RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

Mémoire de Fin d'Étude

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques
Cycle LMD
Spécialité : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Thème : Foncion de Mittag-Leffler et Applications

Présenté par : Hamid BENANTEUR

Soutenu le 09/06/2014.

Les Membres du Jury

Président	Mme	Naima	ABLAOUI	M.A.A	**U. MOSTAGANEM.**
Examinateur	Mme	Samira	BELARBI	M.C.A	**U. MOSTAGANEM.**
Encadreur	Mr	Zoubir	DAHMANI	M.C.A	**U. MOSTAGANEM.**

Dédicace

Pour ma part, que mon entourage me pardonne, mais il y a que deux personnes à qui je dédie ce travail :

Mes PARENTS.

J'aimerai rendre hommage à une personne en particulier :

AHMED BENANTEUR dit **HMIDA**.

Fils de Mostaganem, orphelin de père qui a vécu la misère de la guerre, travaillant dès son plus jeune âge afin de pouvoir survivre. Mais pourtant cela n'a jamais était un handicap pour réussir, au contraire, ça l'a motivé encore plus et lui a permis de devenir l'un des premiers chirurgiens-dentistes de cette belle ville. Connaissant la valeur du savoir et de l'honnêteté, il a toujours poussé ses enfants dans ce chemin, afin de les épargner et les protéger de la misère noire qu'il avait connue.

Tu ne peux être parmi nous physiquement, mais tu seras toujours présent dans nos cœurs.

Je te remercie pour tout ce que tu as fait pour nous **PAPA**.

Petite citation :

" Je suis né dans tes bras, tu es mort dans les miens
Le Seigneur donne, le Seigneur prend
J'ai vu le jour durant ta vie, tu as rendu l'âme durant la mienne
La destinée éblouit, la destinée obscurcit".

EL HAMDOULILLAH

Hamid BENANTEUR

Remerciements

En préambule à ce mémoire, je remercie **DIEU** Le Tout Puissant pour exprimer ma reconnaissance envers Sa Grande Générosité. **DIEU** m'a donné la volonté, le courage, la santé et la confiance durant toutes mes années d'études.
Je remercie monsieur **Z. DAHMANI**, qui, en tant que mon encadreur, était toujours à l'écoute tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour son aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et cela durant tout mon cursus universitaire.
Mes plus sincères remerciements à madame **N. ABLAOUI** d'avoir bien voulu présider mon jury ainsi que pour son excellent enseignement et qui a toujours répondu présent. Un grand merci à madame **S. HAMANI** de m'avoir fait l'honneur de faire partie de ce jury.

Je souhaite remercier **MES PARENTS** d'avoir été si patients, si généreux et tellement merveilleux, ils ont toujours été la source de motivation et d'encouragement. Je remercie énormément mon oncle **A. BOUBEKEUR** pour toute l'aide et le soutien qu'il m'a apporté depuis mes plus jeunes années d'études et qui a cru en moi jusqu'à la fin.
Je tiens à remercier également mes professeurs et enseignants d'avoir été présents, de m'avoir énormément appris par la qualité de leurs savoir qu'ils m'ont prodigués.
Je voudrais remercier mes frères et soeurs, mes ami(e)s et tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de mon mémoire.

Résumé

Dans ce mémoire de Master, on s'intéresse à la fonction de Mittag-Leffler. Dans le cas d'un paramètre, on présente certaines propriétés intéressantes de cette fonction et on fait son lien avec d'autres fonctions spéciales. Puis, on s'intéresse à la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres en présentant certaines de ses propriétés et en "démontrant" certains résultats qui existent dans la littérature. On s'intéresse aussi aux applications de la fonction de Mittag-Leffler en étudiant certains résultats récents de Haubold, Sexana et al.

Table des matières

1 Introduction **3**

2 Fonction de Mittag-Leffler **4**
2.1 Introduction 4
2.2 Rappels 4
2.3 Fonction de Mittag-Leffler à un paramètre 4
2.4 Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres 5
2.5 Généralisation des fonctions de Mittag-Leffler 5
2.6 Cas Particuliers 5
2.7 Propositions 6
2.8 Quelques propriétés 7

3 Mittag-Leffler et d'autres opérateurs intégraux **9**
3.1 Introduction 9
3.2 Transformée de Laplace 9
3.2.1 Définitions 9
3.2.2 Propriétés 10
3.2.3 Exemples 10
3.3 Application de la Transformée de Laplace 11
3.4 Mittag-Leffler d'ordre rationnel 12
3.5 Fonction Mittag-Leffler et intégrale de Riemann-Liouville 12
3.6 Fonction de Mittag-Leffler et dérivée de Riemann-Liouville 13

4 Applications **14**
4.1 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo 14
4.2 Méthode LAPM 15
4.3 Application 16
4.4 Résolution de quelques EDFs 18
4.5 L'EIDF Cinétique 20

Conclusion **22**

Bibliographie 23

Annexe 24

Chapitre 1

Introduction

En mathématiques, le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse qui étudie la possibilité qu'un opérateur différentiel puisse être élevé à un ordre non entier.
On peut définir par ce procédé des dérivées ou des intégrales fractionnaires. Ces opérateurs fractionnaires rentrent dans le cadre plus général des opérateurs pseudo-différentiels.
Parmi les pionniers du calcul fractionnaire, on cite Riemann, Liouville, Caputo, Mainardi, Weyl et Mittag-Leffler. Ils ont tous développé des mathématiques abstraites appliquées par la suite dans différents domaines des sciences non linéaires, tels que la physique, la chimie, la biologie, l'imagerie, les probabilités et les statistiques.
Le but de ce mémoire est d'étudier certaines propriétés de ce domaine, plus explicitement « la fonction de Mittag-Leffler ». Cette fonction est très utilisée dans le calcul fractionnaire, surtout dans la résolution de certains problèmes différentiels d'ordre arbitraire.
En premier lieu, on va définir la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre. Puis on introduira la fonction Mittag-Leffler à deux paramètres. Ensuite, on passera à un cadre beaucoup plus général. On va citer quelques fonctions avec lesquelles, elle est liée. On donnera quelques propriétés de base avec d'autres résultats.
Dans le troisième chapitre, on va développer l'application de certains opérateurs à la fonction de Mittag-Leffler tels que, la transformée de Laplace, l'intégrale fractionnaire au sens de Rimann-Liouvile, la dérivée fractionnaire au sens de Rimann-Liouvile. Trois théorèmes vont être cités.
Le quatrième chapitre est consacré au coté applications de la fonction de Mittag-Leffler.

"Mathématiques, ce berceau d'ignorances, qui s'embellit de connaissances". Hamid BENANTEUR.

Chapitre 2

Fonction de Mittag-Leffler

2.1 Introduction

En mathématiques, la fonction de Mittag-Leffler notée $E_{\alpha,\beta}$ qui tient son nom du mathématicien Gösta Mittag-Leffler, est une fonction spéciale [9].

2.2 Rappels

La fonction Gamma d'Euler est définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,\ \mathrm{Re}(x) > 0. \tag{2.2.1}$$

Parmis ses propriétés, on cite :

$$\Gamma(n+1) = n!,\ n \in \mathbb{N} \tag{2.2.2}$$

et

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ \mathrm{Re}(x) > 0. \tag{2.2.3}$$

Ces deux propriétés, on en aura besoin par la suite.

2.3 Fonction de Mittag-Leffler à un paramètre

Définition 2.3.1 *On définit la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre par :*

$$E_\alpha(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)},\ Z \in \mathbb{C}, \tag{2.3.1}$$

où, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

Exemple 2.3.1 *Pour* $\alpha = 1$, *on a :*

$$E_1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\Gamma(n+1)} = e^Z. \tag{2.3.2}$$

2.4 Fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

Définition 2.4.1 *On définit la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres comme suit :*

$$E_{\alpha,\beta}(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \tag{2.4.1}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$.

C'est une autre généralisation de la fonction exponentielle.

Exemple 2.4.1 *Prenons* $\alpha = 1$ *et* $\beta = 2$, *on obtient :*

$$E_{1,2}(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\Gamma(n+2)} = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{Z}(e^Z - 1), \;\; Z \neq 0. \tag{2.4.2}$$

Exemple 2.4.2 *Et si* $\alpha = 1$ *et* $\beta = 3$, *alors on va avoir :*

$$E_{1,3}(Z) = \frac{1}{Z^2}(e^Z - Z - 1), \quad Z \neq 0. \tag{2.4.3}$$

2.5 Généralisation des fonctions de Mittag-Leffler

Définition 2.5.1 *La fonction de Mittag-Leffler généralisée* $E^{\delta}_{\alpha,\beta}$ *est donnée par la formule :*

$$E^{\delta}_{\alpha,\beta}(Z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\delta)_n Z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta) n!}, \tag{2.5.1}$$

avec

$$(\delta)_n := \delta(\delta+1)...(\delta+n-1) = \frac{\Gamma(\delta+n)}{\Gamma(\delta)}, \tag{2.5.2}$$

où $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, $\mathrm{Re}(\delta) > 0$.

Pour $\delta = 1$, la formule (2.5.1)est réduite à Mittag-Leffler à deux paramètres.

2.6 Cas Particuliers

Dans la formule (2.5.1), en prenant $\beta = 1$ et $\delta = 1$, on obtient :

$$E_{\alpha}(Z) = E^{1}_{\alpha,1}(Z).$$

Et si on prend $\delta = 1$, et α et β quelconques, on obtient :

$$E^{1}_{\alpha,\beta}(Z) = E_{\alpha,\beta}(Z).$$

2.7 Propositions

Proposition 2.7.1 [9] *: Soit $E_{\alpha,\beta}$ la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres telle que $\alpha = 1,\ \beta = r \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$E_{1,r}(Z) = \frac{1}{Z^{r-1}}(e^Z - \sum_{n=0}^{r-2} \frac{Z^n}{n!}). \tag{2.7.1}$$

Preuve. Par définition, on a :

$$E_{1,r}(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\Gamma(n+r)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{(n+r-1)!}.$$

Avec des petits calculs, on obtient :

$$\begin{aligned} E_{1,r}(Z) &= \frac{1}{Z^{r-1}}(e^Z - \frac{Z^{r-2}}{(r-2)!} - \frac{Z^{r-3}}{(r-3)!} - \cdots - 1) \\ &= \frac{1}{Z^{r-1}}(e^Z - \sum_{n=0}^{r-2} \frac{Z^n}{n!}). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.7.2 [2] *: Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors la dérivée à l'ordre k de $E_{\alpha,\beta}(Z)$ est donnée par :*

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta}(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)! Z^n}{\Gamma(\alpha k + \alpha n + \beta) n!}. \tag{2.7.2}$$

Preuve. Il suffit d'appliquer des dérivées successives de $E_{\alpha,\beta}(Z)$ jusqu'à la dérivée d'ordre k. □

2.8 Quelques propriétés

Comme conséquences des définitions (2.3.1) et (2.4.1), on démontre les résultats suivants :

Théorème 2.8.1 *[5] : Soit $E_{\alpha,\beta}$ la fonction de Mittag-Leffler à deux parametres . On a :*
1) $E_{\alpha,\beta}(Z) = ZE_{\alpha,\alpha+\beta}(Z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}$.
2) $E_{\alpha,\beta}(Z) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(Z) + \alpha Z \frac{d}{dZ} E_{\alpha,\beta+1}(Z)$.
3) $\left(\frac{d}{dZ}\right)^k \left[Z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(Z^\alpha)\right] = Z^{\beta-k-1} E_{\alpha,\beta-k}(Z^\alpha), \ \ \mathrm{Re}(\beta - k) > 0, \ k \in \mathbb{N}$.

Preuve. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}(Z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{Z^{n+1}}{\Gamma(\alpha + \alpha n + \beta)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^{n+1}}{\Gamma(\alpha + \alpha n + \beta)} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \\
&= Z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\Gamma(\alpha + \alpha n + \beta)} + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \\
&= ZE_{\alpha,\alpha+\beta}(Z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}.
\end{aligned}$$

Pour démontrer le résultat 2, on procède comme suit :

$$\begin{aligned}
\beta E_{\alpha,\beta+1}(Z) + \alpha Z \frac{d}{dZ} E_{\alpha,\beta+1}(Z) &= \beta E_{\alpha,\beta+1}(Z) + \alpha Z \frac{d}{dZ} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta + 1)} \\
&= \beta E_{\alpha,\beta+1}(Z) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha n Z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta + 1)} \\
&= \beta E_{\alpha,\beta+1}(Z) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha n + \beta - \beta) Z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta + 1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha n + \beta) Z^n}{(\alpha n + \beta)\Gamma(\alpha n + \beta)}.
\end{aligned}$$

Quant au dernier résultat, il suffit d'appliquer la dérivée $k^{\text{ème}}$. On a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dZ}\right)^k \left[Z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(Z^\alpha)\right] &= \left(\frac{d}{dZ}\right)^k \left[Z^{\beta-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\right]\\
&= \left(\frac{d}{dZ}\right)^k \left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^{\alpha n+\beta-1}}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\right]\\
&= \frac{\Gamma(\alpha n+\beta)}{\Gamma(\alpha n+\beta-k)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^{\alpha n+\beta-k-1}}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^{\alpha n+\beta-k-1}}{\Gamma(\alpha n+\beta-k)}\\
&= Z^{\beta-k-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Z^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n+\beta-k)}.
\end{aligned}$$

□

Le théoème 2.6.1 est démontré.

Théorème 2.8.2 *[5] : Soit $E_{\alpha,\beta}$ la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres . Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$Z^r E_{\alpha,\beta+\alpha r}(Z) = E_{\alpha,\beta} - \sum_{n=0}^{r-1}\frac{Z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer les propriétés de Mittag-Leffler. □

Chapitre 3

Mittag-Leffler et d'autres opérateurs intégraux

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à établir quelques propriétés sur la fonction de Mittag-Leffler en utilisant la transformée de Laplace ainsi que les dérivées et les intégrales d'ordre entier, puis celles d'ordre non entier.

3.2 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace [7] est un outil très puissant pour résoudre les équations et les systèmes différentiels linéaires, certaines équations aux dérivées partielles et même des équations intégo-différentielles.

3.2.1 Définitions

On va introduire la notion de fonction causale ainsi que la transformée de Laplace.

Définition 3.2.1 *Une fonction $f(t)$ définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale, si elle est nulle pour tout* $t < 0$.

Définition 3.2.2 *Soit f une fonction causale. Sa transformée de Laplace notée $F(p)$ est donnée par :*

$$\mathcal{L}[f(t)] := F(p) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt. \tag{3.2.1}$$

où, $p \in \mathbb{C}$.

3.2.2 Propriétés

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour f et g deux fonctions causales. On a :

1. Linéarité :
$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha\mathcal{L}\left[f(t)\right] + \beta\mathcal{L}\left[g(t)\right]. \tag{3.2.2}$$
2. Dérivabilité :
$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0). \tag{3.2.3}$$
3. Intégrabilité :
$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p}. \tag{3.2.4}$$

Proposition 3.2.1 *[5] : Soit $E_{\alpha,\beta}$ la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres. On a :*
$$\int_0^\infty e^{-aZ}Z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(xZ^\alpha)dZ = \frac{a^{\alpha-\beta}}{a^\alpha - x}, \tag{3.2.5}$$
où $a,\ x \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(a) > 0$ et $\left|\frac{x}{a^\beta}\right| < 1$.

Preuve. Il suffit d'appliquer la transformée de Laplace.

□

3.2.3 Exemples

On va citer quelques exemples en donnant des valeurs précises à a et β.

Exemple 3.2.1 *Pour $a = 1$, la formule (3.2.5) devient :*
$$\int_0^\infty e^{-Z}Z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(xZ^\alpha)dZ = \frac{1}{1-x},\ \ |x| < 1. \tag{3.2.6}$$

Exemple 3.2.2 *Si on prend $\beta = 1$, la formule (3.2.5) devient :*
$$\int_0^\infty e^{-aZ}E_{\alpha}(xZ^\alpha)dZ = \frac{a^{\alpha-1}}{a^\alpha - x}. \tag{3.2.7}$$

Exemple 3.2.3 *Pour $a = 1$, la formule (3.2.7) devient :*
$$\int_0^\infty e^{-Z}E_{\alpha}(xZ^\alpha)dZ = \frac{1}{1-x},\ \ |x| < 1. \tag{3.2.8}$$

3.3 Application de la Transformée de Laplace

De l'équation (3.2.5), on trouve que :

$$\mathcal{L}\left\{x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(ax^{\alpha})\right\} = \frac{S^{\alpha-\beta}}{S^{\alpha}-a}, \tag{3.3.1}$$

où $\mathrm{Re}(\alpha) > 0,\ \mathrm{Re}(s) > 0, \left|\frac{a}{s^{\beta}}\right| < 1$.
On a aussi,

$$\mathcal{L}\left\{x^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-ax^{\alpha})\right\} = \frac{S^{\alpha-\gamma}}{S^{\alpha}+a}, \tag{3.3.2}$$

où $\mathrm{Re}(\alpha) > 0,\ \mathrm{Re}(s) > 0,\ \left|\frac{a}{s^{\gamma}}\right| < 1$.
Donc,

$$\left(\frac{S^{\alpha-\beta}}{S^{\alpha}-a}\right)\left(\frac{S^{\alpha-\gamma}}{S^{\alpha}+a}\right) = \frac{S^{2\alpha-(\beta+\gamma)}}{S^{2\alpha}-a^{2}}, \tag{3.3.3}$$

pour $\mathrm{Re}(S^2) > \mathrm{Re}(a^2)$.

Proposition 3.3.1 *[5] : Soient $E_{\alpha,\beta},\ E_{\alpha,\gamma},\ E_{2\alpha,\beta+\gamma}$ trois fonctions de Mittag-Leffler à deux paramètres. On a :*

$$\mathcal{L}\left\{x^{\beta+\gamma-1}E_{2\alpha,\beta+\gamma}(a^2x^{2\alpha})\right\} = \mathcal{L}\left\{x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(ax^{\alpha})\right\}\mathcal{L}\left\{x^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-ax^{\alpha})\right\}, \tag{3.3.4}$$

où $\mathrm{Re}(a) > 0,\ \mathrm{Re}(s) > 0,\ \left|\frac{a^2}{s^{2\alpha}}\right| < 1,\ \left|\frac{a}{s^{\beta}}\right| < 1$ et $\left|\frac{a}{s^{\gamma}}\right| < 1$.
Preuve. Il suffit de faire les calculs dans l'équation (3.3.4). □

On peut toujours vérifier ce résultat à l'aide de la proposition 3.2.1.

3.4 Mittag-Leffler d'ordre rationnel

Dans cette partie, on parlera de la fonction de Mittag-Leffler à l'ordre rationel $\alpha = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}^*$ (premiers entre eux). On donne alors :

Théorème 3.4.1 [5] *: Soient E_α la fonction de Mittag-Leffler, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a :*

$$\frac{d^m}{dz^m} E_m(Z^m) = E_m(Z^m). \tag{3.4.1}$$

$$\frac{d^m}{dz^m} E_{\frac{m}{n}}(Z^{\frac{m}{n}}) = E_{\frac{m}{n}}(Z^{\frac{m}{n}}) + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{Z^{\frac{rm}{n}-m}}{\Gamma(\frac{rm}{n}+1-m)},\ n = 2, 3... \tag{3.4.2}$$

Idées de démonstration : Concernant les formules (3.4.1) et (3.4.2), leurs démonstrations découlent de la forme généralisée de la fonction de Mittag-Leffler.

3.5 Fonction Mittag-Leffler et intégrale de Riemann-Liouville

Définition 3.5.1 *Soient f une fonction continue sur $[a, b] \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in]m-1, m[;\ m \in N^*$. On appelle intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville $J_a^\alpha f(x)$ (respectivement ${}_{RL}D_a^{-\alpha} f(x)$), la fonction suivante :*

$$J_a^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{3.5.1}$$

ou encore

$${}_{RL}D_a^{-\alpha} f(x) = D^m J^{m+\alpha} f(x) = J^\alpha f(x). \tag{3.5.2}$$

Théorème 3.5.1 *[5] : Soit $E_{\alpha,\beta}$ la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres . Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a les égalités suivantes :*

$$\left(J_0^\alpha \left[z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(qz^\alpha)\right]\right)(x) = \frac{x^{\beta-1}}{q} \left[E_{\alpha,\beta}(qx^\alpha) - \frac{1}{\Gamma(\beta)}\right],\ q \neq 0. \tag{3.5.3}$$

$$\left(J_0^\alpha \left[E_\alpha(qz^\alpha)\right]\right)(x) = \frac{1}{q} \left[E_\alpha(qx^\alpha) - 1\right],\ q \neq 0. \tag{3.5.4}$$

En utilisant les définitions (2.2.1) et (2.3.1), on obtient :

$$\left(J_0^\alpha \left[z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(qz^\alpha)\right]\right)(x) = x^{\alpha+\beta-1} E_{\alpha,\alpha+\beta}(qx^\alpha), \tag{3.5.5}$$

$$\left(J_0^\alpha \left[E_\alpha(qz^\alpha)\right]\right)(x) = x^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(qx^\alpha). \tag{3.5.6}$$

3.6 Fonction de Mittag-Leffler et dérivée de Riemann-Liouville

Définition 3.6.1 *Soient f une fonction continue sur $[a,b] \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in]m-1, m[$; $m \in N^*$. On appelle dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville notée ${}_{RL}D_a^{\alpha} f(x)$, la fonction suivante :*

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha} f(x) := \frac{d^m}{dx^m}[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha-1} f(\tau) d\tau], \tag{3.6.1}$$

ou bien encore

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha} f(x) := D^m J^{m-\alpha} f(x). \tag{3.6.2}$$

Théorème 3.6.1 *[5] : Soit $E_{\alpha,\beta}$ la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres . Pour $0 < \alpha < 1$ et $\beta > \alpha$, on a les égalitées suivantes :*

$$ \left({}_{RL}D^{\alpha} \left[z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(qz^{\alpha}) \right] \right)(x) = \frac{x^{\beta-\alpha-1}}{\Gamma(\beta-\alpha)} + qx^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(qx^{\alpha}). \tag{3.6.3}$$

$$ \left({}_{RL}D^{\alpha} \left[E_{\alpha}(qz^{\alpha}) \right] \right)(x) = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + qE_{\alpha}(qx^{\alpha}). \tag{3.6.4}$$

Chapitre 4

Applications

Dans cette partie, on va s'intéresser à quelques applications de la fonction de Mittag-Leffler.

4.1 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 4.1.1 *Soient f une fonction continue sur $[a,b] \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in]m-1, m[$; $m \in N^*$. On appelle dérivée d'ordre α au sens de Caputo notée ${}_C D_a^\alpha f(x)$, la fonction suivante :*

$$ {}_C D_a^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau. \tag{4.1.1}$$

Remarque 4.1.1 *On a aussi*

$$ {}_C D_a^\alpha f(x) := J^{m-\alpha} D^m f(x). \tag{4.1.2}$$

Pour les résultats qui vont suivre, on a besoin des formules suivantes [4] [3] [2] :

$$D^{-\alpha}(t-a)^{\mu-1} E_{p,\mu}^{\gamma}[w(t-a)^p] = (t-a)^{\mu+\alpha-1} E_{p,\mu+\alpha}^{\gamma}[w(t-a)^p]. \tag{4.1.3}$$

$$J_a^\alpha (t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1},\ t > a,\ \alpha > 0,\ \beta > 0. \tag{4.1.4}$$

$$(a+b)_m := \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} (a)_r (b)_{m-r}. \tag{4.1.5}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t)\right] = s^\alpha F(s) - \sum_{m=0}^{n-1} s^{\alpha-m-1} f^{(m)}(0),\ n-1 < \alpha < n. \tag{4.1.6}$$

4.2 Méthode LAPM

La méthode Laplace, Adomian et Padé(LAPM) est une combinaison de la transformée de Laplace , la décomposition Adomian (ADM) [1]et le rapprochement de Padé. Pour plus de détails, on se réfère à [2].
On considère l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de Riccati :

$$ {}_cD^{\alpha}y = P(t)y^2 + Q(t)y + R(t),\ t > 0, 0 < \alpha < 1, \tag{4.2.1} $$

avec la condition initiale

$$ y(0) = k_1. \tag{4.2.2} $$

Le terme non linéaire de l'équation (4.2.1) est y^2 et $P(t), Q(t), R(t)$ sont des fonctions données. Pour $\alpha = 1$ l'équation fractionnaire de Riccati devient une équation différentielle classique de Riccati.
En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation (4.2.1), et en tenant compte de la linéarité de $\mathcal{L}$, on obtient :

$$ \mathcal{L}[{}_cD^{\alpha}y] = \mathcal{L}[P(t)y^2] + \mathcal{L}[Q(t)y] + \mathcal{L}[R(t)]. \tag{4.2.3} $$

En utilisant les propriétés de la trasformée de Laplace et la condition initiale, on trouve :

$$ S^{\alpha}\mathcal{L}[y] - S^{\alpha-1}k_1 = \mathcal{L}[P(t)y^2] + \mathcal{L}[Q(t)y] + \mathcal{L}[R(t)], \tag{4.2.4} $$

ce qui est équivalent à :

$$ \mathcal{L}[y] = \frac{k_1}{S} + \frac{1}{S^{\alpha}}\mathcal{L}[P(t)y^2] + \frac{1}{S^{\alpha}}\mathcal{L}[Q(t)y] + \frac{1}{S^{\alpha}}\mathcal{L}[R(t)]. \tag{4.2.5} $$

La méthode suppose que la solution est sous la forme :

$$ y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n, \tag{4.2.6} $$

et le terme non linéaire y^2 est décomposé comme suit :

$$ y^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \tag{4.2.7} $$

où $A_n = A_n(y_0, y_1, y_2, ..., y_n)$ sont les polynômes d'Adomian. Ils sont donnés par :

$$ \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ ... \\ ... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & y_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & y_2 & \frac{1}{2}y_1^2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(y_0) \\ f'(y_0) \\ f''(y_0) \\ ... \\ ... \end{pmatrix}. \tag{4.2.8} $$

En utilisant les formules précédentes, le résultat devient :

$$ \mathcal{L}[\sum_{n=0}^{\infty} y_n] = \frac{k_1}{S} + \frac{1}{S^{\alpha}}\mathcal{L}[P(t)\sum_{n=0}^{\infty} A_n] + \frac{1}{S^{\alpha}}\mathcal{L}[Q(t)\sum_{n=0}^{\infty} y_n] + \frac{1}{S^{\alpha}}\mathcal{L}[R(t)]. \tag{4.2.9} $$

4.3 Application

Dans cette partie, on utilise LAPM à la résolution de l'équation différentielle non linéaire fractionnaire de Riccati [2] suivante :

$$ {}_cD^{\alpha}(y) = 1 + 2y(t) - y^2(t), \ 0 < \alpha \leq 1, \tag{4.3.1} $$

avec la condition initiale

$$ y(0) = 0. \tag{4.3.2} $$

En appliquant la transformée de Laplace avec ses propriétés et en utilisant la condition initiale de l'équation (4.3.1), on obtient :

$$ \mathcal{L}[y] = \frac{1}{S(S^{\alpha} - 2)} - \frac{1}{S^{\alpha} - 2}\mathcal{L}[y^2]. \tag{4.3.3} $$

En remplaçant les équations (4.2.6) et (4.2.7) dans l'équation (4.3.3), le résultat devient :

$$ \mathcal{L}[\sum_{n=0}^{\infty} y_n] = \frac{1}{S(S^{\alpha} - 2)} - \frac{1}{S^{\alpha} - 2}\mathcal{L}[P(t) \sum_{n=0}^{\infty} A_n]. \tag{4.3.4} $$

Plus exactement, on a :

$$ \mathcal{L}[y_0] = \frac{1}{S(S^{\alpha} - 2)} \tag{4.3.5} $$

$$ \mathcal{L}[y_1] = -\frac{1}{S^{\alpha} - 2}\mathcal{L}[A_0], \tag{4.3.6} $$

$$ \mathcal{L}[y_2] = -\frac{1}{S^{\alpha} - 2}\mathcal{L}[A_1], \tag{4.3.7} $$

$$ \vdots $$

$$ \mathcal{L}[y_n] = -\frac{1}{S^{\alpha} - 2}\mathcal{L}[A_{n-1}], \ (n \geq 1). \tag{4.3.8} $$

La première formule peut être écrite comme suit :

$$ \mathcal{L}[y_0] = \frac{S^{-1}}{(S^{\alpha} - 2)} \tag{4.3.9} $$

En appliquant la transformée inverse de Laplace (voir annexe) à l'équation (4.3.9), on peut l'écrire comme suit :

$$ y_0 = t^{\alpha} E_{\alpha,1+\alpha}(2t^{\alpha}) = t^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2t^{\alpha})^j}{\Gamma((j+1)\alpha + 1)}. \tag{4.3.10} $$

On voit clairement que la solution dépend de la fonction de Mittag-Leffler.

En utilisant y_0, les polynômes d'Adomian et les équations précédentes, on obtient y_1. Ainsi, de la même façon on calcule les termes y_2, y_3.... Donc la solution approchée est donnée comme suit :

$$y(t) = y_0 + y_1 + y_2 + ... \tag{4.3.11}$$

4.4 Résolution de quelques EDFs

Soit la suite bornée $\{A_k\}_0^\infty$. On définit la fonction f par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k. \tag{4.4.1}$$

On va citer deux théorèmes, qui donnent la solution de l'équation différentielle fractionnaire généralisée à l'aide de $f(x)$ [4].

Théorème 4.4.1 *[4] : Si $v, \mu, c > 0$, alors il existe une unique solution de l'équation différentielle fractionnaire :*

$$N(t) + c^v_{RL} D_a^{-v} N(t) = N_a (t-a)^{\mu-1} f\ [-c^v (t-a)^v], \tag{4.4.2}$$

qui est donnée par :

$$N(t) = N_a (t-a)^{\mu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{\Gamma(vk+\mu)}{\Gamma(v(m+k)+\mu)} [-c^v (t-a)^v]^{m+k}. \tag{4.4.3}$$

Preuve. On multiplie les deux membres de (4.4.2) par $(-c^v)^m D_a^{-mv}$, on obtient :

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-c^v)^m D_a^{-mv} N(t) - \sum_{m=0}^{\infty} (-c^v)^{m+1} D_a^{-(m+1)v} N(t) = N_a \sum_{m=0}^{\infty} (-c^v)^m D_a^{-mv} (t-a)^{\mu-1} f\ [-c^v (t-a)^v]. \tag{4.4.4}$$

En utilisant la valeur de $f(x)$, on trouve :

$$N(t) = N_a \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} A_k (-c^v)^{m+k} D_a^{-mv} (t-a)^{vk+\mu-1}. \tag{4.4.5}$$

D'après les propriétés de l'intégrale de Rimann-Liouvile sur les polynômes, on trouve :

$$N(t) = N_a (t-a)^{\mu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{\Gamma(vk+\mu)}{\Gamma(v(m+k)+\mu)} [-c^v (t-a)^v]^{m+k}. \tag{4.4.6}$$

□

Le deuxième résultat à rappeler est le suivant :

Théorème 4.4.2 *[4] : Si $v, \mu, c > 0$,et $\alpha > 0$, alors il existe une unique solution de l'EIDF :*

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha} N(t) + c^v_{RL} D_a^{-v} N(t) = N_a (t-a)^{\mu-1} f\ [-c^v (t-a)^{\alpha+v}], \tag{4.4.7}$$

avec la condition initiale

$$ {}_{RL}D_a^{\alpha-r-1} N_a = b_r,\ (r = 0, 1, 2, ..., n-1). \tag{4.4.8}$$

Cette solution est donnée par :

$$\begin{aligned} N(t) &= N_a (t-a)^{\alpha+\mu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{\Gamma((\alpha+v)k+\mu)}{\Gamma((\alpha+v)(m+k)+\mu)} [-c^v (t-a)^{\alpha+v}]^{m+k} \\ &+ \sum_{r=0}^{n-1} b_r (t-a)^{\alpha-r-1} E_{\alpha+v,\alpha-r}[-c^v (t-a)^{\alpha+v}]. \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

Preuve. En appliquant l'opérateur fractionnaire $D_a^{-\alpha}$ aux deux membres de (4.4.7) et en utilisant la formule :

$$ D_a^{-\alpha} D_a^{\alpha} N(t) = N(t) - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{\mu-1}}{\Gamma(\alpha-v)} D_a^{\alpha-r-1} N_a, \tag{4.4.10}$$

où, n est un entier, tel que $n = [\alpha] + 1$.
On obtient :

$$ N(t) + c^v D_a^{-(\alpha+v)} N(t) = N_a D_a^{-\alpha} (t-a)^{\mu-1} f\ [-c^v (t-a)^{\alpha+v}] + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{\alpha-r-1}}{\Gamma(\alpha-r)} D_a^{\alpha-k-1} N_a. \tag{4.4.11}$$

En appliquant l'opérateur $(-c^v)^m D_a^{-m(\alpha+v)}$ aux deux membres de (4.4.11), on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} (-c^v)^m D_a^{-m(\alpha+v)} N(t) - \sum_{m=0}^{\infty} (-c^v)^{m+1} D_a^{-(m+1)(\alpha+v)} N(t) \\ = \ & N_a \sum_{m=0}^{\infty} (-c^v)^m D_a^{-\alpha-m(\alpha+v)} (t-a)^{\mu-1} f\ [-c^v (t-a)^{\alpha+v}] \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n-1} D_a^{\alpha-r-1} N_0 (-c^v)^m D_a^{-m(\alpha+v)} \frac{(t-a)^{\alpha-r-1}}{\Gamma(\alpha-r)}. \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

D'après (4.1.4), (4.4.8) , (4.4.1) et la définition 2, l'équation (4.4.12) s'écrit :

$$\begin{aligned} N(t) &= N_a (t-a)^{\alpha+\mu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{\Gamma((\alpha+v)k+\mu)}{\Gamma((\alpha+v)(m+k)+\mu)} [-c^v (t-a)^{\alpha+v}]^{m+k} \\ &+ \sum_{r=0}^{n-1} b_r (t-a)^{\alpha-r-1} E_{\alpha+v,\alpha-r}[-c^v (t-a)^{\alpha+v}]. \end{aligned} \tag{4.4.13}$$

□

Remarque 4.4.1 *Pour $\alpha = 0$ et $b_r = 0$, on retrouve le théorème* 4.4.1.

4.5 L'EIDF Cinétique

On continue avec les applications physiques de $E_{\alpha,\beta}$. Cette fois, on donne d'autres résultats récents sur les applications de cette fonction dans des problèmes cinétiques d'ordre arbitraire [4]. Ces résultats peuvent être appliqués à la résolution de l'équation cinétique fractionnaire généralisée. Si $N(t)$ est la densité d'une espèce donnée à l'instant t et N_a est la densité de cette espèce à l'instant $t = a$, alors on a les résultats suivants :

Théorème 4.5.1 *[4] : Si $v > 0$, $\mu > 0$ et $c > 0$, alors il existe une unique solution à l'équation cinétique fractionnaire :*

$$N(t) - N_a(t-a)^{\mu-1}E^{\delta}_{v,\mu}[-c^v(t-a)^v] = -c^v_{RL}D^{-v}_{a+}N(t). \tag{4.5.1}$$

Cette solution est donnée par :

$$N(t) = N_a(t-a)^{\mu-1}E^{\delta+1}_{v,\mu}[-c^v(t-a)^v]. \tag{4.5.2}$$

Preuve. Soit $A_k = \frac{(\gamma)_k}{\Gamma(vk+\mu)k!}$. Alors on a :

$$N(t) = N_a(t-a)^{\mu-1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(\gamma)_k}{\Gamma(vk+\mu)k!}\frac{\Gamma(vk+\mu)}{\Gamma(mv+\mu)}[-c^v(t-a)^v]^m. \tag{4.5.3}$$

En utilisant les résultats de Carlitz [3], on obtient :

$$N(t) = N_a(t-a)^{\mu-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\gamma+1)_m}{\Gamma(mv+\mu)m!}[-c^v(t-a)^v]^m. \tag{4.5.4}$$

□

Le théorème 4.5.1 est démontré.

On donne aussi le résultat particulier suivant :

Corollaire 4.5.1 *[4] : Si $v > 0$, $\mu > 0$, $c > 0$ et $a = 0$, alors il existe une unique solution à l'équation intégrale :*

$$N(t) - N_0t^{\mu-1}E^{\delta}_{v,\mu}[-c^vt^v] = -c^v_{RL}D^{-v}_{0+}N(t). \tag{4.5.5}$$

Elle est donnée par :

$$N(t) = N_0t^{\mu-1}E^{\delta+1}_{v,\mu}[-c^vt^v]. \tag{4.5.6}$$

Pour les équations intégro-différentielles, on se contente de donner le théorème suivant [10] :

Théorème 4.5.2 *[4] : Si $v > 0,\ \alpha > 0,\ \mu > 0,\ c > 0,$ alors il existe une unique solution au problème :*

$$ {}_{RL}D^{\alpha}_{a+}N(t) - N_a(t-a)^{\mu-1}E^{\delta}_{\alpha+v,\mu}[-c^v(t-a)^{\alpha+v}] = -c^v_{RL}D^{-v}_{a}N(t), \tag{4.5.7}$$

avec la condition initiale,

$$ {}_{RL}D^{\alpha-r-1}_{a+}N_a = b_r,\ \ (r = 0,1,2,...,n-1). \tag{4.5.8}$$

Cette solution est la suivante :

$$N(t) = N_a(t-a)^{\alpha+\mu-1}E^{\delta+1}_{\alpha+v,\alpha+\mu}[-c^v(t-a)^{\alpha+v}] + \sum_{r=0}^{n-1} b_r(t-a)^{\alpha-r-1}E^{\delta}_{\alpha+v,\alpha-r}[-c^v(t-a)^{\alpha+v}]. \tag{4.5.9}$$

Preuve. Soit $A_k = \frac{(\gamma)_k}{\Gamma((\alpha+v)k+\mu)k!}$. En appliquant le théorème 4.3.2, on obtient :

$$\begin{aligned} N(t) &= \sum_{r=0}^{n-1} b_r(t-a)^{\alpha-r-1}E_{\alpha+v,\alpha-r}[-c^v(t-a)^{\alpha+v}] + \qquad (4.5.10)\\ &\quad N_a(t-a)^{\alpha+\mu-1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(\gamma)_k}{\Gamma((\alpha+v)k+\mu)k!}\frac{\Gamma((\alpha+v)k+\mu)}{\Gamma((\alpha+v)m+\alpha+\mu)}[-c^v(t-a)^{\alpha+v}]^m, \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} N(t) &= \sum_{r=0}^{n-1} b_r(t-a)^{\alpha-r-1}E_{\alpha+v,\alpha-r}[-c^v(t-a)^{\alpha+v}] + \qquad (4.5.11)\\ &\quad .N_a(t-a)^{\alpha+\mu-1}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(\gamma+1)_k}{\Gamma((\alpha+v)m+\alpha+\mu)m!}[-c^v(t-a)^{\alpha+v}]^m. \end{aligned}$$

$\square$

CONCLUSION

Dans ce mémoire de Master, nous nous sommes intéressés à la fonction de Mittag-Leffler. Nous avons mis en évidence quelques propriétés de la fonction de Mittag-Leffler à un paramètre.
Puis nous avons introduit la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres ; nous avons redémontré certaines de ses propriétés. Nous avons aussi détaillé d'autres démonstrations sur ses propriétés intégrales et différentielles. Nous avons fait le lien entre d'une part la transformée de Laplace, les intégrales au sens de Rimann-Liouville et les dérivées fractionnaires et d'autre part, la fonction de Mittag-Leffler.
Dans le coté applications, nous avons présenté quelques modèles utilisant explicitement la fonction $E_{\alpha,\beta}$. On cite par exemple :
1) L'équation différentielle d'ordre fractionnaire de Riccati
2) Les modèles différentiels fractionnaires de la cinétique
3) Les modèles intégro-différentiels fractionnaires de la cinétique.
Ce travail nous a demandé beaucoup de langage mathématique allant de la théorie des opérateurs, l'analyse complexe et l'algèbre linéaire au calcul fractionnaire avec les deux dimensions, Intégrale et différentielle sans oublier la transformée de Laplace.
Notre travail ouvre beaucoup de pistes de réflexions et de recherches. On peut citer par exemple :
1) Peut-on résoudre des équations différentielles fractionnaires dans le cas complexe en utilisant la fonction de Mittag-Leffler ?
2) sera-t-il possible de transformer les EDFs fractionnaires en utilisant Laplace et Mittag-Leffler à des équations algébriques ?
Voilà deux chemins donnés !

Bibliographie

[1] A. Ahmed : *Adomian decomposition method-convergence analysis and numerical approximations thesis*, mathematics McMaster university Hamilton, Ontario, (2008).

[2] N. Alam Khan, A. Ara and N. Alam Khan : *Fractional-order Riccati differential equation-analytical approximation and numerical results.* Khan et al. advances in difference equations 2013, (2013) :185.

[3] L. Carlitz : *Some expansion and convolution formulas related to Mac Mohan's Master theorems*, SIAM J. math. annal. 8(2) (1977), 320-336.

[4] A. Chouhan, S. D. Purohit and S. Saraswat : *An alternative method for solving generalized differential equations of fractional order*, Kragujevac journal of mathematics volume 37(2) (2013), pages 299-306.

[5] H.J. Haubold, A.M. Mathai, R.K. Saxena : *Mittag-Leffler functions and their applications,* arXiv :0909.0230v2 [math.CA] 4 Oct 2009.

[6] R. Hilfer, Y. Luchko and Z. Tomovski : *Fractional method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivatives*, fractional calculus and applied analysis, 12(3)(2009), 299-318.

[7] G. Jean-Laurent : *Transformation de Laplace-definition, propriétés et exemples d'utilisation en physique.*

[8] A.A. Kilbas, M. Saigo and R.K. Saxena : *Solution of Volterra integro-differential equations with generalized Mittag-Leffler function in the kernels*, journal of integral equations and applications, 14(4)(2002), 377-386.

[9] M.A. Özarslan and B. Yılmaz : *The extended Mittag-Leffler function and its properties.* Özarslan and Yılmaz journal of inequalities and applications 2014, (2014) :85.

[10] R.K. Saxena, A.M. Mathai and H.J. Haubold : *solutions of certain fractional kinetic equations and a fractional diffusion equation*, J. math. phys. 51 (2010), 103-506.

Annexe

$f(t)$	$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\exp(-pt)\,dt$
$\delta(t)$	1
$1,\ \ K,\ \ Kt$	$\frac{1}{p},\ \frac{K}{p},\ \frac{K}{p^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\exp(-\alpha t)$	$\frac{1}{p+\alpha}$
$sh\,(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$
$ch\,(\alpha t)$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$
$\exp(-\alpha t)\sin(at)$	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$
$\exp(-\alpha t)\cos(at)$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t\sin(at)$	$\frac{2pa}{(p^2+\alpha^2)^2}$
$t\cos(at)$	$\frac{p^2+\alpha^2}{(p^2+\alpha^2)^2}$
$t\exp(-\alpha t)$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
$\frac{1}{2a^3}\left(\sin(at)-at\cos(at)\right)$	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n\,\frac{d^nF(p)}{dp^n}$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(p)G(p)$