ou* $a_j = -d_j e^{i\varphi}$, $\max\{d_j \backslash\ j \neq s,\ l\} = d < \min\{d_s,\ d_l\}$. *Si* $A_j = h_j(z) e^{a_j z}$, *où* h_j *des polynômes,* $h_s h_l \not\equiv 0$, *alors toute solution transcendante* f *de l'equation* (2.1.4) *vérifie* $\sigma(f) = +\infty$ *et* $\sigma_2(f) = 1$.

Théorème F : ([4]) *Soient* $h_j(z)$ $(j = 0, ..., k-1)$ *des fonctions entières telles que* $\sigma(h_j) < 1$ *et* $A_j(z) = h_j(z) e^{a_j z}$, *où* a_j $(j = 0, ..., k-1)$ *sont des nombres complexes. Supposons qu' il existe* a_s *tel que* $h_s \not\equiv 0$, *et pour* $j \neq s$, *si* $A_j \not\equiv 0$, $a_j = c_j a_s$ $(0 < c_j < 1)$; *si* $A_j \equiv 0$, *on définit* $c_j = 0$. *Alors toute solution transcendante* f *de l'equation* (2.1.4) *est d'ordre infini. De plus, si* $\max\{c_1, ..., c_{s-1}\} < c_0$, *alors toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'equation* (2.1.4) *est d'ordre infini.*

Le but de l'etude de Jin Tu et Cai- Feng Yi [19] est de déterminer la croissance des solutions de (2.1.4) quand les coefficients de (2.1.4) ont le même ordre. Il ont démontré les résultats suivants:

Théorème 2.1.1: ([19]) *Soient* $A_j(z)$ $(j = 0, ..., k-1)$ *des fonctions entières vérifiant* $\sigma(A_0) = \sigma$, $\tau(A_0) = \tau$, $0 < \sigma < +\infty, 0 < \tau < +\infty$, *et soient* $\sigma(A_j) \leq \sigma$, $\tau(A_j) < \tau$ *si* $\sigma(A_j) = \sigma$ $(j = 0, ..., k-1)$. *Alors toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'equation* (2.1.4) *vérifie* $\sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.

Corollaire 2.1.1: ([19]) *Soient* $A_j(z)$ $(j=0,...,k-1)$ *des fonctions entières vérifiant* $\sigma(A_j)=\sigma$ *et* $\max\{\tau(A_j),(j=1,...,k-1)\}<\tau(A_0)$, *où* $0<\sigma<+\infty$, $0<\tau(A_0)<+\infty$. *Alors toute solution* $f\not\equiv 0$ *de l'equation* (2.1.4) *vérifie* $\sigma_2(f)=\sigma$.

Corollaire 2.1.2: ([19]) *Soient* $h_j(z)$ $(j=0,...,k-1)$ *des fonctions entières telles que* $\sigma(h_j)<n$, *et* $A_j(z)=h_j(z)e^{P_j(z)}$, *où* $P(z)=a_{jn}z^n+...+a_{j0}$ $(j=0,...,k-1)$ *des polynômes de degré* $n\geq 1$ *et* a_{jn} $(j=0,...,k-1)$ *sont des nombres complexes. Si* $|a_{0n}|>\max\{|a_{jn}|,j=1,2,...,k-1\}$ *et* $h_0(z)\not\equiv 0$, *alors toute solution* $f\not\equiv 0$ *de l'equation* (2.1.4) *vérifie* $\sigma_2(f)=n$.

Remarqe 2.1.1 : Le théoréme 2.1.1 est une extension du théorème D. Par exemple, lorsque $k=2$, $f_1(z)=e^{e^z}$ et $f_2(z)=e^ze^{e^z}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'equation $f''-(1+2e^z)f'+e^{2z}f=0$, où $\sigma(1+2e^z)=\sigma(e^{2z})=1$, $\tau(e^{2z})=2>\tau(1+2e^z)=1$.

Théorème 2.1.2 : ([19]) *Soient* $h_j(z)$ $(j=0,...,k-1)$ *des fonctions entières telles que* $\sigma(h_j)<n$, *et* $A_j(z)=h_j(z)e^{P_j(z)}$, *où* $P(z)=a_{j\,n}z^n+...+a_{j\,0}$ $(j=0,...,k-1)$ *sont des polynômes de degré* $n\geq 1$. *Si* a_{jn} $(j=0,...,k-1)$ *sont des nombres complexes distincts et* $h_0(z)\not\equiv 0$. *Alors toute solution* $f\not\equiv 0$ *de l'equation* (2.1.4) *vérifie* $\sigma(f)=+\infty$.

Corollaire 2.1.3 : ([19]) *Soient* $h_j(z)$ $(j=0,...,k-1)$ *des fonctions entières pas toute nulles telles que* $\sigma(h_j)<1$, *et* $A_j(z)=h_j(z)e^{a_j\,z}$. *Si* a_j $(j=0,...,k-1)$ *sont des nombres complexes distincts et* $h_0(z)\not\equiv 0$. *Alors toute solution* $f\not\equiv 0$ *de l'equation* (2.1.4) *vérifie* $\sigma(f)=+\infty$.

Remarqe 2.1.2 : L'hypothèse que a_j $(j=0,...,k-1)$ sont des nombres complexes distincts est nécessaire. Par exemple, l'equation $f'''+2e^{3z}f''+ze^{2z}f'-e^{2z}f=0$ admet une solution polynômiale $f(z)=z$, où $a_{11}=a_{01}=2$.

Théorème 2.1.3 : ([19]) *Soient* $h_j(z)$ $(j=0,...,k-1)$ *des fonctions entières* *telles que* $\sigma(h_j) < n$, *et* $A_j(z) = h_j(z) e^{P_j(z)}$, *où* $P(z) = a_{j\,n} z^n + ... + a_{j\,0}$ $(j = 0, ..., k-1)$ *sont des polynômes de degré* $n \geq 1$, a_{jn} *sont des nombres complexes tels que* $a_{0n} = |a_{0n}| e^{i\theta_0}, a_{sn} = |a_{sn}| e^{i\theta_s}$, $a_{0n} a_{sn} \neq 0$ $(0 < s < k-1)$, $\theta_0, \theta_s \in [0,\ 2\pi)$, $\theta_0 \neq \theta_s, h_0 h_s \not\equiv 0$; *pour* $j \neq 0,\ s$, a_{jn} *vérifie* $a_{jn} = d_j a_{0n}$ $(d_j < 1)$ *ou* $\arg a_{jn} = \theta_s$. *Alors toute solution* $f \not\equiv 0$ *de l'equation* (2.1.4) *vérifie* $\sigma_2(f) = n$.

Remarqe 2.1.3 : Le théorème 2.1.3 est une extension du théorème B, puisque le théorème B est justement le cas où $k = 2$, $\arg a_{1n} \neq \arg a_{0n}$ ou $a_{1n} = d_1 a_{0n}$ $(0 < d_1 < 1)$.

Du théorème 2.1.3, nous savons que toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation $f^{(4)} + e^{5iz} f^{(3)} + 2e^{-4z} f'' + ze^z f' + e^{3z} f = 0$ vérifie $\sigma_2(f) = 1$. Dans cet exemple, nous avons $\sigma(A_j) = 1$ $(j = 0, 1, 2, 3)$, $\tau(A_0) = 3 < \max\{\tau(A_j),\ j = 1, 2, 3\} = 5$. D'où le théorème 2.1.3 est un complément du théorème 2.1.1.

Théorème 2.1.4 : ([19]) *Soient* $h_j(z)$ $(j = 0, ..., k-1)$ *des fonctions entières telles que* $\sigma(h_j) < n$, *et* $A_j(z) = h_j(z) e^{P_j(z)}$, *où* $P(z) = a_{j\,n} z^n + ... + a_{j\,0}$ $(j = 0, ..., k-1)$ *sont des polynômes de degré* $n \geq 1$. *Supposons qu'il existe des nombres complexes non nuls* a_{sn} *et* a_{ln} *tels que* $0 < s < l < k-1$, $a_{sn} = |a_{sn}| e^{i\theta_s}$, $a_{ln} = |a_{ln}| e^{i\theta_l}$, $\theta_s, \theta_l \in [0,\ 2\pi)$, $\theta_s \neq \theta_l$, $h_s h_l \not\equiv 0$; *et pour tout* $j \neq s,\ l$, a_{jn} *vérifie* $a_{jn} = d_j a_{sn}$ $(0 < d_j < 1)$ *ou* $a_{jn} = d_j a_{ln}$ $(0 < d_j < 1)$. *Alors toute solution transcendante* f *de l'equation* (2.1.4) *vérifie* $\sigma(f) = +\infty$. *De plus, si* $f(z)$ *est une solution polynômiale de l'equation* (2.1.4). *Alors* $\deg f \leq s-1$. *Si* $s = 1$, *alors toute les solution non-constante* f *de* (2.1.4) *vérifie* $\sigma(f) = +\infty$.

Remarqe 2.1.4 : Le théorème 2.1.4 est une extension du théorème E, puisque le théorème E est justement le cas où $n = 1$, $\theta_s = 0$, $\theta_l = \pi$, $0 < s < l < k-1$. Le théorème 2.1.4 est aussi une extension du théorème F, puisque le théorème F est justement le cas où $n = 1$, $s = l$, $a_{s1} = a_{l1}$, $\theta_s = \theta_l = 0$.

Dans le théorème 2.1.4, nous pouvons seulement obtenir que toute solution transcendante de (2.1.4) vérifie $\sigma(f) = +\infty$, mais le résultat $\sigma_2(f) = n$ réste ouvert. Dans le théorème 2.1.4, l'équation (2.1.4) peut avoir des solutions polynômiales. Par exemple, $f^{(5)} + 2e^{3iz}f^{(4)} + e^{5iz}f^{(3)} + 3e^{4z}f'' + 2ze^{z}f' - 2e^{z}f = 0$ admet une solution $f(z) = 2z$, où $s = 2$, $l = 3$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$.

2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.2.1: ([8]) *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante et soient $\alpha > 1$ et $\varepsilon > 0$ des constantes réelles données. Alors*

(i) *Il existe un ensemble $E_1 \subset (0, +\infty]$ de mesure logarithmique finie et il existe une constante $B > 0$ qui dépend uniquement de α telle que pour tout z verifiant $|z| = r \notin E_1$, on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq B\left[T(\alpha r,\ f)\, r^{\varepsilon} \log T(\alpha r,\ f)\right]^{k} \quad (k \in \mathbb{N})\,; \tag{2.2.1}$$

(ii) *Il existe un ensemble $E_2 \subset (0,\ 2\pi]$ de mesure lineaire nulle et il existe une constante $C > 0$ qui dépend uniquement de α. Pour tout $\theta \in [0,\ 2\pi)\setminus E_2$ il existe une constante $R_0 = R_0(\theta) > 1$ tel que pour tout z verifiant $\arg z = \theta$ et $|z| = r > R_0$, on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq C\left[T(\alpha r,\ f) \log T(\alpha r,\ f)\right]^{k} \quad (k \in \mathbb{N})\,. \tag{2.2.2}$$

Lemme 2.2.2: ([5]) *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre $\sigma(f) = \alpha < +\infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe une ensemble $E_3 \subset [1, +\infty)$ de mesure lineaire finie et de mesure logarithmique finie tel que pour tout z verifiant $|z| = r \notin [0,\ 1] \cup E_3$, on a*

$$\exp\left\{-r^{\alpha+\varepsilon}\right\} \leq |f(z)| \leq \exp\left\{r^{\alpha+\varepsilon}\right\}. \tag{2.2.3}$$

Lemme 2.2.3: ([19]) *Soit* $A_j(z)$ $(j = 0, ..., k-1)$ *une fonction entière avec* $\sigma(A_j) \leq \sigma < +\infty$. *Si* f *est une solution de l'équation* (2.1.4) *alors* $\sigma_2(f) \leq \sigma$.

Lemme 2.2.4: ([8]) *Soit* $f(z)$ *une fonction méromorphe transcendante avec* $\sigma(f) = \sigma < +\infty$, $\Gamma = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), ..., (k_m, j_m)\}$ *un ensemble fini de paires d'entiers distincts vérifiant* $k_i \geq j_i \geq 0$, *pour* $i = 1, ..., m$. *Soit* $\varepsilon > 0$ *une constante donnée, alors il existe un ensemble* $E_4 \subset [0, 2\pi)$ *ayant une mesure lineaire nulle, tel que si* $\psi \in [0, 2\pi) \setminus E_4$, *alors il existe une constante* $R_1 = R_1(\psi) > 1$ *telle que pour tout* z *verifiant* $\arg z = \psi$ *et* $|z| = r > R_1$ *et pour tout* $(k, j) \in \Gamma$, *on a*

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}. \tag{2.2.4}$$

Lemme 2.2.5: ([1]) *On suppose que* $P(z) = (\alpha + i\beta) z^n + ...$, $(\alpha,\ \beta$ *sont deux nombres réels,* $|\alpha| + |\beta| \neq 0)$ *est un polynôme de degré* $n \geq 1$, *et* $A(z) \not\equiv 0$ *est une fonction entière avec* $\sigma(A) < n$. *Posons* $g(z) = A(z) e^{P(z)}$, $z = re^{i\theta}$, $\delta(p,\ \theta) = \alpha \cos n\theta - \beta \sin n\theta$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ensemble* $H_1 \subset [0, 2\pi)$ *de mesure lineaire nulle, tel que pour tout* $\theta \in [0, 2\pi) \setminus (H_1 \cup H)$, *il existe* $R > 0$ *tel que pour* $|z| = r > R$, *on a:*

(i) *Si* $\delta(p, \theta) > 0$,

$$\left| A(z) e^{P\left(re^{i\theta}\right)} \right| \geq \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta(p,\theta)\, r^n\}; \tag{2.2.5}$$

(ii) *Si* $\delta(p, \theta) < 0$,

$$\left| A(z) e^{P\left(re^{i\theta}\right)} \right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\,\delta(p,\theta)\, r^n\}, \tag{2.2.6}$$

où $H = \{\theta \in [0, 2\pi); \delta(p, \theta) = 0\}$.

Lemme 2.2.6: ([10]) *Soit* $f(z)$ *une fonction entière, et supposons que* $\left|f^{(k)}(z)\right|$ *est non bornée sur un certain rayon* $\arg z = \theta$. *Alors il existe une suite infinie de points* $z_m = r_m e^{i\theta}$ $(m = 1, 2, ...)$, *où* $r_m \to \infty$, *telle que* $f^{(k)}(z_m) \to \infty$ *et*

$$\left|\frac{f^{(j)}\left(z_m\right)}{f^{(k)}\left(z_m\right)}\right| \leq \left|z_m\right|^{k-j}\left(1+o\left(1\right)\right) \quad \left(j=0,...,k-1\right). \tag{2.2.7}$$

Lemme 2.2.7: ([7]) *Soient* $k \geq 1,\ P_1,\ P_2,...,\ P_k$ *des polynômes non constants de degrès respectifs* $d_1,\ d_2,...,d_k,$ *tels que* $\deg\left(P_i - P_j\right) = \max\left\{d_i,\ d_j\right\}$ *pour* $i \neq j$. *Posons* $A\left(z\right) = \sum_{j=1}^{k} B_j\left(z\right) e^{p_j\,(z)}$, *où* $B_j\left(z\right) \not\equiv 0$ *sont des fonctions entières avec* $\sigma\left(B_j\right) < d_j$. *Alors* $\sigma\left(A\right) = \max_{1\leq j\leq n}\left\{d_j\right\}.$

Lemme 2.2.8: ([19]) *Soit* $f\left(z\right)$ *est une fonction entière avec* $\sigma\left(f\right) = \sigma\ \left(0 < \sigma < +\infty\right)$ *et* $\tau\left(f\right) = \tau\ \left(0 < \tau \leq +\infty\right)$. *Alors pour tout* $\beta < \tau$ *donné, il existe un ensemble* $E_5 \subset [1, +\infty)$ *de mesure logarithmique infinie tel que pour tout* $r \in E_5$, *on a*

$$\log M\left(r,\ f\right) > \beta r^{\sigma}, \tag{2.2.8}$$

où $M\left(r, f\right) = \max_{|z|=r}\left|f\left(z\right)\right|.$

Preuve

Par définition, il existe une suite croissante $\{r_m\} \longrightarrow +\infty$ vérifiant $\left(1+\frac{1}{m}\right) r_m < r_{m+1}$ et

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{\log M\left(r_m,\ f\right)}{r_m^{\sigma}} = \tau. \tag{2.2.9}$$

Alors il existe un entièr positif m_0 tel que pour tout $m \geq m_0$ et pour tout ε $\left(0 < \varepsilon < \tau - \beta\right)$ donné, on a

$$\log M\left(r_m,\ f\right) > \left(\tau - \varepsilon\right) r_m^{\sigma}. \tag{2.2.10}$$

Pour tout $\beta < \tau$ donné, il existe un entièr positif m_1 tel que pour tout $m \geq m_1$, on a

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)^{\sigma} > \frac{\beta}{\tau - \varepsilon}. \tag{2.2.11}$$

De (2.2.10) et (2.2.11), pour tout $m \geq m_2 = \max\{m_0, m_1\}$ et pour tout $r \in \left[r_m, \left(1+\frac{1}{m}\right) r_m\right]$, on a

$$\log M(r,\ f) \geq \log M(r_m,\ f) > (\tau - \varepsilon) r_m^{\sigma} \geq (\tau - \varepsilon) \left(\frac{m}{m+1} r\right)^{\sigma} > \beta r^{\sigma}. \quad (2.2.12)$$

Posons $E = \bigcup\limits_{m=m_2}^{+\infty} \left[r_m,\ \ \left(1+\frac{1}{m}\right) r_m\right]$, alors

$$m(E) = \sum_{m=m_2}^{+\infty} \frac{r_m}{m} = +\infty.$$

De plus,

$$\lim_{m\to+\infty} \left[\frac{r_{m+1}}{m+1} / \frac{r_m}{m}\right] = \lim_{m\to+\infty} \frac{r_{m+1}}{r_m} \cdot \frac{m}{m+1} > \lim_{m\to+\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right) \cdot \frac{m}{m+1} = 1.$$

et

$$lm(E) = \sum_{m=m_2}^{+\infty} \int_{r_m}^{\left(1+\frac{1}{m}\right) r_m} \frac{dt}{t} = \sum_{m=m_2}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{m}\right) = \infty.$$

2.3 Preuve du Théorème 2.1.1

Supposons que $f(z) \not\equiv 0$ est une solution de (2.1.4). Alors de (2.1.4), on peut ecrire:

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} + A_{k-1}(z) \frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)} + ... + A_0(z) = 0, \quad (2.3.1)$$

Ce qui nous donne

$$A_0(z) = -\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} - A_{k-1}(z) \frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)} - ..... - A_1(z) \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad (2.3.2)$$

D'où

$$|A_0(z)| \leq \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| + |A_{k-1}(z)| \left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| + ... + |A_1(z)| \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|, \qquad (2.3.3)$$

D'après le lemme 2.2.1 (i), il existe un ensemble $E_1 \subset [0, +\infty)$ de mesure logarithme finie et $B > 0$ tels que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_1$ et r suffisamment grand, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f\ \ (z)}\right| \leq B \cdot (T(2r.f))^{2k} \qquad (j = 1,....,k)\,. \qquad (2.3.4)$$

Si $\sigma(A_j) < \sigma$ $(j \neq 0)$, alors par le lemme 2.2.2, il existe un ensemble $E_3 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout z vérifiant $|\ z\ | = r \notin E_3$, on a

$$|A_j(z)| \leq \exp\{r^{\alpha_1}\} \qquad (\ j \neq 0)\,, \qquad (2.3.5)$$

où $0 < \alpha_1 < \sigma$.

Si $\sigma(A_j) = \sigma$, $\tau(A_j) < \tau$, on choisit α_2, α_3 vérifiant $\max\{\tau(A_j), j \neq 0\} < \alpha_2 < \alpha_3 < \tau$ tels que pour r suffisamment grand, on a

$$|A_j(z)| \leq \exp\{\alpha_2 r^{\sigma}\} \qquad (\ j \neq 0)\,. \qquad (2.3.6)$$

Par le lemme 2.2.8, il existe un ensemble $E_5 \subset [1, +\infty)$, de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E_5$, on a

$$M(r, A_0) > \exp\{\alpha_3 r^{\sigma}\}\,. \qquad (2.3.7)$$

De $(2.3.3) - (2.3.7)$, pour tout z vérifiant $|A_0(z)| = M(r, A_0)$, et pour $|z| = r \in E_5 \setminus (E_1 \cup E_3)$ suffisamment grand, on a

$$\exp\{\alpha_3 r^{\sigma}\} \leq kB \exp\{\alpha_2 r^{\sigma}\} \cdot (T(2r.f))^{2k}\,. \qquad (2.3.8)$$

D'où

$$\exp\{(\alpha_3 - \alpha_2) r^{\sigma}\} \leq kB \cdot (T(2r, f))^{2k}\,. \qquad (2.3.9)$$

Par (2.3.9), nous avons $\sigma_2(f) \geq \sigma$ et par lemme 2.2.3, on a $\sigma_2(f) \leq \sigma$. Donc $\sigma_2(f) = \sigma = \sigma(A_0)$.

2.4 Preuve du Théorème 2.1.2

Supposons que $f(z)$ est une solution transcendante de l'équation (2.1.4). Nous montrons que $\sigma(f) = +\infty$.

Supposons que $\sigma(f) = \sigma < +\infty$. D'après le lemme 2.2.4, il existe un ensemble $E_4 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linèaire nulle, tel que si $\theta \in [0,2\pi) \setminus E_4$, il existe une constante $R_1 = R_1(\theta) > 1$, telle que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$ et $|z| = r > R_1$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \leq |z|^{k\sigma}. \qquad (k \geq j > i \geq 0). \tag{2.4.1}$$

Posons $a_{jn} = |a_{jn}| e^{i\varphi_j}$, et $E_6 = \{\theta \in [0,2\pi) : \delta(p_j, \theta) = |a_{jn}| \cos(\varphi_j + n\theta) = 0, j = 0,1,\ldots,k-1\} \cup \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(p_j - p_i, \theta) = 0, 0 \leq i \leq j \leq k-1\}$. Alors $m(E_6) = 0$.

Posons $A_j(z) = h_j(z) e^{p_j(z)}$ $(j = 0,1,\ldots,k-1)$. Par le lemme 2.2.5, il existe un ensemble $H_j \subset [0,2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0,2\pi) \setminus H_j$, pour r suffisamment grand, on a (2.2.5) et (2.2.6).

Posons $E_7 = \bigcup_{j=0}^{k-1} H_j$, alors E_7 est aussi un ensemble de mesure linéaire nulle.

Pour $\theta \in [0,2\pi) \setminus (E_4 \cup E_6 \cup E_7)$, on a

$$\delta(p_j, \theta) \neq 0, \quad \delta(p_i, \theta) \neq \delta(p_j, \theta) \qquad (0 \leq i < j \leq k-1)$$

Comme a_{jn} sont des nombres complexes distincts, il 'existe un seul $\delta \in \{0,\ldots,$ $k-1\}$ tel que

$$\delta(p_s, \theta) = \max\{\delta(p_j, \theta) : j = 0,\ldots,k-1\}$$

Pour $\theta \in [0,2\pi) \setminus (E_4 \cup E_6 \cup E_7)$. Posons $\delta = \delta(p_s, \theta)$. $\delta_1 = \max\{\delta(p_j, \theta) : j \neq s\}$, alors $\delta_1 < \delta$.

Nous divisons la preuve en deux cas :

(**i**) $\delta > 0$;

(**ii**) $\delta < 0$.

cas (**i**). $\delta > 0$. Par le lemme 2.2.5, pour tout $\varepsilon_1 \left(0 < 3\varepsilon_1 < \frac{\delta-\delta_1}{\delta_1}\right)$ donné, pour r suffisamment grand, on obtient

$$\left|A_s\left(re^{i\theta}\right)\right| \geq \exp\left\{(1-\varepsilon_1)\,\delta r^n\right\} \tag{2.4.2}$$

et

$$\left|A_j\left(re^{i\,\theta}\right)\right| \leq \exp\left\{(1-\varepsilon_1)\,\delta_1 r^n\right\} \qquad (j \neq s)\,. \tag{2.4.3}$$

Maintenant nous prouvons que $\left|f^{(s)}\left(re^{i\theta}\right)\right|$ est bornée sur tout rayon $\arg z = \theta$. Si $\left|f^{(s)}\left(re^{i\theta}\right)\right|$ n'est pas bornée sur le rayon $\arg z = \theta$, alors d'après le lemme 2.2.6, il existe une suite infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}\,(m = 1,2,...)$ telle que $r_m \longrightarrow +\infty$, $f^{(s)}(z_m) \longrightarrow \infty$ et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \leq |z_m|^{s-j}\,(1+o(1)) \qquad (j = 0,...,s-1)\,. \tag{2.4.4}$$

En substituant (2.4.1)-(2.4.4) dans (2.1.4), on obtient

$$\begin{aligned}
\exp\left\{(1-\varepsilon_1)\,\delta r_m^n\right\} &\leq |A_s(z_m)| \\
&\leq \frac{f^{(k)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)} + ... + |A_{s+1}(z_m)|\left|\frac{f^{(s+1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \\
&\quad + |A_{s\,-1}(z_m)|\left|\frac{f^{(s-1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + ... + |A_0(z_m)|\left|\frac{f(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \\
&\leq k\exp\left\{(1+\varepsilon_1)\,\delta_1 r_m^n\right\}|z_m|^d\,,
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

où $d > 0$ est une constante.

De (2.4.5), on obtient

$$\exp\left\{\frac{1}{3}(\delta-\delta_1)\,r_m^n\right\} \leq r_m^n. \tag{2.4.6}$$

Ce qui mène à une contradiction quand $r_m \to +\infty$. Donc $\left|f^{(s)}\left(re^{i\theta}\right)\right|$ est bornée sur tout rayon $\arg z = \theta$, où $\theta \in [0,2\pi) \setminus (E_4 \cup E_6 \cup E_7)$, c'est à dire, il existe $M > 0$

tel que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$, on a

$$\left|f^{(s)}\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq M. \tag{2.4.7}$$

En intégrant le long de la courbe $C = \{u : \arg u = \theta,\ 0 \leq |u| \leq |z|\}$ on a:

$$f^{(s-1)}(z) = f^{(s-1)}(0) + \int_0^z f^{(s)}(u)\, du. \tag{2.4.8}$$

En utilisant (2.4.7) et (2.4.8), on obtient que $\left|f^{(s-1)}(z)\right| \leq M_1 |z|$ (M_1 une constante). Par induction, on obtient que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$,

$$|f(z)| \leq M' |z|^k, \tag{2.4.9}$$

où $M' > 0$ est une constante.

cas (ii). $\delta < 0$. De l'équation (2.1.4), on peut ecrire

$$-1 = A_{k-1}(z) \frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(k)}(z)} + ... + A_j(z) \frac{f^{(j)}(z)}{f^{(k)}(z)} + ... + A_0(z) \frac{f(z)}{f^{(k)}(z)}. \tag{2.4.10}$$

Maintenant nous montrons que $\left|f^{(k)}\left(re^{i\theta}\right)\right|$ est borneé sur le rayon $\arg z = \theta$. Si $\left|f^{(k)}\left(re^{i\theta}\right)\right|$ n'est pas borneé sur on rayon $\arg z = \theta$. D'après le lemme 2.2.6, il existe une suite infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ ($m = 1, 2,...$) telle que $r_m \longrightarrow +\infty$, $f^{(k)}(z_m) \longrightarrow \infty$ et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(k)}(z)}\right| \leq |z_m|^{k-j}(1 + o(1)) \qquad (j = 0,..., k-1) \tag{2.4.11}$$

Par le lemme 2.2.5, pour tout constante donnèe ε_2 $\left(0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}\right)$, on a

$$|A_j(z_m)| \leq \exp\{(1-\varepsilon_2)\ \delta r_m^n\} \qquad (j = 0, 1,..., k-1). \tag{2.4.12}$$

De (2.4.11) et (2.4.12), pour r_m suffisamment grand, on a

$$\left|A_j(z_m)\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right| \leq \exp\left\{(1-\varepsilon_2)\,\delta r_m^n\right\} r_m^{k-j}(1+0(1)) \longrightarrow 0 \ \ (j=0,...,k-1). \tag{2.4.13}$$

En substituant (2.4.13) dans (2.4.10), on obtient

$$1 \leq 0, \tag{2.4.14}$$

Ce qui mène à une contradiction. Donc $\left|f^{(k)}\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq M$ pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$. En utilisant le même raisonnement ci- dessus, on obtient

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq M'' \left|z\right|^k, \tag{2.4.15}$$

pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$. En combinant $(2.4.11), (2.4.15)$ et le fait que $E_4 \cup E_6 \cup E_7$ de mesure linéaire nulle, D'après le théorème de phragmèn - lindelof, on obtient que $f(z)$ est un polynôme. Ce qui contradit notre hypothèse. Donc $\sigma(f\ ) = +\infty$.
Dans le suite, nous montrons que tout polynôme non constant ne peut pas être une solution de $(2.1.4)$.
Si $f(z)$ est une polynôme, alors d'après le lemme 2.2.7 on a

$$\sigma\left(f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + ... + A_0 f\right) = n.$$

Par une simple considération de l'ordre, on obtient une contradiction. Si $f(z)$ est une solution constante de (2.1.4), alors $f \equiv 0$. Ainsi toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.1.4) satisfait $\sigma(f) = +\infty$.

2.5 Preuve du Théorème 2.1.3

Supposons que $f(z) \not\equiv 0$ est une solution de (2.1.4). Alors de $(2.1.4)$, on peut ecrire

$$-A_0(z) = \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} + ... + A_j(z)\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} + ... + A_s(z)\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)} + ... + A_1(z)\frac{f'(z)}{f(z)}, \tag{2.5.1}$$

Supposons que $a_{j_1 n}$, ... ,$a_{j_m n}$ $(j_\alpha \in \{1,..., s-1, s+1,..., k-1\})$ vérifient $a_{j_\alpha n} = d_{j_\alpha} a_{0n}$ $(\alpha = 1,..., m)$ et $\arg a_{jn} = \theta_s$ pour $j \in \{1,..., s-1, s+1,..., k-1\} \setminus \{ j_1, ..., j_m\}$. Choisissons la constante c telle que $\max\{d_{j_1},..., d_{j_m}\} < c < 1$.

Nous divisons la preuve en deux cas:

(**a**) $c < 0$,

(**b**) $0 \leq c < 1$.

cas (a) . $c < 0$. De [18, $pp.253-255$], il existe des constantes θ_1, θ_2 , α, R_2 vérifiant $\theta_1, \theta_2 \in [0,2\pi)$, $\theta_1 < \theta_2$, $\alpha > 0$, $R_2 > 0$ tels que pour tout z vérifiant $|z| = r > R_2$ et $\arg z = \theta \in (\theta_1,\theta_2)$, nous avons

$$\delta(P_0,\theta) = |a_{0n}| \cos(\theta_0 + n\theta) > \alpha, \tag{2.5.2}$$

$$\delta(P_s,\theta) = |a_{sn}| \cos(\theta_s + n\theta) < 0 \tag{2.5.3}$$

et

$$\delta(P,\theta) < 0 \qquad (j \neq 0). \tag{2.5.4}$$

Par le lemme 2.2.5, pour toute constante donnèe ε_3 $\left(0 < \varepsilon_3 < \frac{1}{2}\right)$ et pour r suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned} \left|A_0\left(re^{i\theta}\right)\right| &\geq \exp\{(1-\varepsilon_3)\alpha r^n\}; & (2.5.5)\\ \left|A_j\left(re^{i\theta}\right)\right| &\leq \exp\{(1-\varepsilon_3)\delta(P_j,\theta) r^n\} < M \qquad (j \neq 0). & (2.5.6)\end{aligned}$$

Par le lemme 2.2.1 (**ii**), il existe un ensemble $E_2 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linèaire nulle et des constants $B > 0$, $R_3 > 1$ tels que pour tout z vérifiant $\arg z = \theta \in (\theta_1, \theta_2) \setminus E_2$ et $|z| = r > R_3$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right| \leq B\left(T(2r,f)\right)^{2k} \qquad (j = 1,...,k). \tag{2.5.7}$$

En substituant (2.5.5) – (2.5.7) dans (2.5.1), nous obtenons pour r suffisamment grand,

$$\exp\left\{(1-\varepsilon_3)\,\alpha r^n\right\} \leq \left|A_0\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq kMB\cdot\left(T\left(2r,f\right)\right)^{2k}. \qquad (2.5.8)$$

Par le (2.5.8), nous obtenons que $\sigma_2(f\ ) \geq n$.

D'autre part, par le lemme 2.2.3, on a $\sigma_2(f\ ) \leq n$, Donc $\sigma_2(f\ ) = n$.

cas (b). $0 \leq c < 1$. De [18, *pp*.253 − 255], il existe des constantes θ_1, θ_2 , α, R_2 vérifiant $\theta_1,\ \theta_2\ \in [0,\ 2\pi)$, $\theta_1 < \theta_2$, $\alpha > 0$, $R_2 > 0$ tels que pour tout z vérifiant $|z| = r > R_2$ et $\arg z = \theta \in (\theta_1,\ \theta_2\ )$, on a

$$\begin{aligned} \delta\left(P_0,\theta\right) &= |a_{0n}|\cos\left(\theta_0+n\theta\right) > \alpha, & (2.5.9)\\ \delta\left(P_s,\theta\right) &= |a_{sn}|\cos\left(\theta_s+n\theta\right) < 0. & (2.5.10)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \delta\left(P_0-ca_{0n}z^n,\theta\right) &> (1-c)\,\alpha, & (2.5.11)\\ \delta\left(-ca_{0n}z^n,\theta\right) &\leq 0 & (2.5.12)\end{aligned}$$

et

$$\delta\left(P_j-ca_{0n}z^n,\theta\right) < 0 \qquad (j\neq 0). \qquad (2.5.13)$$

Par le lemme 2.2.5, et le lemme 2.2.2, pour toute constante donnée ε_3 $\left(0 < \varepsilon_3 < \frac{1}{2}\right)$ et pour r suffisamment grand, on a

$$\left|A_0e^{-ca_{0n}z^n}\right| = \left|h_0e^{p_0-ca_{0n}z^n}\right| \geq \exp\left\{(1-\varepsilon_3)\,(1-c)\,\alpha r^n\right\} \qquad (2.5.14)$$

et

$$\left|A_je^{-ca_{0n}z^n}\right| = \left|h_je^{p_j-ca_{0n}\ z\ ^n}\right| \leq \exp\left\{0\left(1\right)r^n\right\} \qquad (j\neq 0). \qquad (2.5.15)$$

En substituant (2.5.7), (2.5.14), (2.5.15) dans (2.5.1), pour r suffisamment grand, ne obtain

$$\exp\left\{(1-\varepsilon_3)(1-c)\,\alpha r^n\right\} \le \left|A_0(z)\,e^{-ca_{0n}z^n}\right| \le kB\exp\left\{0(1)\,r^n\right\}\cdot\left(T(2r,f)\right)^{2k}. \tag{2.5.16}$$

Par (2.5.16), nous obtenons que $\sigma_2(f) \ge n$.

D'autre par, par le lemme 2.2.3, on a $\sigma_2(f) \le n$, donc $\sigma_2(f) = n$.

2.6 Preuve du Théorème 2.1.4

Supposons que $f(z)$ est une solution transcendante de (2.1.4), nous prouvons d'abord que $\sigma(f) = +\infty$. Supposons que $\sigma(f) = \sigma < +\infty$.

Par le lemme 2.2.4, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E_4 \subset [0, 2\pi)$ de mesure linèaire nulle, tel que si $\theta \in [0, 2\pi) \setminus E_4$, il existe une constante $R_1 = R_1(\theta) > 1$, tel que pour tout z satisfaisant $\arg z = \theta$ et $|z| = r > R_1$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right| \le |z|^{k\sigma} \qquad (k \ge j > i \ge 0). \tag{2.6.1}$$

Posons $z = re^{i\theta}$, $\delta(P_l,\theta) = |a_{ln}|\cos(\theta_l + n\theta)$ et $\delta(P_s,\theta) = |a_{sn}|\cos(\theta_s + n\theta)$. Soit $E_8 = \{\theta \in [0,2\pi) : \delta(P_s,\theta) = \delta(P_l,\theta)\}$, comme $\theta_s \ne \theta_l$, alour $m(E_8) = 0$. Par le lemme 2.2.5, il existe un rayon $\arg z = \theta$ satisfaisant $\theta \in [0,2\pi) \setminus (E_4 \cup E_8)$, on a

$$\delta(P_s, \theta) > \delta(P_l, \theta) \text{ ou } \delta(P_s, \theta) < \delta(P_l, \theta). \tag{2.6.2}$$

Soit $c_1 = \delta(P_s, \theta)$, $c_2 = \delta(P_l, \theta)$. Nous divisons la preuve en deux cas:

cas (i) $c_1 > c_2$;

cas (ii) $c_1 < c_2$.

cas (i) . $c_1 > c_2$. Ici aussi divisons (**i**) en troit cas :

(**a**) $c_1 > c_2 > 0$;

(**b**) $c_1 > 0 > c_2$;

(**c**) $0 > c_1 > c_2$.

cas (a) . $c_1 > c_2 > 0$. Soit $c_3 = \max\{\delta(p_j, \theta) : j \ne s\}$, alors $c_3 < c_1$, par le lemme 2.2.5, pour tout $\varepsilon_4 \left(0 < 3\varepsilon_4 < \frac{c_1 - c_3}{c_3}\right)$ donné et pour r suffisamment grand, on a

$$\left|A_s\left(re^{i\theta}\right)\right| \geq \exp\left\{(1-\varepsilon_4)\, c_1 r^n\right\}. \tag{2.6.3}$$

et

$$\left|A_j\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\left\{(1+\varepsilon_4)\, c_3 r^n\right\} \quad (j \neq 0). \tag{2.6.4}$$

Maintenant nous prouvons que $\left|f^{(s)}\left(re^{i\theta}\right)\right|$ est bornèe sur tout rayon $\arg z = \theta$. Si $\left|f^{(s)}\left(re^{i\theta}\right)\right|$ n'est pas bornée sur le rayon $\arg z = \theta$, alors par le lemme 2.2.6, il existe une suite infinie de points $z_m = r_m e^{i\theta}$ $(m = 1,2,....)$ telle que $r_m \longrightarrow +\infty$, $f^{(s)}(z_m) \longrightarrow \infty$ et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(e)}(z_m)}\right| \leq |z_m|^{s-j}(1+o(1)) \qquad (j = 0,....,s-1). \tag{2.6.5}$$

En substituant (2.6.2) et (2.6.4) dans (2.1.4), on obtient

$$\begin{aligned}
\exp\left\{(1-\varepsilon_4)\, c_1 r^n\right\} &\leq |A_s(z_m)| \\
&\leq \left|\frac{f^{(k)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + ... + |A_l(z_m)| \left|\frac{f^{(l)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + ... \\
&\quad + |A_{s+1}(z_m)| \left|\frac{f^{(s+1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + ... + |A_{s-1}(z_m)| \\
&\quad \left|\frac{f^{(s-1)}(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| + ... + |A_0(z_m)| \left|\frac{f(z_m)}{f^{(s)}(z_m)}\right| \\
&\leq k \exp\left\{(1+\varepsilon_4)\, c_3 r_m^n\right\} . \,|z_m|^M
\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

D'où

$$\exp\left\{\frac{1}{3}(c_1 - c_3)\, r_m^n\right\} \leq r_m^n. \tag{2.6.7}$$

C'est contradiction. Donc $\left|f^{(s)}\left(re^{i\theta}\right)\right|$ est bornée sur le rayon $\arg z = \theta$. En utilisant le même raisonnement ci- dessus, on trouve que

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq M\,|z|^k, \tag{2.6.8}$$

pour tout z vérifiant $\arg z = \theta$.

cas (b). $c_1 > 0 > c_2$. En utilisant le même raisonnement comme dans le cas (a), nous pouvons aussi avoir

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq M\left|z\right|^k, \tag{2.6.9}$$

sur $\arg z = \theta$.

cas (c). $0 > c_1 > c_2$, de (2.1.4), on obtient

$$\begin{aligned} -1 &= A_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(k)}(z)} + ... + A_l(z)\frac{f^{(l)}(z)}{f^{(k)}(z)} + \\ &\quad ... + A_s(z)\frac{f^{(s)}(z)}{f^{(k)}(z)} + ... + A_0(z)\frac{f(z)}{f^{(k)}(z)}. \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

Par le lemme 2.2.5, pour toute ε_5 $\left(0 < \varepsilon_5 < \frac{1}{2}\right)$ donné et r suuffisamment grand, on a

$$\left|A_j\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq \exp\left\{(1-\varepsilon_5)\, c_1 r^{\,n}\right\} \quad (\, j = 0,....,k-1). \tag{2.6.11}$$

Maintenant nous proovons que $\left|f^{(k)}\left(re^{i\theta}\right)\right|$ est bornée sur tout rayon $\arg z = \theta$. Si $\left|f^{(k)}\left(re^{i\theta}\right)\right|$ n'est pas bornée sur le rayons $\arg z = \theta$, alors d'après le lemme 2.2.6, il existe une suite infinie de points $z_m = r_m e^{\,i\,\theta}$ $(m = 1, 2,...)$ tels que $r_m \longrightarrow +\infty$, $f^{(k)}(z_m) \longrightarrow \infty$ et

$$\left|\frac{f^{(j)}(z_m)}{f^{(k)}(z_m)}\right| \leq |z_m|^{k-j}(1 + 0(1)) \qquad (\, j = 0,..., k-1). \tag{2.6.12}$$

En substituant (2.6.11)-(2.6.12) dans (2.6.10), on obtient

$$1 \leq 0. \tag{2.6.13}$$

C'est une contradiction. Ainsi $\left|f^{(k)}\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq M$ sur $\arg z = \theta$. En utilisant le même raisonnement ci- dessus, on obtient

$$\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \leq M\left|z\right|^k \tag{2.6.14}$$

sur $\arg z = \theta$. En combinant (2.6.8), (2.6.9) et (2.6.14) et le fait que $E_4 \cup E_8$ de mesure linéaire nulle, par le théorème de phragmén-Lindelöf, on obtient que $f(z)$ est un polynôme. Ce qui contradit notre hypothèse. Donc $\sigma(f) = +\infty$.

cas (ii). $c_1 < c_2$. En utilisant le même raisonnement comme dans le cas (**i**), nous pouvons aussi obtenir que $f(z)$ un polynôme. Ce qui contradit notre hypothèse. Donc $\sigma(f) = +\infty$.

Dans la suite, nous montrons que si f une solution polynômiale de (2.1.4), alors $\deg f \leq s-1$.

Si $f(z)$ est une polynôme avec $\deg f \geq s$. Si $\theta_s \neq \theta_l + \pi$ ou $\theta_l \neq \theta_s + \pi$, soit $E_9 = \{\theta \in [0, 2\pi) : \delta(P_s,\theta) > \delta(P_l,\theta) > 0\}$, alors $m(E_9) > 0$. Nous pouvons choisir une courbe $\Gamma = \{z : \arg z = \theta \in E_9\}$. Par le même raisonnement comme dans le cas (a) du Théoreme 2.1.4, pour tout $z \in \Gamma$ et pour $|z| = r$ suffisamment grand, on obtient

$$\begin{aligned}\exp\{(1-\varepsilon_4)c_1 r^n\} &\leq \left|A_s(z) f^{(s)}(z)\right| \leq \left|f^{(k)}(z)\right| + \ldots + \left|A_{s+1}(z) f^{(s+1)}(z)\right| \\ &\quad + \left|A_{s-1}(z) f^{(s-1)}(z)\right| + \ldots + |A_0(z) f(z)| \\ &\leq k\exp\{(1+\varepsilon_4)c_3 r^n\} . |z|^M . \end{aligned} \tag{2.6.15}$$

Par (2.6.15), on obtient

$$\exp\left\{\frac{1}{3}(c_1 - c_3) r^n\right\} \leq r^M.$$

C'est une contradiction. Si $\theta_s = \theta_l + \pi$ ou $\theta_l = \theta_s + \pi$; soit $E_{10} = \{\theta \in [0,2\pi) : \delta(P_s,\theta) > \delta(P_l,\theta) > 0\}$, alors $m(E_{10}) > 0$. Par le même raisonnement comme dans (2.6.15), nous pouvons aussi obtenir une contradiction. Donc toute solution polynômiale de (2.1.4) satisfait $\deg f \leq s-1$.

Conclusion

Plusieurs chercheurs ont étudié la croissance des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients fonctions entières. On sait que ces solutions sont des fonctions entières et elles sont souvent d'ordre infini. C'est pourquoi on a introduit la notion de l'hyper-ordre.

Dans ce mémoire, on a présenté quelques résultats dus à Jin Tu et Cai-Feng Yi [19] dans lesquels, ils ont étudié l'ordre et l'hyper-ordre des solutions des équations différentielles de la forme:

$$f^{(k)} + h_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}f^{(k-1)} + ... + h_1(z)e^{P_1(z)}f' + h_0(z)e^{P_0(z)}f = 0,$$

où $h_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ $(k \geq 2)$ sont des fonctions entières avec $\sigma(h_j) < n$ $(n \geq 1)$ et $P_j(z)$ sont des polynômes de degrès n. Il ont générlisé certains travaux dus à K. H. Kwon [15] et
Z.-X. Chen $[2, 3, 4]$.

Résumé

La théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par Rolf Nevanlinna à la fin des années vingt joue un rôle trés important dans l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe.

Ce mémoire consiste à étudier les solutions des équations différentielles de la forme:

$$f^{(k)} + h_{k-1}(z)e^{P_{k-1}(z)}f^{(k-1)} + ... + h_1(z)e^{P_1(z)}f' + h_0(z)e^{P_0(z)}f = 0,$$

où $h_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ $(k \geq 2)$ sont des fonctions entières avec $\sigma(h_j) < n$ $(n \geq 1)$ et $P_j(z)$ sont des polynômes de degrès n.
Le but de cette étude est de présenter les différents résultats obtenus par Jin Tu et Cai-Feng Yi [19] .

le premier chapitre comporte quelques définitions, notions et résultats de la théorie de R. Nevanlinna nécéssaires par la suite dans notre travail.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'ordre et de l'hyper-ordre des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients fonctions entières en présentant quelques résultats dus à Jin Tu et Cai-Feng Yi [19] .

Bibliographie

[1] **S. B. Bank and J. K. Langley**, *On the oscillation of certain linear differential equations in the complex domain,* proc. Edinb.Math. Soc. 30 (1987), 455-469.

[2] **Z. X. Chen,** *The growth of solutions of the differential equation* $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$, Sci. China Ser. **A** 31 (2001), 775-784 (in Chinese).

[3] **Z. X. Chen,** *On the hyper order of solutions of higher order differential equations,* Chinese Ann. Math. Ser. **B** 24 (2003), 501-508 (in Chinese).

[4] **Z. X. Chen,** *The growth of solutions of a class of higher order differential equations,* Acta Math. Sci. Ser. **B** 24 (2004), 52-60 (in Chinese).

[5] **Z. X. Chen,** *On the hyper order of solutions of some second order linear differential equations,* Acta Math. Sinica **B** 18 (2002), 79-88 (in Chinese).

[6] **Z. X. Chen and C. C. Yang**, *Quantitative estimations on the zeros and growth of entire solutions of linear differential equations*, Complex Var.42 (2000) 119-133.

[7] **S. A. Gao, Z. W.** Chen, *Oscillation Theory of Linear Differential Equations*, Huazhong University Science and Technology Press, Wuhan, 1998 (in Chinese).

[8] **G. G. Gundersen**, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, **J**. London Math. Soc., (2) **37** (1988), 88-104.

[9] **G. G. Gundersen**, *Finite order solutions of second order linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1988), 415-429.

[10] **G. G. Gundersen**, E. Steinbart, *Finite order solutions of non homogeneous linear differential equations,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 17 (1992) 327-341.

[11] **W. K. Hayman**, *The local growth of power series :a survey of the Wiman-Valiron method*, Canad. Math. Bull, 17, 1974, 317-358.

[12] **W. K. Hayman**, *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[13] **J. Heittokangas, R. Korhonen, J. Rättyä**, *Fast growth of solutions of* linear *differential equations* in the unit disc, Resultas Math. Soc. 49 (2006) 265-278.

[14] **S. Hellerstein, J. Miles, J. Rossi**, *on the growth of solutions of* $f'' + gf' + hf = 0$, Trans. Amer. Math. Soc. 324 (1991) 693-706

[15] **K. H. Kwon**, *Nonexistence of finite order solutions of certain second order linear differential equations*, Kodai Math. **J**. 19 (1996) 378-387.

[16] **I. Laine**, *Nevanlinna theory and complex differential equations,* Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1993.

[17] **I. Laine, P.C. Wu**, Growth of solutions of second order linear differential equations, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000) 2693-2703.

[18] **A. I. Markushevich**, *Theory of functions of a complexe variable,* Vol. II, translated by R. A. Silverman, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

[19] **J. Tu** and **C.- F. Yi,** on the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with coefficients having the same order, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008) 487- 497.

[20] **H.-X. Yi and C.-C. Yang**, *The uniqueness theory of meromorphic functions,* Science Press, Beijing, 1995 (in Chinese).