REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

Département de Mathématiques et Informatiques

Mémoire de fin d'étude

pour l'obtention du diplome de Master en Mathématiques

Option : Analyse Harmonique et EDP

Présenté par

Mlle. Khedidja NAHI

THEME

La transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer FBI et l'application

Soutenu le 09 / 06 / 2014 devant le Jury

Sadek GALA	**Président**	**Prof.**	**U. MOSTAGANEM**
Mohand OULD ALI	**Examinateur**	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM**
Amina LAHMAR-BENBERNOU	**Encadreur**	**Prof.**	**U. MOSTAGANEM**

Année universitaire: 2013-2014

Remerciements

Tout d'abord je remercie ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté et le courage pour effectuer ce modeste travail.

Je tiens à remercier

Madame ***Amina LAHMAR-BENBERNOU*** *Professeur à l'université de Mostaganem, qui a accepté la direction de ce mémoire, et a mis à notre disposition tous les moyens nécessaires ainsi que ses conseils et sa présence pendant la réalisation de ce travail.*

Monsieur ***Sadek GALA*** *Professeur à l'université de Mostaganem, qui me fait l'honneur de présider ce jury.*

Monsieur ***OULD ALI*** *Maître de conférences A à l'université de Mostaganem, qui a accepté d'analyser ce travail et me fait l'honneur d'être Examinateur.*

Tous les enseignants que j'ai rencontré ou cotoyé durant mon cursus sans oublier tout le personnel administratif.

Un spécial remerciement à tous mes amies pour leur support, encouragement et présence effective.

Enfin, j'adresse mes remerciements à Mesdames **D. BENSIKADDOUR**, ***Zineb KAISSERLI***, ***Souad LAZARGUI*** *et* ***Nawal MECHROUT***.

Dédicaces

Je dédie ce travail à

A mes très chers parents

et à tous mes frères mes soeurs et leurs enfants.

Table des Matières

Résumé

Ce travail concerne la transformation FBI, qui est d'une part une généralisation de la transformée de *Fourier* dans le sens où:

- Elle fonctionne sous le principe d'*Heisenberg* comme *Fourier* par l'impulsion ξ, et elle est distribuée normalement par rapport à la variable spaciale x.

D'autre part, elle définit un critère d'analyticité local dans le sens où *Bros* et *Iagolnitzer* ont montre que toute distribution f est localement égal à une fonction réelle analytique si et seulement si sa transformation FBI satisfait une estimation microlocale

Notations

Dans tout ce qui suit, les notations suivantes seront utilisées. En cas de changement, elles seront redéfinies conformément aux différentes articulations de la partie.

x	:	la position, $x \in \mathbb{R}^n$,
ξ	:	l'impulsion, $\xi \in \mathbb{R}^n$,
z	:	un nombre complexe,
h	:	la constante de planck,
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	:	espace de Schwartz,
$C^\infty(\mathbb{R}^n)$	:	l'ensemble des fonctions infiniment dérivable,
$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$	:	l'ensemble des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact dans $\mathbb{R}^n$,
$L^p(\mathbb{R}^n)$	:	$\left\{ f \text{ mesurable sur } \mathbb{R}^n \text{ et } \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|^p \, dx < +\infty \right\}, 1 \leq p < \infty,$
$\langle x \rangle^m = (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}}$	:	fonction d'ordre où $m \in \mathbb{R}$,
$\\|f\\|_p$	:	la norme de la fonction f dans L^p,
$Supp f \ = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \neq 0\}}$	:	support d'une fonction f,
$D_x = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \ i^2 = -1$	:	la différentielle au point x,
$\langle ., . \rangle$	:	produit scalaire,

Introduction

La transformation FBI est une généralisation de la transformation de *Fourier*, elle a étée developpée par les physiciens mathématiciens *Jacques Bros* et *Daniel Iagolnitzer* afin de caractiser l'analyticité locale des distributions sur $\mathbb{R}^n$.

La transformation FBI est l'equivalent du front d'onde analytique (WFA) traduissant par les japonais: *Mikio Sato*, *Masaki Kashiwara* et *Takahiro Kawai* dans leur approches d'analyse microlocale, approche qui comprend des techniques developpées dans les années 50 basées sur la transformée de Fourier afin d'étudier les EDPà coefficients variables linéaires et non linéaires, des opérateurs pseudo-différentiels, des opérateurs intégraux de *Fourier.*

Le terme microlocale spaciale est aussi une localisation par rapport à l'espace cotangent donnez en tout point (impulsion).

De plus la tranformation FBI permet de montrer l'analyticité des solutions d'EDP analytique elliptique.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intésses à cette transformation, afin de resoudre accessible.

On pout dire d'une manière que cette transformation dépendons deux variables x et ξ où la variable spaciale x suit la loi normale et la variable ξ est déterminée par la transformation de *Fourier* et appartient à l'espace cotangent, elle détermine un gradient d'une fonction par la variable x.

Plan du mémoire:

Dans le premier chapitre nous rappelons des notions fondamentales de *Fourier* et d'analyticité.

Dans le second chapitre, nous définissons la transformation FBI, ses caracteristiques, ses propriétés.

Chapitre 1

Rappels et définitions

1.1 La Transformation de Fourier [3]

Définition 1 *Soit f une fonction intégrable à valeurs complexes. Sa transformée de Fourier est la fonction $F(f) = \hat{f}$ donnée par la formule:*

$$F(f) : \xi \mapsto \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(-i\xi x)\, dx,\ \forall \xi \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

-Si la transformation de Fourier est intégrable, alors sa transformée inverse est donnée par:

$$\check{f}(x) = F^{-1}\left(\hat{f}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \exp(+i\xi x)\, d\xi. \tag{1.2}$$

Propriétés 1 **1** *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est continue, bornée alors:*

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \left|\hat{f}(\xi)\right| = 0$$

2 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, et $\hat{f}$ leur transformée de Fourier on a:*

$$\widehat{\hat{f}}(x) = f(-\xi).$$

3 *Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$.*

Alors:

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi).$$

Remarque 1 *Dans tout ce qui suit, nous prenons une fonction f de l'espace de Schwartz ($f \in \mathcal{S}$), pour assurer l'existence de la transformée de Fourier $\hat{f}$ et de son inverse $\check{f}$. Dans le cas d'une distribution, nous travaillons sur $\mathcal{S}'$.*

La transformée de Fourier d'une distribution tempérée est donnée par:

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \langle FT, \phi \rangle = \langle T, F\phi \rangle$$

1.2 Fonctions analytiques [4]

Définition 2 *Une fonction analytique est une fonction localement donnée par une série convergente, il existe deux types des fonctions analytiques: réelle et complexe. Les deux types des fonctions sont infiniment différentiable.[4]*

Définition 3 *(pour le cas réel): Une fonction f est analytique réelle sur un ouvert D dans la droite réelle si pour tout $x_0 \in D$, on peut écrire:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\ &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \\ &\quad \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \end{aligned} \tag{1.3}$$

les coefficients a_0, a_1, a_2,$\cdots$ sont des nombres réels et la série converge.

Définition 4 *(Dans le cas complexe): Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f : U \to \mathbb{C}$. On dit que f est analytique en $z_0 \in U$ s'il existe $\rho = \rho_0 > 0$ tel que pour tout $k \in D(0, \rho)$ tel que D est le disque de centre 0 et de rayon ρ on a:*

$$f(z_0 + k) = \sum_{n \geq 0} a_n k^n \text{ pour des coefficients } a_n \in \mathbb{C}.$$

Propriétés 2 **1** *La fonction est analytique si et seulement si sa série de Taylor converge.*

2 *Une fonction analytique est infiniment différentiable tel que la série de Taylor*

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \tag{1.4}$$

converge vers une fonction $f(x)$ pour x au voisinage de x_0.

3 *Une fonction f est définie sur un sous ensemble de $\mathbb{R}$ est dite analytique réelle en un point x s'il existe un voisinage D de x où f est analytique réelle.*

4 *Une fonction est analytique complexe si et seulement si elle est holomorphe, c'est à dire qu'elle est complexe différentiable*

Example 1 **1** *Tout polynôme (réel ou complexe) est une fonction analytique. Car si un polynôme est de degré n, tous les termes de degré supérieur à n, dans son expansion en série de Taylor sont nuls, donc cette série est de somme finie, alors convergente.*

2 *Soit:*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad D \to \mathbb{R}^n \\ x \quad &\mapsto \quad f(x) = |x| \end{aligned}$$

Si $D = \mathbb{R}^n$ où $\mathbb{C}^n$, la fonction f n'est pas analytique, car elle n'est pas dérivable au point 0.

3 *La fonction conjugué $Z \to Z^*$ n'est pas analytique complexe, bien que sa restriction sur la droite réelle est la fonction identité et donc analytique réelle de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}^2$*

1.2.1 Caractérisation fondamentale

Si f est une fonction indéfiniment dérivable définie sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}$, alors les conditions suivantes sont équivalentes:

i f est analytique réelle.

ii Il existe une extension analytique complexe de f pour un ensemble ouvert $G \subset \mathbb{C}$ qui contient D.

iii Pour tout compact $K \subset D$, il existe une constante c telle que pour tout $x \in K$ et pour tout entier non négatif k, on a:

$$\left| \frac{d^k f}{dx^k}(x) \right| \leq C^{k+1} k!.$$

Propriétés 3 *Les fonctions analytiques complexes sont exactement équivalentes à des fonctions holomorphes.*

Chapitre 2

La transformation FBI

2.1 La transformation FBI

Malgré le grand succès qu'a eu la transformée de *Fourier*, mais cette dernière ne peut pas être appliqué pour les fonctions analytiques et aussi elle ne nous permet pas d'avoir l'information sur la position et l'impulsion en même temps. C'est dans ce sens que *Bros* et *Iagolnitzer* ont généralisé la transformation de *Fourier*, en s'inspirant du principe d'incertitude d'*Heisenberg*, pour pouvoir l'appliquer a des fonctions analytiques. Cette généralisation est dite transformation FBI de *Fourier*, *Bros* et *Iagolnitzer*

2.1.1 Définition de la transformation FBI [1]

Définition 5 *Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et soit h la constante de Planck. Pour $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, la transformation FBI en semi-classique de u définit sur $\mathbb{R}^{2n}$, elle est donnée par:*

$$Tu(x, \xi, h) = \alpha_{n,h} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{i(x-y)\xi}{h}\right) \exp\left(\frac{-(x-y)^2}{2h}\right) u(y)\, dy, \tag{2.1}$$

avec un coeficient de normalisation

$$\alpha_{n,h} = 2^{-\frac{n}{2}} (\pi h)^{-\frac{3n}{4}}.$$

Remarque 2 **1** *La transformée FBI peut s'exprimer aussi par:*

$$Tu\,(x,\xi,h) = \alpha_{n,h} \left\langle u_y, \exp\left(\frac{i\,(x-y)\,\xi}{h}\right) \exp\left(\frac{-\,(x-y)^2}{2h}\right) \right\rangle_{S,S'}. \qquad (2.2)$$

2 *Cette transformation nous permit de localiser la solution en x, et ξ en même temps.*

Propriétés 4

1 *Pour tout $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, nous avons:*

$$Tu(x,\xi,h) = \alpha_{n,h} \exp\left(\frac{-\xi^2}{2h}\right) \tilde{T}u\,(Z,h)\,, \qquad (2.3)$$

avec

$$Z = x - i\xi,$$

et

$$\tilde{T}u\,(Z,h) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\frac{-\,(Z-y)^2}{2h} u(y)dy.$$

Cette dernière est dite transformation de Bargman

Propriétés 5 **2** *Pour tout $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ la fonction $\exp\left(\frac{\xi^2}{h}\right) Tu\,(x,\xi,h)$ est une fonction holomorphe en $Z = x - i\xi$*

3 *T est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ pour $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $Tu \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$, et on a :*

$$\|Tu\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,. \qquad (2.4)$$

4 *Pour tout $u \in S'(\mathbb{R}^n)\,,$ on a:*

$$hD_x Tu = (\xi + ihD_\xi)\,Tu$$

Preuve 1 **1** *Soit* $Z = x - i\xi$*, tel que* $x, \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\tilde{T}u\left(Z,h\right) &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp \frac{-\left(Z-y\right)^2}{2h} u(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp \frac{-\left(x-i\xi-y\right)^2}{2h} u(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp \frac{-\left(x-y-i\xi\right)^2}{2h} u(y)dy \\
&= \exp\left(\frac{\xi^2}{2h}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\frac{(x-y)}{h}\xi) \exp \frac{-\left(x-y\right)^2}{2h} u(y)dy \\
&= \frac{1}{\alpha_{n,h}} \exp\left(\frac{\xi^2}{2h}\right) Tu(x,\xi;h).
\end{aligned}$$

2 *Donc il est claire que la fonction* $\exp\left(\frac{\xi^2}{2h}\right) Tu(x,\xi,h)$ *est holomorphe en tout point* $Z \in C^n$*. En effet, nous avons :*

$$\exp\left(\frac{\xi^2}{2h}\right) Tu(x,\xi;h) = \alpha_{n,h} \tilde{T}u\left(Z;h\right)$$

et

$$\tilde{T}u\left(Z,h\right) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp \frac{-\left(Z-y\right)^2}{2h} u(y)dy;$$

de plus, l'intégrale ne dépend pas de Z *et la fonction* $\exp$ *est indéfiniment dérivable.*

3 *Soit* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*, la fonction* Tu *est* C^∞*, donc localement intégrable, et pour*

$M, N > 0$, calculons:

$$\begin{aligned}
\|Tu\|^2_{L^2(|x|\leq M,|\xi|\leq N)} &= \int_{|x|\leq M,|\xi|\leq N} Tu\,(x,\xi;h)\,\overline{Tu\,(x,\xi;h)}dxd\xi \\
&= \alpha^2_{n,h}\int_{|x|\leq M,|\xi|\leq N}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\exp\frac{i\,(x-y)\,\xi}{h}\exp\frac{-\,(x-y)^2}{2h}u(y)dy\right]\times \\
&\quad \left[\int_{\mathbb{R}^n}\exp\frac{i\,(x-y')\,\xi}{h}\exp\frac{-\,(x-y')^2}{2h}\bar{u}(y)dy'\right]dxd\xi \\
&= \alpha^2_{n,h}\int_{\substack{|x|\leq M,\\|\xi|\leq N}}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\exp\frac{i\,(y-y')\,\xi}{h}\exp(\frac{-\left((x-y)^2+(x-y')^2\right)}{2h})\times \qquad (2.5) \\
&\quad u(y)\bar{u}(y)dydy'dxd\xi \\
&= \left[(\pi h)^{\frac{-n}{2}}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\int_{|x|\leq M}\exp(\frac{-(x-y)^2}{2h})\exp(\frac{-\,(x-y')^2}{2h})u(y)\bar{u}(y)\right]\times \qquad (2.6) \\
&\quad \left[(2\pi h)^{-n}\int_{|\xi|\leq N}\exp\frac{-\,(y'-y)\,\xi}{h}d\xi\right]dxdydy' \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

quand $N \to +\infty$, on obtient:

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\|Tu\|^2_{L^2(|x|\leq M,|\xi|\leq N)} &= (\pi h)^{\frac{-n}{2}}\int_{\mathbb{R}^{2n}}\int_{|x|\leq M}\left[\exp(-\frac{(x-y)^2}{2h})\exp(-\frac{(x-y')^2}{2h})u(y)\bar{u}(y)\right]\times \\
&\quad [\delta\,\{y=y'\}]\,dydy'dx \\
&= (\pi h)^{\frac{-n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{|x|\leq M}\exp(-\frac{(x-y)^2}{h})\,|u(y)|^2\,dydx
\end{aligned}$$

de plus, quand $M \to +\infty$, nous avons:

$$\begin{aligned}
\lim_{M\to+\infty}\lim_{N\to+\infty}\|Tu\|^2_{L^2(|x|\leq M,|\xi|\leq N)} &= (\pi h)^{\frac{-n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(y)|^2\,dy\int_{|x|\leq M}\exp(\frac{-(x-y)^2}{h})dx \\
&= (\pi h)^{\frac{-n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(y)|^2\,dy\,(\pi h)^{\frac{+n}{2}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}|u(y)|^2\,dy = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.
\end{aligned}$$

On sait que

$$\hat{1} = \delta \Longrightarrow \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(\frac{-ix\xi}{h}\right)dx = \delta$$

D'où

$$(2\pi h)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(\frac{-i(y-y')\xi}{h}\right)d\xi=\delta(y=y').$$

4 *Soit $u\in S'(\mathbb{R}^n)$:*

$$\begin{aligned} D_xTu(x,\xi,h) &= D_x\left[\alpha_{n,h}\int_{\mathbb{R}^n}\exp(\frac{ix\xi}{h})\exp\frac{-(x-y)^2}{2h}\exp(\frac{-iy\xi}{h})u(y)dy\right] \\ &= \alpha_{n,h}\int_{\mathbb{R}^n}D_x\left[\exp(\frac{ix\xi}{h})\exp\frac{-(x-y)^2}{2h}\right]\exp(\frac{-iy\xi}{h})u(y)dy, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} D_x\left[\exp(\frac{ix\xi}{h})\exp\frac{-(x-y)^2}{2h}\right] &= \left[(\frac{i\xi}{h})\exp(\frac{ix\xi}{h})\exp\frac{-(x-y)^2}{2h}\right]- \\ &\quad \left[\frac{(x-y)}{h}\exp(\frac{ix\xi}{h})\exp\frac{-(x-y)^2}{2h}\right]. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} D_xTu(x,\xi,h) &= \alpha_{n,h}\int_{\mathbb{R}^n}i\frac{\xi}{h}\exp(\frac{i(x-y)\xi}{h})\exp\frac{-(x-y)^2}{2h}u(y)dy+ \\ &\quad \alpha_{n,h}\int_{\mathbb{R}^n}i^2\frac{(x-y)}{h}\exp(\frac{i(x-y)\xi}{h})\exp\frac{-(x-y)^2}{2h}u(y)dy \\ &= \alpha_{n,h}\int_{\mathbb{R}^n}i\frac{\xi}{h}\exp(\frac{i(x-y)\xi}{h})\exp\frac{-(x-y)^2}{2h}u(y)dy+ \\ &\quad \alpha_{n,h}\int_{\mathbb{R}^n}i^2\frac{(x-y)}{h}\exp(\frac{i(x-y)\xi}{h})\exp\frac{-(x-y)^2}{2h}u(y)dy \\ &= i\alpha_{n,h}\int_{\mathbb{R}^n}(\xi+ih\frac{(x-y)}{h})\exp(\frac{i(x-y)\xi}{h})\exp\frac{-(x-y)^2}{2h}u(y)dy \\ &= i(\xi+ihD_\xi)Tu(x,\xi;h)\text{ avec }D_\xi=\frac{1}{i}d_\xi\text{ et }D_x=\frac{1}{i}d_x. \end{aligned}$$

Corollaire 1 *Pour tout $u\in L^2(\mathbb{R}^n)$. On a*

$$u=T^*Tu\ \text{ où } T^*\ \text{ est l'adjoint de } T.$$

Preuve de corollaire: *Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, d'aprés propriété (3) on a :*

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} &= \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \Longleftrightarrow \langle Tu, Tu\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \langle u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\Longleftrightarrow \langle T^*Tu, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} = \langle u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\Rightarrow T^*Tu = u.
\end{aligned}$$

Example 2 *Soit la fonction Gaussienne définie par:*

$$\begin{aligned}
f \ &: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\
&\quad y \mapsto \exp\left(\frac{-y^2}{2h}\right).
\end{aligned}$$

Sa transformation FBI est donnée par :

$$T\left(\exp\left(\frac{-y^2}{2h}\right)\right)(x,\xi,h) = \alpha_{n,h} 2^{\frac{-n}{2}} e^{\left(\frac{-\xi^2}{4h}\right)} e^{\left(\frac{-x^2}{4h}\right)} e^{\left(\frac{-ix\xi}{4h}\right)}.$$

En effet:

$$\begin{aligned}
T\left(\exp\left(\frac{-y^2}{2h}\right)\right)(x,\xi,h) &= \alpha_{n,h}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{i(x-y)\xi}{h}\right)\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2h}\right)\exp\left(\frac{-y^2}{2h}\right)dy \\
&= \alpha_{n,h}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{i(x-y)\xi}{h}\right)\exp\left(\frac{-\left(y-\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{4}}{h}\right)dy \\
&= \alpha_{n,h}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{i(x-y)\xi}{h}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{4h}\right)\exp\left(\frac{-\left(y-\frac{x}{2}\right)^2}{h}\right)dy \\
&= \alpha_{n,h}\exp\left(-\frac{x^2}{4h}\right)\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{i(x-y)\xi}{h}\right)\exp\left(\frac{-\left(y-\frac{x}{2}\right)^2}{h}\right)dy.
\end{aligned}$$

On pose:

$$y - \frac{x}{2} = v \Rightarrow dy = dv.$$

Donc

$$\begin{aligned}
T\left(\exp\left(\frac{-y^2}{2h}\right)\right)(x,\xi,h) &= \alpha_{n,h}\exp\left(-\frac{x^2}{4h}\right)\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(\frac{i\left(\frac{x}{2}-v\right)\xi}{h}\right)\exp\left(\frac{-v^2}{h}\right)dv \\
&= \alpha_{n,h}\exp\left(-\frac{x^2}{4h}\right)\exp\left(\frac{ix\xi}{2h}\right)\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(\frac{-iv\xi}{h}\right)\exp\left(\frac{-v^2}{h}\right)dv \\
&= \alpha_{n,h}\exp\left(\frac{ix\xi}{2h}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{4h}\right)F_{h,v\to\xi}\left(\exp\left(\frac{-v^2}{h}\right)\right).
\end{aligned}$$

Il reste a calculer $F_{h,v\to\xi}\left(\exp\left(\frac{-v^2}{h}\right)\right)$ *. Pour des raison de simplification, on calcule Sur* $\mathbb{R}$*.*

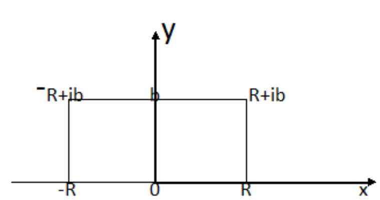
$$\begin{aligned}
F_{h,v\to\xi}\left(\exp\left(\frac{-v^2}{h}\right)\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(\frac{-i\xi v}{h}\right)\exp\left(\frac{-v^2}{h}\right)dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{v^2+i\xi v}{h}\right)dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{\left(v+\frac{i\xi}{2}\right)^2}{h}\right)\exp\left(\frac{\xi^2}{4h}\right)dv \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\exp\left(\frac{\xi^2}{4h}\right)\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{\left(v+\frac{i\xi}{2}\right)^2}{h}\right)dv.
\end{aligned}$$

On pose

$$f(z)=\exp\left(\frac{-z^2}{h}\right)\ \textit{ tel que } z=v+\frac{i\xi}{2}$$

La fonction f *est holomorphe dans* $\mathbb{C}$ *donc*

$$\int_D f(z)\,dz=0\ \textit{ telque } D=\left]-R,R\right[\cup\left]0,b\right[\cup\left]R,-R\right[\cup\left]b,0\right[$$



D'où

$$\begin{aligned}\int_D f(z)\,dz &= 0 \Leftrightarrow \int_{-R}^{R} \exp\left(\frac{-v^2}{h}\right) dv + \int_0^b \exp\left(\frac{-\left(R+\frac{i\xi}{2}\right)^2}{h}\right) d\xi + \\ & \int_R^{-R} \exp -\frac{\left(v+\frac{ib}{2}\right)^2}{h} dv + \int_b^0 \exp\left(-\frac{\left(-R+\frac{i\xi}{2}\right)^2}{h}\right) d\xi.\end{aligned}$$

Où $\forall R$*:*

$$\begin{aligned}\int_0^b \left|\exp\left(\frac{\xi^2}{4h}\right)\exp\left(\frac{-iR\xi}{h}\right) d\xi\right| &\leq \int_0^b \exp\left(\frac{\xi^2}{4h}\right) d\xi \\ &\leq \exp\left(\frac{b^2}{4h}\right) .\end{aligned}$$

Où

$$0 \leq \xi \leq b \Rightarrow 0 \leq \frac{\xi^2}{4h} \leq \frac{b^2}{4h} \Rightarrow 1 \leq \exp\left(\frac{\xi^2}{4h}\right) \leq \exp\left(\frac{b^2}{4h}\right).$$

D'où:

$$\begin{aligned}\lim_{R\to+\infty}\int_0^b \exp\left(\frac{\left(-\frac{(R+i\xi)}{2}\right)^2}{h}\right) d\xi &= \lim_{R\to+\infty}\exp\left(\frac{-R^2}{h}\right)\int_0^b \exp\left(\frac{\xi^2}{4h}\right)\exp\left(\frac{-iR\xi}{h}\right) d\xi \\ &= 0.\end{aligned}$$

De même pour

$$\int_b^0 \exp\left(\frac{(-R+i\xi)^2}{h}\right) d\xi = 0 \text{ quand } R \to +\infty.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_D f(z)\,dz &= 0 \Leftrightarrow \int_{-R}^{R} \exp\left(\frac{-v^2}{h}\right) dv + \int_R^{-R} \exp\left(\frac{-\left(v+\frac{ib}{2}\right)^2}{h}\right) dv = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_{-R}^{R} \exp\left(\frac{-v^2}{h}\right) dv = \int_{-R}^{R} \exp\left(\frac{-\left(v+\frac{ib}{2}\right)^2}{h}\right) dv = \sqrt{\pi h}.\end{aligned}$$

En dernier, la transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$ est donnée par:

$$F_{h,v\to\xi}\left(\exp\left(\frac{-v^2}{h}\right)\right)(\xi) = 2^{\frac{-n}{2}}\exp\left(\frac{-\xi^2}{4h}\right).$$

Ainsi,

$$T\left(\exp\left(\frac{-y^2}{2h}\right)\right)(x,\xi,h) = \alpha_{n,h}2^{\frac{-n}{2}}e^{\left(\frac{-\xi^2}{4h}\right)}e^{\left(\frac{-x^2}{4h}\right)}e^{\left(\frac{-ix\xi}{4h}\right)}.$$

2 *Soit $\delta \in S'(\mathbb{R}^n)$, calculons sa transformation FBI:*

$$\begin{aligned} T(\delta)(x,\xi,h) &= \exp\left(\frac{ix\xi}{h}\right)(T\circ F_h)(\delta)(\xi,-x,h) \\ &= \exp\left(\frac{ix\xi}{h}\right)T(F_h(\delta))(\xi,-x,h) \\ &= \exp\left(\frac{ix\xi}{h}\right)T(1)(\xi,-x,h), \end{aligned}$$

avec:

$$\begin{aligned} T(1)(\xi,-x,h) &= \alpha_{n,h}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(\frac{i(\xi-y)(-x)}{h}\right)\exp\frac{-(\xi-y)^2}{2h}dy \\ &= \alpha_{n,h}\exp\left(\frac{-i\xi x}{h}\right)\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(\frac{-(\xi-y)^2}{2h}\right)\exp\left(\frac{iyx}{h}\right)dy \\ &= \alpha_{n,h}\exp\left(\frac{-i\xi x}{h}\right)\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(\frac{-(\xi-y)^2}{2h}\right)\exp\left(\frac{iyx'}{2h}\right)dy \qquad \textit{tel que } x'=2x. \end{aligned}$$

Posons $v=\xi-y \Rightarrow dv=-dy$.

Donc:

$$
\begin{aligned}
T(1)(\xi,-x,h) &= \exp\left(\frac{-i\xi x}{h}\right)\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(\frac{-v^2}{2h}\right)\exp\left(\frac{i(\xi-v)x'}{2h}\right)dv \\
&= \alpha_{n,h}\exp\left(\frac{-i\xi x}{h}\right)\exp\left(\frac{+i\xi x}{h}\right)\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(\frac{-v^2}{2h}\right)\exp\left(\frac{-ivx'}{2h}\right)dv \\
&= \alpha_{n,h}TF\left(\exp\left(\frac{-v^2}{2h}\right)\right) \\
&= \alpha_{n,h}2^{\frac{-n}{2}}\exp\left(\frac{-(x')^2}{8h}\right) \\
&= \alpha_{n,h}2^{\frac{-n}{2}}\exp\left(\frac{-(2x)^2}{8h}\right) = \alpha_{n,h}2^{\frac{-n}{2}}\exp\left(\frac{-x^2}{4h}\right).
\end{aligned}
$$

2.2 Le micro-support [2]

Définition 6 *Soit u_h une famille de distribution de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*

On dit que $(x_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ n'est pas dans le microsupport de u_h, lorsqu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de (x_0,ξ_0), et deux réels $\delta>0$ et $h_0>0$ tels que:

$$\forall h\in\left]0,h_0\right],\ \forall(x,\xi)\in\mathcal{V},\ Tu(x,\xi;h)=\mathcal{O}(e^{-\delta/h}). \tag{2.8}$$

Le complémentaire de telle point est appelé micro-support du u et est noté $MS(u)$.

Remarque 3

1 *Le support ne dépend que x pour u, mais le micro-support dépend que x,ξ pour Tu.*

2 *Le micro-support $Ms(u)\subset\mathbb{R}^{2n}$ est un ensemble fermé vu qu'il est le complémentaire du plus grand ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$.*

Définition 7 *[**?**] Front d'onde: Soit $u\in D'(\mathbb{R}^n)$, on dit u est microlocalement de classe $\mathbb{C}^\infty$en un point $(x_0,\xi_0)\in\Omega\times(\mathbb{R}^n/0)$ s'il existe un ouvert $\mathcal{W}$ vérifiant $x_0\in\mathcal{W}\subset\Omega$ et un cône ouvert Γ de $(\mathbb{R}^n/\{0\})$ contenant $\xi_0$tels l'on ait*

$$\forall\varphi\in C_0^\infty(\mathcal{W}),\exists c\qquad\left|\widehat{\varphi u}(\xi)\right|\le c(1+|\xi|)^{-N}\ \textit{pour}\ \xi\in\Gamma. \tag{2.9}$$

L'ensemble des (x_0, ξ_0) *où* u *n'est pas microlocalement de classe* $\mathbb{C}^\infty$ *est un fermé conique de* $\Omega \times (\mathbb{R}^n /0)$ *appelé le front d'onde de* u *et noté* $WF(u)$

Example 3 *Dans* $\mathbb{R}^n$*, le front d'onde de* δ *est* $0 \times (\mathbb{R}^n / \{0\})$*. En effet, pour* $x_0 \neq 0$*, il suffit de choisir* $\mathcal{W}$ *ne contenant pas* 0 *et le produit* $\varphi\delta$ *seront nuls*

Remarque 4 *[2]*

1 *Si* u *ne dépend pas de* h*, la notion du microsupport de* u *est fortement reliée à celle de front d'onde analytique d'une distribution, noté* WF *(wave front set of* u*), et nous avons:*

$$Ms(u) = WF_a(u) \cup [Supp(u) \times \{0\}] \tag{2.10}$$

2 $|Tu|$ *est exponentiellement petit dans un voisinage réel si et seulement si* $|Tu|$ *est exponentiellement petit dans un voisinage complexe.*

Example 4 **1** $MS(\delta) = \{0\} \times \mathbb{R}^n$ *où* δ *est la fonction de Dirac* $(\delta \in S'(\mathbb{R}^n))$.

2 $MS(1) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$.

Conclusion

La transformation de FBI , grâce à ses estimations microlocales et caracterisations permet de déterminer l'analyticité des solutions des EDP lineaires et non lineaires.

1- On utilise cette transformation sur un opérateur pseudo-différentiel en un autre opérateur pseudo-différentiel.

2- On utilise les critéres d'analyticité locales

Bibliographique

Bibliographie

[1] A. Benbernou: Analyse Spectrale et Micro-Localisation, Mémoire de Magister en Mathématique (2010).

[2] A. Martinez: Microlocalisation transformation FBI globale (livre).

[3] Transformée de Fourier (physique quantique S6-P/PS 2011-2012).

[4] Fonctions analytiques (2010-2011)

Mots clés

FBI, Micro support, transformation de Fourier, Gaussienne