REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

Département de mathématiques et informatique

Mémoire de fin d'étude

pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Présenté par

Mlle**. GUERZIZ YAHIA Safia**

THEME

Dérivées logarithmiques et applications

Soutenu le 09/06/2014 devant le Jury

Mr BELAIDI Benharrat	**Président**	**Pr**	**U. MOSTAGANEM**
Mme AZIZ Karima	**Examinatrice**	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM**
Mr Hamouda Saâda	**Encadreur**	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM**

Année universitaire: 2013-2014

Résumé

Dans ce travail, on essaye d'étudier les propriétés des dérivées logarithmiques $\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}$ à savoir l'estimation de son module établie par Gundersen [**13**] et l'ordre de la croissance donné par Latreuch et Belaidi [**25**] et montrer leur importance dans l'étude de la croissance et oscillation des solutions des équations différentielles linéaires et non linéaires dont les coefficients sont des fonctions entières et méromorphes dans le plan complexe.

Remerciements

Tout d'abord je remarcie ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté et le courage pour effectuer ce modeste travail

je tiens à remarcier

Monsieur **Hamouda Saâda** Maître de conférence à l'université de Mostaganem, qui a accepté de diriger ce mémoire, et a mis à notre disposition tous les moyens nécessaires ainsi que ses conseils et sa présence pendant la réalisation de ce travail;

Monsieur **BELAIDI Benharrat** professeur à l'université de Mostaganem, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury;

Madame **AZIZ Karima** Maître de conférence à l'université de Mostaganem, qui a accepté d'analyser ce travail et me fait l'honneur d'être examinateur;

Tous les enseignants que j'ai rencontré durant mon cursus universitaire sans oublier le personnel administratif.

Dédicace

Grâce a mon Dieu elkadir

Je dédie ce travail à mes chers parents que j'aime plus que tout au monde, à mes chers frères: Djillali, Ibrahim, Ahmed et Ossama, à mes soeurs, à mes amis, à toute ma Grande famille"GUERZIZ" et spécialement à tout musulmon.

SAFIA

Table des Matières

Introduction

La notion de la dérivée des fonctions réelles de la variable réelle est née depuis le dix-septième siècle par Leibniz et Newton puis a été définie plus rigoureusement au dix-huitième siècle par d'Alembert. Cette notion est liée directement à l'étude de la variation de la fonction. Puis cette notion et d'autres ont été étendu aux fonctions complexe de la variable complexe depuis l'apparition des nombres complexe. L'importance de l'étude de la relation entre la fonction et ses dérivées est explicite dans plusieurs problèmes physiques et d'autres; et à partir de là, la notion des équations différentielles est apparu. Au début, on s'est intéressé à déterminer les solutions d'une manière explicite de certaines types d'équations différentielles. Il y a une autre approche concernant l'étude de l'existence et l'unicité des solutions qui vérifient certaines conditions.

En 1925, la naissance de la théorie de R. Nevanlinna de la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe a donné des outils trés efficaces pour l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires et non linéaires dans le plan complexe. En 1929, F. Nevanlinna a considéré dans [27] l'équation différentielle $f'' + A(z) f = 0$ où $A(z)$ est un polynôme; puis en 1950, Whitich (voir [30]) a montré que: toutes les solutions de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + ... + A_0(z) f = 0 \tag{1}$$

sont d'ordre fini, si et seulement si, les coefficients $A_0, ..., A_{k-1}$ sont des polynômes. Frei [11] a prouvé que si p est le plus grand indice tel que A_p est une fonction entière transcendante, alors il existe au plus p solutions linéairement independantes d'ordre fini.

Dans cette direction, dans plusieurs travaux, il s'est apparu la nécessité de l'éstimation du module des dériveés logarithmiques $\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}$ qui est l'objet de notre travail dans ce mémoire. On va voir que la meilleure estimation qui a été donnée par G. Gundersen **[13],** en 1988, était très utile dans l'amélioration de beaucoup de résultats dans ce domaine, d'ailleurs ce fameux travail est cité dans la majorité totale des articles de ce domaine.

Ce mémoire est composé de deux chapitres. Le premier chapitre est consacré à quelques éléments de la théorie de R. Nevalinna nécessaires pour notre travail. Dans le deuxième chapitre, on va donner les fameux théorèmes de G. Gundersen concernant l'estimation des dérivées logarithmiques puis on enchaine à un travail de Latreuch et Belaidi qui classe les dérivées logarithmiques en introduisant l'ordre de la croissance et on termine par quelques applications.

Chapitre 1

Eléments de la théorie de R. Nevanlinna

On va citer seulement les éléments nécessaires pour notre travail dans ce mémoire et pour plus de détail voir [18].

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

1.1.1 Formule de Jenson

Théorème 1.1.1 [18] Soit f une fonction méromorphe telles que $f(0) \neq 0, \infty$ et soit $a_1, a_2, ...$(resp. $b_1, b_2, ...$) ses zéros (resp. ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \ln\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_i|<r} \ln\frac{r}{|a_i|}.$$

Preuve:

On démontre le théorème dans le cas où f n'admet ni zéros ni pôles sur le cercle $|z| = r$. Considérons la fonction

$$g(z) = f(z) \prod_{|a_j|<r} \frac{r^2 - \overline{a_j}z}{r(z-a_j)} / \prod_{|b_j|<r} \frac{r^2 - \overline{b_j}z}{r(z-b_j)}.$$

On a $g \neq 0, \infty$ dans le disque $|z| < r$ et $\ln |g(z)|$ est une fonction harmonique. D'aprés la formule de la moyenne, on a

$$\ln |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| g\left(re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi. \tag{1.1}$$

D'autre part,

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{|a_j|<r} \frac{r}{|a_j|} / \prod_{|b_j|<r} \frac{r}{|b_j|}$$

d'où

$$\ln |g(0)| = \ln |f(0)| + \sum_{|a_j|<r} \ln \frac{r}{|a_j|} - \sum_{|b_j|<r} \ln \frac{r}{|b_j|} \tag{1.2}$$

pour $z = re^{i\varphi}$, on a

$$\left| \frac{r^2 - \overline{a_j} z}{r(z - a_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \overline{a_j} re^{i\varphi}}{r(re^{i\varphi} - a_j)} \right| = \left| \frac{e^{i\varphi}\left(re^{-i\varphi} - \overline{a_j}\right)}{re^{i\varphi} - a_j} \right| = 1$$

et

$$\left| \frac{r^2 - \overline{b_j} z}{r(z - b_j)} \right| = \left| \frac{r^2 - \overline{b_j} re^{i\varphi}}{r(re^{i\varphi} - b_j)} \right| = \left| \frac{e^{i\varphi}\left(re^{-i\varphi} - \overline{b_j}\right)}{re^{i\varphi} - b_j} \right| = 1.$$

D'où $|g(re^{i\varphi})| = |f(re^{i\varphi})|$. De (1.1) et (1.2), on obtient la formule de Jensen.

Définition 1.1.1 Pour tout réel $x > 0$, on définit

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x, \text{ si } x > 1, \\ 0, \text{ si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Lemme 1.1.1 On a les inégalitées suivantes

(a)

$$\ln x \leq \ln^+ x.$$

(b)

$$\ln^+ x \leq \ln^+ y \ (si\ 0 < x < y).$$

(c)

$$\ln x = \ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x}.$$

(d)

$$|\ln x| = \ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x}.$$

(e)

$$\ln^+ \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \ln^+ x_i.$$

(f)

$$\ln^+ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \leq \ln n + \sum_{i=1}^n \ln^+ x_i.$$

Preuve:

Montrons (c)-(f).

(c) On a

$$\begin{aligned}
\ln^+ x - \ln^+ \frac{1}{x} &= \max\{\ln x, 0\} - \max\left\{\ln \frac{1}{x}, 0\right\} \\
&= \max\{\ln x, 0\} - \max\{-\ln x, 0\} \\
&= \max\{\ln x, 0\} + \min\{\ln x, 0\} \\
&= \ln x.
\end{aligned}$$

(d) On a

$$\begin{aligned}
\ln^+ x + \ln^+ \frac{1}{x} &= \max\{\ln x, 0\} + \max\left\{\ln \frac{1}{x}, 0\right\} \\
&= \max\{\ln x, 0\} + \max\{-\ln x, 0\} \\
&= \max\{\ln x, 0\} - \min\{\ln x, 0\} \\
&= |\ln x|.
\end{aligned}$$

(e) Si $\prod_{i=1}^n x_i \leq 1$, alors l'inégalité est triviale.

Supposons que $\prod_{i=1}^{n} x_i > 1$. Alors

$$\begin{aligned} \ln^+\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) &= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \ln^+ x_i; \text{ d'aprés (a).} \end{aligned}$$

(f) On a d'aprés (b) et (e)

$$\begin{aligned} \ln^+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) &\leq \ln^+\left(n \max_{1\leq i\leq n} x_i\right) \\ &\leq \ln n + \ln^+\left(\max_{1\leq i\leq n} x_i\right) \\ &\leq \ln n + \sum_{i=1}^{n} \ln^+ x_i. \end{aligned}$$

1.1.2 Fonction a–points

Définition 1.1.2 Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leq t$. Chaque racine étant comptée un nombre de fois égal á son ordre de multiplicité et par $n(t, \infty, f)$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$. Posons

$$N(r, a, f) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \ln r, \ a \neq \infty$$

et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \ln r.$$

$N(r,a,f)$ est appelée fonction a–points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$.

1.1.3 Fonction de proximité

Définition 1.1.3 Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe. Alors, on définit la fonction de proximité de la fonction f par

$$m(r,a,f) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}-a)|}d\varphi,\ a \neq \infty$$

et

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi.$$

1.1.4 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Définition 1.1.4 On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction f par

$$T(r,\infty,f) = T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

1.2 Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.2.1 Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors pour tout nombre complexe a, on a

$$m(r,a,f) + N(r,a,f) = T(r,f) + O(1)$$

où

$$0 < r < +\infty \text{ et } O(1) = \varepsilon(r,a) \text{ quand } r \to +\infty.$$

Lemme 1.2.1 Soient $f, f_1, ..., f_n$ des fonctions méromorphes et a, b, c, d des constantes complexes telle que $ad - cb \neq 0$, alors

(a)

$$m\left(r,\sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m\left(r,f_i\right) + \ln n.$$

(b)

$$m\left(r,\prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m\left(r,f_i\right).$$

(c)

$$N\left(r,\sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N\left(r,f_i\right).$$

(d)

$$N\left(r,\prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N\left(r,f_i\right).$$

(e)

$$T\left(r,\sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} T\left(r,f_i\right) + \ln n,\ \ n \geq 1.$$

(f)

$$T\left(r,\prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} T\left(r,f_i\right),\ \ n \geq 1.$$

(g)

$$T\left(r,f^n\right) = nT\left(r,f\right),\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

(h)

$$T\left(r,\frac{af+b}{cf+d}\right) = T\left(r,f\right) + O\left(1\right),\ \ f \not\equiv \frac{-d}{c}.$$

(i) Soit

$$R\left(z,f\right) = \frac{P\left(z,f\right)}{Q\left(z,f\right)} = \frac{\sum_{i=0}^{p} a_i\left(z\right) f^i}{\sum_{j=0}^{q} b_j\left(z\right) f^j}$$

avec $a_i\left(z\right), b_j\left(z\right)$ coefficients méromorphes. Alors

$$T\left(r,R\left(z,f\right)\right) = dT\left(r,f\right) + S\left(r,f\right),$$

où $d = \max\{p, q\}$.

Preuve:

Montrons (e)-(h)

(e) On a

$$m\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \ln n$$

et

$$N\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i)$$

donc

$$\begin{aligned} T\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) &= m\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) + N\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \ln n. \end{aligned}$$

(f) On a

$$m\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i)$$

et

$$N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i),$$

donc

$$\begin{aligned} T\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) &= m\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) + N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i). \end{aligned}$$

(g) On a $|f^n| = |f|^n \leq 1$ équivaut a $|f| \leq 1$. Si $|f| \leq 1$, alors $m(r, f^n) = 0$ et $N(r, f^n) = nN(r, f)$. Donc

$$T(r, f^n) = N(r, f^n) = n(N(r, f) + m(r, f)) = nT(r, f).$$

Si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned} T(r, f^n) &= m(r, f^n) + N(r, f^n) \\ &= nm(r, f) + nN(r, f) \\ &= nT(r, f). \end{aligned}$$

(h) Si $c = 0$, alors

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{af+b}{d}\right) &= T\left(r, \frac{a}{d}f + \frac{b}{d}\right) \\ &= T\left(r, \frac{a}{d}f\right) + O(1) \\ &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

Si $c \neq 0$,alors on écrit

$$\begin{aligned} \frac{af+b}{cf+d} &= \frac{a\left(f+\frac{b}{a}\right)}{c\left(f+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c}\frac{f+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{f+\frac{d}{c}} \\ &= \frac{a}{c}\left[1 + \frac{bc-ad}{ac}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right] \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) &= T\left(r, \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) \\ &= T\left(r, \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) \\ &= T\left(r, \frac{1}{f+\frac{d}{c}}\right) + O(1) \\ &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

1.3 Ordre de croissance et l'hyper-ordre

Définition 1.3.1 ([18], [31]) Soit f une fonction méromorphe. L'ordre et l'hyper-ordre de cette fonction sont définis respectivement par

$$\rho(f) = \lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\ln T(r,f)}{\ln r},$$

et

$$\rho_2(f) = \lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\ln\ln T(r,f)}{\ln r}.$$

Si f est une fonction entière, alors l'ordre et l'hyper-ordre de cette fonction sont définis aussi respectivement par

$$\begin{aligned}\rho(f) &= \lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r},\\ \rho_2(f) &= \lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\ln\ln\ln M(r,f)}{\ln r},\end{aligned}$$

où $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r}|f(z)|$.

Exemple 1.3.1 Soit $f(z) = e^z$. Nous avons $n(t,f) = 0$ car f n'admet pas des pôles, par conséquent $N(r,f) = 0$. De plus

$$\begin{aligned}m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|e^{r\cos\varphi}\right|d\varphi\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln^+\left|e^{r\cos\varphi}\right|d\varphi\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r\cos\varphi d\varphi\\ &= \frac{r}{\pi}.\end{aligned}$$

Donc

$$T(r,e^z) = \frac{r}{\pi}$$

D'où

$$\rho\left(e^{z}\right)=\lim_{r\rightarrow+\infty}\sup\frac{\ln T\left(r,f\right)}{\ln r}=1,$$

et

$$\rho_{2}\left(e^{z}\right)=0.$$

Remarque. Si l'ordre est fini, alors l'hyper-ordre est nul.

Proposition 1.3.1 Soit f et g deux fonctions méromorphes. Alors

1.

$$\begin{aligned}\rho\left(f+g\right) &\leq \max\left\{\rho\left(f\right),\rho\left(g\right)\right\},\\ \rho\left(fg\right) &\leq \max\left\{\rho\left(f\right),\rho\left(g\right)\right\}.\end{aligned}$$

2. Si $\rho\left(g\right)<\rho\left(f\right)$, alors

$$\rho\left(f+g\right)=\rho\left(fg\right)=\rho\left(f\right).$$

1.4 Mesure linéaire et logarithmique

Définition 1.4.1 La mesure linéaire d'un ensemble $E\subset[0,+\infty[$ est définie par

$$m\left(E\right)=\int_{0}^{+\infty}\chi_{E}\left(t\right)dt,$$

où $\chi_{E}\left(t\right)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E et la mesure logarithmique d'un ensemble $F\subset[1,+\infty[$ est définie par

$$Lm\left(F\right)=\int_{1}^{+\infty}\frac{\chi_{F}\left(t\right)}{t}dt.$$

Exemple 1.4.1 La mesure linéaire de l'ensemble $E = [1,2] \subset [0,+\infty[$ est

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt = \int_1^2 dt = 1.$$

La mesure logarithmique de l'ensemble $F = [e, e^4] \subset [1,+\infty[$ est

$$Lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt = \int_e^{e^4} \frac{dt}{t} = 3.$$

Définition 1.4.2 [18], [31] Soit f une fonction méromorphe. L'exposant de convergence des zéros de la fonction f est définie par

$$\lambda(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\ln r},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \ln r,$$

et l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\overline{\lambda}(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\ln r},$$

où

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right) \ln r,$$

et $\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right)$ désigne le nombre des zéros distincts de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq t$.

Exemple 1.4.2 Soit $f(z) = e^z - a$, $a \neq 0, \infty$.

On a $e^z = a \Longleftrightarrow z = \ln a = \ln|a| + i(\arg a + 2k\pi)\,,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
|z| &< t \Rightarrow \sqrt{(\ln|a|)^2 + (\arg a + 2k\pi)^2} < t \\
&\Rightarrow \frac{-\sqrt{t^2 - (\ln a)^2} - \arg a}{2\pi} < k < \frac{\sqrt{t^2 - (\ln a)^2} - \arg a}{2\pi} \\
&\Rightarrow n\left(t, \frac{1}{f}\right) \sim \frac{\sqrt{t^2 - (\ln a)^2}}{\pi} \sim \frac{t}{\pi},\ t \to +\infty \\
&\Rightarrow N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \frac{r}{\pi} + o(1) \\
&\Rightarrow \lambda(f) = 1.
\end{aligned}$$

1.5 Indice central et le terme maximal

Définition 1.5.1 Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une fonction entière. Pour tout $r > 0$ la série $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ est convergente. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| r^n = 0,$$

et le terme maximal $\mu(r, f) = \{\max |a_n| r^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est bien défini. On définit l'indice central par

$$\nu(r, p) = \max\{m : |a_m| r^m = |a_n| r^n\}.$$

Exemple 1.5.1 Pour $f(z) = a_n z^n + ... + a_0$, alors quand $|z| = r \to +\infty$, on a le terme maximal est $|a_n| r^n$ et par conséquent $\nu(r, f) = n = \deg(f)$.

Chapitre 2

Dérivées logarithmiques dans le plan complexe

2.1 Fonction de proximité des dérivées logarithmiques

Parmi les résultats fondamentanx de la théorie de R. Nevanlinna le résultat suivant.

Théorème 2.1.1[18] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante non constante dans le plan complexe. Alors, on a

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log T(r, f) + \log r\right), \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Comme une conséquence immédiate de ce résultat, on a

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = o\left(T(r, f)\right).$$

2.2 Estimations des modules des dérivées logarithmiques

En 1988, Gundersen a publié un travail remarquable concernant le module des dérivées logarithmiques. Il a établi les résultats suivants:

Théorème 2.2.1 [13] Soient $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante et $H = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), ..., (k_q, j_q)\}$ un ensemble fini de couples d'entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$ pour $i = 1, ..., q$, et soit $\alpha > 1$ une constante réelle. Alors, il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle et deux constantes réelles $A > 0$, $B > 0$ dépendant seulement de α et H, tel que si $\psi_0 \in [0, 2\pi) - E$, alors il existe une constante $R_0 = R_0(\psi_0) > 1$ tel que pour tout z vérifiant $\arg z = \psi_0$ et $|z| \geq R_0$ on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq A\left(\frac{T(\alpha r, f)}{r} + \frac{n_j(\alpha r)}{r}\log^\alpha r \log^+ n_j(\alpha r)\right)^{k-j},$$

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq B\left(\frac{T(\alpha r, f)}{r}\log^\alpha r \log T(\alpha r, f)\right)^{k-j}.$$

Corollaire 2.2.1 [13] Soient $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini ρ et $H = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), ..., (k_q, j_q)\}$ un ensemble fini de couples $k_i > j_i \geq 0$ pour $i = 1, ..., q$, et soit $\varepsilon > 0$ une constante. Alors, il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire nulle, tel que si $\psi_0 \in [0, 2\pi) - E$, alors il existe une constante $R_0 = R_0(\psi_0) > 1$ tel que pour tout z vérifiant $\arg z = \psi_0$ et $|z| \geq R_0$ et pour tout $(k, j) \in H$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}.$$

Théorème 2.2.2 [13] Soient $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante et $H = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), ..., (k_q, j_q)\}$ un ensemble fini de couples d'entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$ pour $i = 1, ..., q$, et soit $\alpha > 1$ une constante réelle. Alors, il existe un ensemble $E \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique fini et deux constantes réelles $A > 0$, $B > 0$ dépendant seulement de α et H, tel que pour tout z vérifiant $|z| \notin E \cup [0, 1]$

et pour tout $(k,j)\in H$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq A\left(\frac{T(\alpha r,f)}{r}+\frac{n_j(\alpha r)}{r}\log^{\alpha} r\log^{+} n_j(\alpha r)\right)^{k-j},$$

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq B\left(\frac{T(\alpha r,f)}{r}\log^{\alpha} r\log T(\alpha r,f)\right)^{k-j}.$$

Théorème 2.2.3 [13] Soient $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante et $H=\{(k_1,j_1),(k_2,j_2),...,(k_q,j_q)\}$ un ensemble fini de couples d'entièrs vérifiant $k_i>j_i\geq 0$ pour $i=1,...,q$, et soient $\alpha>1$ et $\varepsilon>0$ des constantes réelles. Alors, il existe un ensemble $E\subset[0,\infty)$ de mesure linéaire fini et deux constantes réelles $A>0$, $B>0$ dépendant seulement de α et H, tel que pour tout z vérifiant $|z|\notin E$ et pour tout $(k,j)\in H$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq A\left(\frac{T(\alpha r,f)}{r}+r^{\varepsilon}n_j(\alpha r)\log^{+} n_j(\alpha r)\right)^{k-j},$$

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq B\left(T(\alpha r,f)\,r^{\varepsilon}\log T(\alpha r,f)\right)^{k-j}.$$

Corollaire 2.2.2 [13] Soient $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini ρ et $H=\{(k_1,j_1),(k_2,j_2),...,(k_q,j_q)\}$ un ensemble fini de couples d'entièrs vérifiant $k_i>j_i\geq 0$ pour $i=1,...,q$, et soit $\varepsilon>0$ une constante. Alors, il existe un ensemble $E\subset[1,\infty)$ de mesure logarithmique fini, tel que pour tout z vérifiant $|z|\notin E\cup[0,1]$ et pour tout $(k,j)\in H$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}.$$

Corollaire 2.2.3 [13] Soient $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante d'ordre fini ρ et $H=\{(k_1,j_1),(k_2,j_2),...,(k_q,j_q)\}$ un ensemble fini de couples d'entièrs vérifiant $k_i>j_i\geq 0$ pour $i=1,...,q$, et soit $\varepsilon>0$ une constante. Alors, il existe un ensemble $E\subset[0,\infty)$ de mesure linéaire fini, tel que pour tout z vérifiant

$|z| \notin E$ et pour tout $(k, j) \in H$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \le |z|^{(k-j)(\rho+\varepsilon)}.$$

Ces résultats ont beaucoups d'applications sur l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont méromorphes ou entières dans le plan complexe, (voir par exemple [5, 6, 7, 8, 17]).

2.3 Ordre de croissance des dérivées logarithmiques

Latreuch et Belaidi ont établi les résultats suivants.

Théorème 2.3.1 [25] Soient $k \ge 2$ un entier naturel et f une fonction méromorphe. Alors

$$\rho\left(\frac{f'}{f}\right) = \max\left\{\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right),\ k \ge 2\right\} = \max\left\{\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right), \rho\left(\frac{f^{(k+1)}}{f}\right),\ k \ge 2\right\}. \tag{2.1}$$

Corollaire 2.3.1 [25] Soit f une fonction méromorphe. Si $\frac{f'}{f}$ est d'ordre fini, alors pour chaque entier $k \ge 2$

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) < \infty. \tag{2.2}$$

Corollaire 2.3.2 [25] Soit f une fonction méromorphe. S'il existe un entier $k \ge 1$ tel que $\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho(f)$ et $\rho(f) > \rho_2(f)$, alors

$$\max\left\{\overline{\lambda}(f), \overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)\right\} = \max\left\{\lambda(f), \lambda\left(\frac{1}{f}\right)\right\} = \rho(f). \tag{2.3}$$

De plus, si f est une fonction entière, alors

$$\overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho(f).$$

Corollaire 2.3.3 [25] Soit f une fonction méromorphe tel que pour chaque entier $k \geq 1$, on a

$$\rho\left(\frac{f^{(2k)}}{f}\right) < \rho\left(\frac{f'}{f}\right). \tag{2.4}$$

Alors

$$\rho\left(\frac{f^{(2k+1)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{f'}{f}\right), \ \ (k \geq 1). \tag{2.5}$$

Exemple 2.3.1 Soit $f(z) = \sin z$, il est claire que $\frac{f^{(2k)}}{f} = const$, pour chaque entire $k \geq 1$. Alors d'aprés Corollaire 2.3.3

$$\rho\left(\frac{f^{(2k+1)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{f'}{f}\right), \ \ (k \geq 1)$$

et de puis $\rho\left(\frac{f'}{f}\right) = \rho(f) = 1$, nous obtenons que

$$\rho\left(\frac{f^{(2k+1)}}{f}\right) = \rho(f) = 1, \ \ (k \geq 1).$$

Théorème 2.3.2 [25] Soit f une fonction entière avec un nombre fini de zéros. Alors pour chaque entier $(k \geq 1)$

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho_2(f). \tag{2.6}$$

Corollaire 2.3.4 [25] Soient f une fonction entière et c une constante non nulle. Alors

$$\rho\left(f' + cf^2\right) = \rho(f). \tag{2.7}$$

2.4 Application pour les équations différentielles

Théorème 2.4.1 [25] Soient $k \geq 1$ un entier et f la solution de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + ... + A_0 f = F, \tag{2.8}$$

où $A_j\,(j=0,...,k-1)$, $F\not\equiv 0$ sont des fonctions entière vérifiant

$$\max\{\rho(F),\rho(A_j)\quad(j=0,...,k-1)\}<\rho(f). \tag{2.9}$$

Alors

$$\rho(f)=\rho\left(\frac{f'}{f}\right)=\overline{\lambda}(f)=\lambda(f). \tag{2.10}$$

De plus, si $\frac{f^{(j)}}{f}\neq const$, $(j\geq 2$ un entier$)$, alors

$$\rho(f)=\rho\left(\frac{f^{(j)}}{f}\right),\quad(j\geq 2). \tag{2.11}$$

Théorème 2.4.2 [25] Soient $k\geq 1$ un entier, et f une solution méromorphe d'ordre fini de l'équation différentielle

$$f^{(k)}=A_1f+A_2f^2+...+A_nf^n \tag{2.12}$$

où A_j $(j=1,...,n)$ $(n\geq 2$ un entier$)$ sont des fonctions méromorphe vérifiant

$$\max\{\rho(A_j):j=1,...,n\}<\rho(f). \tag{2.13}$$

Alors

$$\rho(f)=\max\left\{\overline{\lambda}(f),\overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)\right\}=\max\left\{\lambda(f),\lambda\left(\frac{1}{f}\right)\right\}. \tag{2.14}$$

Exemple 2.4.1 On a $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$ vérifie l'équation différentielle

$$f'=-f-f^2,$$

et

$$\max\{\rho(A_j):j=1,2\}=0<\rho(f)=1.$$

Donc, du Théorème 2.4.2, on a

$$\rho(f)=\max\left\{\overline{\lambda}(f),\overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)\right\}=\max\left\{\lambda(f),\lambda\left(\frac{1}{f}\right)\right\}=1.$$

2.5 Lemmes préliminaires

Lemme 2.5.1 [1] Soient $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ et $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ des fonctions croissantes telles que $g(r) \leq h(r)$ à l'exterieur d'un ensemble E de mesure linéaire fini. Alors pour chaque $\lambda > 1$, il existe $r_0 > 0$ tel que $g(r) \leq h(\lambda r)$ pour tout $r > r_0$.

Lemme 2.5.2 [14] Soient $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ et $\psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ des fonctions croissantes telles que $\varphi(r) \leq \psi(r)$ pour tout $r \notin E \cup [0, 1]$, où $E \subset (1, +\infty)$ est un ensemble de mesure logarithmique fini. Soit $\gamma > 1$ une constante donnée. Alors il existe un $r_1 = r_1(\gamma) > 0$ tel que $\varphi(r) \leq \psi(\gamma r)$ pour tout $r > r_1$.

Lemme 2.5.3 [9] Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre infini avec l'hyper ordre $\rho_2(f) = \sigma < +\infty$. Alors

$$\lim_{r \to +\infty} \sup \frac{\ln \ln \upsilon_f(r)}{\ln r} = \sigma. \tag{2.15}$$

Lemme 2.5.4 (Wiman-Valiron, [19], [29]) Soient $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière transcendante, et $\upsilon_f(r)$ son indice central. Soit z un point avec $|z| = r$ tel que $|f(z)| = M(r, f)$. Alors, on a

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\upsilon_f(r)}{z}\right)^k (1 + o(1)), \quad (k \geq 1 \text{ un entier}). \tag{2.16}$$

Lemme 2.5.5 [3] On suppose que $k \geq 2$ et $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, \ F \not\equiv 0$ sont des fonctions entières d'ordre fini. Si f est une solution de l'équation (2.8), alors

$$\rho_2(f) \leq \max\{\rho(A_j) : j = 0, ..., k-1, \rho(F)\} = \sigma.$$

2.6 Preuve du Théorème 2.3.1

Montrons l'inégalité

$$\max\left\{\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right), k \geq 2\right\} \leq \rho\left(\frac{f'}{f}\right).$$

On a

$$\frac{f^{(k)}}{f} = \left(\frac{f^{(k-1)}}{f}\right)' + \left(\frac{f'}{f}\right)\left(\frac{f^{(k-1)}}{f}\right), \ \ (k \geq 2)\,. \tag{2.17}$$

Alors

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) \leq \max\left\{\rho\left(\frac{f'}{f}\right), \rho\left(\frac{f^{(k-1)}}{f}\right)\right\}, \ \ (k \geq 2)\,. \tag{2.18}$$

Par la même méthode, nous pouvons en déduire que

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) &\leq \max\left\{\rho\left(\frac{f'}{f}\right), \rho\left(\frac{f^{(k-1)}}{f}\right)\right\} \\
&\leq \max\left\{\rho\left(\frac{f'}{f}\right), \rho\left(\frac{f^{(k-2)}}{f}\right)\right\} \\
&\leq \ldots \leq \max\left\{\rho\left(\frac{f'}{f}\right), \rho\left(\frac{f''}{f}\right)\right\} \\
&\leq \max\left\{\rho\left(\frac{f'}{f}\right), \rho\left(\frac{f'}{f}\right)\right\} = \rho\left(\frac{f'}{f}\right), \ \ (k \geq 2)\,.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Maintenant on prouve l'égalité. On divise la preuve en trois cas.
i) Supposons que $\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) < \rho\left(\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$. Par (2.17), on a

$$\frac{f^{(k+1)}}{f} - \left(\frac{f^{(k)}}{f}\right)' = \left(\frac{f'}{f}\right)\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right), \ \ (k \geq 1)\,. \tag{2.20}$$

De $\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) < \rho\left(\frac{f^{(k+1)}}{f}\right) \leq \rho\left(\frac{f'}{f}\right)$, Alors de (2.20) on a

$$\rho\left(\frac{f^{(k+1)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{f'}{f}\right).$$

ii) Si $\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) > \rho\left(\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$, alors par (2.20) on a

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{f'}{f}\frac{f^{(k)}}{f}\right). \tag{2.21}$$

De (2.19) on a $\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) \leq \rho\left(\frac{f'}{f}\right)$. Si on suppose que $\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) < \rho\left(\frac{f'}{f}\right)$, alors

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{f'}{f}\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{f'}{f}\right), \tag{2.22}$$

ce qui est une contraduction. Donc

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right)=\rho\left(\frac{f'}{f}\right).$$

iii) On suppose que $\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right)=\rho\left(\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)$. De (2.19), on a $\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right)\leq\rho\left(\frac{f'}{f}\right)$. Si on suppose que $\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right)<\rho\left(\frac{f'}{f}\right)$, alors de (2.20) on obtient

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right)=\rho\left(\frac{f'}{f}\right), \tag{2.23}$$

ce qui est une contraduction. Ainsi, de (i), (ii) et (iii) on déduit que

$$\max\left\{\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right),\rho\left(\frac{f^{(k+1)}}{f}\right)\right\}=\rho\left(\frac{f'}{f}\right). \tag{2.24}$$

De (2.24) nous pouvons en déduire qu'il existe toujours quelques entier $j\geq 1$ tel que

$$\rho\left(\frac{f^{(j)}}{f}\right)=\rho\left(\frac{f'}{f}\right).$$

Ainsi

$$\rho\left(\frac{f'}{f}\right)=\max\left\{\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right),\ k\geq 2\right\}.$$

2.7 Preuve du Corollaire 2.3.2

Il existe ($k\geq 1$ un entier) tel que

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right)=\rho\left(f\right).$$

Alors du Théorème 2.3.1, on a

$$\rho\left(\frac{f'}{f}\right)=\rho\left(f\right). \tag{2.25}$$

D'autre par, pour tout donnée $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} T\left(r,\frac{f'}{f}\right) &= m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+N\left(r,\frac{f'}{f}\right) \\ &= m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,f\right) \\ &\leq m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+r^{\lambda_1+\varepsilon}+r^{\lambda_2+\varepsilon} \\ &\leq m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+2r^{\max\{\lambda_1,\lambda_2\}+\varepsilon}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

où $\lambda_1=\overline{\lambda}\left(f\right),\ \lambda_2=\overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)$. Alors du Théorèmes 2.1.1 et (2.26), on a

$$T\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leq O\left(\log T\left(r,f\right)+\log r\right)+2r^{\max\{\lambda_1,\lambda_2\}+\varepsilon}, \tag{2.27}$$

pour tout r exterieur d'un ensemble $E\subset(0,+\infty)$ de mesure linéaire fini. D'aprés le lemme 2.5.1 et (2.27) nous obtenons

$$\begin{aligned} \rho\left(f\right) &= \rho\left(\frac{f'}{f}\right)\leq\max\left\{\rho_2\left(f\right),\overline{\lambda}\left(f\right),\overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)\right\} \\ &\leq \max\left\{\rho_2\left(f\right),\lambda\left(f\right),\lambda\left(\frac{1}{f}\right)\right\} \\ &\leq \rho\left(f\right), \end{aligned} \tag{2.28}$$

ce qui implique

$$\rho\left(f\right)=\max\left\{\overline{\lambda}\left(f\right),\overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)\right\}=\max\left\{\lambda\left(f\right),\lambda\left(\frac{1}{f}\right)\right\}. \tag{2.29}$$

Si f est une fonction entière, alors $\overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)=\lambda\left(\frac{1}{f}\right)=0$, ainsi de (2.29), nous obtenons

$$\overline{\lambda}\left(f\right)=\lambda\left(f\right)=\rho\left(f\right).$$

2.8 Preuve du Théorème 2.3.2

Soit f une fonction entière avec un nombre fini de zéros. Alors f peut être représentée par

$$f(z) = p(z)\, e^{g}, \tag{2.30}$$

où p est un polynôme et g est une fonction entière, et

$$f^{(k)} = \Pi e^{g}, \tag{2.31}$$

où Π est une fonction entière. Il est claire que f vérifie l'équation différentielle

$$pf^{(k)} - \Pi f = 0. \tag{2.32}$$

i) Si f est une solution entière d'ordre fini, alors g et Π doivent être des polynômes et de (2.32)

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{\Pi}{p}\right) = 0 = \rho_2(f). \tag{2.33}$$

ii) Si f est une solution entière d'ordre infini, alors g et Π doivent être des fonctions entière transcendéntes et

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho\left(\frac{\Pi}{p}\right) = \rho(\Pi). \tag{2.34}$$

On a aussi de (2.32)

$$\Pi = p\frac{f^{(k)}}{f}, \tag{2.35}$$

alors de (2.35) et Théorème 2.1.1, on a

$$\begin{aligned} T(r,\Pi) &= m(r,\Pi) \leq m(r,p) + m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) \\ &= O(\ln r) + O(\ln rT(r,f)) \end{aligned} \tag{2.36}$$

pour tout r extérieur d'un ensemble $E \subset (0,+\infty)$ de mesure linéaire fini. Du

Lemme 2.5.1 et (2.36) on obtient

$$\rho(\Pi) \leq \rho_2(f). \tag{2.37}$$

D'autre part, du Lemme 2.5.4, il existe un ensemble $E \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique fini $Lm(E) < +\infty$ et on peut choisir z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E$ et $|f(z)| = M(r,f)$, tel que (2.16) soit vérifiée. Remplaçant (2.16) dans (2.35) on obtient

$$|p(z)| \left(\frac{\nu_f(r)}{r}\right)^k |1 + o(1)| = |\Pi(z)| \leq M(r, \Pi) \tag{2.38}$$

vérifiée pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E$ et $|f(z)| = M(r,f)$. En utilisant le lemme 2.5.2 et le lemme 2.5.3, de (2.38) on obtient

$$\rho_2(f) \leq \rho(\Pi). \tag{2.39}$$

De (2.34), (2.37) et (2.39), on déduit que

$$\rho_2(f) = \rho(f) = \rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right).$$

2.9 Preuve du Corollaire 2.3.4

Nous définissons la fonction entière G par

$$G(z) = \frac{1}{c}\exp\{cF(z)\}, \tag{2.40}$$

où F est une primitive de la fonction entière f. On a

$$G''(z) = \left(f' + cf^2\right)\exp\{cF(z)\}. \tag{2.41}$$

Alors

$$\rho\left(\frac{G''}{G}\right) = \rho\left(f' + cf^2\right), \tag{2.42}$$

et de $\rho_2(G) = \rho(F) = \rho(f)$, alors du Théorème 2.3.2 on obtient

$$\rho(f) = \rho\left(f' + cf^2\right).$$

2.10 Preuve du Théorème 2.4.1

En utilisant (2.8), nous pouvons écrire

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F}\left(\frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f} + ... + A_1\frac{f'}{f} + A_0\right). \tag{2.43}$$

Alors

$$\rho(f) \leq \max\left\{\rho(F), \rho(A_j) \quad (j = 0, ..., k-1), \rho\left(\frac{f^{(i)}}{f}\right) \quad (i = 1, ..., k)\right\}. \tag{2.44}$$

En utilisant (2.9) et Théorème 2.3.1, on obtient

$$\rho(f) \leq \max\left\{\rho\left(\frac{f^{(i)}}{f}\right) : i = 1, ..., k\right\} = \rho\left(\frac{f'}{f}\right) \leq \rho(f), \tag{2.45}$$

et par le corollaire 2.3.2 et le lemme 2.5.5 nous pouvons en déduire facilement que

$$\rho(f) = \rho\left(\frac{f'}{f}\right) = \overline{\lambda}(f) = \lambda(f). \tag{2.46}$$

Maintenant, on note $n(r, 0, f)$ le nombre des zéros de f dans le disque $\{z : |z| < r\}$ et par $\overline{n}(r, 0, f)$ le nombre des zéros distincts de f dans le disque $\{z : |z| < r\}$. Il est claire que si $\frac{f^{(j)}}{f}$ $(j \geq 2)$ n'est pas une constante, alors

$$\overline{n}(r, 0, f) \leq n\left(r, 0, \frac{f}{f^{(j)}}\right). \tag{2.47}$$

Donc

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq N\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) \leq T\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right), \tag{2.48}$$

ce qui implique

$$\overline{\lambda}(f) \leq \rho\left(\frac{f^{(j)}}{f}\right). \tag{2.49}$$

De (2.46) et (2.49), on déduit

$$\rho(f) = \overline{\lambda}(f) = \lambda(f) \leq \rho\left(\frac{f^{(j)}}{f}\right) \leq \rho(f), \tag{2.50}$$

il s'ensuit que

$$\rho(f) = \overline{\lambda}(f) = \lambda(f) = \rho\left(\frac{f^{(j)}}{f}\right) \quad (j \geq 2).$$

2.11 Preuve du Théorème 2.4.2

En utilisant (2.12), nous pouvons écrire

$$\frac{f^{(k)}}{f} = A_1 + A_2 f + ... + A_n f^{n-1}, \tag{2.51}$$

ce qui implique, en utilisant le lemme 1.2.1, que

$$\begin{aligned} T\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) &= T\left(r, A_1 + A_2 f + ... + A_n f^{n-1}\right) \\ &= (n-1)\, T(r, f) + S(r, f). \end{aligned} \tag{2.52}$$

En utilisant le lemme 2.5.1 et le corollaire 2.3.2 on obtient

$$\rho\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = \rho(f) = \max\left\{\overline{\lambda}(f), \overline{\lambda}\left(\frac{1}{f}\right)\right\} = \max\left\{\lambda(f), \lambda\left(\frac{1}{f}\right)\right\}.$$

Conclusion

Les dérivées logarithmiques jouent un rôle très important dans l'étude de la croissance et oscillation des solutions des équations différentielles linéaires et non linéaires dans le plan complexe.

Il y a une extension de la théorie de la distribution des valeures d'une fonction méromorphe dans le plan complexe au disque unité. Plusieurs résultats ont été obtenus dans le disque unité analogues aux ceux du plan complexe. En fait, en 2003, Igor, Gundersen et Heittokangas ont realisé le résultat suivant concernant les derivées logarithmiques dans le disque unité.

Théorème [10] Soit f une fonction méromorphe dans le disque unité D tel que $f^{(j)} \not\equiv 0$. Soient $\varepsilon > 0$ une constante; et k, j des nombres entiers satisfisant $k > j \geq 0$ et $d \in (0,1)$. Alors, il existe un ensemble $E \subset (0,1)$ de mesure logarithmique fini $\int\limits_E \frac{dr}{1-r} < \infty$, telle que

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq \left(\left(\frac{1}{1-|z|}\right)^{(2+\varepsilon)} \max\left\{\log\frac{1}{1-|z|}, T\left(s\left(|z|\right), f\right)\right\}\right)^{k-j}, \ |z| \notin E,$$

où $s\left(|z|\right) = 1 - d\left(1-|z|\right)$. De plus, si $\rho\left(f\right) < \infty$, alors

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq \left(\frac{1}{1-|z|}\right)^{(k-j)(\rho+2+\varepsilon)}, \ |z| \notin E.$$

Ce théorème a beaucoups d'applications dans le disque unité comme ce du plan complexe (voir par exemple [15, 16, 20, 21, 22]).

Bibliographie

[1] **S. Bank**, *General theorem concerning the growth of solutions of first order algebraic differential equations*, Compositio Math. 25 (1972), 61-70.

[2] **S. Bank and I. Laine,** *On the oscillation theory of* $f'' + Af = 0$ *where* A *is entire*, Trans. Amer. Math. Soc. 273(1982), 351-363.

[3] **B. Belaïdi**, *The Properties of Solutions of Some Linear Differential Equations*, Publicationes Mathematicae Debrecen, 78/2 (2011), 317-326.

[4] **B. Belaïdi,** *Estimation of the hyper-order of entire solutions of complex linear ordinary differential equations whose coefficients are entire functions,* E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., N° 5, (2002), 1-8.

[5] **B. Belaïdi and K. Hamani**, *Order and hyper-order of entire solutions of linear differential equations with entire coefficients*, Electron. J. Diff. Eqns, N° 17, Vol. 2003 (2003), 1-12.

[6] **B. Belaïdi and S. Hamouda**, *Orders of solutions of an n-th order linear differential equations with entire coefficients*, Electron. J. Diff. Eqns, N° 63, Vol. 2001 (2001), 1-5.

[7] **B. Belaïdi and S. Hamouda**, *Growth of solutions of an n-th order linear differential equations with entire coefficients*, Kodai Math. J. Vol. 25 (2002), N° 3, 240-245.

[8] **Z. X. Chen,** *The growth of solutions of a class of second order linear differential equations with entire coefficients,* Chin. Ann. of Math. 1999, 20A(1) 7-14.

[9] **Z. X. Chen and C.C. Yang**, *Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations*, Kodai Math. J., 22(1999), 273-285.

[10] **I. Chyzhykov, G. Gundersen and J. Heittokangas**, *Linear differential equations and logarithmic derivative estimates*, Proc. London Math. Soc., 86 (2003), 735-754.

[11] **M. Frei**, *Sur l'ordre des solutions entières d'une équation différentielle linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris 236 (1953), 38-40.

[12] **S. A. Gao, Z. X. Chen and T. W. Chen**, *Oscillation theory of linear differential equations*, Huazhong University of Science and Technology Press, Wuhan, 1988. (in Chinese).

[13] **G. G. Gundersen**, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, J. London Math. Soc. (2) 37 (1988), no. 1, 88-104.

[14] **G. G. Gundersen**, *Finite order solutions of second order linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1988), no. 1, 415-429.

[15] **S. Hamouda**, *Proporities of solutions to linear differential equations with analytic coefficients in the unit disc,* Electron. J. Diff. Equ. 177 (2012) pp. 1-9.

[16] **S. Hamouda**, *Iterated order of solutions of linear differential equations in the unit disc,* Comput. Methods Funct. Theory, 13 (2013) No. 4, 545-555.

[17] **S. Hamouda and B. Belaïdi,** *On the growth of solutions of* $w^{(n)} + e^{-z}w' + Q(z)w = 0$ *and some related extensions,* Hokkaido. Math. J. Vol 35 (2006) N° 3, 573-586.

[18] **W. K. Hayman**, *Meromorphic functions*, Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford, 1964.

[19] **W. K. Hayman**, *The local growth of power series: a survey of the Wiman-Valiron method*, Canad. Math. Bull. 17(1974), no. 3, 317-358.

[20] **J. Heittokangas**, *On complex differential equations in the unit disc*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. 122 (2000) 1-14.

[21] **J. Heittokangas, R. Korhonen and J. Rättyä**, *Growth estimates for solutions of linear complex differential equations.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 29 (2004), No. 1, 233-246.

[22] **J. Heittokangas, R. Korhonen and J. Rättyä**, *Fast growing solutions of linear differential equations in the unit disc,* Result. Math. 49 (2006), 265-278.

[23] **G. Jank and L. Volkmann**, *Einführung in die Theorie der ganzen and meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgeichungen*, Birkhäuser, Basel-Boston, 1985.

[24] **I. Laine**, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter &Co., Berlin, 1993.

[25] **Z. Latreuch and B. Belaidi,** Growth of logarithmic derivatives of meromorphic functions, Mathematica Scandinavica. Vol 113, No 2 (2013).

[26] **A.Z.Mohon'ko**, *The Nevanlinna characteristics of certain meromorphic functions*, (Russian) Teor. Funkcional. Anal. i Priložen. No. 14(1971), 83-87.

[27] **F. Nevanlinna***, über eine klasse meromorpher Functionen*, septième congrés Math scand, Oslo 1930, 81-83.

[28] **G. Valiron**, *Sur la dérivée des fonctions algébroides*, Bull. Soc. Math. France 59 (1931), 17-39.

[29] **G.Valiron**, *Lectures on the General theory of Integral Functions*, translated by E. F. Collingwood, Chelsea, New York, 1949.

[30] **H. Wittich**, *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytishe Funktionen*, 2nd Edition, Springer-Verlag New York. Heidelberg Berlin, 1968.

[31] **H. X. Yi and C. C. Yang**, *Uniqueness theory of meromorphicfunctions*, Mathematics and its Applications, 557. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.