REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude

pour l'obtention du diplome de Master en Mathématiques

Option : Analyse Harmonique et EDP

Présenté par

M$^{\text{lle}}$. Hanane Hacene Saida

THEME

Les EDP sur les variétés.

Soutenu le: 09 / 06 /2014 devant le Jury

Sadek Gala	**Président**	**Prof**	**U. MOSTAGANEM**
Mohand Ould ali	**Examinateur**	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM**
Amina Lahmar BenBernou .	**Encadreur**	**Prof.**	**U. MOSTAGANEM**

Année universitaire 2013-2014

Remerciements

J'adresse mes remerciements, en priorité, à mon encadreur Madame

Amina LAHMAR BENBERNOU Professeur à l'université de Mostaganem qui m'a soutenu.

Je remercie également monsieur le Professeur Gala Sadek pour avoir excepté d'examiner ce travail.

Et monsieur Ould Ali pour avoir excepté d'être examinateur.

J'adresse aussi mes remerciements à tous mes professeurs qui ont toujours répondu présent à mes appels.

Dédicaces

Je dédie ce travail à

Mes parents, ma famille,Mes frères,

Mes amis et, surtout ma mère.

Résumè

Dans ce travail nous avons expliqué la résolution d'une EDP non linéaire sur une variété Riemannienne et symplectique.

Table des Matières

Introduction

La géométrie symplectique est une branche de la géométrie différentielle et de la topologique. Il étudie les variétés symplectique muni d'un $2-$forme symplectique, elle trouve sur origine dans la formulation du hamiltone de la mécanique classique où l'espace de phase de certains systeme classiques dont les solutions appartenent de variétés symplectique.

Plan de travail: Est organisé en 2 chapitres.

Dans le 1^{er} chapitre on a les outil de la géométrie différentielle et quelque définitions intéressent.

Dans le $2^{éme}$ chapitre nous avons la variété lagrangienne que nous permet de résoudre EDP sons forme $H\left(x, d\varphi_x\right).$

Chapitre 1

Les outils de la géométrie différentielle

1.1 Variété différentielle:

Définition 1 *: Une variété topologique M de dimension n est un espace topologique séparé, telle que pour tout point $p \in M$, $\exists u \in M$ un ouvert de M contenant p et un homéomorphisme $\varphi : u \to \varphi(u) \subset \mathbb{R}^n$.*

On dit alors que (u, φ) est une carte locale de M.

Remarque 1 *: φ Une application homéomorphisme* $\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi & \text{est bijective} \\ \varphi, \varphi^{-1} & \text{est continue} \end{cases}$

Définition 2 *: Un ensemble de carte locale (u_i, φ_i) telle que :$M = \cup_{i \in I} u_i$, et appelé atlas de variété M.*

Remarque 2 *: Une variété topologique peut admettre plusieurs atlas de classe C^r, mais la réunion de deux atlas de classe C^r n'est pas forcement de classe $C^r (r \geq 1)$.*

En effet, les deux applications :

$$\begin{array}{ccc} Id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & et & \Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto Id_{\mathbb{R}}(x) = x & & x \mapsto \Psi(x) = x^3 \end{array} \tag{1.1}$$

forment deux atlas de classe C^{∞} mais leurs réunion n'est pas forcement de classe C^{∞}vu que $\left(Id_{\mathbb{R}}\circ\Psi^{-1}\right)(x)=x^{\frac{1}{3}}$ n'est pas différentielle.

1.2 Espace tangent et cotangent:

Définition 3 (Espace tangent) *: Soit une variété M. L'espace tangent à M en x, noté T_xM ,Est par définition, l'ensemble des x dérivations de l'algèbre $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$, c'est-à-dire des applications linéaires*

$$\begin{aligned} \varphi &: C^{\infty}(M,\mathbb{R})\rightarrow\mathbb{R} \\ f &\mapsto \varphi.f \end{aligned} \tag{1.2}$$

vérifiant :

$$\varphi.(fg)=(\varphi.f)g(x)+f(x)(\varphi.g),\ \forall f,g\in C^{\infty}(M,\mathbb{R}). \tag{1.3}$$

C'est donc un espace vectoriel, sous-espace du dual $C^{\infty}(M,\mathbb{R})^{*}$ de $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$.

A chaque courbe $\gamma:I\rightarrow M$ de classe C^1 de M passant par x correspond une x-dérivation: si $\gamma(s)=x$ $(s\in I)$, il s'agit de

$$\frac{d}{dt}\gamma(s):f\mapsto\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)|_{s=t} \tag{1.4}$$

On l'appelle le vecteur tangent à γ en $t=s$, ou en x, s'il est clair que $x=\gamma(s)$. On note aussi $\dot{\gamma}(s)$.

Définition 4 (Espace cotangent) *: Une 1 forme ou un convecteur en $x\in M$, est une forme linéaire sur T_xM, c'est-à-dire une application linéaire*

$$\begin{aligned} w_x &: T_xM\rightarrow\mathbb{R} \\ X_x &\longmapsto w_x(X_x). \end{aligned} \tag{1.5}$$

L'espace cotangent à M en x, noté $T_x^{*}M$ est l'espace vectoriel des 1 formes en *x. c'est donc l'espace vectoriel dual de*

$$T_xM : T_x^*M = (T_xM)^*. \tag{1.6}$$

Définition 5 (Champ de vecteur) *: Un champ de vecteur sur une variété différentielle M^n est la donnée d'une application $X : M \to TM$ de classe C^∞ telle que pour tout $x \in n$, $X(x) \in T_xM$.*

L'ensemble de champs de vecteurs sur M est noté $\chi(M)$

Remarque 3 *: Grace à la structure vectorielle de l'espace tangent en tout point $\chi(M)$, muni des opérations suivantes:*

$$\begin{aligned} \forall X,\ Y &\in \chi(M),\ \ (X+Y)(x) = X(x) + Y(x) \\ \forall \alpha &\in \mathbb{R},\ \forall X \in \chi(M) : (\alpha X)(x) = \alpha X(x) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Le champ de vecteur est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

On définit la multiplication ponctuelle par:

$$\forall f \in C^\infty(M),\ \forall X \in \chi(M),\ \ (fX)(p) = f(p).X(p) = f(p)X_P \tag{1.8}$$

où $C^\infty(M)$ est le $\mathbb{R}-$espace vecteriel des fonctions $f : M \to \mathbb{R}$, de classe C^∞. fX est alors un champs de vecteur sur M.

En coordonnées locales , si $(u,\ \varphi)$ une carte sur M telle que $\varphi = (x_1, ..., x_n)$, alors:

$$X \in \chi(M) \Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i},\ X_i \in C^\infty(M). \tag{1.9}$$

1.3 Métrique et variété riemannienne:

Définition 6 (Métrique riemannienne) *: Soit M une variété différentieble. Un tenseur métrique ou une métrique riemannianne est une application que chaque couple de vecteurs $(X,\ Y) \in \mathbb{R}^2$ vérifient les conditions suivantes:*

1 *Pour tout $x \in M$, l'application:*

$$g \quad : \quad T_xM \times \ T_xM \rightarrow \mathbb{R} \qquad (1.10)$$
$$(X,\ Y) \mapsto g\ \ (X,\ Y)\,.$$

est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive, i.e,

i *) $\forall X, Y \in T_xM$ tel que $g\ (X,\ Y) = g\ (Y,\ X)\,.$*

ii *) $\forall X \in T_xM$ tel que $g\ (X,\ X) \geq 0.$*

iii *) $g\ (X,\ X) = 0$ si et seulement si $X = 0$.*

2 *Si $u \subset M$ est un ouvert de M et $X, Y \in \chi\,(u)$, alors la fonction*

$$p \rightarrow g\ \ (X,\ Y)\,(x) = g\,(X\,(x)\,,\ Y\,(x)) \qquad (1.11)$$

est différentiable.

Définition 7 (Variété Riemannianne) *: Soit M est une variété différentiel et g une métrique Riemannianne. Alors le couple (M, g) forme une variété Riemannienne ou espace Riemannienne .*

Remarque 4 *Les sphères géodésiques sur une variété riemannienne M sont les sphères pour la distance géodésique sur M. Dans le cas où M est une sous variété de $\mathbb{R}^n$, avec la métrique induite par la métrique standard, la distance géodésique sur M est différente de la distance euclidienne, et les sphères géodésiques sur M ne sont pas en général les intersections de M avec d (d : la distance).*

1.4 Géométrie symplectique:

Si on considère la vitesse il faut rajouté des autres composantes à $p = (p_1,\, p_2....,\, p_n)$ qui représente la vitesse angulaire.

L'espace de phase est représenté par les coordonnées curvilignes et la vitesse angulaire $(p_1,\, q_1,\, p_2, q_2, ...p_n,\, q_n)$ d'autre coté les trajectoire sont tracés dans l'espace de phase.

Le problème qui se pose est que dans ce cas nous ne pouvons pas trouver la bonne trajectoire. Naturellement, la question qui se pose est: quel type de géométrie peut étudier les trajectoire dans l'espace de phase ? . En effet, la géométrie euclidienne n'est pas adaptée car les droites ne sont pas conservées lors de l'évolution d'un système mécanique. Par exemple dans la pendule simple si on part d'un espace de configuration alignée cette propriété se perd en route. Par contre la géométrie symplectique est la géométrie pertinente qui permet de répondre à ce problème.

Définition 8 (Variété symplectique) *Une variété symplectique est une variété différentielle de dimensions n muni d'une forme différentielle ω de degré 2, bilinéaire, antisymétrique, fermé et non dégénéré.*

Remarque 5 *Une forme différentielle ω de dégrée 2, bilinéaire, antisymétrique, ferme et non dégénére est une forme symplectique.*

Le fait que ω doit être non dégénéré sert à (particulier) séparer chaque espace tangent à son cotangent via ω. Plus que ça, cette condition confirme l'injectivité de ω.

Comme ω est fermé $(d\omega = 0)$, elle nous permet de conserver le flot hamiltonien.

1.4.1 Les Formes canoniques symplectiques sur $\mathbb{R}^{2n}$ [1]

Soit $u = (u_x,\, u_\xi)$ et $v = (v_x,\, v_\xi)$. Posons

$$\omega(u,\ v) = u_\xi.v_x - u_x.v_\xi.$$

Cette formule est bilinéaire de $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}$ et $\forall u,\, v \in \mathbb{R}^{2n}$ nous avons:

$$\omega(u,\ v) = -\omega(v,\ u).$$

Alors ω est antisymetrique. D'autre part, ω est fermé et non dégénéré, i.e: $\forall\ u$, $v \in \mathbb{R}^{2n}$, si

$$\omega(u,\ v) = 0 \text{ alors } u = 0.$$

Ce qui implique que ω est une $2-$forme canonique symplectique qui est définie sous la forme suivante

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} d\xi_i \wedge dx_i = d\xi \wedge dx. \tag{1.12}$$

En particulier si $\omega = d\sigma$, alors σ est $1-$form et on a:

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} \xi_j (x)\, dx_j, \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.13}$$

Exemple: Dans le cas de $\mathbb{R}^{2n}$, notons $(x_1,\ x_2, ...,\ x_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$, et $\forall j \in \{1,\ 2...,\ 2n\}$, $dx_j = x_j^*$ la base duale avec

$$\omega_0 = \sum_{i,j=1}^{n} dx_i \wedge dx_j$$

On a une structure symplectique dans $\mathbb{R}^{2n}$. Si en particulier $n = 1$, ω_0 est un déterminant, autrement c'est une mesure d'aire algébrique sur le plan.

Définition 9 *Un espace vectoriel symplectique $(E,\ \omega)$ est un espace vectoriel réel E de dimension fini muni d'une forme ω bilinéaire, antisymétrique non dégénérée.*

Example 1 *L'espace de phase est une espace symplectique.*

1.4.2 Transformations symplectique:

Définition 10 *Soit $(E_1,\ \omega_1)$, $(E_2,\ \omega_2)$ deux espace vectoriel symplectique, une application linéaire $T : E_1 \to E_2$ est dite symplectique si on a:*

$$\omega_1(Tu,\ Tv) = \omega_2(u,\ v) \tag{1.14}$$

pour tout $(u, v) \in E_1^2$.

Exemple: Soient U et V deux ensembles ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$, et soit:

$$\begin{aligned} \kappa \quad &: \quad U \to V \\ (x,\ \xi) \quad &\mapsto \quad (y(x,\ \xi),\ \eta(x,\ \xi)) \end{aligned}$$

κ est un C^{∞} difféomorphisme de U vers V. On dit que κ est canonique (symplectique)si et seulement si

$$dy \wedge d\eta = dx \wedge d\xi.$$

C'est à dire:

$$\omega\left(y, \eta\right) = \omega\left(kx, k\xi\right) = \omega\left(x, \xi\right)$$

Dans ce cas transformation symplectique k est une application qui préserve la 2-forme symplectique.

Exemple: Si on prend $n = 1$ alors $(-\omega)$ définit un déterminant dans $\mathbb{R}^2$, dans ce cas on dit que κ préserve les surface sur $\mathbb{R}^2$.

1.5 Variété lagrangienne:

Définition 11 ***(Sous variété lagrangienne)****: Soit* $(M,\ \omega)$ *est une espace vectoriels symplectiques et de dimension* $2n$*. On dit que* L *est lagrangienne dans* (M, ω) *si et seulement si*

$$L = L^{\omega}, \tag{1.15}$$

telle que $\dim L = n$ *avec*

$$L^{\omega} = \{x \in M,\ \omega(x,\ \xi) = 0 \text{ pour tout } \xi \in L\}. \tag{1.16}$$

On dit que L *est orthogonal par rapport à* ω*.*

Définition 12 (Sous variété lagrangienne dans $\mathbb{R}^{2n}$) *La sous variété* Λ *de* $\mathbb{R}^{2n}$ *est lagrangienne si et seulement si sa dimension est égale à* n *et* $\omega|_{\Lambda} = 0$ *(i.e:* $\forall x \in \Lambda$,

$\omega|_{T_x\Lambda} = 0$).

Propriétés 1 *: Soient Λ une sous variété lagrangienne de $\mathbb{R}^{2n}$ et $\pi : \Lambda \to \mathbb{R}^n$ un projecteur difféomorphisme, alors L est un graphe et $\exists\ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ tel que*

$$d\varphi = \sigma, \tag{1.17}$$

Avec σ est 1-forme avec $\omega = d\sigma$ et ω est $2-$forme.

Propriétés 2 *: Soit Λ une sous variété de $\mathbb{R}^{2n}$ de dimension n de telle sorte que le projecteur:*

$$\pi_1 : \begin{cases} \Lambda \to \mathbb{R}^n \\ (x,\ \xi) \mapsto x \end{cases} \tag{1.18}$$

est un diffeomorphisme local, alors Λ est lagrangienne si Λ peut être représenter localement par l'équation suivante:

$$\xi = \nabla\varphi(x) \text{ avec } \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}. \tag{1.19}$$

Remarque 6 *Si κ est une transformation symplectique définit sur une variété Lagrangienne. alors κ est une trasformation lagrangienne.*

Chapitre 2

Le champs Hamiltonien:

Définition 13 *Soit* $f = f(x,\ \xi) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$*. Pour tout* $(x,\ \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ *nous avons* $df(x,\ \xi) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n},\ \mathbb{R})$*.*

soit $u \in \mathbb{R}^{2n} \approx T_{(x,\ \xi)}\ \mathbb{R}^{2n}$*, on a*

$$u \to \langle df(x,\ \xi),\ u\rangle \tag{(1.1)}$$

est une forme (application) linéaire sur $T_{(x,\ \xi)}\ \mathbb{R}^{2n}$*.*

Comme la $2-$*forme* ω *est non dégénéré, l'existence et l'unicité du champs Hamiltonien* $H_f(x,\ \xi) \in T_{(x,\ \xi)}\ \mathbb{R}^{2n}, \forall u \in T_{(x,\xi)}\ \mathbb{R}^{2n}$ *:*

$$\langle df(x,\xi), u\rangle = \omega(u, H_f(x,\xi)) \tag{(1.2)}$$

est prouvé par le théorème de Riesz.

Corollaire 1 *En coordonnées cartésienne, le champ Hamiltonien est donnée par:*

$$H_f = \frac{\partial f}{\partial \xi}.\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}. \tag{(1.3)}$$

2.1 Bande bicaractéristique nulle:

Soient $H : T^*M \to \mathbb{R}$ avec $H \in C^{\infty}(M)$ et M une variété différentiable de classe C^{∞} de dimension n.

H induit sur T^*M un champ de vecteur P appelé champ hamiltonien. De plus, H est une intégrale première de P, c'est-à-dire

$$L_p(H) = 0, \qquad ((1.4))$$

ce qui nous permet de conclure que $H \equiv cte$ sur les bandes bicaractéristiques ou sur les courbes intégrales de P.

Si en un point $(x, \xi) \in T^*M$, on a $H(x, \xi) = 0$ ceci implique que H est nulle sur toute la bande bicaractéristique $(x(t), \xi(t))$ passant par le point (x, ξ). et dans ce cas la bande est dite nulle.

Proposition 2 *Si j est une immersion lagrangienne dans le sens: soit Λ une variété de dimension n, et $j : \Lambda \to j(\Lambda) \subset T^*M$ est injective, alors j est une immersion lagrangienne.($j(\Lambda)$ est une sous variété lagrengienne de T^*M de dimension n).*

Et si, de plus, $H \equiv cte$ sur $j(\Lambda)$, alors toute bande bicaractéristique rencontre $j(\Lambda)$ toute entière contenue dans $j(\Lambda)$.

Preuve 1 *Cette proposition est une proposition d'unicité. En effet, Soient $\lambda \in \Lambda$ et $H \equiv cte$ sur $j(\Lambda)$, alors,*

$$P_{j(\lambda)} \in T_{j(\lambda)}(j(\Lambda)).$$

$P_{j(\lambda)}$ n'est pas tangent à $j(\Lambda)$ en $j(\lambda)$ mais il est tangent à T^*M. Comme le champ P induit un flot sur T^*M et P induit aussi un flot sur $j(\Lambda)$ par un point ne passe qu'une seule courbe intégrale de P. Alors toute bande bicaractéristique rencontrant $j(\Lambda)$ est toute entière contenue dans $j(\Lambda)$.

En terme de coordonnées locales si $H \equiv cte$ sur $j(\Lambda)$ toute bande bicaractéristique rencontrant $j(\Lambda)$ est donnée par les coordonnées locales attachées à $j(\Lambda)$ sur l'axe des x.

Remarque 7 *Si P et σ vérifient certaines conditions sur la sous variété Λ_0 de dimension $(n-1)$ de T^*M, alors on peut trouver une variété lagrangienne $j(\Lambda)$ telle que H soit nulle sur $j(\Lambda)$.*

Λ_0 sera la variété qui contient les conditions de Cauchy pour la résolution d'une équation aux dérivées partielles donnée sur T^*M.

2.2 Integration de $H(x, d\varphi_x) = 0$:

Dans tout ce qui suit, M désignera une variété de classe C^∞ de dimension n et u un ouvert de M.

Définition 14 (1) : *Résudre l'équation $H(x, d\varphi_x)$:*

Pour tout M et u**,** s'il existe $\varphi : u \to \mathbb{R}$ vérifiant:
i) $\varphi \in C^\infty(u)$.

Définition 15 *ii) $d\varphi|_u$ est de classe C^∞.*

iii) $\forall x \in u,\ H(x, d\varphi_x) = 0$ où $H : T^*M \to \mathbb{R},$ est une fonction de classe C^∞ donnée sur T^*M.

On dit que φ est une solution classique sur l'ouvert u de l'équation aux derivées partielles: $H(x, d\varphi_x) = 0$ attachée à H.

La défintion suivante est une déduction de cette définition.

Définition 16 (1/) : *Résudre l'équation aux derivées partielles attachée à H c'est trouvé une variété lagranginne Λ transverse aux fibres en chacun de ses points pour tout H nul sur Λ*

En effet, Résoudre classiquement H ou l'équation aux derivées partielles attachée à H, c'est trouvé une solution classique pour tout ouvert u de M.

En coordonnée locales si (u, Ψ) est une carte locale au voisinage d'un point x_0, l'equation aux derivées partielles à résoudre classiquement derivent:

$$H(x, d\varphi_x) \simeq \widetilde{H}\left(x_1, ..., x_n, \operatorname{grad}\left(\varphi \circ \Psi^{-1}\right)(x_1, ..., x_n)\right) = 0 \qquad ((1.5))$$

avec $\widetilde{H}$ est la représentation de H dans la carte $(u,\ \Psi)$ et $(x_1, ...,\ x_n)$ les coordonnées locales d'un point $x \in u$.

Si $H(x,\ \xi)$ représente le symbole principal d'un opérateur aux derivées partielles sur la variété M, pour résoudre l'equation

$$H(x,\ d\varphi_x) = 0. \tag{(1.6)}$$

dans [4], Hörmander a choisi une carte locale et a montré que la solution dans cette carte donne la solution du problème ce qui signifie que la solution est indépendante de la carte choisie.

Mais, plus simplement, on remarque que $H(x,\ d\varphi_x)$ donne un champ differentiel sur M d'où la construction d'une variété Lagranginne attachée à ce champ, ce qui justifie la deuxieme définition (définition(1′)).

Remarque 8 **1** *De la définition* (1)*, on peut passe à la définition* (1′) *.en effet si*

$$\gamma = d\varphi \ \textit{alors}\ \gamma[M] = \Lambda \tag{(1.7)}$$

qui représente une variété lagrangienne.

2 *De la définition* (1′) *on peut passer localement à la définition* (1)*. En effet: partant d'une variété lagrangienne transverse aux fibres.d'aprés le lemme de Poincaré:*

$$\forall\ u\ \textit{ouvert de}\ M,\ \exists\varphi \in C^\infty(u)\ \ \textit{telle que}\ \gamma = d\varphi. \tag{(1.8)}$$

Définition 17 (2) : *Résoudre l'équation aux derivées partielles attachée à H au sens de LIE c'est trouver une immersion lagrangienne:*

$$j : \Lambda \to j(\Lambda) \subset T^*M \tag{(1.9)}$$

telle que H soit nul sur $j(\Lambda)$.

" j " est appelée solution lagrangienne on solution générallisée.

Remarque 9 *La différence entre la définition* (2) *et les définitions* (1), (1′)*, c'est le manque de transversalité dans la définition* (2) *.*

La construction de Λ et j va se faire localement.

Faisons un rappel sur la notion de transversalité:

$$\Lambda \ \stackrel{i}{\rightarrow} T^{*}M \stackrel{\pi}{\rightarrow} \ M, \ (\ \Lambda \subset T^{*}M \ ) \tag{(1.10)}$$

avec Λ sous -variété lagrangienne de $T^{*}M$ $(\dim \Lambda = n)$, et transverse aux fibres (i.e: en chacun de ses points elle est transverse à la fibre correspondante).

i: plongement lagrangien (i: est l'injection canonique).

$$\pi|_{\Lambda} = \pi \circ i$$

et on a

$$D\left(\pi \circ i\right)_{\lambda} = \left(D\pi\right)_{\lambda} \circ \left(Di\right)_{\lambda}, \ (\forall \lambda \in \Lambda) \tag{2.1}$$

Pour tout $\lambda \in \Lambda$.

$$\left(Di\right)_{\lambda} \text{ étant injective } \Rightarrow D\left(\pi\,|_{\Lambda}\right) \text{ est bijective.} \tag{2.2}$$

On dit que π est de rang n sur Λ, et on a une caractérisation de la notion de transversalité de Λ.

On peut prendre comme définition:

$$\Lambda \text{ est transverse si et seulement si } \pi \text{ est de } rang = n = \dim M, (\Lambda \in T^{*}M). \tag{2.3}$$

Montre que:

1 Si

$$\Lambda \text{ est transverse} \Rightarrow \pi \text{ est de } rang = n = \dim M \tag{2.4}$$

avec $\Lambda \in T^{*}M$.

(on vient de le voir).

2 Si

$$\begin{aligned} \pi \text{ est de } rang &= n = \dim M \text{ et } (\Lambda \in T^*M) \qquad (2.5) \\ &\Rightarrow \Lambda \text{ est transverse.} \end{aligned}$$

Supposons que π est de

$$rang = n$$

comme Λ sous variété lagrangienne de T^*M et de dimension n.

$$\left((Di)_\lambda \left[T_{\lambda(\Lambda)}\right]\right) \oplus \ker (D\pi)_\lambda = T_\lambda \left(T^* \left(M\right)\right) \qquad (2.6)$$

Montrons cette égalité:

L'hypothèse:

$$\begin{aligned} \pi \text{ de rang } &= n \Rightarrow \begin{cases} (Di)_\lambda \text{ set surjective.} \\ (Di)_\lambda \text{ est injective.} \end{cases} \\ &\Rightarrow (Di)_\lambda \left[T_\lambda (\Lambda)\right] \cap \ker (D\pi)_\lambda = \{0\} \end{aligned}$$

Raisonnons par l'absurde:

Si $\exists\, v \neq 0$,

$$v \in \ker (D\pi)_\lambda \cap (Di)_\lambda \left[T_\lambda (\Lambda)\right]$$

alors $\exists\, \omega \neq 0$, $\omega \in T_\lambda (\Lambda)$ et $v = (Di)_\lambda (\omega)$ et $(D\pi)_\lambda (v) = 0$.

$$\Rightarrow \left((D\pi)_\lambda \circ (Di)_\lambda\right)(\omega) = 0$$

avec $\omega \neq 0$.

Ce qui est absurde car $\pi\,|_\Lambda$ est de $rang = n$ (par hypothèse).

Donc

$$(Di)_\lambda \left[T_\lambda (\Lambda)\right] \cap \ker (D\pi)_\lambda = \{0\}\,.$$

Ou:

$$(Di)_\lambda \text{ injective} \Rightarrow \dim (Di)_\lambda [T_\lambda (\Lambda)] = n = \dim T_\lambda (\Lambda)$$

et

$$(D\pi)_\lambda \text{ surjective } \Rightarrow \dim [\mathrm{Im}\, (D\pi)_\lambda] = n.$$

Donc somme est directe. et on a une nouvelle caractérisation de la notion de transversalité si et seulement si

$$\left((Di)_\lambda \left[T_{\lambda(\Lambda)}\right]\right) \oplus \ker (D\pi)_\lambda = T_\lambda (T^* (M)) .$$

Théorème 1 ***réciproque de la proposition (d'unicité):***

soit Λ_0 une sous-variété de $T^* (M)$ de dimension $(n-1)$, isotrope pour ω (ie: $\forall \lambda_0 \in \Lambda_0$, $\omega_{\lambda_0} = 0$ sur $T_{\lambda_0} (\Lambda_0)$)

où ω est la 2-forme définie sur T^*M, Λ_0 est telle que

$$H \,|_{\Lambda_0} \equiv 0 \tag{2.7}$$

et P transverse à Λ_0 (dans le sens suivant: $P_{\lambda_0} \notin T_{\lambda_0}(\Lambda_0)$, $\forall \lambda_0 \in \Lambda_0$).

Alors l'équation aux dérivées partielles associée à H admet une solution au sens de LIE locale continent Λ_0 (c'est à dire si j est l'immersion $\forall \lambda_0 \in \Lambda_0$, $\lambda_0 \in j (\Lambda)$).

Preuve 2 ***De théorème d'existence***

Donnons quelques explications concernant les notations et les identifications faites dans l'énoncé du théorème.

1 Λ_0 est une sous-variété de $T^* (M)$ de dimension $(n-1)$

$$\Lambda_0 \xrightarrow{i} T^* (M) , \; (i : \text{ étant l'injection canonique})$$

Alors

$$i \text{ est un plongement}$$

Et on a:

$$\Lambda_0 \xrightarrow{i} T^*(M) \xrightarrow{\omega} \Lambda^2 (T^*(T^*(M)))$$

avec $\forall (x,\ \xi) \in T^*(M)$

$$\omega_{(x,\xi)} : T_{(x,\xi)} (T^*(M)) \times T_{(x,\xi)} (T^*(M)) \to \mathbb{R}$$

Si $\lambda_0 = (x,\ \xi) \in \Lambda_0 \subset T^*(M)$ alors:

$$(Di)_{\lambda_0} : T_{\lambda_0} (\Lambda_0) \to T_{\lambda_0} (T^*(M))$$

est injective. Puisque (i) est un plongement.

Si $u,\ v \in T_{\lambda_0} (\Lambda_0)$, posons:

$$\omega_{\lambda_0} (u, v) = \omega_{\lambda_0} \left((Di)_{\lambda_0} (u),\ \ (Di)_{\lambda_0} (v) \right) = 0$$

En fait u, v sont des vecteurs tangent en λ_0 à Λ_0, et si ou identifie u, v avec $(Di)_{\lambda_0} (u), (Di)_{\lambda_0} (v)$ respectivement par l'injection, $(Di)_{\lambda_0}$ en dotaient deux vecteurs tangents en λ_0 à $T^*(M)$; et c'est dans le sens des égalités (1) avec l'identification faite qu'il faut comprend l'isotropie.

2 On a

$$H\Big|_{\Lambda_0} \equiv 0 \text{ veut dire } H_\circ i = 0 \text{ sur } \Lambda_0.$$

3 $P_{\lambda_0} \notin T_{\lambda_0} (\Lambda_0)$ veut dire $P_{\lambda_0} \notin (Di)_{\lambda_0} (T_{\lambda_0} (\Lambda_0))$.

Faisons un rappel sur la notion de variété produit, soit M une variété de classe C^∞ et de dimension n. et N une variété de classe C^∞ et de dimension p.

l'espace: $M \times N$ muni de la topologie produit des topologies de M et N, peut être muni d'une structure de variété différentiable de classe C^∞ et de dimension $(n+p)$.

si $(u,\ \varphi), (v,\ \psi)$ sont deux cartes locales de M et N respectivement, et si $x \in u$, $y \in v$ ou pose:

$$\theta\left(x,\ y\right)=\left(\varphi\left(x\right),\ \psi\left(y\right)\right)$$

et on vérifie que $(u\times v,\ \theta)$ est bien une carte locale sur $M\times N$.

cherchons l'espace tangent en un point $(x,\ y)$ à $M\times N$.

$$T_{(x,\ y)}\left[M\times N\right]=T_xM\times T_yN.$$

Et si

$$\begin{aligned} p &: T_xM\times T_yN\rightarrow T_xM \\ q &: T_xM\times T_yN\rightarrow T_yN \end{aligned}$$

sont les deux projections canoniques sur $T_xX\times T_yY$ on definit par toute application:

$$\mathcal{F}:M\times N\rightarrow\mathbb{R}$$

est un différentiable .

soient $\vec{h}_1\in T_xM$ et $\vec{h}_2\in T_yM$

$$(Df)_{(x,\ y)}\left[\vec{h}_1,\ \vec{h}_2\right]=Df\left(0,\ y\right)_x\left[p\left(\vec{h}_1,\ \vec{h}_2\right)\right]+Df\left(x,\ 0\right)_y\left[p\left(\vec{h}_1,\ \vec{h}_2\right)\right]$$

on peut écrire:

$$(Df)_{(x,\ y)}=Df\left(0,\ y\right)_x\circ\ p+Df\left(x,\ 0\right)_y\circ\ p.$$

2.3 Problème:

Le but de ce projet, est de montre comment nous pouvons choisir j de telle façon que $j\left(\Lambda\right)$ soit une variété Lagrangienne.

L'idée la plus naturelle est d'utiliser le flot ϕ associé à P. En effet, prenons:

$$j = \phi\,|_{\Lambda} \quad \left(\phi \text{ défini au voisinage de } \tilde{\lambda}_0\right)$$

et

$$j\,(\Lambda) = \left\{\phi\,(\lambda)\,, \lambda \in D,\ P_{(\phi_t)_{\lambda_0}} \notin (D\phi_t)_{\lambda_0}\left[T_{\lambda_0}\,(\Lambda_0)\right]\right\}. \tag{2.8}$$

$\phi\,(\lambda) = \phi\,(t, \lambda_0) = \phi_t\,(\lambda_0) = \phi_{\lambda_0}\,(t)$ selon qu'on considère λ_0 ou t variable. On remarque que à $\lambda_0 \in \Lambda, \phi\,(0, \lambda_0) \in j\,(\Lambda)$.

La variété Lagrangienne est de déduire tout simplement la variété engendrée par des morceaux de bandes bicaractéristiques passant par les points de $u \cap \Lambda_0$.

1 Sur l'espace tangent de $]-\varepsilon,\ \varepsilon[\, \times \Lambda_0 \cap u$, qui est aussi une varieté de dimension n, pour $\lambda \in \Lambda$. On a:

$$(Dj)_\lambda : \mathbb{R} \times T_{\lambda_0}\,(\Lambda_0) \to T_{j(\lambda)}\,[T^*\,(M)]\,.$$

Ceci veut dire que nous avons identifié Λ_0 avec $\Lambda_0 \cap u$.

2 Pour t fixé et λ_0 variable, nous avons:

$$D\,(\phi_t)_{\lambda_0} : T_{\lambda_0}\,(\Lambda_0) \to T_{(\phi_t)_{\lambda_0}}\,[T^*M]\,.$$

3 Pour λ_0 fixé et t variable. Le vecteur tangent à une bande bicaractéristique est de la forme:

$$P_{\phi_{\lambda_0}(t)} = (\phi_t)_{\lambda_0} = (D\phi_t)_{\lambda_0} \cdot 1 = \left[\left(D\phi_{\lambda_0}\right)_t\right](1)\,.$$

Alors,

$$(Dj)_\lambda\,[\mathbb{R} \times T_{\lambda_0}(\Lambda_0)] = P_{(\phi_t)_{\lambda_0}} \cdot \mathbb{R} \oplus (D\phi_t)_{\lambda_0}\left[T_{\lambda_0}(\Lambda_0)\right]$$

Le symbole $\oplus$ est une somme directe car $P_{(\phi_t)_{\lambda_0}} \notin (D\phi_t)_{\lambda_0}\,[T_{\lambda_0}(\Lambda_0)]$ par hypothèse.

On conclue donc, que

$$(Dj)_\lambda \text{ est de } rang \text{ maximum} = n.$$

Ce qui montre que

$$(Dj)_\lambda \text{ est injective.}$$

Ainsi,

$$j \text{ est une immersion.}$$

Maintenant, montrons que $H \equiv 0$ sur $j(\Lambda)$.

Nous avons:

$$L_p(H) = 0 \Rightarrow H = cte \text{ sur les courbes intégrales de } P.$$

Ce qui est équivalent à dire que

$$H(\phi(\lambda_0) \equiv cte \equiv H(\phi_0(\lambda_0)) = H(\lambda_0) = 0,$$

Car par hypothèse $H = 0$ sur Λ_0.

Mais pour $\lambda \in \Lambda$, nous avons $j(\lambda) = (\phi t,\, \lambda_0)$ ce qui implique que $H \equiv 0$ sur $j(\Lambda)$.

Pour achever la démonstration de notre problème, il reste à monter que $\omega \equiv 0$ sur $j(\Lambda)$.

Cela revient à dire que $j(\Lambda)$ est Lagrangienne,

$$T_{j(\lambda)}(j(\lambda)) = (Dj)_\lambda \left[\mathbb{R} \times T_{\lambda_0}(j(\Lambda_0)\right] = P_{(\phi_t)_{\lambda_0}} \cdot \mathbb{R} \oplus (D\phi_t)_{\lambda_0} \left[T_{\lambda_0}(\Lambda_0)\right].$$

Pour cela, passer par 3 vérifications.

<u>1^{er}cas:</u> Si $u,\, v \in T_{j(\lambda)}(j(\Lambda))$, alors $\exists! u_1,\, v_1,\, u_2,\, v_2$ telle que $u_1,\, v_1 \in P_{(\phi_t)_{\lambda_0}} \cdot \mathbb{R}$ et $u_2,\, v_2 \in (D\phi_t)_{\lambda_0} \left[T_{\lambda_0}\Lambda_0\right]$

Telle que:
$$\begin{cases} u = u_1 + u_2 \\ v = v_1 + v_2 \end{cases}.$$

Monter $\omega(u,\, v) = 0$ revient à montrer que:

$$\omega(u_1,\ v_1) = 0 \text{ et } \omega(u_2,\ v_2) = 0 \text{ et } \omega(v_2,\ v_2) = 0$$

On sait que $L_P(\sigma) = 0$, i. e, ω est une intégrale première pour p. Ce qui est équivalent à $\phi_t^*(\omega) = \omega$ (pour t assez voisin de 0).

Soient $u \in T_{\lambda_0}(\Lambda_0)$ et $v \in T_{\lambda_0}(\Lambda_0)$, par hypothèse Λ_0 est isotrope pour ω i.e, $\omega = 0$ sur $T_{\lambda_0}(\Lambda_0)$ Ce qui donne

$$\omega(u,\ v) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \omega &= \phi_t^*(\omega) \Longrightarrow \left(\phi_t^*(\omega)\right)_{\lambda_0}(u,\ v) = \omega_{\phi_t(\lambda_0)}\Big((D\phi_t)_{\lambda_0}(u),\ (D\phi_t)_{\lambda_0}(v)\Big) = 0 \\ &\Longrightarrow \omega\,\Big|_{j(\Lambda)} = 0 \text{ sur } (D\phi_t)_{\lambda_0}\left[T_{\lambda_0}(\Lambda_0)\right] \times (D\phi_t)_{\lambda_0}\left[T_{\lambda_0}(\Lambda_0)\right]. \end{aligned}$$

<u>**2**$^{\text{éme}}$**cas**</u>: Nous avons:

$$\omega_{j(\lambda)}\Big(P_{\phi_t(\lambda_0)} \cdot \xi,\ (D\phi_t)_{\lambda_0}(u)\Big) = \xi \cdot \Big\langle (dH)_{j(\lambda)},\ \ (D\phi_t)(u)\Big\rangle,$$

or

$$\omega\,(v,\ p) = \langle dH,\ v\rangle\,.$$

On vient de montrer que

$$\begin{aligned} H &\equiv 0 \text{ sur } j\,(\Lambda) \Rightarrow dH \equiv 0 \text{ sur } j\,(\Lambda) \\ &\Rightarrow \Big\langle (dH)_{j(\lambda)},\ \ (D\Phi_t)_{\lambda_0}(u)\Big\rangle = 0. \end{aligned}$$

$\underline{\mathbf{3^{\text{éme}}cas}}$: Il est clair que:

$$\omega_{j(\lambda)}\left(p_{(\phi_t)_{\lambda_0}}\cdot\xi,\ p_{(\phi_t)_{\lambda_0}}\cdot\xi'\right)=0$$

D'aprés tout ce qui précède, $j(\Lambda)$ est Lagrangienne mais pas nécessairement transverse. D'où le besoin démontrer l'unicité.

Supposons qu'il existe une variété Lagrangienne L provenant d'une immersion Lagrangienne.

Si L répond aux conditions de $j(\Lambda)$ alors

$$H=0 \text{ sur } (L).$$

Or,

$$j(\lambda)\in j(\Lambda)\Longrightarrow P_{j(\lambda)}[j(\Lambda)],$$

Ce qui signifie que les bondes bicaractéristiques sont dans $j(\Lambda)$.

Si $j(\Lambda)\in L$ et comme $H\equiv 0$ sur L, ceci implique que $P_{j(\lambda)}\in T_{j(\lambda)}L$. Donc, les bandes bicaractéristiques passant par $j(\lambda)$ sont dans L, d'où l'éxistance des points communs à (L) et $j(\Lambda)$.

Mais, si nous avons un point commun, ce point est un point d'une bande bicaractéristique.

Or par hypothèse L annule H. Ainsi, toutes bicaractéristiques passant par ce point est contenue dans H.

Example 3 *Soit* $M=\mathbb{R}^2$, $T^*M\simeq\mathbb{R}^4$.

H définie sur T^*M est donnée en coordonnées locales par:

$$H(x,\ y,\ \alpha,\ \beta)=\alpha-\beta^2-1.$$

où:

i) $(x,\ y)$*: coordonnées locales dans* $M=\mathbb{R}^2$.

ii) $(\alpha,\ \beta)$: *coordonnées locales dans* $T^*_{(x,\ y)}(\mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{R}^2($ *α et β dépondent de x et y).*

Résoudre $H(x,\ y,\ \alpha,\ \beta) = 0$, *revient a résoudre* $\alpha - \beta^2 - 1 = 0$. *Autrement dit* $\alpha = \beta^2 + 1$.

On veut trouver une solution $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *telle que:*

$$\begin{cases} H(x, \operatorname{grad} \varphi(x)) = 0,\ x \in \mathbb{R}^2 \\ \varphi|_S = \Psi \end{cases}$$

Où

$$S = \{(x, y) \setminus x = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

Tel que $\varphi|_s = \Psi$ *avec* $\Psi \in C^\infty(S)$.

Et

$$\varphi|_s(x, y) = \varphi(0, y) = \Psi(y).$$

La représentation locale de $(t,\ \lambda_0)\,(\lambda = (t,\ \lambda_0) \in \Lambda,\ \lambda_0 \in \Lambda_0)$ *nous donne un point de* $j(\Lambda)$ *de coordonnées:*

$(y^1(t,\ y),\ y^2(t,\ y),\ \eta^1(t,\ y),\ \eta^2(t,\ y)) \in j(\Lambda)$ *telle que* $j(\Lambda)$ *appartient à une bande bicaractéristique.*

On a $\begin{cases} y^1\ (0,\ y) = 0 \\ y^2\ (0,\ y) = y \\ \eta^1\ (0,\ y) = \alpha \\ \eta^2\ (0,\ y) = \beta \end{cases}$.

On obtient les équations d'hamilton-Jacobi:

$$\begin{cases} \frac{\partial y^1}{\partial t}(t,\ y) = 1 = \frac{\partial H}{\partial \alpha}(y^1(t,\ y),\ y^2(t,\ y),\ \eta^1(t,\ y),\ \eta^2(t,\ y)). \\ \frac{\partial y^2}{\partial t}(t,\ y) = -2\beta = \frac{\partial H}{\partial \beta}(y^1(t,\ y),\ y^2(t,\ y),\ \eta^1(t,\ y),\ \eta^2(t,\ y)) = -2\eta^2(t,\ y) \\ \frac{\partial \eta^1}{\partial t}(t,\ y) = -\frac{\partial H}{\partial \alpha}(y^1(t,\ y),\ y^2(t,\ y),\ \eta^1(t,\ y),\ \eta^2(t,\ y)) = 0. \\ \frac{\partial y^2}{\partial t}(t,\ y) = -\frac{\partial H}{\partial \alpha}(y^1(t,\ y),\ y^2(t,\ y),\ \eta^1(t,\ y),\ \eta^2(t,\ y)) = 0. \end{cases}$$

avec la condition:

$$H(x,\ y\ ,\ \alpha,\ \beta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta^2 - 1 = 0. \\ \beta = \Psi'(y). \end{cases}$$

tel que $\beta = \Psi'(y)$ *ce qui signifie* $\xi\mid_{T_x(\xi)} = (d\Psi)_x$.

L'intégration du systéme donne:

$$\begin{cases} \eta^1(t,\ y) = \eta^1(0,\ y) = 1 + (\Psi'(y))^2. \\ \eta^2(t,\ y) = \eta^2(t,\ y) = \Psi'(y). \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} y^1(t,\ y) = t + y^1(0,\ y) = t. \\ y^2(t,\ y) = -2\Psi'(y).t + y^2(0,\ y) \\ \qquad = -2\Psi'(y).t + y. \end{cases}$$

Un point de $j(\Lambda)$ *est l'image de* $(t,\ y)$ *par l'application:*

$$(t,\ y) \rightsquigarrow \left(t, -2\Psi'(y).t + y,\ 1 + (\Psi'(y))^2,\ \Psi'(y)\right)$$

Le théoréme principal dit que cette variété est de dimension 2 *dans* $\mathbb{R}^4$.

Cherchons la matrice Jacobienne de l'application:

$$\left(t,\ -2\Psi'(y).t + y,\ 1 + (\Psi'(y))^2,\ \Psi'(y)\right) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4.$$

C'est la matrice donnée par:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\Psi'(y) & -2\Psi'(y).t + 1 \\ 0 & 2\Psi'(y).\Psi''(y) \\ 0 & \Psi''(y) \end{pmatrix}$$

En calculant les deux déterminants:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Psi''(y) \end{vmatrix} \neq 0 \ et \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2\Psi'(y) & -2\Psi''(y).t + 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

telle que: si $\Psi''(y) \neq 0$ *le premier déterminant est non nul, si* $\Psi''(y) = 0$ *le deuxième est non nul.*

Alors

$$\dim j\left(\Lambda\right)=2.$$

Faisons le changement de variables: en posant :$y^{1}\ (t,\ y)=t=X$ *et* $y^{2}\ (t,\ y)=-2\Psi'\left(y\right).t+y=Y$, *le Jacobien:*

$$\frac{D\left(X,\ Y\right)}{D\left(t,\ y\right)}=1-2\Psi^{''}\left(y\right).t.$$

1. si

$$\Psi^{''}\left(y\right)=0\Rightarrow\frac{D\left(X,\ Y\right)}{D\left(t,\ y\right)}\neq0$$

2. si

$$\Psi^{''}\left(y\right)\neq0\Rightarrow\frac{D\left(X,\ Y\right)}{D\left(t,\ y\right)}\neq0$$

ou, on prend t *assez petit.*

Donc

$$Y+2\Psi^{'}\left(y\right).\ X-y=0=F\left(X,\ Y,\ y\right).$$

Si

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(X,\ Y,\ y\right)=2\Psi^{''}\left(y\right).X-1\neq0$$

alors, il existe une fonction Φ *de* $\left(X,\ Y\right)$ *telle que:*

$$F\left(X,\ Y,\ \Phi\left(X,\ Y\right)\right)=0$$

soit vérifiée localement. D'après le théorème des fonctions implicites, si on pose:

$$\Psi\left(y\right)=\frac{y^{2}}{2}\Rightarrow\Psi'\left(y\right)=y.$$

on a:

$$\begin{cases} X = t \\ Y = -2yt + y \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} X = t \\ Y = y\,(1 - 2t) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t = X \\ y = \frac{Y}{1-2t} \end{cases}, \ avec\ X \neq \frac{1}{2}.$$

Il reste à trouver la solution φ du problème .Elle vérifie:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X}(X,\ Y) = 1 + \left(\frac{Y}{1-2X}\right)^2$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Y}(X,\ Y) = \frac{Y}{1-2X}.$$

Par une intégration, on trouve:

$$\varphi(X, Y) = \frac{Y^2}{2(1-2X)} + k(X),$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial X}(X,\ Y) &= 1 + \left(\frac{Y}{1-2X}\right)^2 \\ &= \left(\frac{Y}{1-2X}\right)^2 + k'(X). \end{aligned}$$

ce qui implique que:

$$k'(X) = 1$$

ce qui donne

$$k(X) = X + c$$

où c est une constant. Ainsi,

$$\varphi(X,\ Y) = \frac{Y^2}{2(1-2X)} + X + c$$

Mais d'aprés les données: on trouve $c = 0$ *car* $\varphi\,(0,\ Y) = \frac{Y^2}{2} = \Psi\,(Y)$ *alors*

$$\varphi\,(X,\ Y) = \frac{Y^2}{2(1-2X)} + X.$$

Bibliographique

[1] A.Martinez. An Introduction to Semiclassical Analysis. Université di Bologna 2000.

[2] Géometrie différenelle,variétés,courbes et surfaces,berger marcel , Gostiaux barnard .

[3] l'éxposé de Benlarbi Miloud sur l'integration de l'équation caracteristique: post-graduation en EDP (1981-1982).

[4] S.lipschitz différenelle Géometry schaums outline Series,Mc Graw-Hill.