

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE

Pour l'obtention du diplôme DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Cycle LMD

Spécialité : Modélisation Contrôle et Optimisation

Thème :

**Les Ondelettes de Jacobi et leurs Applications pour la Résolution
de Problèmes de Valeurs aux Limites.**

Présenté par

M^{elle} .Aouda LAKEB

Soutenu le 09 / 06 / 2014 devant le Jury

Mr.BAHRI.Sidi.Mohamed	Président	Maître de Conférences A	U. MOSTAGANEM
Mme ABLAOUI Naima	Examinatrice	Maître Assistant A	U. MOSTAGANEM
Mr.BELHAMITI.Omar	Encadreur	Maître de Conférences A	U. MOSTAGANEM

Remerciements

En tout premier lieu, je remercie le Dieu, tout puissant, de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés, et pour faire ce travail.

*J'exprime ma sincère gratitude et remerciements à mon encadreur **Mr. Belhamiti Omar** pour ses conseils précieux, son aide dans le cheminement de cette étude et pour la peine qu'il s'est donnée tout au long de ce travail afin de faire ce document.*

*Je remercie infiniment **Mr. Bahri Sidi mohamed** pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ce mémoire.*

*J'adresse mes sincères remerciements à **Mme. Ablaoui Naima** pour avoir bien voulu examiner ce travail.*

Je tiens à remercier ma famille pour leur patience, et surtout mon père, mes deux mères, mon frère, et mes soeurs.

Un grand merci à mon fiancé, qui m'a soutenu et m'encouragé à finir ce travail.

Enfin, Je dédie ce travail en signe de respect, reconnaissance

et de remerciement à mon chère père qui m'a aidé de près et de loin.

Résumé

Dans ce memoire, on va étudier le modèle de l'épidémie de l'obésité, et on a proposé la méthode des ondelettes de Gegenbauer combinée avec la technique de découplage et quasi-linéarisation pour la simulation numérique, et on prend deux exemples une équation différentielle linéaire à coefficients constants et un système d'équations ordinaires non linéaires pour confirmer la stabilité numérique de la méthode, et à la fin on simule le modèle de l'épidémie de l'obésité.

Table des matières

1	Modélisation de l'épidémie d'obésité	2
1.1	L'obésité	3
1.1.1	Les différentes formes d'obésité	3
1.1.2	Les causes de l'obésité	4
1.1.3	Les complications	4
1.2	Le modèle mathématique de l'épidémie de l'obésité	4
2	Les Ondelettes et les Polynômes de Jacobi	8
2.1	Polyômes de Jacobi	8
2.2	Polynômes de Gegenbauer	11
2.3	Les ondelettes	11
2.4	Les Ondelettes de Jacobi	12
2.5	Les Ondelettes de Gegenbauer	12
2.6	Approximation d'une Fonction	13
2.7	La Matrice Opérationnelle d'Intégration	14
2.8	Le produit de deux ondelettes de Gegenbauer	19
2.9	Description de la méthode	21
2.10	Technique de découplage et quasi-linéarisation	23
3	Application et Simulation Numérique	24
3.1	Test numérique	24

3.2	Simulation du modèle de l'épidémie de l'obésité	27
	Bibliographie	30
3.3	Annexe	32

INTRODUCTION

La modélisation est un outil important pour la recherche scientifique. Elle est utilisée dans tous les domaines; car elle permet de formuler mathématiquement les problèmes concrets, issu du monde réel. Un modèle mathématique est une traduction à l'aide d'une équation ou système d'équations (différentielles ou algébriques) d'une observation dans le but de l'étudier et de l'analyser, selon le genre des équations différentielles utilisées pour la modélisation, nous aurons différents types de modèles.

L'étape qui suit la modélisation est la simulation numérique. Cette dernière est une série de calculs effectués sur un ordinateur et reproduisant un phénomène physique. Elle aboutit à la description du résultat de ce phénomène comme s'il s'était réellement déroulé. Peut présenter des phénomènes physique complexes dont la description repose sur un modèle mathématique comportant des équations aux dérivées partielles.

L'analyse numérique est à la frontière entre les mathématiques et l'informatique. Il s'agit en quelque sorte d'un interprète qui permettra de transposer la connaissance mathématique théorique à la pratique d'un ordinateur et de pouvoir ainsi résoudre des problèmes concrets. Les deux objectifs principaux de l'analyse numérique sont, d'une part, de pouvoir résoudre numériquement des problèmes concrets dont on connaît ou pas la solution analytique et d'autre part, d'analyser le comportement des méthodes utilisées.

L'objectif de ce travail est la modélisation et la simulation numérique du modèle à compartiment de l'épidémie de l'obésité de type **SIR**, c'est un modèle déterministe où la population est divisée en un nombre de catégorie selon l'état par rapport à la maladie (susceptible, infecté et guérit), pour la résolution numérique, on propose la méthode des ondelettes de Gegenbauer qui est basée sur l'utilisation de la matrice d'intégration.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, on donne une description générale de l'obésité, ensuite, on détaille la modélisation de l'épidémie de l'obésité. Dans le deuxième chapitre, on présente la méthode des ondelette de Gegenbauer, d'abord, les polynômes de Jacobi et ceux de Gegenbauer, ensuite les

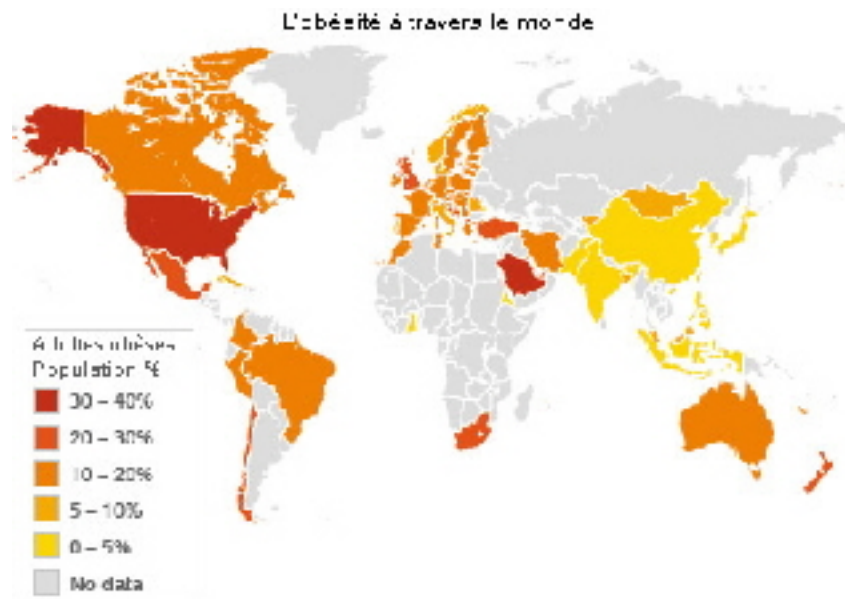
ondelettes en générale, les ondelettes de Jacobi, et les ondelettes de Gegenbauer en détailles et à la fin de ce chapitre, on donne la technique de découplage. Le troisième chapitre est consacré à la résolution numérique de deux exemples dont on connaît leurs solutions analytiques et à la simulation du modèle de l'épidémie de l'obésité.

On termine ce travail par une conclusion et les perspectives sur la méthode et le modèle, les références bibliographiques, et les annexes.



Modélisation de l'épidémie d'obésité

L'obésité humaine a été reconnue comme une maladie en 1997 par l'OMS. Cette organisation définit (le surpoids et l'obésité comme une accumulation anormale ou excessive de graisse corporelle qui peut nuire à la santé). Sa prévention est un problème de santé publique multifactoriel est considérée aujourd'hui par métaphore comme une pandémie, bien qu'il ne s'agisse pas d'une maladie infectieuse [14].



Un adulte obèse est cue qu'un avec un IMC egal ou supérieur à 30

1.1 L'obésité

L'obésité est l'état d'un individu ayant un excès de poids par d'augmentation de la masse adipeuse (graisseuse). L'obésité se définit par un indice de masse corporelle (IMC) supérieure à 30 [14].

L'IMC se calcul comme suit

$$IMC = \frac{\text{poids corporel}(kg)}{\text{taille}^2(m)}.$$

Exemple : Si vous pesez (68 kg) et mesurez (1.73 m), divisez 68 par (1.73)², vous obtenez 22.74, une valeur qui se situe au beau milieu de l'intervalle santé.

1.1.1 Les différentes formes d'obésité

Il y'a 4 types d'obésité selon la répartition de la masse de graisse, [14]

- le surplus de graisse est réparti au niveau du corps sans localisation préférentielle.
- l'excès de graisse est concentré au niveau du tronc et de l'abdomen (androïde).
- l'accumulation de graisse se fait dans l'abdomen (viscérale).
- la graisse se localise au niveau des hanches et des cuisses (gynoïde).

Selon l'indice de masse corporelle il y'a 3 classes [14]

- l'obésité modérée,
- l'obésité sévère,
- l'obésité morbide ou massive.

Définition et classification des obésités de l'adulte auprès de l'OMS [14]

Classification	IMC (kg/m^2)	Risque pour la santé
Valeur de référence	18.5 à 24.9	Moyen
Surpoids	25 à 29.9	Légèrement augmenté
Obésité modérée	30 à 34.9	Modèrément augmenté
Obésité sévère	35 à 39.9	Fortement augmenté
Obésité massive	≥ 40	Très fortement augmenté

1.1.2 Les causes de l'obésité

L'accumulation de plusieurs facteurs conduit à l'obésité [14]

- les facteurs génétiques ;
- les facteurs alimentaires ;
- les facteurs psychologique ;
- un trouble de la prise alimentaire ;
- l'insuffisance des dépenses énergétiques quotidiennes ;
- le manque de sommeil.
- ...etc.

1.1.3 Les complications

Parmi les risques de l'obésité pour la santé, on retrouve([14])

- les troubles de la respiration ;
- certains types de cancer ;
- une affection des artères coronaires ;
- une dépression ;
- le diabète ;
- une affection de la vésicule biliaire ou du foie ;
- le reflux gastro-oesophagien (RGO) ;
- une pression artérielle élevée ;
- une hypercholestérolémie ;
- une affection articulaire ;
- un accident vasculaire cérébral.
- ...etc.

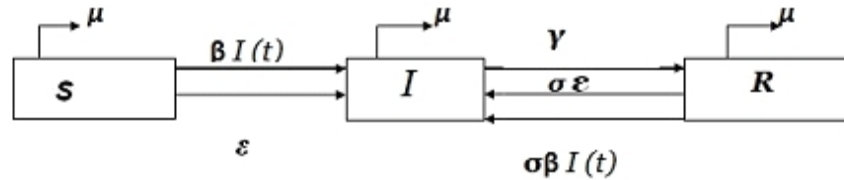
1.2 Le modèle mathématique de l'épidémie de l'obésité

Dans la suite de ce travail, on va étudier l'évolution de la population des obèses, en construisant le modèle mathématique en fonction du temps.

Le nombre total de la population N est égale à la somme des personnes susceptibles (jamais

obèse) (S), infectieuse (obèse) (I), et les ex-obèse (R).

Le processus d'évolution de l'obésité peut être schématisé par le diagramme suivant [7]



où

N : le nombre total de la population.

S : les personnes susceptibles.

I : les individus infectieuses.

R : les ex-obèse.

μ : le taux de décès ou de naissance.

β : le taux de contamination.

ε : le risque de l'obésité pour des raisons non contagieuses.

γ : le taux de récupération.

σ : le risque relatif de prise de poids chez les personnes ex-obèse.

Pour décrire la dépendance temporelle du risque d'obésité, nous utilisons les équations différentielles ordinaires.

En effet, entre l'instant t et $t + \Delta t$, on a

$$S(t + \Delta t) - S(t) = [\mu N - \mu S(t) - \beta I(t)S(t) - \varepsilon S(t)] \Delta t. \quad (1.2.1)$$

La signification du chaque terme

$+\mu N$: tous les nouveaux nés de la population sont des personnes non obèses.

$-\mu S(t)$: le décès de certaines personnes susceptibles.

$-\beta I(t)S(t)$: les personnes qui sont infectées par contamination.

$-\varepsilon S(t)$: les autres qui sont infectées par des raisons non contagieuse.

L'équation (1.2.1) devient

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \mu N - \mu S(t) - \beta I(t)S(t) - \varepsilon S(t).$$

En faisant Δt tend vers 0; on obtient

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \mu S(t) - \beta I(t)S(t) - \varepsilon S(t).$$

On fait la même chose pour les personnes infectieuses

$$I(t + \Delta t) - I(t) = [\varepsilon S(t) + \beta I(t)S(t) - \mu I(t) - \gamma I(t) + \sigma \varepsilon R(t) + \sigma \beta I(t)R(t)] \Delta t. \quad (1.2.2)$$

La signification du chaque terme :

$+\varepsilon S(t)$: les personnes susceptibles qui sont infectées par des raisons non contagieuse.

$+\beta I(t)S(t)$: les susceptibles infectés par des raisons contagieuse.

$-\mu I(t)$: le décès des certaines personnes infectieuses.

$-\gamma I(t)$: les infectieux peuvent devenir ex-obèse par un traitement.

$+\sigma \beta I(t)R(t)$ et $+\sigma \varepsilon R(t)$: les ex-obèses rechutés.

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t} &= \frac{dI}{dt} \\ &= \varepsilon S(t) + \beta I(t)S(t) - \mu I(t) - \gamma I(t) + \sigma \varepsilon R(t) + \sigma \beta I(t)R(t). \end{aligned}$$

De la même manière on a

$$R(t + \Delta t) - R(t) = [\gamma I(t) - \sigma \varepsilon R(t) - \sigma \beta I(t)R(t) - \mu R(t)] \Delta t.$$

Ce qui donne l'équation différentielle

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t) - \sigma \varepsilon R(t) - \sigma \beta I(t)R(t) - \mu R(t).$$

La signification de chaque terme

$+\gamma I(t)$: les personnes qui ont perdus du poids par un traitement.

$-\sigma \beta I(t)R(t)$ et $-\sigma \varepsilon R(t)$: les ex-obèses rechutés.

$-\mu R(t)$: le décès des certaines ex-obèse.

Alors le système devient [4]

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu N - \mu S(t) - \beta I(t)S(t) - \varepsilon S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \varepsilon S(t) + \beta I(t)S(t) - \mu I(t) - \gamma I(t) + \sigma \varepsilon R(t) + \sigma \beta I(t)R(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \sigma \varepsilon R(t) - \sigma \beta I(t)R(t) - \mu R(t). \end{cases}$$

A l'état initial, on suppose que toutes les personnes sont susceptibles, c'est à dire

$$\begin{cases} S(0) = N, \\ I(0) = 0, \\ R(0) = 0. \end{cases}$$

Les Ondelettes et les Polynômes de Jacobi

Dans ce chapitre, on va présenter les ondelettes de Jacobi, et on donne une importance particulière aux ondelettes de Gegenbauer [13] [2] [3] [8] [9] [12].

2.1 Polyômes de Jacobi

Les polynômes de Jacobi sont une classe de polynômes orthogonaux classiques.

Définition 2.1.1 *Les polynômes de Jacobi de degré k sont définis sur $[-1, 1]$, et sont générés par la relation de récurrence à trois termes pour α et $\beta > -1$,*

$$\begin{cases} J_k^{\alpha,\beta}(x) = (a_{k-1}^{\alpha,\beta}x - b_{k-1}^{\alpha,\beta})J_{k-1}^{\alpha,\beta}(x) - c_{k-1}^{\alpha,\beta}J_{k-2}^{\alpha,\beta}(x), \\ J_1^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}[(\alpha + \beta + 2)x + (\alpha - \beta)], \\ J_0^{\alpha,\beta}(x) = 1, \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a_{k-1}^{\alpha,\beta} = \frac{(2k + \alpha + \beta - 1)(2k + \alpha + \beta)}{2k(k + \alpha + \beta)}, \\ b_{k-1}^{\alpha,\beta} = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(2k + \alpha + \beta - 1)}{2k(k + \alpha + \beta)(2k + \alpha + \beta - 2)}, \\ c_{k-1}^{\alpha,\beta} = \frac{(k - 1 + \alpha)(k - 1 + \beta)(2k + \alpha + \beta)}{k(k + \alpha + \beta)(2k + \alpha + \beta - 2)}. \end{cases}$$

Remarque 2.1.1 *Les polynômes de Jacobi sont orthogonaux sur $[-1, 1]$, avec la fonction poids*

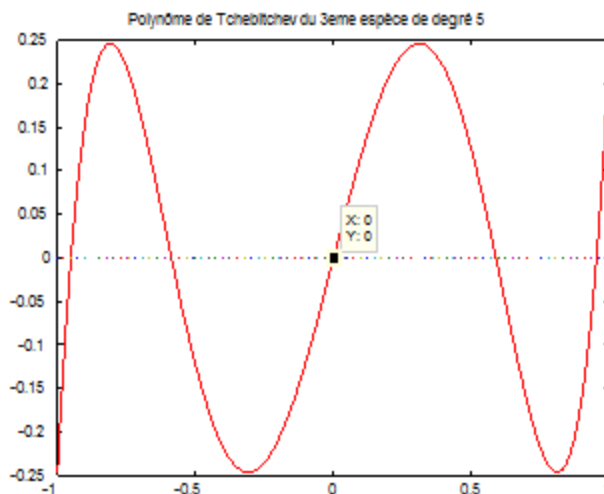
$$\omega^{\alpha,\beta}(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta,$$

en effet,

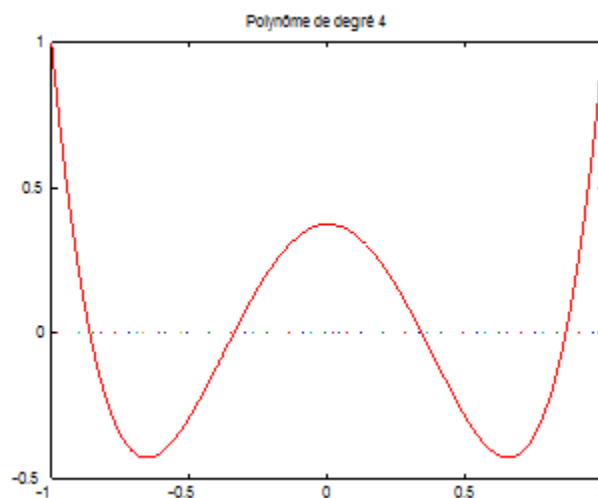
$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \omega^{\alpha,\beta}(x) J_k^{\alpha,\beta}(x) J_m^{\alpha,\beta}(x) dx \\
 &= \gamma_k^{\alpha,\beta} \delta_{k,m} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq m, \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(k+\alpha+1) \Gamma(k+\beta+1)}{k! (2k+\alpha+\beta+1) \Gamma(k+\alpha+\beta+1)} & \text{si } k = m. \end{cases} \\
 & \text{où } \delta_{k,m} \text{ est symbole de Kronecker}
 \end{aligned}$$

(Voir Annexe B).

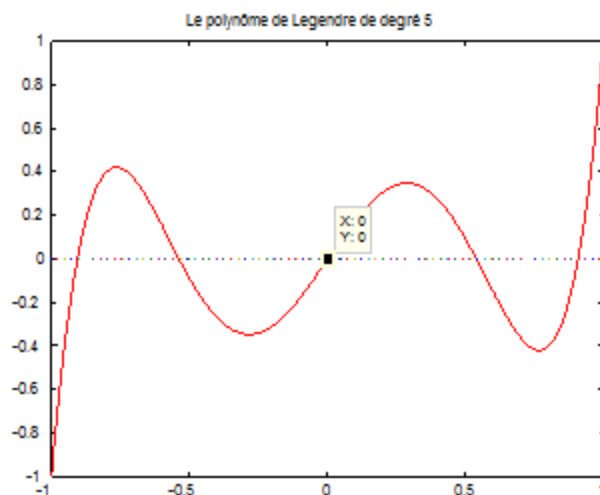
Exemple : Si $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$, nous avons les polynômes de Tchebitchev de 3ème espèce



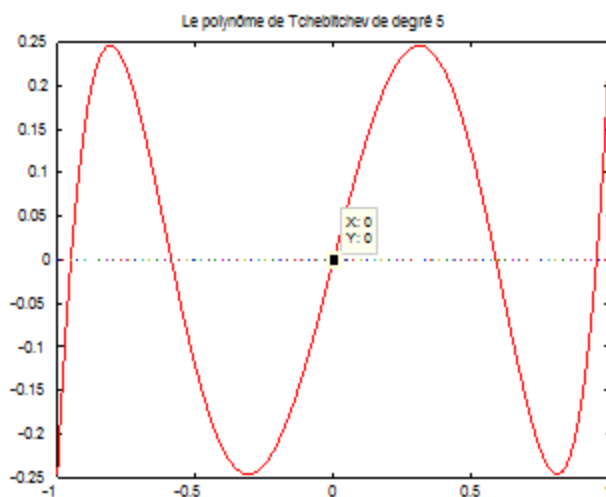
Si $\alpha = 0$ et $\beta = 2$,



Si $\alpha = \beta$, nous avons les polynômes hypersphériques. Par exemple, si $\alpha = \beta = 0$, on a les polynômes de Legendre.



Si $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, on a les polynômes de Tchebitchev de première espèce.



Enfin, si on prend $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$, on a les polynômes ultrasphériques ou de Gegenbauer.

2.2 Polynômes de Gegenbauer

Définition 2.2.1 Les polynômes de Gegenbauer de degré k , sont définis sur $[-1, 1]$ par la formule suivante

$$G_k^\lambda(x) = \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\Gamma(k + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(k + \lambda + \frac{1}{2})} J_k^{\lambda - \frac{1}{2}, \lambda - \frac{1}{2}}(x), 0 \neq \lambda > \frac{-1}{2}, \quad (2.2.1)$$

et

$$G_k^0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} G_k^\lambda.$$

Remarque 2.2.1 Les polynômes de Gegenbauer sont orthogonaux sur $[-1, 1]$, avec la fonction poids

$$\omega_\lambda(x) = (1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \omega_\lambda(x) G_k^\lambda(x) G_m^\lambda(x) &= \gamma_k^\lambda \delta_{k,m} \\ &= \begin{cases} 0 \dots si \dots k \neq m, \\ \frac{2^{1-2\lambda} \pi \Gamma(k + 2\lambda)}{\Gamma^2(\lambda) \Gamma(k + 1) (k + \lambda)} \dots si \dots k = m. \end{cases} \end{aligned}$$

(Voir Annexe B).

2.3 Les ondelettes

Définition 2.3.1 Les ondelettes $\Psi_{a,b}(x)$ sont des fonctions générées par la translation et dilatation d'une fonction génératrice, appelée ondelette mère $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$, sont définies par

$$\Psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \Psi\left(\frac{x-a}{b}\right), a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

avec a est un paramètre de dilatation et b est un paramètre de translation.

Si les deux paramètres prennent des valeurs discrètes

$$\begin{cases} a = a_0^{-j}, a_0 > 1, \\ b = nb_0 a_0^{-j}, b_0 > 1. \end{cases}$$

Pour n et j entiers positifs, nous avons la famille des ondelettes discrètes

$$\Psi_{j,n}(x) = |a_0|^{\frac{j}{2}} \Psi(a_0^j x - nb_0).$$

Où $\{\Psi_{j,n}(x)\}_{j,n \in \mathbb{N}}$, forment une base d'ondelette de $L^2(\mathbb{R})$.

Si de plus $a_0 = 2$, $b_0 = 1$ et

$$\langle \Psi_{k,n}, \Psi_{l,m} \rangle = \delta_{k,l} \delta_{k,m},$$

alors, on a

$$\Psi_{j,n}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \Psi(2^j x - n),$$

et la famille $\{\Psi_{j,n}(x)\}_{j,n \in \mathbb{N}}$ forment une base orthonormale de $L^2_\omega([0, 1])$. ([2])

2.4 Les Ondelettes de Jacobi

Définition 2.4.1 Les ondelettes de Jacobi sont des dilatations et translations des polynômes de Jacobi, le paramètre de dilatation $a = 2^{-j}$ et le paramètre de translation $b = (2n - 1)2^{-j}$.

$$\Psi_{n,k}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{k!(2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}} 2^{\frac{j}{2}} J_k^{\alpha,\beta}(2^j x - 2n + 1) & \text{si } \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Avec $k = 0 \dots nc - 1$ ($nc \in \mathbb{N}^*$ est le nombre de points de collocation), $n = 1 \dots 2^{j-1}$ ($j \in \mathbb{N}^*$) est le nombre des niveaux de la décomposition et $x \in [0, 1]$.

Remarque 2.4.1 Le coefficient $\sqrt{\frac{k!(2k + \alpha + \beta + 1)\Gamma(k + \alpha + \beta + 1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(k + \alpha + 1)\Gamma(k + \beta + 1)}}$ assure l'orthonormalité de la base.

2.5 Les Ondelettes de Gegenbauer

Définition 2.5.1 Les ondelettes de Gegenbauer sont définies sur $[0, 1]$ par

$$\begin{aligned} & \Psi_{n,k}(x) \\ &= \begin{cases} \mathcal{K} G_k^\lambda(2^j x - 2n + 1) \dots \text{si} \dots \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

Avec $k = 0 \dots nc - 1$, $n = 1 \dots 2^{j-1}$ et $j, nc \in \mathbb{N}^*$ et

$$\mathcal{K} = \sqrt{\frac{\Gamma^2(\lambda)\Gamma(k+1)(k+\lambda)}{2^{1-2\lambda}\pi\Gamma(k+2\lambda)}} 2^{\frac{j}{2}}.$$

Si on remplace (2.2.1) dans (2.5.1); alors on obtient

$$\Psi_{n,k}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\Gamma(k + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(k + \lambda + \frac{1}{2})} \mathcal{K} J_k^{\lambda - \frac{1}{2}, \lambda - \frac{1}{2}}(2^j x - 2n + 1) \dots \text{si} \dots \frac{n-1}{2^{j-1}} \leq x < \frac{n}{2^{j-1}}, \\ 0 \dots \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Remarque 2.5.1 Le coefficient $\sqrt{\frac{\Gamma^2(\lambda)\Gamma(k+1)(k+\lambda)}{2^{1-2\lambda}\pi\Gamma(k+2\lambda)}}$ assure l'orthonormalité de cette base.

Pour illustration, on prend $x \in [0, \frac{1}{2^{j-1}}[$ et $nc = 3$, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{1,0}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda\Gamma^2(\lambda)2^{2\lambda-1}}{\pi\Gamma(2\lambda)}}, \\ \Psi_{1,1}(x) = 2^{\frac{j+1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} \lambda \sqrt{\frac{(1+\lambda)\Gamma(\lambda)}{\pi\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\lambda}} (2^j x - 1), \\ \Psi_{1,2}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} \lambda \sqrt{\frac{(2+\lambda)\Gamma(\lambda)}{\pi(1+2\lambda)\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\lambda}} [2^{2j+1}(\lambda+1)x^2 - 2^{j+2}(\lambda+1)x + (2\lambda+1)]. \end{array} \right.$$

Remarque 2.5.2 La famille $\{\Psi_{n,k}(x)\}_{n,k \in \mathbb{N}}$ forment une base orthonormale de $L^2_{\omega_n}([0, 1])$.

2.6 Approximation d'une Fonction

D'après la remarque (2.5.2), on a tout fonction $f \in L^2([0, 1])$, se décompose dans la base par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{n,k} \Psi_{n,k}(x), \quad (2.6.1)$$

où

$$C_{n,k} = \langle f, \Psi_{n,k} \rangle_{\omega_n} = \int_0^1 f(x) \Psi_{n,k}(x) \omega_n(x) dx.$$

La fonction dans l'équation (2.6.1) peut être approché par

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{2^{j-1} nc - 1} \sum_{k=0} C_{n,k} \Psi_{n,k}(x) = C^T \Psi(x),$$

où C et Ψ sont deux vecteurs de dimension $2^{j-1} nc$, données par :

$$C = [C_{1,0}, C_{1,1}, \dots, C_{1,nc-1}, C_{2,0}, C_{2,1}, \dots, C_{2,nc-1}, \dots, C_{2^{j-1},0}, \dots, C_{2^{j-1},nc-1}]^T,$$

et

$$\Psi(x) = [\Psi_{1,0}(x), \Psi_{1,1}(x), \dots, \Psi_{1,nc-1}(x), \Psi_{2,0}(x), \dots, \Psi_{2,nc-1}(x), \dots, \Psi_{2^{j-1},0}(x), \dots, \Psi_{2^{j-1},nc-1}(x)]^T. \quad (2.6.2)$$

2.7 La Matrice Opérationnelle d'Intégration

Théorème 2.7.1 Soit $\Psi(x)$ le vecteur des ondelettes de Gegenbauer défini dans l'équation (2.6.2).

L'intégrale de $\Psi(x)$ sur $[0, x]$ avec $0 \leq x \leq 1$, peut être exprimé par

$$\int_0^x \Psi(s) ds = P\Psi(x), \quad (2.7.1)$$

où P est la matrice opérationnelle d'intégration de dimension $(2^{j-1}nc) \times (2^{j-1}nc)$, défini par

$$P = 2^{-j} \begin{pmatrix} L & F & F & \dots & \dots & F \\ 0 & L & F & \ddots & \dots & F \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \ddots & F \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & L \end{pmatrix},$$

avec L et F de dimension $(nc \times nc)$ données par

$$L = \begin{cases} L(1,1) = 1, \\ L(2,1) = -\frac{(2\lambda+1)\sqrt{1+\lambda}}{2\sqrt{2}(\lambda+1)}, \\ L(i,i+1) = \frac{\sqrt{(\lambda+i-1)(\lambda+\frac{i-1}{2})}}{\sqrt{2i(\lambda+i)(\lambda+i-1)}}, \quad i = 1 : nc-1. \\ L(i+1,i) = -\frac{\sqrt{i(\lambda+i)}}{2\sqrt{2(\lambda+i-1)(\lambda+\frac{i-1}{2})(\lambda+i)}}, \quad i = 1 : nc-1. \\ L(i,1) = (-1)^{i-1} \frac{2^{i-2}}{i!} \sqrt{\frac{(i-1)!}{2^{i-3}}} (\lambda - \frac{1}{2}) \sqrt{\frac{\lambda+i-1}{\lambda+\frac{i-2}{2}}} \prod_{j=1}^{i-3} \sqrt{\lambda+\frac{j}{2}}, \quad i = 3 : nc. \end{cases}$$

et

$$F = \begin{cases} F(1,1) = 2, \\ F(i,1) = \frac{2^{i-2}}{i!} \sqrt{\frac{(i-1)!}{2^{i-3}}} (1 - (-1)^i) (\lambda - \frac{1}{2}) \\ * \sqrt{\lambda+i-1} \prod_{j=1}^{i-3} (\lambda + \frac{j}{2}) \prod_{k=1}^{i-2} \frac{1}{\sqrt{\lambda+\frac{k}{2}}}, \quad i = 2 : nc. \end{cases}$$

Preuve : Pour $x \in [0, 1]$, on a

$$\int_0^x \Psi(s) ds = \begin{pmatrix} \int_0^x \Psi_{1,0}(s) ds \\ \int_0^x \Psi_{1,1}(s) ds \\ \vdots \\ \int_0^x \Psi_{1,nc-1}(s) ds \\ \vdots \\ \int_0^x \Psi_{2^{j-1},nc-1}(s) ds \end{pmatrix} = P\Psi(x).$$

On a

$$\Psi_{1,0}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda \Gamma^2(\lambda) 2^{2\lambda-1}}{\pi \Gamma(2\lambda)}},$$

pour calculer

$$\int_0^x \Psi_{1,0}(s) ds = \int_0^x 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda \Gamma^2(\lambda) 2^{2\lambda-1}}{\pi \Gamma(2\lambda)}} ds, \quad (2.7.2)$$

on a deux cas

– si $x \in [0, \frac{1}{2^{j-1}}[$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^x \Psi_{1,0}(s) ds &= \int_0^x 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda \Gamma^2(\lambda) 2^{2\lambda-1}}{\pi \Gamma(2\lambda)}} ds, \\ &= 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda \Gamma^2(\lambda) 2^{2\lambda-1}}{\pi \Gamma(2\lambda)}} x. \end{aligned}$$

– si $x \in [\frac{1}{2^{j-1}}, 1]$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^x \Psi_{1,0}(s) ds &= \int_0^{\frac{1}{2^{j-1}}} \Psi_{1,0}(s) ds \\ &= \int_0^{\frac{1}{2^{j-1}}} 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda \Gamma^2(\lambda) 2^{2\lambda-1}}{\pi \Gamma(2\lambda)}} ds, \\ &= 2^{\frac{1-j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda \Gamma^2(\lambda) 4^\lambda}{\pi \Gamma(2\lambda)}}. \end{aligned}$$

et

$$\int_0^x \Psi_{1,0}(s) ds = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda \Gamma^2(\lambda) 2^{2\lambda-1}}{\pi \Gamma(2\lambda)}} x \dots si \dots 0 \leq x < \frac{1}{2^{j-1}}, \\ 2^{\frac{1-j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda \Gamma^2(\lambda) 4^\lambda}{\pi \Gamma(2\lambda)}} \dots si \dots \frac{1}{2^{j-1}} \leq x < 1. \end{cases}$$

En écrivant ce résultat dans la base, on obtient

$$\int_0^x \Psi_{1,0}(s) ds = a\Psi_{1,0}(x) + b\Psi_{1,1}(x) + c \sum_{k=2}^{2^{j-1}} \Psi_{k,0}(x). \quad (2.7.3)$$

c'est à dire,

$$\begin{aligned} 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda\Gamma^2(\lambda)2^{2\lambda-1}}{\pi\Gamma(2\lambda)}} x &= a\Psi_{1,0}(x) + b\Psi_{1,1}(x) \\ &= a2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda\Gamma^2(\lambda)2^{2\lambda-1}}{\pi\Gamma(2\lambda)}} + b \left[2^{\frac{j+1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} \lambda \sqrt{\frac{(1+\lambda)\Gamma(\lambda)}{\pi\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\lambda}} (2^j x - 1) \right], \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

et

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1-j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda\Gamma^2(\lambda)4^\lambda}{\pi\Gamma(2\lambda)}} &= c\Psi_{k,0}(x) \\ &= c2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda\Gamma^2(\lambda)2^{2\lambda-1}}{\pi\Gamma(2\lambda)}} \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

tel que a et b sont des coefficients de la matrice L et c est coefficient de la matrice F

$$a = L(1, 1),$$

$$b = L(1, 2),$$

$$c = F(1, 1).$$

Par identification dans (2.7.4) et dans (2.7.5) on trouve que

$$a2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda\Gamma^2(\lambda)2^{2\lambda-1}}{\pi\Gamma(2\lambda)}} - b2^{\frac{j+1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} \lambda \sqrt{\frac{(1+\lambda)\Gamma(\lambda)}{\pi\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\lambda}} = 0. \quad (2.7.6)$$

et

$$b2^{\frac{3j+1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} \lambda \sqrt{\frac{(1+\lambda)\Gamma(\lambda)}{\pi\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\lambda}} = 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda\Gamma^2(\lambda)2^{2\lambda-1}}{\pi\Gamma(2\lambda)}}. \quad (2.7.7)$$

et

$$c2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda\Gamma^2(\lambda)2^{2\lambda-1}}{\pi\Gamma(2\lambda)}} = 2^{\frac{1-j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda\Gamma^2(\lambda)4^\lambda}{\pi\Gamma(2\lambda)}}.$$

On résoud l'équation (2.7.7) pour trouver b

$$\begin{cases} b = 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda\Gamma^2(\lambda)2^{2\lambda-1}}{\pi\Gamma(2\lambda)}} * 2^{\frac{-3j-1}{2}} \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} \lambda} \sqrt{\frac{\pi\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\lambda}{(1+\lambda)\Gamma(\lambda)}}, \\ b = 2^{-j} \frac{1}{\sqrt{2(\lambda+1)}}. \end{cases}$$

On remplace b dans (2.7.6) pour trouver a

$$\begin{cases} a2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda\Gamma^2(\lambda)2^{2\lambda-1}}{\pi\Gamma(2\lambda)}} = b2^{\frac{j+1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} \lambda \sqrt{\frac{(\lambda+1)\Gamma(\lambda)}{\lambda\pi\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}}, \\ a2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda\Gamma^2(\lambda)2^{2\lambda-1}}{\pi\Gamma(2\lambda)}} = 2^{-j} \frac{1}{\sqrt{2(\lambda+1)}} 2^{\frac{j+1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} \lambda \sqrt{\frac{(\lambda+1)\Gamma(\lambda)}{\lambda\pi\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}}, \\ a = 2^{-j}. \end{cases}$$

Et pour trouver le coefficient c on résoud (??)

$$\begin{cases} c = 2^{-\frac{j+1}{2}} \sqrt{\frac{\lambda\Gamma^2(\lambda)4^\lambda}{\pi\Gamma(2\lambda)}} * 2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\pi\Gamma(2\lambda)}{\lambda\Gamma^2(\lambda)2^{2\lambda-1}}}, \\ c = 2^{-j+1}. \end{cases}$$

On remplace a, b et c dans la formule (2.7.3)

$$\begin{aligned} \int_0^x \Psi_{1,0}(s)ds &= 2^{-j}\Psi_{1,0}(x) + \frac{2^{-j}}{\sqrt{2(\lambda+1)}}\Psi_{1,1}(x) + 2^{-j+1} \sum_{k=2}^{2^j-1} \Psi_{k,0}(x), \\ &= \underbrace{[2^{-j} \frac{2^{-j}}{\sqrt{2(\lambda+1)}} 0 \dots 0]}_{n=1} \underbrace{[2^{-j+1} 0 \dots 0]}_{n=2} \underbrace{[2^{-j+1} 0 \dots 0]}_{n=3} \dots \underbrace{[2^{-j+1} 0 \dots 0]}_{n=2^j-1} \Psi(x). \end{aligned}$$

Pour $\int_0^x \Psi_{1,1}(s)ds$ on a :

$$\int_0^x \Psi_{1,1}(s)ds = \begin{cases} 2^{\frac{j+1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} \lambda \sqrt{\frac{(1+\lambda)\Gamma(\lambda)}{\pi\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\lambda}} (2^{j-1}x^2 - x) \dots si \dots 0 \leq x < \frac{1}{2^{j-1}}, \\ 0 \dots si \dots \frac{1}{2^{j-1}} \leq x < 1. \end{cases}$$

On remarque que

$$\int_0^x \Psi_{1,1}(s)ds = a\Psi_{1,0}(x) + b\Psi_{1,1}(x) + c\Psi_{1,2}(x), \quad (2.7.8)$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} & 2^{\frac{j+1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} \lambda \sqrt{\frac{(1+\lambda)\Gamma(\lambda)}{\pi\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\lambda}} (2^{j-1}x^2 - x) \\ &= a2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda\Gamma^2(\lambda)2^{2\lambda-1}}{\pi\Gamma(2\lambda)}} + b \left[2^{\frac{j+1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} \lambda \sqrt{\frac{(1+\lambda)\Gamma(\lambda)}{\pi\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\lambda}} (2^j x - 1) \right] \\ &+ c \left[2^{\frac{j}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} \lambda \sqrt{\frac{(2+\lambda)\Gamma(\lambda)}{\pi(1+2\lambda)\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\lambda}} [2^{2j+1}(\lambda+1)x^2 - 2^{j+2}(\lambda+1)x + (2\lambda+1)] \right], \end{aligned}$$

implique

$$\left\{ \begin{array}{l} a2^{\frac{j}{2}} \sqrt{\frac{\lambda \Gamma^2(\lambda) 2^{2\lambda-1}}{\pi \Gamma(2\lambda)}} - b2^{\frac{j+1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} \lambda \sqrt{\frac{(\lambda+1)\Gamma(\lambda)}{\lambda \pi \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}} + c2^{\frac{j}{2}} (2\lambda+1) \lambda \pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\Gamma(\lambda)(2+\lambda)}{\pi \lambda \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})(1+2\lambda)}} = 0, \\ b2^{\frac{3j+1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} \lambda \sqrt{\frac{(1+\lambda)\Gamma(\lambda)}{\pi \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\lambda}} - c2^{\frac{3j+4}{2}} (\lambda+1) \lambda \pi^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\Gamma(\lambda)(2+\lambda)}{\pi \lambda \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})(1+2\lambda)}} = -2^{\frac{j+1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} \lambda \sqrt{\frac{(1+\lambda)\Gamma(\lambda)}{\pi \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\lambda}}, \\ c2^{\frac{5j+2}{2}} (\lambda+1) \pi^{\frac{1}{4}} \lambda \sqrt{\frac{(2+\lambda)\Gamma(\lambda)}{\pi \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\lambda(1+2\lambda)}} = 2^{\frac{3j-1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} \lambda \sqrt{\frac{(1+\lambda)\Gamma(\lambda)}{\pi \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\lambda}}. \end{array} \right. \quad (2.7.9)$$

On résoud le système (2.7.9) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -2^{-j} \frac{(2\lambda+1)}{2\sqrt{2}(\lambda+1)} \sqrt{\lambda+1}, \\ b = 0, \\ c = \frac{\sqrt{(1+2\lambda)(1+\lambda)}}{2\sqrt{2}(\lambda+1)\sqrt{2+\lambda}}. \end{array} \right.$$

On remplace les trois coefficients dans (2.7.8)

$$\begin{aligned} & \int_0^x \Psi_{1,1}(s) ds \\ &= -2^{-j} \frac{(2\lambda+1)\sqrt{\lambda+1}}{2\sqrt{2}(\lambda+1)} \Psi_{1,0}(x) + \frac{\sqrt{(1+2\lambda)(1+\lambda)}}{2\sqrt{2}(\lambda+1)\sqrt{2+\lambda}} \Psi_{1,2}(x), \\ &= \left[\begin{array}{ccccccc} \overbrace{-2^{-j} \frac{(2\lambda+1)\sqrt{\lambda+1}}{2\sqrt{2}(\lambda+1)}}^{n=1} & 0 & \frac{\sqrt{(1+2\lambda)(1+\lambda)}}{2\sqrt{2}(\lambda+1)\sqrt{2+\lambda}} & 0 \dots 0 & \underbrace{0 \dots 0}_{n=2} & \underbrace{0 \dots 0}_{n=3} & \dots \underbrace{0 \dots 0}_{n=2^{j-1}} \end{array} \right] \Psi(x). \end{aligned}$$

On fait la même chose pour $\int_0^x \Psi_{1,2}(s) ds$, on trouve

$$\begin{aligned} & \int_0^x \Psi_{1,2}(s) ds \\ &= \frac{2}{3} \frac{2^{-j}}{(\lambda+2)} (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda+2) \sqrt{\frac{\lambda+2}{1+2\lambda}} \Psi_{10} + \frac{-2^{-j}}{\sqrt{2}(\lambda+2)} \sqrt{\frac{(2+\lambda)}{(1+2\lambda)(1+\lambda)}} \Psi_{11} \\ & \quad + \frac{2^{-j}}{\sqrt{6}(\lambda+2)} \sqrt{\frac{(1+\lambda)(2+\lambda)}{(\lambda+3)}} \Psi_{13} + 2^{-j} \frac{2}{3} (2\lambda-1) \sqrt{\frac{2+\lambda}{1+2\lambda}} \sum_{k=2}^{2^{j-1}} \Psi_{k0}, \end{aligned}$$

$$= \left[\begin{array}{c} \overbrace{\frac{2}{3} \frac{2^{-j}}{(\lambda+2)} (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda+2) \sqrt{\frac{\lambda+2}{1+2\lambda}} \frac{-2^{-j}}{\sqrt{2}(\lambda+2)} \sqrt{\frac{(2+\lambda)}{(1+2\lambda)(1+\lambda)}}}^{n=1} 0 \frac{2^{-j}}{\sqrt{6}(\lambda+2)} \sqrt{\frac{(1+\lambda)(2+\lambda)}{(\lambda+3)}}} \\ \overbrace{2^{-j} \frac{2}{3} (2\lambda-1) \sqrt{\frac{2+\lambda}{1+2\lambda}}}^{n=2} 0 \dots 0 \\ \overbrace{2^{-j} \frac{2}{3} (2\lambda-1) \sqrt{\frac{2+\lambda}{1+2\lambda}}}^{n=3} 0 \dots 0 \\ \vdots \\ \overbrace{2^{-j} \frac{2}{3} (2\lambda-1) \sqrt{\frac{2+\lambda}{1+2\lambda}}}^{n=2^{j-1}} 0 \dots 0 \end{array} \right]$$

Alors l'équation (2.7.1) est prouvée.

2.8 Le produit de deux ondelettes de Gegenbauer

Pour compléter la section précédente, on donne la formule du produit de deux ondelettes de Gegenbauer,

$$\Psi(x)\Psi^T(x) \tag{2.8.1}$$

$$= \begin{pmatrix} \Psi_{1,0}\Psi_{1,0} & \dots & \Psi_{1,0}\Psi_{1,nc-1} & \dots & \Psi_{1,0}\Psi_{2^{j-1},0} & \dots & \Psi_{1,0}\Psi_{2^{j-1},nc-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Psi_{1,nc-1}\Psi_{1,0} & \dots & \Psi_{1,nc-1}\Psi_{1,nc-1} & \dots & \Psi_{1,nc-1}\Psi_{2^{j-1},0} & \dots & \Psi_{1,nc-1}\Psi_{2^{j-1},nc-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \Psi_{2^{j-1},nc-1}\Psi_{1,0} & & \Psi_{2^{j-1},nc-1}\Psi_{1,nc-1} & & \Psi_{2^{j-1},nc-1}\Psi_{2^{j-1},0} & & \Psi_{2^{j-1},nc-1}\Psi_{2^{j-1},nc-1} \end{pmatrix}.$$

En utilisant la propriété suivante

$$\Psi_{i,j}(x)\Psi_{k,l}(x) = 0 \quad \text{si } i \neq k,$$

la matrice (2.8.1) peut être simplifiée par

$$= \begin{pmatrix} \Psi_{1,0}\Psi_{1,0} & \dots & \Psi_{1,0}\Psi_{1,nc-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \Psi_{1,nc-1}\Psi_{1,0} & \dots & \Psi_{1,nc-1}\Psi_{1,nc-1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \Psi_{2^{j-1},0}\Psi_{2^{j-1},0} & \dots & \Psi_{2^{j-1},0}\Psi_{2^{j-1},nc-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \Psi_{2^{j-1},nc-1}\Psi_{2^{j-1},0} & \dots & \Psi_{2^{j-1},nc-1}\Psi_{2^{j-1},nc-1} \end{pmatrix}.$$

Pour illustration on prend $nc = 3$ et $j = 2$,

$$\Psi(x)\Psi^T(x) = \begin{pmatrix} \Psi_{1,0}\Psi_{1,0} & \Psi_{1,0}\Psi_{1,1} & \Psi_{1,0}\Psi_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_{1,1}\Psi_{1,0} & \Psi_{1,1}\Psi_{1,1} & \Psi_{1,1}\Psi_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ \Psi_{1,2}\Psi_{1,0} & \Psi_{1,2}\Psi_{1,1} & \Psi_{1,2}\Psi_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{2,0}\Psi_{2,0} & \Psi_{2,0}\Psi_{2,1} & \Psi_{2,0}\Psi_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{2,1}\Psi_{2,0} & \Psi_{2,1}\Psi_{2,1} & \Psi_{2,1}\Psi_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{2,2}\Psi_{2,0} & \Psi_{2,2}\Psi_{2,1} & \Psi_{2,2}\Psi_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi les propriétés suivantes

$$\begin{cases} \Psi_{i,0}(x)\Psi_{i,j}(x) = \sqrt{2}\Psi_{i,j}(x), \\ \Psi_{i,1}(x)\Psi_{i,1}(x) = \frac{4}{\sqrt{10}}\Psi_{i,2}(x) + \sqrt{2}\Psi_{i,0}(x). \end{cases}$$

Alors

$$\Psi\Psi^T = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\Psi_{1,0} & \sqrt{2}\Psi_{1,1} & \sqrt{2}\Psi_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\Psi_{1,1} & \sqrt{2}\Psi_{1,0} + \frac{4\Psi_{1,2}}{\sqrt{10}} & \frac{4}{\sqrt{10}}\Psi_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\Psi_{1,2} & \frac{4}{\sqrt{10}}\Psi_{1,1} & \sqrt{2}\Psi_{1,0} + \frac{20\Psi_{1,2}}{7\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\Psi_{2,0} & \sqrt{2}\Psi_{2,1} & \sqrt{2}\Psi_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\Psi_{2,1} & \sqrt{2}\Psi_{2,0} + \frac{4\Psi_{2,2}}{\sqrt{10}} & \frac{4\Psi_{2,1}}{\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\Psi_{2,2} & \frac{4}{\sqrt{10}}\Psi_{2,1} & \sqrt{2}\Psi_{2,0} + \frac{20\Psi_{2,2}}{7\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

Pour un vecteur A de dimension 6

$$A = [a_{1,0}; a_{1,1}; a_{1,2}; a_{2,0}; a_{2,1}; a_{2,2}],$$

on a la propriété suivante :

$$A^T\Psi(x)\Psi^T(x) = \Psi^T(x)\tilde{A}, \quad (2.8.2)$$

où \tilde{A} est une matrice de dimension (6×6) ,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}a_{1,0} & \sqrt{2}a_{1,1} & \sqrt{2}a_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}a_{1,1} & \sqrt{2}a_{1,0} + \frac{4a_{1,2}}{\sqrt{10}} & \frac{4}{\sqrt{10}}a_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}a_{1,2} & \frac{4}{\sqrt{10}}a_{1,1} & \sqrt{2}a_{1,0} + \frac{20a_{1,2}}{7\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}a_{2,0} & \sqrt{2}a_{2,1} & \sqrt{2}a_{2,2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}a_{2,1} & \sqrt{2}a_{2,0} + \frac{4a_{2,2}}{\sqrt{10}} & \frac{4}{\sqrt{10}}a_{2,1} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}a_{2,2} & \frac{4}{\sqrt{10}}a_{2,1} & \sqrt{2}a_{2,0} + \frac{20a_{2,2}}{7\sqrt{10}} \end{pmatrix}.$$

2.9 Description de la méthode

Dans cette section, on s'intéresse à la description de la méthode sur une équation différentielle linéaire d'ordre n , avec des coefficients non constants.

Soit le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n(x)u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) = f(x) \quad x \in]0, 1] \\ u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}, \\ u^{(n-2)}(0) = u_{n-2}, \\ \vdots \\ u'(0) = u_1, \\ u(0) = u_0. \end{array} \right. \quad (2.9.1)$$

On commence par la décomposition de $u^{(n)}$ dans la base d'ondelette, c'est à dire on écrit $u^{(n)}$ sous la forme suivante

$$u^{(n)}(x) = u^T \Psi(x).$$

L'intégration de cette dernière formule sur $[0, x]$, donne l'écriture de $u^{(n-1)}$ dans la base

$$\int_0^x u^{(n)}(s)ds = \int_0^x u^T \Psi(s)ds.$$

implique

$$u^{(n-1)}(x) - u^{(n-1)}(0) = u^T P \Psi(x).$$

implique

$$u^{(n-1)}(x) = u^T P \Psi(x) + u_{n-1}.$$

On intègre une deuxième fois l'expression de $u^{(n-1)}$ sur $[0, x]$, on trouve

$$u^{(n-2)}(x) = u^T P^2 \Psi(x) + u_{n-1}x + u_{n-2}.$$

On continue de la même manière jusqu'à obtenir la formule de $u(x)$

$$u(x) = u^T P^n \Psi(x) + \sum_{i=n-1}^0 u_i D_i^T \Psi(x), \quad (2.9.2)$$

avec

$$\{x^i = D_i^T \Psi(x).\}$$

En remplaçant les expressions de $[u^{(n)}, u^{(n-1)}, \dots, u', u]$ dans l'équation du problème (2.9.1), on obtient

$$\begin{aligned} & A_n^T \Psi(x) u^T \Psi(x) + A_{n-1}^T \Psi(x) [u^T P \Psi(x) + u_{n-1} D_0^T \Psi(x)] \\ & + \dots \\ & + A_0^T \Psi(x) \left[u^T P^n \Psi(x) + \sum_{i=n-1}^0 u_i D_i^T \Psi(x) \right] \\ & = F^T \Psi(x). \end{aligned}$$

où

$$\begin{cases} f(x) = F^T \Psi(x), \\ a_i = A^T \Psi(x). \end{cases}$$

$$A_n^T \Psi \Psi^T u + A_{n-1}^T \Psi \Psi^T P^T u + A_{n-1}^T \Psi \Psi^T D_0 u_{n-1} + \dots + A_0^T \Psi \Psi^T (P^n)^T u + A_0^T \Psi \Psi^T \sum_{i=n-1}^0 D_i u_i = F^T \Psi.$$

D'après la propriété (2.8.2), on a

$$\Psi^T \widetilde{A}_n u + \Psi^T \widetilde{A}_{n-1} P^T u + \Psi^T \widetilde{A}_{n-1} D_0 u_{n-1} + \dots + \Psi^T \widetilde{A}_0 (P^n)^T u + \Psi^T \widetilde{A}_0 \sum_{i=n-1}^0 D_i u_i = \Psi^T F.$$

On multiplie les deux termes par $(\Psi^T)^{-1}$, alors on trouve

$$\widetilde{A}_n u + \widetilde{A}_{n-1} P^T u + \widetilde{A}_{n-1} D_0 u_{n-1} + \dots + \widetilde{A}_0 (P^n)^T u + \widetilde{A}_0 \sum_{i=n-1}^0 D_i u_i = F,$$

et

$$\left(\widetilde{A}_n + \widetilde{A}_{n-1} P^T + \dots + \widetilde{A}_0 (P^n)^T \right) u = F - \widetilde{A}_{n-1} D_0 u_{n-1} - \dots - \widetilde{A}_0 \sum_{i=n-1}^0 D_i u_i.$$

La formulation compacte de ce système donne

$$A u = B. \tag{2.9.3}$$

où

$$\begin{cases} A = \sum_{i=n}^0 \widetilde{A}_i (P^{n-i})^T, \\ B = F - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^j \widetilde{A}_{j-1} D_i u_j. \end{cases}$$

On résout le système (2.9.3) par la méthode LU, on trouve la valeur de u et la solution du problème (2.9.1) est donnée par (2.9.2).

2.10 Technique de découplage et quasi-linéarisation

L'objectif de cette technique c'est la séparation et linéarisation des variables dépendants du système.

On considère le système d'équations différentielles ordinaires non linéaires couplées

$$\begin{cases} u_1'(x) + A_1 u_1(x) = f_1(x, u_2, \dots, u_m), \\ u_2'(x) + A_2 u_2(x) = f_2(x, u_1, u_3, \dots, u_m), \\ \vdots \\ u_m'(x) + A_m u_m(x) = f_m(x, u_1, u_2, \dots, u_{m-1}). \end{cases} \quad x \in]0, 1].$$

Où

$$A_i = a_i(x, u_1, u_2, \dots, u_m).$$

Avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u_1(0) = u_1, \\ u_2(0) = u_2, \\ \vdots \\ u_m(0) = u_m. \end{cases}$$

Dans chaque itération la technique transforme un système couplé et non linéaire en un système découplé et linéaire.

On commence par la donner d'un profile initial de la solution

$$u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_m^{(0)}.$$

Le schéma suivant

$$\begin{cases} (u_1')^{(k)}(x) + A_1^{(k-1)} u_1^{(k)}(x) = f_1(x, u_2^{(k-1)}, u_3^{(k-1)}, \dots, u_m^{(k-1)}), \\ (u_2')^{(k)}(x) + A_2^{(k-1)} u_2^{(k)}(x) = f_2(x, u_1^{(k)}, u_3^{(k-1)}, \dots, u_m^{(k-1)}), \\ \vdots \\ (u_m')^{(k)}(x) + A_m^{(k-1)} u_m^{(k)}(x) = f_m(x, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_{m-1}^{(k-1)}). \end{cases}$$

peut mener à la solution approchée du problème.

L'erreur de découplage est donnée par la formule suivante

$$E_{DQL} = \text{Max} \left(\|u_1^{(k)} - u_1^{(k-1)}\|_2, \|u_2^{(k)} - u_2^{(k-1)}\|_2, \dots, \|u_m^{(k)} - u_m^{(k-1)}\|_2 \right).$$

La condition d'arrêt

$$E_{DQL} < \varepsilon \text{ donné.}$$

Il convient de noter que, pour chaque itération, la méthode des ondelettes de Gegenbauer est appliquée.

Application et Simulation Numérique

Dans ce chapitre, on va tester pour quelles valeurs de λ , j et nc , la méthode des ondelettes de Gegenbauer donne des bons résultats. Pour cela, en appliquant la méthode sur une équation différentielle du second ordre linéaire, et sur un système d'équation différentielle ordinaire non linéaire, et ensuite on simule le problème de l'épidémie de l'obésité.

3.1 Test numérique

Exemple 1 : Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} u''(x) + 2u'(x) + u(x) = 2e^{-x} & x \in]0, 1], \\ u(0) = 3, \\ u'(0) = 1. \end{cases}$$

Avec la solution exacte

$$u(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}.$$

On définit l'erreur globale *errglo* qui rassemble les erreurs de troncatures, les erreurs de la méthode par

$$errglo = \|u_{ex} - u_{app}\|_2.$$

u_{ex} : la solution exacte,

u_{app} : la solution approchée,

$\|\cdot\|_2$: la norme euclidienne.

La matrice A et B du système (2.9.3) sont devient :

$$\begin{cases} A = Id + 2P^T + (P^T)^2, \\ B = F - 5D_0 - D_1. \end{cases}$$

Pour différentes valeurs de λ, j et nc , on a les résultats suivants.

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$:le cas de Legendre

j	$nc = 3$	$nc = 5$	$nc = 8$
1	0.0261	$1.4294e - 005$	$3.8177e - 008$
2	0.0037	$1.5425e - 006$	$1.8415e - 010$
3	$5.1580e - 004$	$7.8132e - 008$	$8.6700e - 013$

Pour $\lambda = 1$:le cas de Tchebitchev de première espèce

j	$nc = 3$	$nc = 5$	$nc = 8$
1	0.0325	$1.7203e - 005$	$6.3233e - 008$
2	0.0043	$2.0870e - 006$	$2.8889e - 010$
3	$5.8912e - 004$	$1.0543e - 007$	$1.3000e - 012$

Pour $\lambda = \frac{3}{2}$

j	$nc = 3$	$nc = 5$	$nc = 8$
1	0.0370	$2.0043e - 005$	$9.3499e - 008$
2	0.0049	$2.6541e - 006$	$4.1901e - 010$
3	$6.6143e - 004$	$1.3287e - 007$	$1.8827e - 012$

Notre méthode donne de bon résultat pour un problème avec une équation linéaire à coefficients constants.

Exemple02 : Soit le système ordinaire non linéaire suivant :

$$\begin{cases} u'(x) + u^2(x) = v^2(x) + 2w(x) + (3+x)e^x + x^2e^{2x} - 1 - x^2, \\ v'(x) + 2v(x) = u(x) - w(x) + 1 - x - (1+x)e^x, \\ w'(x) - xw(x) = u(x) + v(x) + x - x^2 - e^x, \\ u(0) = 0, v(0) = 1, w(0) = -1, \end{cases} \quad x \in]0, 1].$$

La solution analytique de ce système est

$$\begin{cases} u(x) = xe^x, \\ v(x) = 1 - x, \\ w(x) = x - e^x. \end{cases}$$

Nous appliquons la méthode des ondelettes de Gegenbauer combinée avec la technique de découplage et quasi-linéarisation, on trouve les résultats suivants

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$

	<i>nc</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>
[<i>j</i> = 1]	3	0.0495	0.0138	0.0278
	5	$3.3513e - 004$	$4.2752e - 005$	$1.1441e - 004$
	8	$3.1158e - 008$	$2.7599e - 009$	$9.5787e - 009$
	<i>nc</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>
[<i>j</i> = 2]	3	0.0095	$3.4269e - 004$	0.0032
	5	$1.5472e - 005$	$6.1057e - 007$	$3.4746e - 006$
	8	$1.6208e - 009$	$1.0446e - 010$	$1.0839e - 010$
	<i>nc</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>
[<i>j</i> = 3]	3	0.0016	$1.2328e - 004$	$4.6740e - 004$
	5	$6.2746e - 007$	$5.8817e - 008$	$1.3424e - 007$
	8	$1.7738e - 009$	$9.4665e - 011$	$7.2252e - 011$

Pour $\lambda = 1$

	<i>nc</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>
[<i>j</i> = 1]	3	0.0619	0.0179	0.0369
	5	$5.2019e - 004$	$5.7910e - 005$	$1.6416e - 004$
	8	$5.5769e - 008$	$2.9555e - 009$	$1.1150e - 008$
	<i>nc</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>
[<i>j</i> = 2]	3	0.0108	$3.9262e - 004$	0.0040
	5	$2.1033e - 005$	$5.5853e - 007$	$4.8327e - 006$
	8	$1.5051e - 009$	$1.0358e - 010$	$1.1506e - 010$
	<i>nc</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>
[<i>j</i> = 3]	3	0.0018	$1.1700e - 004$	$5.5451e - 004$
	5	$7.8932e - 007$	$5.7902e - 008$	$1.7097e - 007$
	8	$1.7733e - 009$	$9.4665e - 011$	$7.2282e - 011$

Pour $\lambda = \frac{3}{2}$

	<i>nc</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>
[<i>j</i> = 1]	3	0.0711	0.0210	0.0433
	5	$6.9101e - 004$	$7.5592e - 005$	$2.1611e - 004$
	8	$8.7963e - 008$	$3.5116e - 009$	$1.4348e - 008$
	<i>nc</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>
[<i>j</i> = 2]	3	0.0120	$5.5858e - 004$	0.0047
	5	$2.6622e - 005$	$6.1056e - 007$	$6.2471e - 006$
	8	$1.3768e - 009$	$1.0222e - 010$	$1.2200e - 010$
	<i>nc</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>w</i>
[<i>j</i> = 3]	3	0.0019	$1.1496e - 004$	$6.3067e - 004$
	5	$9.8421e - 007$	$5.7444e - 008$	$2.1299e - 007$
	8	$1.7728e - 009$	$9.4671e - 011$	$7.2310e - 011$

On remarque que pour différentes valeurs de λ , les erreurs sont presque égaux. La précision s'améliore légèrement lorsqu'on augmente le nombre de niveaux, mais par contre l'augmentation du nombre des points de collocations donne une amélioration sensible.

3.2 Simulation du modèle de l'épidémie de l'obésité

Soit le modèle mathématique de l'épidémie de l'obésité suivant

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu N - [\beta I(t) + \varepsilon] S(t) - \mu S(t), \\ \frac{dI}{dt} = [\beta I(t) + \varepsilon] S(t) + \sigma [\beta I(t) + \varepsilon] R(t) - (\mu + \gamma) I(t), \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t) - \sigma [\beta I(t) + \varepsilon] R(t) - \mu R(t), \end{cases} \text{ sur }]0, T],$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} S(0) = N, \\ I(0) = 0, \\ R(0) = 0. \end{cases}$$

Les valeurs des paramètres du modèle sont

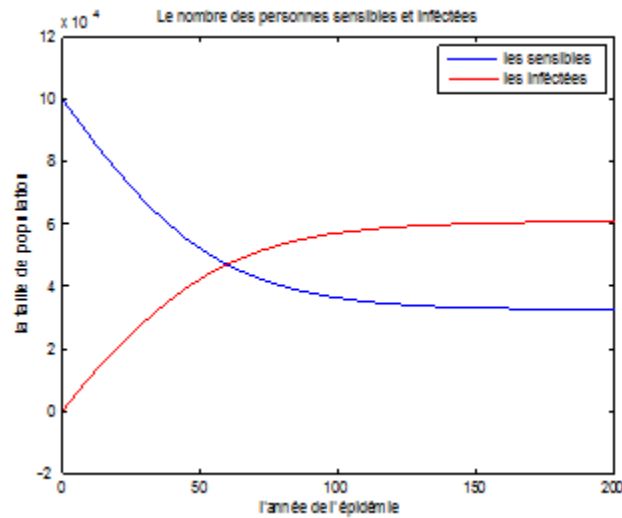
Paramètre	Valeur de référence
N	100.000
$1/\mu$	69.4(ans)
β	$2.96 * 10^{-7}$ (par année)
ε	0.012(par année)
σ	8
$1/\gamma$	35.8(ans)

T est le temps de l'étude de cette épidémie qui égale à 200 ans.

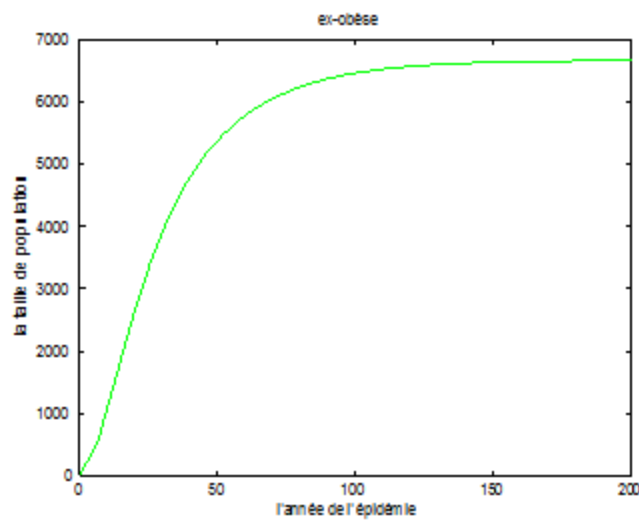
Pour les données mathématiques, on prend :

$$\begin{cases} nc = 8, \\ j = 3, \\ \lambda = \frac{3}{2}, \\ Tol = 1e - 10. \end{cases}$$

On obtient les résultats suivants



On remarque que le nombre des susceptibles diminue pendant que le nombre des infectés augmente. on constate qu'à partir de 140 ans les courbes commencent à se stabiliser. A 60 ans, on obtient l'équilibre entre les susceptibles et les infectés.



Cette figure montre que le nombre de personnes qui sont ex-obèse augmente pour se stabiliser à partir de 140 ans.

Conclusion

CONCLUSION

Dans ce travail, on a présenté un modèle de l'épidémie de l'obésité. On a proposer une méthode numérique pour la résolution une équation différentielle ordinaire basée sur les ondelettes et les polynômes de Gegenbauer. On a testé cette méthode sur deux exemples dont on connaît leurs solutions analytiques, et on a obtenu des résultats satisfaisantes avec des erreurs à l'ordre 10^{-12} avec un petit nombre de points de collocations. on a constaté aussi que cette technique est stable numériquement.

Ensuite, on a appliqué cette méthode sur le modèle de l'épidémie de l'obésité, et les résultats obtenus sont très proches aux résultats obtenus par l'article [4].

Comme perspectives pour ce travail, on peut proposer un modèle de type de SIRS (les personnes redevient susceptibles après guérison). On peut aussi proposer une méthodes des ondelettes de Jacobi ou des ondelettes de Gegenbauer en deux dimensions.

Bibliographie

- [1] **A. ALLARD** : Modélisation Mathématique en épidémiologie par réseaux de contacts, Introduction de l'hétérogénéité dans la transmissibilité, Mémoire de Maîtrise en Physique, Faculté des sciences et de Génie université Laval Québec, 2008.
- [2] **O. BELHAMITI, S.M. BAHRI** : Numerical Solution of Nonlinear and Split Ordinary Differential Systems by Legendre Wavelet Method, International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 2013.
- [3] **L. CLAUSTRES** : Introduction aux Ondelettes, 2003.e
- [4] **K. EJIMA, K. AIHARA and H. NISHIURA** : Modeling the Obesity Epidemic : Social Contagion and its Implications for Control, Theoretical Biology and Medical Modeling, 2013.
- [5] **R. GORENFLO, F. MAINARDI** : Integral and Differential Equations of Fractional Order, International Centre for Mechanical Sciences Palazzo del Torso, Piazza Garibaldi, Udine, Italy 2000.
- [6] **F. JEDRZEJEWSKI** : Introduction aux méthodes numériques, Springer-verlag France, Paris 2005.
- [7] **J. MINTSA MI ONDO** : Les aspects spatiaux dans la modélisation en épidémiologie, Thèse de Doctorat, l'université de Grenoble, 2013.
- [8] **C. PORTENIER** : Les Polynomes Orthogonaux Classiques de JACOBI LAGUERRE et HERMITE, ANALYSE FONCTIONNELLE, 2014.

-
- [9] **M. RAZZAGHI, S. YOUSFI** : Legendre Wavelets Method for Constrained Optimal Control Problems, Mathematical Methods in The Applied Sciences, 2002.
- [10] **G.SALLET** : Mathématiques et Maladies Infectieuses, Université Paul Verlaine, 2009.
- [11] **S. TOUZEAU** : Systèmes Dynamiques AgroParisTech, Mathématiques et Informatique Appliquées, Jouy-en-Josas, France, 2010.
- [12] **L. VALET** : Polynômes Orthogonaux, 2007.
- [13] Orthogonal Polynomials and Related Approximation Results.
- [14] http://sante.canoe.ca/condition_info_details.asp?disease_id=95.

Annexe

3.3 Annexe

Annexe A

OMS : (organisation mondiale de la santé) est l'autorité directrice dans le domaine de la santé des travaux ayant un caractère international au sein du système des Nations Unies.

Epidémie : augmentation rapide de l'incidence d'une pathologie. Bien que souvent utilisé dans un contexte de maladies infectieuses, ce terme peut être utilisé pour des phénomènes biologique généraux (obésité, fracture de la hanche chez les personnes âgées, suicide, etc...).

Pandémie : épidémie causée par une maladie infectieuse émergente qui prend des proportions continentales voire planétaires.

Susceptibles : ils représentent les personnes saines, n'ayant pas encore été infectées. C'est le réservoir dans lequel la maladie viendra puiser pour pouvoir se répondre.

Infectieux : ce compartiment représente ceux qui, dans la population sont non seulement déjà infectés, mais également capables de transmettre la maladie à leur tour.

Guéris(par exemple les ex-obèses) : ce compartiment contient les précédents infectieux qui sont guéris, lorsque l'on suppose qu'ils ne redeviennent pas immédiatement susceptibles. Ils peuvent acquérir une immunité définitive ou passagère.

Le modèle SI : ce sont des modèles où l'hypothèse principale est qu'un individu une fois infecté, devient immédiatement capable de transmettre la maladie. C'est ce que **Ross** a supposé dans son modèle de **1917**.

Le modèle SIS : Dans ce type de modèle, on présume qu'après l'étape infectieuse l'individu

guérit et redevient aussitôt susceptible, c'est à dire qu'il peut à nouveau être contaminé. C'est le cas de **Filipe et Gibson (2001)**.

Le modèle SIR : divise la population en trois catégories : les individus susceptibles de se faire infecter, les individus infectés et contagieux ne pouvant plus transmettre la maladie (guérison, immunité, décès).

Le modèle SIRS : il s'agit d'une modélisation qui fait l'hypothèse que l'on redevient susceptible après guérison. il y a par exemple, **Zhonghua et Jigen (2007)**, qui ont travaillé sur un modèle épidémique dont l'infectiosité dépend de l'âge, avec un taux de contact non linéaire.

Annexe B

Définitions : - L'espace $L^2([a, b])$ est l'espace des fonctions carrées sommables, c'est à dire ;

$$f \in L^2([a, b]) \text{ si et seulement si } \int_a^b f^2(x) dx < \infty.$$

- On définit le produit scalaire sur $L^2([a, b])$ par ;

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x) dx, \quad u, v \in L^2([a, b]).$$

- On dit qu'une famille de fonctions $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est orthogonale si

$$\int_a^b v_i(x)v_j(x) dx = 0; i \neq j; \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

- On dit qu'une famille de fonctions $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est orthonormale, si elle est orthogonal et de plus ;

$$\int_a^b |v_i(x)|^2 dx = 1, i \in \mathbb{N}.$$

L'intégration et la dérivation d'ordre n

$$J^{(n)}(1-x)^k = (-1)^n \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(n+k+1)} (1-x)^{k+n}.$$

où $J^{(n)}$: l'intégrale d'ordre n .

$$D_x^n (1-x)^k = (-1)^n \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} (1-x)^{k-n}.$$

avec D^n : la dérivée d'ordre n .

La fonction GAMMA

$$\begin{cases} \Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du, \\ \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}. \end{cases}$$

Les polynômes de Jacobi

Les polynôme de Jacobi satisfont l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0.$$

En posant $\gamma = 2n + \alpha + \beta$, les polynôme de Jacobi vérifient les relations suivantes :

$$\gamma(1-x^2)J'_n(x) = n(\alpha - \beta - \gamma x)J_n(x) + 2(n + \alpha)(n + \beta)J_{n-1}(x).$$

$$J_n^{(\alpha, \beta-1)}(x) - J_n^{(\alpha-1, \beta)}(x) = J_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x).$$

$$\gamma J_n^{(\alpha, \beta-1)}(x) = (n + \alpha + \beta)J_n^{(\alpha, \beta)}(x) + (n + \alpha)J_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x).$$

$$(1-x)J_n^{(\alpha+1, \beta)}(x) + (1+x)J_n^{(\alpha, \beta+1)}(x) = 2J_n^{(\alpha, \beta)}(x).$$

Formule de Rodrigus :

$$J_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{1}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^n (1-x)^\alpha (1+x)^\beta).$$

Formule d'intégration :

$$2n \int_0^x J_n^{(\alpha, \beta)}(t) (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt = J_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(0) - (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} J_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x).$$

Les polynômes de Jacobi sont des polynômes orthogonaux sur $[-1, 1]$ relativement à la fonction poids

$$\omega(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta.$$

Si $m = n$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 J_n^{(\alpha, \beta)}(x) J_n^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}. \end{aligned}$$

sinon

$$\int_{-1}^1 J_n^{(\alpha, \beta)}(x) J_m^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = 0.$$

Preuve :

Pour $n = m$,

D'après la formule de Rodrigues on a :

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 J_n^{(\alpha,\beta)}(x) J_n^{(\alpha,\beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\
&= \int_{-1}^1 \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x^2)^n (1-x)^\alpha (1+x)^\beta) J_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx, \\
&= \int_{-1}^1 \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}) J_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx.
\end{aligned}$$

par l'intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 J_n^{(\alpha,\beta)}(x) J_n^{(\alpha,\beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} (J_n^{(\alpha,\beta)}(x))' dx.
\end{aligned}$$

et on reintègre $(n-1)$ fois par partie on trouve :

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 J_n^{(\alpha,\beta)}(x) J_n^{(\alpha,\beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!} (-1)^n \int_{-1}^1 (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} D_x^n J_n^{(\alpha,\beta)}(x) dx.
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

On a la propriété suivante :

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n+k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k.$$

alors la dérivée d'ordre (n) de $J_n^{(\alpha,\beta)}$ est :

$$\begin{aligned}
D_x^n J_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \frac{n!}{2^n}, \\
&= \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}
\end{aligned}$$

on la remplace cette dernière dans (3.3.1) comme suit

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 J_n^{(\alpha,\beta)}(x) J_n^{(\alpha,\beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\
&= \frac{(-1)^n}{2^n n!} (-1)^n \int_{-1}^1 (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} dx, \\
&= \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^{2n} n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \int_{-1}^1 (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} dx.
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

on intègre $\int_{-1}^1 (1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta} dx$, $(n+\alpha)$ fois par partie, on trouve

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta} dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)} \int_{-1}^1 (1+x)^{2n+\alpha+\beta} dx. \quad (3.3.3)$$

En remplaçant la formule (3.3.3) dans (3.3.2) :

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^{2n}n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \int_{-1}^1 (1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta} dx \\ &= \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^{2n}n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)} \int_{-1}^1 (1+x)^{2n+\alpha+\beta} dx, \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{2^{2n}n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \int_{-1}^1 (1+x)^{2n+\alpha+\beta} dx, \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{2^{2n}n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} 2^{2n+\alpha+\beta+1}, \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)} 2^{\alpha+\beta+1}, \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}. \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Les polynômes de Gegenbauer

Les polynômes de Gegenbauer $G_n^{(\lambda)}$ de degré n , sont les polynômes définis par la relation de récurrence pour $\lambda > -\frac{1}{2}$

$$(n+1)G_{n+1}^{(\lambda)}(x) = 2(n+\lambda)G_n^{(\lambda)}(x) - (n+2\lambda-1)G_{n-1}^{(\lambda)}(x),$$

et les conditions d'initialisation

$$G_0^{(\lambda)}(x) = 1 \quad G_1^{(\lambda)}(x) = 2\lambda x \quad \text{si } \lambda \neq 0 \quad G_1^{(0)} = 2x.$$

Les polynômes de Gegenbauer sont solutions de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - (2\lambda+1)xy' + n(n+2\lambda)y = 0.$$

Les polynômes de Gegenbauer vérifient les relations de récurrence

$$(1-x^2)\frac{dG_n^{(\lambda)}}{dx}(x) = -n x G_n^{(\lambda)}(x) + (n+2\lambda-1)G_{n-1}^{(\lambda)}(x).$$

$$(n + \lambda)G_{n+1}^{(\lambda-1)}(x) = (\lambda - 1)(G_{n+1}^{(\lambda)}(x) - G_{n-1}^{(\lambda)}(x)).$$

Formule de Rodrigues

$$G_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\Gamma(n + 2\lambda)}{2^n n! \Gamma(2\lambda)\Gamma(\lambda + n + \frac{1}{2})} \frac{d^n}{dx^n} ((1 - x^2)^{\lambda+n-\frac{1}{2}}).$$

Formule d'intégration

$$\frac{n(2\lambda + n)}{2\lambda} \int_0^x G_n^{(\lambda)}(t)(1 - t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dt = G_{n-1}^{(\lambda+1)}(0) - (1 - x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}} G_{n-1}^{(\lambda+1)}(x).$$

Les polynômes de Gegenbauer sont des polynômes orthogonaux sur l'intervalle $[-1, 1]$ relativement à la fonction poids

$$\omega = (1 - x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}.$$

Si $m = n$,

si $\lambda \neq 0$ et si $m = n$,

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} G_n^\lambda(x) G_m^\lambda(x) dx = \frac{\pi 2^{1-2\lambda}}{n!(n + \lambda)} \frac{\Gamma(n + 2\lambda)}{\Gamma(\lambda)^2}.$$

si $\lambda = 0$,

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} G_n^0(x) G_m^0(x) dx = \frac{2\pi}{n^2}.$$

Sinon,

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} G_n^\lambda(x) G_m^\lambda(x) dx = 0.$$

Preuve :

Pour $m = n$, et $\lambda \neq 0$,

on a

$$G_k^\lambda(x) = \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\Gamma(k + 2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(k + \lambda + \frac{1}{2})} J_k^{\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2}}(x).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} (G_n^\lambda(x))^2 dx \\
&= \left[\frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})} \right]^2 \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \left(J_k^{\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2}}(x) \right)^2 dx, \\
&= \left[\frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})} \right]^2 \frac{2^{2\lambda}\Gamma^2(\lambda+n+\frac{1}{2})}{n!2(n+\lambda)\Gamma(n+2\lambda)}, \\
&= \frac{2^{2\lambda-1}\Gamma^2(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(n+2\lambda)}{n!(n+\lambda)\Gamma^2(2\lambda)}, \\
&= \frac{2^{2\lambda-1} \left[(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{3}{2}) \dots \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) \right]^2 \Gamma(n+2\lambda)}{\left[(2\lambda-1)(2\lambda-2) \dots 1 \right]^2 (\lambda+n)n!}, \\
&= \frac{2^{2\lambda-1} \left[(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{3}{2}) \dots \frac{1}{2} \right]^2 \Gamma^2(\frac{1}{2})\Gamma(n+2\lambda)}{\left[2(\lambda - \frac{1}{2})2(\lambda-1) \dots 2\frac{1}{2} \right]^2 (\lambda+n)n!}, \\
&= \frac{2^{2\lambda-1} \left[(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{3}{2}) \dots \frac{1}{2} \right]^2 \Gamma^2(\frac{1}{2})\Gamma(n+2\lambda)}{(2^{2\lambda-1})^2 \left[(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{3}{2}) \dots \frac{1}{2} \right]^2 \left[(\lambda-1)(\lambda-2) \dots 1 \right]^2 (\lambda+n)n!}, \\
&= \frac{2^{1-2\lambda}\pi\Gamma(n+2\lambda)}{(\lambda+n)\Gamma^2(\lambda)n!}
\end{aligned}$$

Mon grand père est décédé le 17 Mai 2014.

JADI, *je t'oublierai jamais, et tu sera toujours dans mes pensees et dans mon coeur.*

Je t'aime beaucoup, tu vas me manque beaucoup.

Mon réve que tu reste vivant le jour de ma soutenance, mon réve de te montre ma réussite.

*Je vais jamais oublie ce que tu ma dit, et ce que tu ma donne, je vais le garder toujours je
t'aime mon grand père.*

Vous la miséricorde de Dieu.