REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

Département de mathématiques et informatique

Mémoire de fin d'étude

pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Présenté par

M$^{\text{elle}}$. AMOURI Djazia

THEME

Les Propriétés des Solutions Méromorphes de Certaines Équations Aux Différences

Soutenu le 09 /06/2014 devant le Jury

Aziz Hamani Karima	Président	**MCA**	**U. MOSTAGANEM**
Hamouda Saada	**Examinateur**	**MCA**	**U. MOSTAGANEM**
Benharrat BELAÏDI	**Encadreur**	**Prof.**	**U. MOSTAGANEM**

Année universitaire: 2013-2014

Remerciements

Je tiens à la fin de ce travail remercier ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la foi et de m'avoir permis d'en arriver là.

Mes remerciements vont également mes chères parents, mes soeurs, mes frères et mes amis.

Je remercie inniment le professeur Benharrat BELAÏDI, mon directeur de mémoire dont la disponibilité, les avoir faire et le soutien ne m'ont jamais fait défaut et pour la confiance qui'l m'a accordée.

Je remercie aussi M$^{\text{me}}$ Aziz Hamani Karima qui me fera l'honneur de présider le jury d'examination de mon mémoire.

Je remercie avec autant de ferveur Mr. Saada HAMOUDA qui a bien voulu accepter dexaminer ce travail.

Je noublie pas de remercier mes collègues de la promotion 2$^{\text{ème}}$ année Mathématiques-Master.

Merci tous et toutes.

Dédicace

Merci Allah (mondieu) de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir, la force d'y croire, la patience d'aller jusqu'au du rêve et le bonheur de lever mes mains vers le ciel et de dire "YaAllah"

Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite et sauve-moi toute les possibilités et les capacités de tout les jours de mon école, à ma mère...

À mon père, école de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie m'encourager, à me donner l'aide et me protéger.

Que dieu les gardes et les protège.

À mes sœurs, kheira, Alia et Malika. À mes frères, Mouhamed, Abdellah et en particulier le frère youcef. À toute ma famille Amouri. À mes amies. À tous mes professeurs.À tous ceux qui me sont chères. et à mon encadreur Benharrat BELAÏDI.

Je dédie ce travail.

Table des Matières

Introduction

Les origines de la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes remontent aux théorèmes classiques de Weierstrass (1876) et Picard (1879). Ce dernier a etabli le fameux résultat " une fonction entière transcendante prend tout nombre complexe comme valeur, sauf peut-être un ", puis Hadamard (1893), Borel (1897) et Blumenthal (1910) ont essayé d'entrainer une description quantitative et étendre le résultat de Picard aux fonctions méromorphes. C'était R. Nevanlinna, qui a obtenu une telle tentative en (1925) en établissant la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes qui a été salué par H. Weyl (1943) comme l'un des rares grands événements mathématiques de notre siècle.

Depuis une trentaine d'années, cette théorie est devenue un outil indispensable dans l'étude des propriétés des solutions méromorphes des équations différentielles complexes. Plusieurs groupes actifs de mathématiciens dans des pays différents ont joué un rôle remarquable dans ce domaine tel que : Ablowitz, Halburd et Herbst ([1]), B. Belaïdi ([2]), et Chen ([4], [6], [7],[8]). Des résultat importants ont été établis. Récemment, la recherche des solutions méromorphes ayant des pôles de multiplicité uniformément borné suscite de grand intérêts. Ainsi, une question importante se pose : si cette condition n'est pas vérifiée, qu'en est-il pour les propriétés des solutions méromorphes? Ce problème sera considéré dan ce travail.

Ce mémoire est composé d'une introduction et de deux chapitres. Dans le premier chapitre, on va citer quelques notions préliminaires de la théorie de R. Nevanlinna ainsi que quelques différence analogues sur la théorie de R. Nevanlinna. Dans le deuxième chapitre, on va étudier les propriétés des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires de la forme

$$A_n(z) f(z+n) + \cdots + A_1(z) f(z+1) + A_0(z) f(z) = A_{n+1}(z),$$

où $A_j(z)\,(j = 0, 1, \cdots, n, n+1)$ sont des fonctions méromorphes. On obtient quelques estimations sur l'ordre de croissance des solutions méromorphes, et on considérera ensuite le défaut et les points fixes des solutions méromorphes de ces équations. Enfin, on donnera quelques exemples illustratifs.

Chapitre 1

Quelques Eléments de la Théorie de Nevanlinna

1.1 Eléments de la théorie de R. Nevanlinna

On va citer quelques définitions, notations et résultats dont on aura besoin par la suite, voir Hayman [10] et Laine [17].

1.1.1 Fonction caractéristique de Nevanlinna

Théorème 1.1.1 (formule de Jensen) Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \neq 0; \infty$ et $a_1, a_2, \cdots, a_n$ (respectivement $b_1, b_2, \cdots, b_n$) ses zéros (respectivement ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors

$$\ln|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \ln\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r} \ln\frac{r}{|a_j|}.$$

Preuve. On démontre le théorème dans le cas où f ne possède ni zéros ni pôles sur le cercle $|z| = r$. Considérons la fonction

$$g(z) = f(z)\Pi_{|a_j|<r}\frac{r^2 - \overline{a_j}}{r\,(z - a_j)}/\Pi_{|b_{j<r}|}\frac{r^2 - \overline{b_j}z}{r\,(z - b_j)}.$$

Alors $g \neq 0, \infty$ dans le disque $|z| < r$ et $\ln|g(z)|$ est une fonction harmonique. D'après la formule de la moyenne d'une fonction harmonique, on a

$$\ln|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|g(re^{i\varphi})\right| d\varphi. \tag{1.1.1}$$

D'autre par

$$g(0) = |f(0)|\, \Pi_{|a_j|<r}\frac{r}{|a_j|}/\Pi_{|b_j|<r}\frac{r}{|b_j|}.$$

Pour $z = re^{i\varphi}$ on a

$$\left|\frac{r^2 - \overline{a_j}z}{r\,(z - a_j)}\right| = \left|\frac{r^2 - \overline{a_j}re^{i\varphi}}{r\,(re^{i\varphi} - a_j)}\right| = 1 \tag{1.1.2}$$

et

$$\left|\frac{r^2 - \overline{b_j}z}{r\,(z - b_j)}\right| = \left|\frac{r^2 - \overline{b_j}re^{i\varphi}}{r\,(re^{i\varphi} - b_j)}\right| = 1.$$

D'où $|g(re^{i\varphi})| = |f(re^{i\varphi})|$. De (1.1.1) et (1.1.2), on obtient la formule de Jensen.

Définition 1.1.1 Pour tout réel $x > 0$, on définit

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x\ ; & si\ \ x>1 \\ 0; & si\ \ 0\ <x\leq 1 \end{cases}$$

Définition 1.1.2 (Fonction a-points) Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t, a, f\ )$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leq t$. Chaque racine étant comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et par $n(t, \infty, f\ )$ le nombre de pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$. Posons

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a, f\ ) - n\,(0, a, f\ )}{t}dt + n\,(0, a, f\ )\ln r,\ \ a \neq \infty$$

et

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t}dt + n(0, \infty, f)\ln r$$

$N(r, a, f)$ est appelée fonction $a-$points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$.

Lemme 1.1.2 Soit f une fonction méromorphe avec $a-$points $a_1, a_2, \cdots, a_n$ dans le disque $|z| \leq r$ tel que $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \cdots \leq |a_n| \leq r$, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors

$$\int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t} dt = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt = \sum_{0<|a_j|<r} \ln \frac{r}{|a_j|}.$$

Preuve Posons $|a_j| = r_j$ $(j = 1, \cdots, n)$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{0<|a_j|\leq r} \ln \frac{r}{|a_j|} &= \sum_{j=1}^{n} \ln \frac{r}{r_j} = \ln \frac{r^n}{r_1 r_2 \cdots r_n} = n \ln r - \sum_{j=1}^{n} \ln r_j \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} j(\ln r_{j+1} - \ln r_j) + n(\ln r - \ln r_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} j \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{dt}{t} + n \int_{r_n}^{r} \frac{dt}{t} = \int_0^r \frac{n\,(t,a,f\ )}{t} dt.
\end{aligned}$$

Proposition 1.1.1 Soit f une fonction méromorphe avec le développement de Laurent

$$f(z) = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i,\ \ c_m \neq 0,\ \ m \in \mathbb{Z}.$$

Alors

$$\ln |c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\theta + N(r,f) - N(r, \frac{1}{f}).$$

Preuve Définissons la fonction h par

$$h(z) = f(z) z^{-m}.$$

Il est clair que $m = n(0,0,f) - n(0,\infty,f)$ et $h(0) \neq 0, \infty$. En effet, si $m > 0$, alors $n(0,\infty,f) = 0$ et $m = n(0,0,f)$; si $m < 0$, alors $n(0,\infty,f) = -m$ et $n(0,0,f) = 0$; et finalement si $m = 0$; alors $n\,(0,0,f) = n\,(0,\infty,f) = 0$. Donc les fonctions h et f

ont les mêmes pôles et les mêmes zéros dans $0 < |z| \leq r$. La formule de Jensen et le Lemme 1.1.2 impliquent

$$\begin{aligned}
\ln |c_m| &= \ln |h(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f\left(re^{i\varphi}\right) r^{-m} \right| d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \ln \frac{r}{b_j} - \sum_{|a_j|<r} \ln \frac{r}{|a_j|} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f\left(re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi - \left(n(0,0,f) - n(0,\infty,f)\right) \ln r \\
&\quad + \int_0^r \frac{n(t,\infty,f) - n(0,\infty,f)}{t} dt - \int_0^r \frac{n(t,0,f) - n(0,0,f)}{t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi + N(r,f) - N(r, \frac{1}{f}).
\end{aligned}$$

Définition 1.1.3 (Fonction de proximité) Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe. Alors, on définit la fonction de proximité de la fonction f par

$$m(r,a,f) = m(r, \frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta, \ a \neq \infty$$

et

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| f(re^{i\theta}) \right| d\theta.$$

Définition 1.1.4 (Fonction caractéristique) On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction f par

$$T(r,\infty,f) = T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

Exemple 1.1.1 Pour la fonction $f(z) = e^{-z}$. Nous avons $n(t,f) = 0$ car f n'admet pas de pôles, par conséquent

$$N(r,f) = 0.$$

De plus

$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left|e^{-r\cos\theta}\right| d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \ln^+ \left|e^{-r\cos\theta}\right| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-r\cos\theta) d\theta = \frac{r}{\pi}. \end{aligned}$$

Donc

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f) = \frac{r}{\pi}.$$

1.1.2 Premier théorème fondamental de Nevanlinna

Théorème 1.2.1 Soit f une fonction méromorphe avec le développement de Laurent

$$f(z) - a = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i;\ c_m \neq 0,\ m \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{C}.$$

Alors

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r,f) - \ln|c_m| + \varphi(r,a),$$

où

$$|\varphi(r,a)| \leq \ln^+|a| + \ln 2.$$

Preuve Si $a = 0$, alors d'après la Proposition 1.1.1, on a

$$\ln|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi})|} d\varphi + N(r,f) - N(r,\frac{1}{f})$$

et

$$\ln|c_m| = m(r,f) - m(r,\frac{1}{f}) + N(r,f) - N(r,\frac{1}{f}),$$

donc

$$m(r,\frac{1}{f}) - N(r,\frac{1}{f}) = m(r,f) + N(r,f) - \ln|c_m|.$$

D'où

$$T(r,\frac{1}{f}) = T(r,f) - \ln|c_m| \quad \text{où} \;\; \varphi(r,0)=0. \tag{1.2.1}$$

Montrons le cas général $a \neq 0$. Posons $h = f - a$. Alors

$$N(r,\frac{1}{h}) = N(r,\frac{1}{f-a}),\;\; N(r,h) = N(r,f)$$

et

$$m(r,\frac{1}{h}) = m(r,\frac{1}{f-a}).$$

De plus

$$\ln^+|h| = \ln^+|f-a| \leq \ln^+|f| + \ln^+|a| + \ln 2,$$

$$\ln^+|f| = \ln^+|f-a+a| = \ln^+|h+a| \leq \ln^+|f| + \ln^+|a| + \ln 2.$$

En intégrant ces deux inégalités, on trouve que

$$m(r,h) \leq m(r,f) + \ln^+|a| + \ln 2,$$

$$m(r,f) \leq m(r,h) + \ln^+|a| + \ln 2.$$

Posons

$$\varphi(r,a) = m(r,h) - m(r,f).$$

Alors

$$\varphi(r,a) \leq \ln^+|a| + \ln 2.$$

En appliquant (1.2.1) pour h, on aura

$$\begin{aligned}
T(r,\frac{1}{h}) &= m(r,\frac{1}{h}) + N(r,\frac{1}{h}) \\
&= m(r,h) + N(r,h) - \ln|c_m| \\
&= m(r,f) + N(r,f) + \varphi(r,a) - \ln|c_m| \\
&= T(r,f) + \varphi(r,a) - \ln|c_m|.
\end{aligned}$$

Remarque 1.2.1 Le premier théorème fondamental peut être formulé comme suit

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) + O(1)$$

pour tout nombre complexe $a \neq \infty$.

Proposition 1.2.1 Soient $f, f_1, f_2, \cdots, f_n$ des fonctions méromorphes et $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ telles que $ad - bc \neq 0$. Alors

1)

$$T(r, \Pi_{i=1}^n f_i) \leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i), \ (n \geq 1).$$

2)

$$T(r, f^n) = nT(r, f), \ (n \in \mathbb{N}).$$

3)

$$T(r, \sum_{i=1}^n f_i) \leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i) + \ln n.$$

4)

$$T(r, \frac{af+b}{cf+d}) = T(r, f) + O(1); \ f \neq -\frac{d}{c}.$$

Preuve 1) On a

$$m\left(r, \Pi_{i=1}^n f_i\right) \leq \sum_{i=1}^n n\left(r, f_i\right)$$

et

$$N(r, \Pi_{i=1}^n f_i) \leq \sum_{i=1}^n N\left(r, f_i\right)$$

donc

$$\begin{aligned} T(r, \Pi_{i=1}^n f_i) &= m(r, \Pi_{i=1}^n f_i) + N(r, \Pi_{i=1}^n f_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n m\left(r, f_i\right) + \sum_{i=1}^n N(r, f_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n T(r, f_i). \end{aligned}$$

2) On a $|f^n| = |f|^n \leq 1$ équivaut à $|f| \leq 1$. Si $|f| \leq 1$, alors $m(r, f^n) = 0$ et

$N(r, f^n) = nN(r, f)$. Donc

$$T(r, f^n) = N(r, f^n) = nN(r, f) = n(N(r, f) + m(r, f)) = nT(r, f).$$

Si $|f| > 1$, alors

$$\begin{aligned} T(r, f^n) &= m(r, f^n) + N(r, f^n) \\ &= nm(r, f) + nN(r, f) = nT(r, f). \end{aligned}$$

3) On a

$$\begin{aligned} T\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) &\leq N\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) + m\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i) + \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \ln n \\ &= \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \ln n. \end{aligned}$$

4) Si $c = 0$, alors

$$\begin{aligned} T(r, \frac{af + b}{d}) &= T\left(r, \frac{a}{d}f + \frac{b}{d}\right) \\ &= T\left(r, \frac{a}{d}f\right) + O\left(1\right) \\ &= T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

Si $c \neq 0$, alors on écrit

$$\begin{aligned} \frac{af + b}{cf + d} &= \frac{a(f + ba)}{c(f + dc)} = \frac{a}{c}\frac{f + \frac{d}{c} + \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{f + \frac{d}{c}} \\ &= \frac{a}{c}\left[1 + \frac{bc - ad}{ac}\frac{1}{f + \frac{d}{c}}\right] \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2}\frac{1}{f + \frac{d}{c}}. \end{aligned}$$

D'où

$$
\begin{aligned}
T(r, \frac{af+b}{cf+d}) &= T(r, \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}) \\
&= T(r, \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{f+\frac{d}{c}}) + O(1) \\
&= T(r, \frac{1}{f+\frac{d}{c}}) + O(1) \\
&= T\left(r, f + \frac{d}{c}\right) + O(1) \\
&= T(r, f) + O(1).
\end{aligned}
$$

Exemple 1.2.1 Soit $g(z) = \frac{2e^z+3}{5e^z+7}$. Alors

$$
\begin{aligned}
T(r, g) &= T\left(r, \frac{2e^z+3}{5e^z+7}\right) \\
&= T(r, e^z) + O(1) \\
&= \frac{r}{\pi} + O(1).
\end{aligned}
$$

Théorème 1.2.2 Soit $R(u)$ une fonction rationnelle de degré d et $f(z)$ une fonction méromorphe. Alors

$$
T(r, R(f)) = dT(r, f(z)) + O(1).
$$

Exemple 1.2.2 Soit $f(z) = \cos^2 z$. Alors

$$
\begin{aligned}
T(r, f) &= T(r, \cos^2 z) \\
&= 2T(r, \cos z) = 2T\left(r, \frac{e^{2iz}+1}{2e^{iz}}\right) \\
&= 2[2T(r, e^{iz}) + O(1)] \\
&= 2[\frac{2r}{\pi} + O(1)] = \frac{4r}{\pi} + O(1).
\end{aligned}
$$

Lemme 1.2.1 (La dérivée logarithmique) Soit f une fonction méromorphe transcendante. Alors

$$m(r, \frac{f'}{f}) = S(r, f) = o(T(r, f)),$$

où $S(r, f) = O(\log T(r, f) + \log r)$ à l'extérieur d'un ensemble $E \subset]0, +\infty[$ de mesure linéaire finie.

1.1.3 L'ordre de croissance et l'hyper-ordre

Dénition 1.3.1 Soit f une fonction méromorphe. L'ordre de croissance et l'hyper-ordre de cette fonction sont définis respectivement par

$$\sigma(f) = \limsup_{r \longmapsto +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r},$$

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r \longmapsto +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r}.$$

où $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Si f est une fonction entière, alors l'ordre de croissance et l'hyper-ordre de cette fonction sont définis respectivement par

$$\sigma(f) = \limsup_{r \longmapsto +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \limsup_{r \longmapsto +\infty} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r},$$

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r \longmapsto +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} = \limsup_{r \longmapsto +\infty} \frac{\log \log \log M(r, f)}{\log r},$$

Exemples 1.3.1 1/ La fonction $f(z) = e^{\frac{1}{2}z^2}$ est d'ordre $\sigma(f) = 2$ et d'hyper-ordre $\sigma_2(f) = 0$.

2/ La fonction $g(z) = \exp(\exp z)$ est d'ordre $\sigma(g) = \infty$ et d'hyper-ordre $\sigma_2(g) = 1$.

Exemples 1.3.2 1/ La fonction $f(z) = \frac{1}{z}e^{z^n}$ est d'ordre $\sigma(f) = n$ et d'hyper-ordre $\sigma_2(f) = 0$.

2/ La fonction $g(z) = \frac{1}{z+1}\exp(\exp z^n)$ est d'ordre $\sigma(g) = \infty$ et d'hyper-ordre $\sigma_2(g) = n$.

Définition 1.3.2 Soit f une fonction entière non constante. L'ordre inférieur et l'hyper-ordre inférieur de cette fonction sont définis respectivement par

$$\mu(f) = \liminf_{r \longmapsto +\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} = \liminf_{r \longmapsto +\infty} \frac{\log \log M(r,f)}{\log r},$$

$$\mu_2(f) = \liminf_{r \longmapsto +\infty} \frac{\log \log T(r,f)}{\log r} = \liminf_{r \longmapsto +\infty} \frac{\log \log \log M(r,f)}{\log r}.$$

1.1.4 La mesure linéaire, la mesure logarithmique et la densité des ensembles

Définition 1.4.1 La mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty[$ est définie par

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E et la mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty[$ est définie par

$$ml(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt.$$

Exemple 1.4.1 La mesure linéaire de l'ensemble $E = [1, 2] \subset [0, +\infty[$ est

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt = \int_1^2 dt = 1.$$

La mesure logarithmique de l'ensemble $F = [e, e^4][1, +\infty[$ est

$$ml(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt = \int_e^{e^4} \frac{dt}{t} = 3.$$

Définition1.4.2 La densité inférieure et la densité supérieure d'un sous ensemble $H \subset [0, +\infty[$ sont définies respectivement par

$$\underline{dens} H = \liminf_{r \longmapsto +\infty} \frac{\int_0^r \chi_H(t)\, dt}{r} = \liminf_{r \longmapsto +\infty} \frac{m(H \cap [0, r])}{r},$$

$$\overline{dens} H = \limsup_{r \longmapsto +\infty} \frac{\int_0^r \chi_H(t)\, dt}{r} = \limsup_{r \longmapsto +\infty} \frac{m(H \cap [0, r])}{r}.$$

Exemple 1.4.2 La densité inférieure et la densité supérieure de l'ensemble $E = [1,2] \subset [0,+\infty[$ sont

$$\underline{dens}E = \overline{dens}E = 0.$$

Définition 1.4.3 On définit l'exposant de convergence des zéros de la fonction f par

$$\lambda(f) = \limsup_{r \longmapsto +\infty} \frac{\log N(r, \frac{1}{f})}{\log r},$$

et l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\overline{\lambda}(f) = \limsup_{r \longmapsto +\infty} \frac{\log \overline{N}(r, \frac{1}{f})}{\log r},$$

où

$$\overline{N}(r, \frac{1}{f}) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t, \frac{1}{f}) - \overline{n}(0, \frac{1}{f})}{t} dt + \overline{n}(0, \frac{1}{f}) \log r,$$

et $\overline{n}(t, \frac{1}{f})$ désigne le nombre des zéros distincts de la fonction f situés dans le disque $|z| \leq t$.

Remarque 1.4.1 L'exposant de convergence des zéros de la fonction $\frac{1}{f}$ est aussi dit exposant de convergence des pôles de la fonction f.

Exemple 1.4.3 L'exposant de convergence de la fonction $f(z) = e^z + 1$ est égal à 1.

Définition 1.4.4 Soit f une fonction méromorphe d'ordre $(0 < \rho < \infty)$, on définit le type de f par

$$\tau(f) = \limsup_{r \longmapsto +\infty} \frac{T(r, f)}{r^\rho}.$$

Si f est entière d'ordre $(0 < \rho < \infty)$, alors

$$\tau(f)=\limsup_{r\longmapsto+\infty}\frac{\log M(r,f)}{r^{\rho}}.$$

Définition 1.4.5 Soit f une fonction méromorphe non constante, on définit la défaut $\delta(a,f)$ au point a par

$$\delta(a,f)=\liminf_{r\longmapsto+\infty}\frac{m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)}=1-\limsup_{r\longmapsto+\infty}\frac{N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)}.$$

Définition 1.4.6 Soit $f(z)$ une fonction méromorphe. Soit $g(z)=f(z)-z$, alors z est un point fixe de $f(z)$ si et seulement si $g(z)\equiv 0$.

1.2 Analogue de la théorie de Nevanlinna pour les différences

Nous savons que le lemme sur la dérivée logarithmique d'une fonction méromorphe joue un rôle clé dan l'étude de la fonction méromophe et des équations différentielles complexes. Donc, afin de pouvoir utiliser la théorie de Nevanlinna à opérateur différentielle et des équations différentielles $([5,6],[11,12],[14-16],[18])$, il est nécessaire de disposer d'un lemme sur la dérivée logarithme analogue pour les différences. Récemment, des resultats semblables $[8,14]$ ont été obtenus pour la dérivée logarithmique de la théorie classique de R.Nevanlinna pour les différences.

Théorème 2.1 [14, Théorème 2.1] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non constante et soit $c\in\mathbb{C}$, $0<\delta<1$, $\varepsilon>0$. Alors

$$m\left(r,\frac{f(z+c)}{f(z)}\right)=o\left(\frac{T(r+|c|,f)^{1+\varepsilon}}{r^{\delta}}\right),$$

pour tout r à l'extérieur d'un ensemble exeptionnel E de mesure logarithmique finie

$$\int_E\frac{dr}{r}<+\infty.$$

Théorème 2.2 [5, Corollaire 2.6] Soient η_1,η_2 deux nombres complexes tels que

$\eta_1 \neq \eta_2$ et soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini $\sigma(f) < \infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$m\left(r, \frac{f(z+\eta_1)}{f(z+\eta_2)}\right) = O\left(r^{\sigma(f)-1+\varepsilon}\right).$$

Théorème 2.3 Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini et soit $\eta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Alors

$$m\left(r, \frac{f(z+\eta)}{f(z)}\right) = S(r,f).$$

Théorème 2.4 Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\sigma = \sigma(f) < +\infty$ et soit $\eta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$T(r, f(z+\eta)) = T(r,f) + O\left(r^{\sigma-1+\varepsilon}\right) + O(\log r).$$

Théorème 2.5 Soit $f(z)$ une fonction méromorphe avec l'exposant de convergence des pôles $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) = \lambda < +\infty$, et soit $\eta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$N(r, f(z+\eta)) = N(r,f) + O\left(r^{\lambda-1+\varepsilon}\right) + O(\log r).$$

Corollaire 2.6 Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini σ et soit $\eta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$m\left(r, \frac{f(z+\eta)}{f(z)}\right) + m\left(r, \frac{f(z)}{f(z+\eta)}\right) = O\left(r^{\sigma-1+\varepsilon}\right).$$

Lemme 2.1 (Mohon'ko [20], Laine[17]) Soit $f(z)$ une fonction méromorphe. Alors pour toute fonction rationnelle irréductible en $f(z)$

$$R(z,f) = \frac{P(z,f)}{Q(z,f)} = \frac{\sum_{i=0}^{p} a_i(z) f^i}{\sum_{j=0}^{q} b_j(z) f^j},$$

tels que les coefficients méromorphes a, b satisfont

$$\begin{cases} T(r,a_i)=S(r,f), i=0,1,\cdots,p; \\ T(r,b_j)=S(r,f), j=0,1,\cdots,q. \end{cases}$$

Alors, on a

$$T\left(r, R\left(z, f\right)\right) = \max\left\{p, q\right\} T\left(r, f\right) + S\left(r, f\right).$$

Preuve du Théorème 2.4 Comme $f\left(z\right)$ a un l'ordre fini σ, alors $\lambda\left(\frac{1}{f}\right) \leq \sigma \leq +\infty$. on déduit du Théorème 1.5

$$N\left(r, f\left(z+\eta\right)\right) = N\left(r, f\right) + O\left(r^{\lambda-1+\varepsilon}\right) + O\left(\log r\right)$$

est vérifiée pour la fonction f . De cette relation et le Corollaire 2.6, on obtient

$$\begin{aligned} T\left(r, f\left(z+\eta\right)\right) &= m\left(r, f\left(z+\eta\right)\right) + N\left(r, f\left(z+\eta\right)\right) \\ &\leq m\left(r, f\right) + m\left(r, \frac{f\left(z+\eta\right)}{f\left(z\right)}\right) + N\left(r, f\right) + O\left(r^{\sigma-1+\varepsilon}\right) + O\left(\log r\right) \\ &= T\left(r, f\right) + O\left(r^{\sigma-1+\varepsilon}\right) + O\left(\log r\right). \end{aligned}$$

De la même façon, on déduit que

$$\begin{aligned} T\left(r, f\right) &= m\left(r, f\right) + N\left(r, f\right) \\ &\leq m\left(r, f\left(z+\eta\right)\right) + N\left(r, f\right) + m\left(r, \frac{f\left(z\right)}{f\left(z+\eta\right)}\right) + O\left(\log r\right) \\ &= T\left(r, f\left(z+\eta\right)\right) + O\left(r^{\sigma-1+\varepsilon}\right) + O\left(\log r\right). \end{aligned}$$

Ceci achève la démenstration

Chapitre 2

Les propriétés des solutions méromorphes des équations aux différences

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étude les propriétés des solutions méromorphes des équations aux différence de la forme

$$A_n(z) f(z+n) + \cdots + A_1(z) f(z+1) + A_0(z) f(z) = 0 \tag{2.1}$$

et

$$A_n(z) f(z+n) + \cdots + A_1(z) f(z+1) + A_0(z) f(z) = A_{n+1}(z), \tag{2.2}$$

où $A_j(z)\,(j = 0, 1, \cdots, n, n+1)$ sont des fonctions méromorphes.

2.2 Croissance des solutions des équations aux différences

2.2.1 introduction et résultats

Chiang et Feng considéré la croissance des solutions méromorphes des équation aux différence (2.1) et ils on obtenu le Théorème suivant.

Théorème 2.2.1 [5, Théorème 9.2] Soient $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_n(z)$ des fonctions entières telles qu'il existe un nombre entier l , $0 \leq l \leq n$ vérifiant

$$\max_{0\leq j\neq l\leq n} \{\sigma(A_j)\} < \sigma(A_l) \tag{2.2.1}$$

Si $f(z)$ est une solution méromorphe de l'équation (2.1), alors $\sigma(f) \geq \sigma(A_l) + 1$.

Dans le Théorème2.2.1, les coefficients de (2.1) vérifient la condition (2.2.1) .Quels sont les résultats qu'on obtiendra si la condition (2.2.1) est remplacée par $\sigma(A_l) = \max_{0\leq j\neq l\leq n} \{\sigma(A_j)\}$?

A ce sujet, Laine et Yang ont obtenu le Théorème suivant.

Théorème 2.2.2 [18, Théorème 5.2] Soient $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_n(z)$ des fonctions entières d'ordre fini, tels qu'il existe un coefficient d'ordre maximal $\sigma = \max_{0\leq j\neq l\leq n} \{\sigma(A_j)\}$, et ayant un type sépérieur au type des autres coefficients. Alors pour toute solution méromorphe de (2.1) , on a $\sigma(f) \geq \sigma(A_l) + 1$.

Remarque 2.2.1 Dans [18] Laine et Yang pose la question si toute les solutions méromorphes $f(z)$ de (2.1) vérifient $\sigma(f) \geq 1 + \max_{0\leq j\leq n} \{\sigma(A_j)\}$, si l'équation (2.1) n'a pas des coefficient dominant.

Ici on affirmons que la conclusion ci-dessus n'est pas vrai s'il n'y a pas de coéfficient dominant dans (2.1) . Par exemple,

Exemple 2.2.1 Soit

$$\Delta f(z) = f(z+1) - f(z), \qquad \Delta^{n+1} f(z) = \Delta\left(\Delta^n f(z)\right).$$

par $n \in \mathbb{N}$ itérations de l'opérateur aux différence de f , on a

$$\Delta^n f(z) = \sum_{j=0}^{n} \tbinom{n}{j} (-1)^{n-j} f(z+j) \tag{2.2.2}$$

et

$$f(z+n) = \sum_{j=0}^{n} \tbinom{n}{j} \Delta^j f(z).$$

Alors, d'après le Théorème dans [16], l'équation

$$\left(6z^2 + 19z + 15\right) \Delta^3 f(z) + (z+3) \Delta^2 f(z) - \Delta f(z) - f(z), \tag{2.2.3}$$

admet une solution entière $f(z)$ d'ordre $\sigma(f) = \frac{1}{3}$. En utilisant la relation (2.2.2), on peut écrire l'équation (2.2.3) à une équation sous la forme (2.1), i.e.,

$$\begin{aligned} &\left(6z^2 + 19z + 15\right) f(z+3) - \left(18z^2 + 56z + 42\right) f(z+2) \\ &+ \left(18z^2 + 55z + 38\right) f(z+1) - \left(6z^2 + 18z + 12\right) f(z) = 0 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Donc, l'équation (2.2.4) admet aussi une solution entière $f(z)$ d'ordre $\sigma(f) = \frac{1}{3}$. Ici, touts les coefficients de (2.2.4) ont l'ordre 0 et le type $+\infty$. Evidemment, la conclusion de Théorème 2.2.2 n'est pas vraie s'il n'y a aucun coefficient dominant.

Mais l'exemple suivant montre que, s'il n'y a aucun coefficient dominant, $f(z)$ peut satisfaire $\sigma(f) \geq 1 + \max_{0 \leq j \leq n} \{\sigma(A_j)\}$.

Exemple 2.2.2 La fonction $f(z) = e^z + z$ est une solution de l'équation

$$\begin{aligned} &[(e-1)z - 1] f(z+2) - \left[\left(e^2 - 1\right) z - 2\right] f(z+1) \\ &+ \left[\left(e^2 - 2\right) z + \left(e^2 - 2e\right)\right] f(z) = 0. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Ici tout les coefficients de (2.2.5) ont l'ordre 0 et le type $+\infty$, mais $\sigma(f) = 1$ satisfait la conclusion du Théorème 2.2.2.

Maintenant, nous allons étudier les propriétés des solutions de l'équation(2.2) et obtenir les théorèmes suivants.

Théorème 2.2.3 Supposons que les coefficients $A_j(z)\,(j = 0, 1, \cdots, n, n+1)$ de (2.1.2) sont des fonctions méromorphes d'ordre fini $\leq \sigma$. Si pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un certain $l \in \{0, 1, \cdots, n, n+1\}$ et un domaine non borné $D \subset \mathbb{C}$ tel que

$$|A_l(z)| \geq \exp\left\{\alpha r^{\sigma-\varepsilon}\right\},$$

$$|A_j| \leq \exp\left\{\beta r^{\sigma-\varepsilon}\right\},\ j \in \{0, 1, \cdots, n, n+1\} \setminus \{l\}.$$

pour tout $z \in D$, où $\alpha > \beta > 0$ sont des nombres réels. Alors toute solution non triviale méromorphe $f(z)$ de (2.1.2) satisfait $\sigma(f) \geq \sigma$.

Théorème 2.2.4 Supposons que $A_j(z) = B_j e^{a_j z}\,(j = 0, 1, \cdots, n)\,, A_{n+1}(z) = B_{n+1}(z)\,,$ où $B_j(z)\,(j = 0, 1, \cdots, n, n+1)$ son des fonctions méromorphes d'ordre $\sigma(B_j) < 1\,(j = 0, 1, \cdots, n, n+1)\,,$ $a_j = \alpha_j e^{i\theta}$, $\alpha_j \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)\,(j = 0, 1, \cdots, n)\,.$ S'il existe $l \in \{0, 1, \cdots, n\}$ tel que $\alpha_l > \alpha = \max\{\alpha_j : j \neq l, 0 \leq j \leq n\}$, alors tout solution non triviale méromorphe $f(z)$ de l'équation (2.1.2) satisfait $\sigma(f) \geq 1$.

Corollaire 2.2.5 supposons que $A_j(z) = P_j e^{a_j z}\,(j = 0, 1, \cdots, n)\,,$ où $P_j\,(j = 0, 1, \cdots, n)$ sont des polynômes, $a_j = \alpha_j e^{i\theta}$, $\alpha_j \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)\,(j = 0, 1, \cdots, n)\,.$ S'il existe $l \in \{0, 1, \cdots, n\}$ tel que $\alpha_l > \alpha = \max\{\alpha_j : j \neq l, 0 \leq j \leq n\}$ et $A_{n+1}(z)$ une fonction entière d'ordre $\sigma(A_{n+1}(z)) < 1$, alors toute solution non triviale entière $f(z)$ de l'équation (2.1.2) satisfait $\sigma(f) \geq 1$.

Maintenant, on concidère un coefficient plus général que les coefficients dans (2.2)

$$\sigma = \max_{0 \leq j \leq n+1}\{\sigma(A_j)\}\,, I \in \{j \in \{0, 1, \cdots, n+1\} : \sigma(A_j) = \sigma\}\,. \tag{2.2.6}$$

Théorème 2.2.6 Supposons que $\sigma > 0$ et $A_j(z) = B_j(z) e^{a_j z^\sigma}, \forall j \in I$, où $a_j \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ $(j \in I)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini $\sigma(B_j) < \sigma$. Si les constantes a_j $(j \in I)$ sont distinctes, alors toute solution non triviale méromorphe $f(z)$ de l'équation (2.1.2) satisfait $\sigma(f) \geq \sigma$.

Théorème 2.2.7 Supposons que $\sigma = +\infty$ et que $A_j(z) = B_j(z) e^{g_j(z)}, \forall j \in I$, où $g_j(z)$ sont des fonctions entières transcendantes et $B_j(z)$ $(j \in I)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. De plus, supposons que $g_j(z) - g_j(z)$ est une fonction entière transcendante pour tout $i, j \in I, i \neq j$. Alors toute solution non triviale de l'équation (1.2) satisfait $\sigma(f) = +\infty$.

Théorème 2.2.8 Supposons que les coefficients $A_j(z)$ $(j = 0, 1, \cdots, n, n+1)$ dans (2.1.2) sont des fonctions entières d'ordre fini, telles que parmi ces coefficients il existe un coefficient ayant un ordre maximal $\sigma = \max_{0 \leq j \leq n+1} \{\sigma(A_j(z))\}$, et son type strictement plus grand que les autres. Alors chaque solution non triviale entière $f(z)$ de (2.1.2) satisfait $\sigma(f) \geq \sigma$. De plus, si $f(z)$ est une solution entière de (2.1.2) d'ordre fini $\sigma(f) = \sigma$ et si $l \in I$,

$$\tau(A_l) > \tau = \max\{\tau(A_j); j \in I \backslash \{l\}\},$$

alors

$$\tau(f) \geq \tau(A_l) - \max\{\tau(A_j); j \in I \backslash \{L\}\}.$$

2.2.2 Lemmes préliminaires

Lemme 2.2.1 [1, Lemme 1] Soient $\varepsilon > 0$ et $f(z)$ est une fonction méromorphe. Aors la fonction caractéristique de R.Nevanlinna $T(r, f)$ satisfait

$$T(r, f(z+c)) \leq (1+\varepsilon) T(r + |c|, f),$$

$$T(r + |c|, f) = (1+\varepsilon) T(r, f).$$

pour tout $r > \frac{1}{\varepsilon}$, où c est un nombre complexe.

Lemme 2.2.2 [7, Lemme2.1] Soit $g(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $\sigma(g) = \beta < +\infty$. Alors, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E \subset [0, 2\pi)$ de mesure linéaire finie $m(E)$, tel que pour tout z satisfaisant $\arg z = \phi \in [0, 2\pi) \backslash E$ et $|z| = r \geq R > 1$, on a

$$\exp\left\{-r^{\beta+\varepsilon}\right\} \leq \left|g\left(re^{i\phi}\right)\right| \leq \exp\left\{r^{\beta+\varepsilon}\right\}.$$

Lemme 2.2.3 Supposons que $H(z) = h(z)e^{az}$, où $h(z) \not\equiv 0$ est une fonction méromorphe d'ordre $\sigma(h) = \alpha < 1$, $a = de^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $d \geq 0$ une constante. Soit $E_0 = \{\phi \in [0, 2\pi) : \cos(\theta + \phi) = 0\}$. Alors pour tout $\varepsilon\,(0 < \varepsilon < 1 - \alpha)$ donné, il existe un ensemble E de mesure linéaire zéro, tel que si $z = re^{i\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi) \backslash (E \cup E_0)$, on a pour r assez grand

(i) Si $\cos(\theta + \phi) > 0$, alors

$$\exp\{(1-\varepsilon)\, dr \cos(\theta+\phi)\} \leq \left|H\left(re^{i\phi}\right)\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\, dr \cos(\theta+\phi)\}.$$

(ii) Si $\cos(\theta + \phi) < 0$, alors

$$\exp\{(1+\varepsilon)\, dr \cos(\theta+\phi)\} \leq \left|H\left(re^{i\phi}\right)\right| \leq \exp\{(1-\varepsilon)\, dr \cos(\theta+\phi)\}.$$

Lemme 2.2.4 [8, Corollaire 8.3] Soient η_1, η_2 deux nombres complexes arbitraires, et soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini $\sigma(f)$. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Alors il existe un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$, de mesure logarithmique finie tel que pour tout $r \notin E \cup [0, 1]$ on a

$$\cos\left\{-r^{\sigma(f)-1+(\varepsilon)}\right\} \leq \left|\frac{f(z+\eta_1)}{f(z+\eta_2)}\right| \leq \exp\left\{r^{\sigma(f)-1+\varepsilon}\right\}.$$

Lemme 2.2.5 [22, p. 79-80] Soient $f_j(z)\,(j = 1, 2, \cdots, n)\,(n \geq 2)$ des fonctions méromorphes et $g_j(z)\,(j = 1, 2, \cdots, n)$ des fonctions entières, telles que

(1)

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(z)\, e^{g_j(z)} = 0,$$

(2)quand $1 \leq j < k \leq n, g_j(z) - g_k(z)$ n'est pas constante,

(3)quand $1 \leq j \leq n, 1 \leq h < k \leq n,$

$$T(r, f_j) = o\left\{T\left(r, e^{g_h - g_k}\right)\right\}(r \to +\infty, r \notin E),$$

où $E \subset (1, +\infty)$ a une mesure linéaire ou mesure logarithmique finie. Alors

$$f_j(z) \equiv 0\,(j = 1, 2, \cdots, n).$$

Lemme 2.2.6 [4, Lemme 4] Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre $\sigma(f) = \sigma < +\infty$. Alors $\forall \varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E \subset [0, +\infty)$, de mesure linéaire $m(E)$ et logarithmique $lm(E)$ finie, tel que $\forall z$ satisfaisant $|z| = r \neq [0,1] \cup E$,

$$\exp\left\{-r^{\sigma+\varepsilon}\right\} \leq |f(z)| \leq \exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\}.$$

Lemme 2.2.7 Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre $\sigma(f) = \sigma\,(0 < \sigma < +\infty)$ et de type $\tau(f) = \tau\,(0 < \tau \leq +\infty)$. Alors pour tout nombre positif donné $\beta < \tau$, il existe un ensemble $E \subset [1, +\infty)$ de mesure linéaire $m(E)$ et logarithmique $lm(E)$ infinie, tel que $\forall r \in E$,

$$\log M(r, f) > \beta r^{\sigma}.$$

Remarque Dans[21] , Tu et Yi ont obtenu le même résultat quand $0 < \tau < +\infty$ et $E \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie. L'idée principale de la preuve du Lemme 2.2.7 vient de [21], mais les détails sont différents quelque peu. Pour la comodité, nous donnons une preuve complète.

Preuve du Lemme 2.2.7 on démontre le Lemme en considérant les deux cas suivants

Cas1. Si $0 < \tau < +\infty$. D'après la définition du type d'une fonction, il existe une suite croissante $\{r_n\}$ $(r_n \to +\infty, n \to +\infty)$ telles que $\left(1+\frac{1}{n}\right) r_n < r_{n+1}$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log M\left(r_n, f\right)}{r_n^\sigma} = \tau$$

Alors pour tout nombre positif donné $\beta < \tau$ et $\forall\varepsilon\, (0<\varepsilon<\tau-\beta)$, il existe $N_0 \in N_1$,

$$\log M\left(r_n, f\right) < (\tau-\varepsilon)\, r_n^\sigma. \tag{2.2.7}$$

Comme $0<\varepsilon<\tau-\beta$, on a $0<\frac{\beta}{\tau-\varepsilon}<1$. Ainsi, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$,

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^\sigma > \frac{\beta}{\tau-\varepsilon}. \tag{2.2.8}$$

Des relations (2.2.7) et (2.2.8) on a $\forall n \geq N = \max\{N_0, N_1\}$ et $\forall r \in \left[r_n, \left(1+\frac{1}{n}\right) r_n\right]$,

$$\log M(r,f) \geq \log M\left(r_n, f\right) \geq (\tau-\varepsilon)\, r_n^\sigma \geq (\tau-\varepsilon)\left(\frac{n}{n+1} r\right)^\sigma > \beta r^\sigma. \tag{2.2.9}$$

Posons

$$E = \cup_{n=N}^{+\infty} \left[r_n, \left(1+\frac{1}{n}\right) r_n\right],$$

Alors

$$mE = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{r_n}{n} = +\infty. \tag{2.2.10}$$

Comme

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{r_{n+1}}{n+1} / \frac{r_n}{n}\right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} \frac{n}{n+1} > \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1} = 1$$

et

$$\ln E = \sum_{n=N}^{+\infty} \int_{r_n}^{\left(1+\frac{1}{n}\right) r_n} \frac{1}{t} dt = \sum_{n=N}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty \tag{2.2.11}$$

Cas 2 Si $\tau = +\infty$. D'après la définition du type d'un fonction, il existe une suite croissante $\{r_n\}$ $(r_n \to +\infty,\ n \to +\infty)$ telle que $\left(1+\frac{1}{n}\right) r_n < r_{n+1}$ et

$$\log M\left(r_n, f\right) > A r_n^\sigma \tag{2.2.12}$$

pour tout nombre positife donné $A < +\infty$, pour tout $0 < \beta < A$, il existe $N \in /N$ tel que $\forall\ n \geq N$, on a

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\sigma} > \frac{\beta}{A}. \tag{2.2.13}$$

2.2.3 Preuves des Théorémes

Preuve du Théoréme 2.2.3 Supposons que la conclusion n'est pas vraie, i.e., $\sigma(f) = \rho < \sigma$. D'après le Lemme 2.1 on a $\sigma(f(z+j)) = \rho < \sigma$, $\forall j = 0, 1, \cdots, n$. D'après le Lemme 2.2 on a $\forall \varepsilon \geq (0 < 2\varepsilon < \sigma - \rho)$ donné, il existe un ensemble $E_1 \subset [0, 2\pi)$ de mesure liméaire finie tel que pour tout z satisfaisant $\arg z = \phi \in [0, 2\pi)\backslash E_1$, et $|Z| = r \geq R > 1$, on a

$$\exp\{-r^{\rho+\varepsilon}\} \leq |f\left(re^{i\phi} + j\right)| \leq \exp\{r^{\rho+\varepsilon}\}, j = 0, 1, \cdots, n \tag{2.2.14}$$

On peut choisir une suite de points $\{z_k = r_k e^{i\theta_k}\} \subset D \subseteq \mathbb{C}$, où $\theta_r \in [0, 2\pi)\backslash E_1$ et $|z_k| = r_k \geq R > 1, r_{k_{k\to+\infty}} \to +\infty$, telles que

$$|A_l\left(r_k e^{i\theta_k}\right)| \geq \exp\{\alpha r_k^{\sigma-\varepsilon}\}, \tag{2.2.15}$$

$$|A_j\left(r_k e^{i\theta_k}\right)| \leq \exp\{\beta r_k^{\sigma-\varepsilon}\}, j \in \{0, 1, \cdots, n, n+1\}\backslash\{l\}, \tag{2.2.16}$$

où $\alpha > \beta > 0$ sont des nombres reéls. Si $l \neq n+1$, de (1.2) et $(2.2.14) - (2.2.16)$, on a

$$\begin{aligned}
\exp\{\alpha r_k^{\sigma-\varepsilon} - r_k^{\rho+\varepsilon}\} &\leq |A_l\left(r_k e^{i\theta_k}\right)||f\left(r_k e^{i\theta_k} + l\right)| \\
&\leq \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq l}}^{n} |A_j\left(r_k e^{i\theta_k}\right)||f\left(r_k e^{i\theta_k} + j\right)| + |A_{n+1}\left(r_k e^{i\theta_k}\right)| \\
&\leq \sum_{j=0}^{n} \exp\{\beta r_k^{\sigma-\varepsilon}\} \exp\{r^{\rho+\varepsilon}\} \\
&\leq n \exp\left\{\beta r_k^{\sigma-\varepsilon} + r_k^{\rho+\varepsilon}\right\} + \exp\left(\beta r_k^{\sigma-\varepsilon}\right) \\
&\leq (n+1) \exp\left\{\beta r_k^{\sigma-\varepsilon} + r_k^{\rho+\varepsilon}\right\},
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\exp\left\{(\alpha-\beta)\, r_k^{\sigma-\varepsilon} - 2r_k^{\rho+\varepsilon}\right\} \leq n+1,$$

pour r_k suffisamment grand. C'est une contradiction. Si $l = n+1$, nous pouvons utiliser la même méthode pour en déduire une contradiction similaire.

Preuve du Théorème 2.2.4 Supposons que la conclusion n'est pas vraie, i.e., $\sigma(f) = \rho < 1$. Posons

$$z = re^{i\phi},\ \ \delta(\theta,\phi) = \cos(\theta+\phi),\ \ E_0 = \{\phi : \cos(\theta+\phi = 0)\}, \beta = \max\{\sigma(B_j)\}.$$

Alors E_0 est un ensemble fini et $\beta < 1$ Ainsi $\forall\phi \in [0,2\pi)\backslash E_0$, on a $\delta(\theta,\phi) > 0$ ou $\delta(\theta,\phi) < 0$. Ici, on démontre seulement le cas $\delta(\theta,\phi) > 0$ et on déduit une contraduction. D'après le Lemme 2.2.3 pour tout

$$\varepsilon\left(0 < 2\varepsilon < \min\left\{\frac{\alpha_l-\alpha}{\alpha_l+\alpha}, 1-\rho, 1-\beta\right\}\right)$$

donné ci-dessus, il existe un ensemble E_2 de mesure linéaire zéro, tel que si $z = re^{i\phi}$, $\phi \in [0,2\pi)\backslash(E_0 \cup E_1)$, on a pour r suffisament

$$\left|A_j\left(re^{i\phi}\right)\right| \leq \exp\{(1+\varepsilon)\,\alpha r\delta(\theta,\phi)\},\quad j \in \{0,1,\cdots,n,n+1\}\setminus\{l\}, \tag{2.2.17}$$

$$\left|A_l\left(re^{i\phi}\right)\right| \geq \exp\{(1-\varepsilon)\,\alpha_l r\delta(\theta,\phi)\}. \tag{2.2.18}$$

Comme $\sigma(f) = \rho < 1$, on a aussi $\sigma(f(z+l)) = \sigma\left(\frac{1}{f(z+l)}\right) = \rho < 1$. D'après le Lemme 2.2.2, pour tout ε donné ci-dessus, il existe un ensemble $E_0 \in [0,2\pi)$ de mesure linéaire finie $m(E_3)$, tel que pour tout z satisfaisant $z = \phi \in [0,2\pi)\backslash E_3$ et $|z| = r \geq R > 1$ on a

$$\exp\left\{-r^{\rho+\varepsilon}\right\} \leq \left|\frac{1}{f\left(re^{i\phi}+l\right)}\right| \leq \exp\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}, \tag{2.2.19}$$

$$\exp\left\{-r^{\beta+\varepsilon}\right\} \leq \left|A_{n+1}\left(re^{i\phi}\right)\right| \leq \exp\left\{r^{\beta+\varepsilon}\right\}. \tag{2.2.20}$$

Des relations (2.2), $(2.2.17)-(2.2.20)$ et le Lemme 2.2.4 on obtient pour tout

$$\varepsilon\left(0<2\varepsilon<\min\left\{\frac{\alpha_l-\alpha}{\alpha_l+\alpha},1-\rho,1-\beta\right\}\right)$$

donné et $z=re^{i\phi}$, $\phi\in[0,2\pi)\backslash\left(E_0\cup E_2\cup E_3\right)$, avec r suffisament grand,

$$\begin{aligned}
\exp\left\{(1-\varepsilon)\alpha_l r\delta(\theta,\phi)\right\} &\leq \left|A_l\left(re^{i\phi}\right)\right| \\
&\leq \left|A_{n+1}\left(re^{i\phi}\right)\right|\frac{1}{\left|f\left(re^{i\phi}+l\right)\right|}+\sum_{\substack{j=0\\ j\neq l}}^{n}\left|A_j\left(re^{i\phi}\right)\right|\left|\frac{f\left(re^{i\phi}+j\right)}{f\left(re^{i\phi}+l\right)}\right| \\
&\leq \exp\left\{r^{\beta+\varepsilon}\right\}\exp\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}+n\exp\left\{(1+\varepsilon)\alpha r\delta(\theta,\phi)\right\}\exp\left\{r^{\rho-1+\varepsilon}\right\} \\
&\leq (n+1)\exp\left\{(1+\varepsilon)\alpha r\delta(\theta,\phi)+r^{\beta+\varepsilon}+r^{\rho+\varepsilon}\right\},
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\left(\alpha_l-\alpha\right)r\delta(\theta,\phi)-r^{\beta+\varepsilon}-r^{\rho+\varepsilon}\right\}\leq n+1,$$

pour tout r grand suffisant, c'est la contradiction de puis

$$0<2\varepsilon<\min\left\{\frac{\alpha_l-\alpha}{\alpha_l+\alpha},1-\sigma,1-\beta\right\},$$

$\alpha_l>\alpha$ et $\delta(\theta,\phi)>0$. Ceci achève la démonstration.

Preuve du Théorème 2.2.6 On suppose que $\sigma(f)<+\infty$. Supposons que l'affirmation n'est pas vraie, i.e, chaque solution méromorphe non triviale $f(z)$ de l'équation (2.2) satisfait $\sigma(f)=\rho<\sigma$. D'après le Lemme 2.2.1 on a $\sigma(f(z+j))=\sigma(f)=\rho<\sigma$, $\forall j=0,1,\cdots,n$.

Maintenant, on écrit l'équation (2.2) sous la forme

$$\sum_{j\in I} G_j(z)\, e^{a_j z^{\sigma}} + B(z) = 0. \tag{2.2.21}$$

Dans $(2.2.21)$, si $n+1 \in I$, alors

$$G_j(z) = B_j(z)\, f(z+j)\, (j \in I \setminus \{n+1\}),$$

$$G_{n+1}(z) = -B_{n+1}(z),\, B(z) = \sum_{j\notin I} A_j(z)\, f(z+j),$$

si $n+1 \notin I$, alors

$$G_j(z) = B_j(z)\, f(z+j)\, (j \in I),\, B(z) = \sum_{j\notin I} A_j(z)\, f(z+j) - A_{n+1}(z).$$

D'après $(2.2.6)$ et le Théorème 2.1.6, on a $\sigma(G_j) < \sigma$ et $B(z)$ est une fonction méromorphe d'ordre fini $\sigma(B) < \sigma$. D'après le Lemme 2.2.5 et $(2.2.21)$, on obtient que $G_j(z) = 0, j \in I$. Ceci est impossible.

Preuve du Théorème 2.2.7 On suppose que $\sigma(f) < +\infty$. Suposons que l'affirmation n'est pas vraie, i.e., chaque solution méromorphe non triviale $f(z)$ de l'équation (2.2) satisfait $\sigma(f) = \rho < \sigma$. D'après le Lemme 2.2.1, on a $\sigma(f(z+j)) = \sigma(f) = \rho < \sigma, \forall j = 0, 1, \cdots, n$. Maintenant, on écrit l'équation (2.2) sous la forme

$$\sum_{j\in I} G_j(z)\, e^{g_j(z)} + B(z) = 0. \tag{2.2.22}$$

Dans $(2.2.22)$, si $n+1 \in I$, alors

$$G_j(z) = B_j(z)\, f(z+j)\, (j \in I \setminus \{n+1\}),$$

$$G_{n+1}(z) = -B_{n+1}, \quad B(z) = \sum_{j\notin I} A_j(z)\, f(z+j),$$

si $n+1 \notin I$, alors

$$G_j(z) = B_j(z)\, f(z+j)\, (j \in I),$$

$$B(z) = \sum_{j \notin I} A_j(z) f(z+j) - A_{n+1}(z).$$

D'après (2.2.6) et le Théorème 2.2.7, on a $\sigma(G_J) < \sigma$ et $B(z)$ est une fonction méromorphe d'ordre fini $\sigma(B) < \sigma$. D'après le Lemme 2.2.5 et (2.2.22) on obtient que $G_j(z) = 0, j \in I$. Ceci est imppossible.

Preuve du Théorème 2.2.8 Supposons que la conclusion n'est pas vrai, i.e., $\sigma(f) = \rho < \sigma$, alors

$$\sigma(f(z+j)) = \sigma\left(\frac{1}{f(z+j)}\right) = \rho < \sigma, \ \forall j = 0, 1, \cdots, n.$$

Comme les coefficients de (2.2) ont un ordre maximum $\sigma = \max_{0 \leq j \leq n+1} \{\sigma(A_j(z))\}$, et son type strictement plus grand que les autres, alors sans perte de généralité, on choisit $l \in I$ tel que

$$\tau(A_l) > \tau = \max\{\tau(A_j) : j \in I \backslash \{l\}\}.$$

Posons

$$\beta = \max\{\sigma(A_j) : j \in \{0, 1, \cdots, n, n+1\} \setminus \{l\}\},$$

alors $\beta < \sigma$ d'après (2.2.6). Par le Lemme 2.2.6, pour tout ε $(2 < 2\varepsilon < \min\{\sigma - \rho, \sigma - \beta\})$ donné, il existe un ensemble $E_4 \subset [0, +\infty)$ de mesure linéaire et logarithmique finie, tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_4$, on a

$$\left|\frac{1}{f(z+l)}\right| \leq \exp\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}, \quad |f(z+j)| \leq \exp\left\{r^{\rho+\varepsilon}\right\}, \quad j = 0, 1, \cdots, n, \quad (2.2.23)$$

$$A_j(z) \leq \exp\left\{r^{\beta+\varepsilon}\right\} \leq \exp\left\{r^{\sigma-\varepsilon}\right\}, \quad j \in \{0, 1, \cdots, n, n+1\} \setminus \{l\}. \quad (2.2.24)$$

Soient α_1, α_2 deux nombres réels positifs tels que $\tau < \alpha_1 < \alpha_2 < \tau(A_l)$. Par le Lemme 2.2.7 et la définition du type d'une fonction entière, il existe un ensemble $E_5 \subset [1, +\infty)$ de mesure linéaire et mesure logarithmique infinie, tel que pour tout

z satisfaisant $|z| = r \in E_5$, on a

$$M(r, A_l(z)) > \exp\{\alpha_2 r^\sigma\}, \tag{2.2.25}$$

$$M(r, A_j(z)) < \exp\{\alpha_1 r^\sigma\}, j \in I \setminus \{l\}. \tag{2.2.26}$$

Ainsi, pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E_5 \setminus ([0,\ 1] \cup E_4)$, les relations(2.2.23) $-$ (2.2; 26) sont vérifiées. Donc il existe une sous-suite $\{r_n : |z| = r_n\} \in E_5 \setminus ([0,\ 1] \cup E_4)$ telle que $|A_l(z)| = M(r, A_l(z))$ et

$$\exp\left\{(\alpha_2 - \alpha_1) r_n^\sigma - 2r_n^{\rho+\varepsilon}\right\} \leq n + 1,$$

Si $l = n + 1$ ou $l \neq n + 1$.

Maintenant,nous allons montrer que $\tau(f) \geq \tau(A_l) - \tau$. Supposons que la conclusion n'est pas vraie, i.e.,$\tau(f) < \tau(A_l) - \tau$. Comme $f(z)$ est une solution entière de (2.2) d'ordre fini $\sigma(f) = \sigma$, on a $\sigma(f(z+j)) = \sigma\left(\frac{1}{f(z+j)}\right) = \sigma < +\infty$, $\forall j = 0, 1, \cdots, n$. D'après le Lemme 2.2.6 pour tout $\varepsilon\,(0 < 4\varepsilon < \min\{\sigma - \beta,\ \tau(A_l) - \tau\})$ donné, il existe un ensemble $E_6 \subset [1, +\infty)$ de mesure linéaire et logarithmique finie, tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin [0,\ 1] \cup E_6$, on a

$$\left|\frac{1}{f(z+l)}\right| \leq \exp\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\}, \tag{2.2.27}$$

$$|A_j(z)| \leq \exp\left\{r^{\beta+\varepsilon}\right\} \leq \exp\left\{r^{\sigma-\varepsilon}\right\}, \quad j \in \{0, 1, \cdots, n, n+1\} \setminus \{l\}. \tag{2.2.28}$$

D'après le Lemme 2.2.7 et la déffinition du type d'une fonction entière, il existe un ensemble $E_7 \subset [1, +\infty)$ de mesure linéaire infini et logarithmique infinie, tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E_7$, on a

$$M(r, A_l(z)) > \exp\{(\tau(A_l) - \varepsilon) r^\sigma\}, \tag{2.2.29}$$

$$M(r, f(z+j)) \exp\{(\tau(f) + \varepsilon) r\varepsilon\}, \quad j = 0, 1, \cdots, n, \tag{2.2.30}$$

$$M(r, A_j(z)) < \exp\{(\tau + \varepsilon) r^\sigma\}, \quad j \in I \setminus \{l\}. \tag{2.2.31}$$

Ainsi, pour tout z satisfaisant $|z| = r \in E_7 \backslash ([0,\ 1] \cup E_6)$, les relations (2.2.27) − (2.2.31) sont vérifiées.Donc il existe une sous-suite $\{r_n : |z| = r_n\} \in E_7 \backslash ([0,\ 1] \cup E_6)$ telle que $|A_l(z)| = M(r, A_l(z))$ et

$$\begin{aligned} & \exp\left\{(\tau(A_l) - \tau - 2\varepsilon) r^{\sigma} - (\tau(f) + \varepsilon) r^{\sigma} - r^{\sigma+\varepsilon}\right\} \\ < \; & \exp\{(\tau(A_l) - \tau - 2\varepsilon) r^{\sigma} - (\tau(f) + \varepsilon) r^{\sigma}\} \leq n + 1, \end{aligned}$$

Si $l = n + 1$ ou $l \neq n + 1$. c'est une contradiction.

2.3 Points fixes des solutions des équations aux différences

2.3.1 Introduction et résultats

Dans [3, 8], Bergweiler et al. ont examiné les zéros et les points fixes des fonctions méromorphes. Ici, nous considérons le défaut et les points fixes de solutions d'équations aux différences (2.1) et (2.2).

Dans [17], Laine a considéré l'équation différentielle et a obtenu le Théorème suivant.

Théorème 2.3.1 [17, Théorème 4.3] Soit $f(z)$ une solution méromorphe admissible de l'équation

$$a_n(z) f^{(n)}(z) + a_{n-1}(z) f^{(n-1)}(z) + \cdots + a_0(z) f(z) = 0, \quad a_0(z) a_n(z) \not\equiv 0, \tag{2.3.1}$$

où $T(r, a_j) = S(r, f)$ pour tout $j = 0, 1, \cdots, n$. Alors

$$\delta(\alpha, f) = 0$$

$\forall \alpha \neq 0, \infty$. En particulier cela est vraie pour toutes solution transcendante de (2.3.1) avec des coefficients polynômes. Si l'on considère l'équation différentielle (2.1), en utilisant une méthode similaire à celle du Théorème 2.3.1, on obtient aussi le même résultat qui suit.

Théorème 2.3.2 Soit $f(z)$ une solution méromorphe d'ordre fini de l'équation (2.1), où les coefficients $A_j(z)\,(j=0,1,\cdots,n)$ sont des fonctions de petite croissance relatives par rapport à $f(z)$.
(1) Si $a(z)$ est une fonction méromorphe de petites croissance par rapport à $f(z)$ et satisfaisant

$$\sum_{j=0}^{n} A_j(z)\,a(z+j) \not\equiv 0, \tag{2.3.2}$$

Alors on obtient

$$\delta(a(z), f) = 0.$$

(2) Si $a(z) = z$ est une fonction de petite croissance par rapport à $f(z)$ et satisfaisant,

$$\sum_{j=0}^{n} A_j(z)\,(z+j) \not\equiv 0, \tag{2.3.3}$$

Alors on obtient que $f(z)$ a une infinité de points fixes et satisfait $\lambda(f(z)-z) = \sigma(f)$.

Corollaire 2.3.3 Supposons que les coefficients $A_j(z)\,(j=0,1,\cdots,n)$ dans (2.1) sont des fonctions entières d'ordre fini tels que, parmi les coefficients il existe un coefficient ayant l'ordre maximal $\sigma = \max_{0\leq j\leq n}\{\sigma(A_j)\}$, et un type plus grand que les autres. Soit $f(z)$ une solution méromorphe d'ordre fini de l'équation (2.1).
(1) Si $a(z)$ est une fonction méromorphe d'ordre fini$< \sigma+1$ et satisfait

$$\sum_{j=0}^{n} A_j(z)\,a(z+j) \not\equiv 0,$$

alors on obtient

$$\delta(a(z), f) = 0.$$

(2) Si $a(z) = z$ et satisfait

$$\sum_{j=0}^{n} A_j(z)(z+1) \not\equiv 0,$$

alors on obtient que $f(z)$ a une infinité de points fixes et satisfait $\lambda(f(z) - z) = \sigma(f)$.

Maintenant nous allons examiner les point fixes des solutions des équations plus générales (2.1), et on obtient les Théorèmes suivants.

Théorème 2.3.4 Sopposons que $\sigma > 0$ et que $A_j(z) = B_j(z) e^{a_j z^\sigma}$ pour tout $j \in I$, où $a_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\} (j \in I)$ et $B_j(z) (j \in I)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini $\sigma(B_j) < \sigma$. Si les constantes $a_j (j \in I)$ sont distinctes, alors toute solution méromorphe non triviale $f(z)$ d'ordre fini de l'équation (2.2) a une infinité de points fixes et satisfait

$$\lambda(f(z) - z) = \sigma(f) \geq \sigma.$$

Théorème 2.3.5 Supposons que les coefficients $A_j(z) (j = 0, 1, \cdots, n, n+1)$ dans (2.2) sont des fonctions entières d'ordre fini tel que, parmi les coefficients il existe un coefficient ayant l'ordre maximal $\sigma = \max_{0 \leq j \leq n+1} \{\sigma(A_j(z))\}$, et éson type strictement plus grand que les autres. Alors toute solution méromorphe non triviale $f(z)$ d'ordre fini de l'équation (2.2) a une infinité de points fixes et satisfait

$$\lambda(f(z) - z) = \sigma(f) \geq \sigma.$$

Ici nous donnons quelques exemples illustratifs concernant le Théorème 2.3.2.

Exemple 2.3.1 $f(z) = e^z + 1$ est une solution de l'équation

$$\left(z^2+1\right) f(z+2) - (e+1)\left(z^2+1\right) f(z+1) + e\left(z^2+1\right) f(z) = 0. \qquad (2.3.4)$$

Evidemment, les coefficients de l'équation (2.3.4) sont des fonctions de petite croissance relatives à $f(z)$, et

$$\left(z^2+1\right)(z+2)-(e+1)\left(z^2+1\right)(z+1)+e\left(z^2+1\right)z=(1-e)\left(z^2+1\right)\not\equiv 0,$$

satisfait aussi (2.3.3). Ici, $f(z)=e^z+1$ a une infinité de points fixes et satisfait $\lambda(f(z)-z)=\sigma(f)=1$.

L'exemple suivant montre que la condition (3.3) est nécessaire

Exemple 2.3.2 $f(z)=e^z-z$ et $f(z)=e^z+z$ sont solutions de l'équation

$$[(e-1)z-1]f(z+2)-\left[\left(e^2-1\right)z-2\right]f(z+1)+\left[\left(e^2-e\right)z+\left(e^2-2e\right)\right]f(z)=0. \tag{2.3.5}$$

Evidemment, les coefficients de l'équation (2.3.5) sont des fonctions de petite relatives à $f(z)$. Mais

$$[(e-1)z-1](z+2)-\left[\left(e^2-1\right)z-2\right](z+1)+\left[\left(e^2-e\right)z+\left(e^2-2e\right)\right]z\equiv 0.$$

Donc, la condition (2.3.3) n'est pas satisfait. Dans ce cas, $f(z)=e^z-z$ a une infinité de points fixes et satisfait $\lambda(f(z)-z)=\sigma(f)=1$, mais $f(z)=e^z+z$ n'a pas de point fixe.

2.3.2 Preuves des Théorèmes

Preuve du Théorème 2.3.4 En utilisant le Théorème 2.2.6, on obtient que toutes les solutions non triviales $f(z)$ de l'équation (2.2)vérifient $\sigma(f)\geq\sigma$.Maintenant, on suppose que l'affirmation n'est pas vraie, i.e., $\lambda(f(z)-z)<\sigma<\infty$. Ce qui montre qu'il existe un entier $k\,(\geq\sigma)$ positif tel que $\sigma(f(z)-z)=\sigma(f)=k$. nous pouvons réécrire $f(z)-z$ sous la forme

$$f(z)-z=P(z)\,e^{\beta z^k}, \tag{2.3.6}$$

où β est une constante non nulle et $P(z)$ une fonction méromorphe avec

$$\sigma(P) \leq \max\{\lambda(f(z)-z), k-1\} < k.$$

De (2.3.6) nous avons

$$f(z+j) = z + j + P(z+j) Q_j(z) e^{\beta z^k}, \tag{2.3.7}$$

où

$$Q_j(z) = \exp\left\{\beta C_k^1 z^{k-1} j + \beta C_k^2 z^{k-2} j^2 + \cdots + \beta j^k\right\}, \quad \sigma(Q_j) = k-1, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Par $(2.2), (2.3.6)$ et $(2.3.7)$, on obtient

$$\sum_{j \in I \setminus \{n+1\}} P(z+j) Q_j(z) A_j(z) e^{\beta z^k} + \sum_{j=0}^{n} (z+j) A_j(z) = A_{n+1}(z). \tag{2.2.8}$$

Ainsi de (2.2.6) et $A_j(z) e^{a_j z^\sigma}, \forall j \in I$, si $n+1 \in l$, la relation (2.2.8) peut être réécrite sous la forme

$$\sum_{j \in I \setminus \{n+1\}} P(z+j) Q_j(z) B_j(z) e^{a_j z^\sigma + \beta z^k} + \sum_{j \in I \setminus \{n+1\}} (z+j) B_j(z) e^{a_j z^\sigma} - B_{n+1}(z) e^{a_{n+1} z^\sigma}$$

$$+ \left(\sum_{j \notin I} P(z+j) Q_j(z) A_{j(z)}\right) e^{\beta z^k} + \sum_{j \notin I} (z+j) A_j(z) = 0, \tag{2.3.9}$$

si $n+1 \notin I$, la relation (2.3.8) peut être réécrite sous la forme

$$\sum_{j \in I} P(z+j) Q_j(z) B_j(z) e^{a_j z^\sigma + \beta z^k} + \sum_{j \in I} (z+j) B_j(z) e^{a_j z^\sigma}$$

$$+ \left(\sum_{j \notin I} P(z+j) Q_j(z) A_j(z)\right) e^{\beta z^k} + \left(\sum_{j \notin I} (z+j) A_j(z) - A_{n+1}(z)\right) = 0. \tag{2.3.10}$$

Par les hypothèses ci-dessus, nous constatons que (2.3.9) et (2.3.10) remplissent les conditions du Lemme 2.2.5 respectivement. Par conséquent, on obtient

$$P\left(z+j\right)Q_j\left(z\right)B_j\left(z\right)=0, j\in I\backslash\left\{n+1\right\}.$$

C'est une contradiction.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié certains problèmes liés à l'ordre de croissance et la distribution des zéros des solutions de certaines équations aux différences dans le plan complexe. L'outil principal dans cette étude était la théorie de Nevanlinna. Il serait intéressant d'étudier le polynôme différentiel généré par les solutions des équations aux différences.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude des propriétés des solutions méromorphes des équations aux différences de la forme

$$A_n(z) f(z+n) + \cdots + A_1(z) f(z+1) + A_0(z) f(z) = A_{n+1}(z),$$

où $A_j(z)\,(j = 0, 1, \cdots, n, n+1)$ sont des fonctions méromorphes. On obtient quelques estimations sur l'ordre de croissance des solutions, et on considérera ensuite le défaut et les points fixes des solutions méromorphes de ces équations. Enfin, on donnera quelques exemples illustratifs.

Bibliographie

[1] [1] M. J. Ablowitz, R. Halburd and B. Herbst, *On the extension of the Painlevé property to difference equations*, Nonlinearity 13 (2000), no. 3, 889-905.

[2] B. Belaïdi, *On the meromorphic solutions of linear differential equations*, J. Syst. Sci. Complex. 20 (2007), no. 1, 41–46.

[3] W. Bergweiler, J. K. Langley, *Zeros of differences of meromorphic functions*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 142 (2007), no. 1, 133-147.

[4] Z. X. Chen, *On the hyper order of solutions of some second-order linear differential equations*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 18 (2002), no. 1, 79–88.

[5] Z. X. Chen, Z. B. Huang, and X. M. Zheng, *On properties of difference polynomials*, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 31 (2011), no. 2, 627–633.

[6] Z. X. Chen and K. H. Shon, *On zeros and fixed points of differences of meromorphic functions,* J. Math. Anal. Appl. 344 (2008), no. 1, 373–383.

[7] Z. X. Chen and K. H. Shon, *The relation between solutions of a class of second order differential equation with functions of small growth*, Chin. Ann. Math. 27A(4) (2006), 431-442.

[8] Y. M. Chiang, S. J. Feng, *On the Nevanlinna characteristic of* $f(z+\eta)$ *and difference equations in the complex plane,* Ramanujan J. 16 (2008), no. 1, 105-12

[9] S. A. Gao, Z. X. Chen and T. W. Chen, *Oscillation Theory of Linear Differential Equations,* Huazhong University of Science and Technology Press, Wuhan, 1998 (in Chinese).

[10] W. K. Hayman, *Meromorphic functions*, Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford 1964.

[11] Z. B. Huang, Z. X. Chen, *A Clunie lemma for difference and q-difference poly-*

nomials. Bull. Aust. Math. Soc. 81 (2010), no. 1, 23–32.

[12] Z. B. Huang, Z. X. Chen, *Meromorphic solutions of some difference equations*, Adv. Diffe. Eqns 2009 (2009), Article ID 982681, 10 pages.

[13] Z. B. Huang, Z. X. Chen and Q. Li, *The properties of the meromorphic solutions of some difference equations*. Complex Var. Elliptic Equ. 58 (2013), no. 11, 1635.

[14] R. G. Halburd, R. J. Korhonen, *Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with applications to difference equations,* J. Math. Anal. Appl. 314 (2006), no. 2, 477-487.

[15] R. G. Halburd, R. J. Korhonen, *Nevanlinna theory for the difference operator*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 31 (2006), no. 2, 463–478.

[16] K. Ishizaki, N.Yanagihara, *Wiman-Valiron method for difference equations.* Nagoya Math. J. 175 (2004), 75–102.

[17] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.

[18] I. Laine, C. C. Yang, *Clunie theorems for difference and q-difference polynomials*, J. Lond. Math. Soc. (2) 76 (2007), no. 3, 556-566.

[19] Z. Latreuch, B. Belaïdi, *Growth and oscillation of meromorphic solutions of linear difference equations*, Mat. Vesnik, 66, 2 (2014), 213–222.

[20] A. Z. Mohon'ko, The Nevanlinna characteristics of certain meromorphic functions, Tero. Funktsii Functsional. Anal. i prilozhen., 14 (1971), 83-87 (Russian).

[21] J. Tu, C. F. Yi, *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with coefficients having the same order*, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), no. 1, 487–497.

[22] C. C. Yang, H. X. Yi, *Uniqueness theory of meromorphic functions*, Mathematics and its Applications, 557. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.