×

UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude
Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
Cycle LMD
Spécialité :Modélisation Contrôle et Optimisation

Thème :
Résolution des systèmes differentiels singuliers à temps variables.

Présenté par :
ATAMNIA Meriem

Soutenu le 22/06/2014.

Devant le jury

Président :	OULD ALI	Mohand	MCA	**U. MOSTAGANEM.**
Examinateur :	GHEZZAR	M.Amine	MAB	U.**MOSTAGANEM.**
Encadreur :	BOUAGADA	Djillali	Professeur	**U. MOSTAGANEM.**

Dédicace

Je dédie ce mémoire à mes chers parents qui restent pour moi un symbole de volonté et de sérénité et ainsi qu' à mon mari BELGHITIA Cherif qui m'a encouragé de suivre mes études supérieures et comme je n'oublie pas mes frères Lkhdar, Smail et Cherif et mes soeurss Fatiha et Farida insique mes belles soeures Nadia et Karima et leurs enfants et mes collègues ABADA,LAKEB,LAKHAL,MERADJ, BENANTEUR, et HAKIKI et mes amies et tous qu'ils m'ont aidé de prés ou de loin.

Remerciements

Je remercie vivement mon encadreur Monsieur BOUAGADA Djillali Professeur au Département de Mathétmatiques de l'université de Mostaganem pour le choix du sujet et les efforts qu' il a fourni pour la réussite de la réalisatiom de mon mémoire, ainsi que pour les encouragements prodigués tout au long de l'élaboration de ce travail.
Je tiens à remercier l'ensemble du jury qui ont accepté d'évaluer mon travail, le président M.OULD ALI et l'examinateur M.GHEZZAR
Je voudrais remercier tous les enseignants qui ont contribué à notre formation comme,Je tiens remercier aussi mes amies et tous ceux qui ont participé de près ou de loin.

Table des matières

INTRODUCTION

Nous considérons dans ce mémoire la classe des systèmes singuliers et on s'intéresse à leur résolution. Ces systèmes sont d'un grand intérêt pour modéliser de nombreux procédés pratiques. Notons que ces derniers se rencontrent dans l'étude des systèmes interconnectés, les réseaux électriques, la robotique, plus généralement les structures mécaniques. A l'instar des modèles standards. Nous nous sommes intéressé à la régularité, qui veut dire l'existence d'une solution unique du modèle d'état généralisé. A la résolution par l'approche Gantmacher [1], [2], [3] pour la classe des modèles singuliers à temps non variables. Dans le chapitre qui suit, l'analyse des modèles à temps variables sera également considérée [3]. Nous signalons que dans ce cas nous avons étendu l'approche aux modèles à temps variables.
L'approche par la transformée de Laplace a été de même rappelée au début de ce mémoire. Toutes les approches ont été illustrée par des exemples numérique.
Historiquement, tout revient aux travaux de Weierstrass (1867) pour le cas de faisceau régulier qui veut dire faisceau à déterminant non identiquement nul ; et dans le cas le plus général à ceux de Kronecker (1965).

Chapitre 1

Définitions de Bases et Propriétés

Dans cette section, nous proposons quelques définitions et propriétés concernant la transformée de Laplace .

1.1 La transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un outil important et très puissant pour résoudre les équations et les systèmes différentiels linéaires en temps continu.

1.1.1 Définition

Une fonction est dite Causale, si elle est nulle pour $t < 0$.

1.1.2 Définition

Soit f une fonction du temps t et causale, sa transformée de Laplace notée $F(p)$ est donnée par,

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt}dt. \tag{1.1.1}$$

où, p est à priori un nombre complexe.

Condition suffisantes d'existence :

Ce ne sont pas toutes les fonctions qui ont une transformée de Laplace. Nous allons maintenant donner des conditions sur $f(t)$ qui garantissent l'existence de

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt. \tag{1.1.2}$$

Théorème 1.1.1 *Si $f(t)$ est continue par morceaux sur tout intervalle fini $[0, a]$, $a \succ 0$, et est de l'ordre de e^{bt}*

quand $t \longrightarrow +\infty$, la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f(t))$ existe pour tout $p \succ b$.

Exemple 1.1.1 *On considère la fonction exponentielle définie sur $[0, +\infty[$*

Si $f(t) = e^{kt}$ et $k \in \mathbb{R}$.

Alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{kt}) &= \int_0^{+\infty} e^{kt}e^{-pt}dt \\
&= \lim_{r\to\infty} \int_0^{r} e^{(k-p)t}d\hat{t} \\
&= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{k-p}(e^{(k-p)r} - 1) \\
&= \frac{1}{k-p} \quad si\ p \succ k,
\end{aligned}$$

d'où :

$$\mathcal{L}(e^{kt}) = \frac{1}{k-p} \quad si\ p \succ k.$$

en particulier :

si $k = 0$ alors : $\mathcal{L}(1) = \dfrac{1}{p}$, $p \succ 0$.

Si $U(t) = 1$ est une fonction unité, donc :

$$\mathcal{L}(U(t)) = \frac{1}{p} \quad \text{si } p \succ 0$$

1.2 Table de quelques transformée de Laplace

fonction $f(t)$	transformée$\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$	conditions
1	$\frac{1}{p}$	$\text{Re}(p) \succ 0$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\text{Re}(p) \succ 0$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\text{Re}(p) \succ 0$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$\text{Re}(p) \succ 0$
$cos\,(at)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\text{Re}(p) \succ 0$
$sin\,(at)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\text{Re}(p) \succ 0$
$sh\,(at)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$\text{Re}(p) \succ \mid a \mid$
$ch\,(at)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\text{Re}(p) \succ \mid a \mid$

1.2.1 Propriétés de la transformée de Laplace

Pour tout $\alpha, \beta \in \Re$ et pour f, g deux fonctions causales, nous décrivons les propriétés importantes et utiles pour répondre à certains problèmes de résolution.

1. Linéarité :

Si α et β sont des constantes quelconques et $f(t)$, $g(t)$ sont des fonctions dont les transformées de Laplace sont respectivement $F(p)$ et $G(p)$, alors ;

$$\mathcal{L}\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right] = \alpha \mathcal{L}\left[f(t)\right] + \beta \mathcal{L} g(t)] = \alpha F(p) + \beta G(p). \tag{1.2.1}$$

2. **Dérivation :**

Soit f une fonction vérifie les conditions du théoréme (3) et soit $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ alors :
Si $f(t)$ est continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$ on a :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0) \tag{1.2.2}$$

3. Intégration :

Si $\mathcal{L}(f(t)) = F(p)$ alors :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \frac{F(p)}{p} \tag{1.2.3}$$

4. Retard temporel :

Soit la fonction : $t \to f(t-\tau)$ avec $\tau \in \mathbb{R}^{+}$, telque f vérifie les conditions du théoréme (3), et soit $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$

alors :

$$\mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-p\tau} F(p) \tag{1.2.4}$$

5.Convolution :

Si f et g vérifient les conditions du théoréme (3), alors la transformée de Laplace de $h = f * g$ est le produit des transformée de Laplace de f et g, c'est -à-dire que l'on a :

$$\mathcal{L}\left[f(t) * g(t)\right] = \mathcal{L}(f(t)) * \mathcal{L}(g(t)) = F(p) . G(p) \tag{1.2.5}$$

6.Théorème de la valeur initiaie :

Si une fonction f vérifient les conditions du théorème (3), et admet pour transformée de Laplace la fonction F,

alors :

$$\lim_{p \longrightarrow +\infty} pF(p) = f\left(0^{+}\right). \tag{1.2.6}$$

$$\lim_{p \longrightarrow +\infty} F(p) = 0. \tag{1.2.7}$$

à condition que ces limites existent.

7. **Propriété de changement d'échelle :**

On pose la fonction : $t \longrightarrow f(at)$ et a $\in \mathbb{R}_{+}^{*}$,telque f vérifie les conditions du théoréme(3), et soit $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$

alors :

$$\mathcal{L}(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right). \tag{1.2.8}$$

8. **Multiplication par** e^{-at} :

Soit f une fonction vérifie les conditions du théoréme(3) et soit $F(p) = \mathcal{L}f(t)$, alors :

$$\mathcal{L}(f\,(t)\,e^{-at}) = F\,(p+a) \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}. \tag{1.2.9}$$

9. **Multiplication par** t :

Si $\mathcal{L}(f(t)) = F\,(p)$

alors :

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = (-1)F'\,(p)\,. \tag{1.2.10}$$

10. **Multiplication par** t^n :

Si $\mathcal{L}(f(t)) = F\,(p)$

alors :

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F\,(p)\,. \tag{1.2.11}$$

où n entier positif $(n = 1, 2, 3...)$.

11.**Théorème de la valeur finale :**

si $\lim_{p\to+\infty} f\,(t)$ existe alors :

$$\lim_{p\to+\infty} f\,(t) = \lim_{p\to+0} p\mathcal{L}[f\,(t)] \tag{1.2.12}$$

1.2.2 Transformée inverse de Laplace :

La transformée inverse de la place notée $f\,(t)$ dite aussi originale d'une fonction $F\,(P)$ est définie par

$$\mathcal{L}^{-1}\,[F\,(p)] = f\,(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{+\infty} F\,(p)\,.\,\mathrm{e}^{pt}\,dp \tag{1.2.13}$$

où, le chemin d' intégration peut être choisi quelconque dans le plan complexe à condition de rester dansle domaine de convergence de F(p)

.

1.2.3 Propriétés des transformées inverses de Laplace :

1. Linéarité :

Si α et β sont des constantes quelconques et F(p), G(p) les transformées de Laplace de f(t) et g(t) respectivement

alors :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\alpha F\left(p\right)+\beta G\left(p\right)\right\}=\alpha\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(p\right)\right\}+\beta\mathcal{L}^{-1}\left\{G\left(p\right)\right\} \tag{1.2.14}$$

2. Propriété de changement d'échelle :

Si

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(p\right)\right\}=f(t)$$

alors :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(kp\right)\right\}=\frac{1}{k}f\frac{t}{k} \tag{1.2.15}$$

avec $\mathbb{k}\in\ \mathbb{R}$

3. Propriété de translation :

Si

$$\pounds^{-1}\left\{F\left(p\right)\right\}=f(t)$$

alors :

$$\pounds^{-1}\left\{F\left(p-a\right)\right\}=e^{at}f(t) \tag{1.2.16}$$

avec a$\in\mathbb{R}$

4.Transformée inverse de dérivées :

Si

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(p\right)\right\}=f(t)$$

alors :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F^{n}\left(p\right)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^{n}}{dp^{n}}F\left(p\right)\right\} \tag{1.2.17}$$

5. Multiplication par p :

Si

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(p\right)\right\}=f(t)\quad\text{et}\quad f(t)=0$$

alors :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{pF\left(p\right)\right\} = f'(t) \tag{1.2.18}$$

6. Division par p :

Si

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(p\right)\right\} = f(t)$$

alors :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F\left(p\right)}{p}\right\} = \int_0^t f(u)du \tag{1.2.19}$$

Chapitre 2

Trajectoire d'états et réponse de systémes singuliers en temps continu

Nous rappelons briévement dans cette section l'expression des trajectoires d'états et des réponses de systèmes linéaires singuliers en temps continu, voir[5], [6] et [7] pour plus de détails.

2.1 Trajectoire d'états de systèmes singuliers en temps continu

Considérons le système linéaire continu suivant,

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{2.1.1}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$est un vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie et E, A, B, C et D sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

Définition 2.1.1 *Le système (2.1.1) est dit* ***singulier*** *si* $detE = 0$*. Dons le cas contraire, c'est à dire si det* $E \neq 0$*, il est dit* ***standard.*** *Si* $E = I_n$ *, le système est aussi appelé standard (ou* ***explicite).***

Définition 2.1.2 *Le systéme (2.1.1) est dit **régulier** si et seulement si*

$$det(sE - A) \neq 0 \tag{2.1.2}$$

pour un certain $s \in \mathbb{C}$.

Remarque 2.1.1 *Si det $E \neq 0$, alors en multipliant (2.1.1) par E^{-1}, on obtient le systéme suivant,*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

qui est un système explicite.
Pour un système singulier, on supposera pour la suite que det $(sE - A) \neq 0$
pour un certain $s \in \mathbb{C}$. Dons ce cas, on peut écrire la matrice résolvante comme unique série de laurent

[F.L.Lewis,1984 ;T.KaczoreK,1993]

$$(sE - A)^{-1} = s^{-1} \sum_{i=-\mu}^{\infty} \varphi_i s^{-i} \tag{2.1.4}$$

où μ est appelé **indice de nilpotence** du faisceau $(sE - A)$ voir [10], [8] et [9] , il est décrit par,

$$\mu = rgE - \deg[\det(sE - A)] + 1 \tag{2.1.5}$$

φ_i est appelée **la matrice fondamentale** de (2.1.1) . Il s'ensuit directement de la relation (2.1.4) que la matrice fondamentale φ_i satisfait les équation suivantes,

$$\begin{aligned} E\varphi_i - A\varphi_{i-1} &= \delta_{0i} I \\ \varphi_i E - \varphi_{i-1} A &= \delta_{0i} I \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

où δ_{0i} est **le delta de Kronecker** [10] , [11], [1] et [12] **.**

Dans [12], l'auteur montre comment calculer les φ_i tout en supposant disponibles φ_0 et φ_{-1}.par contre, dans [10] ,

la matrice fondamentale est calculée à partir des matrices E et A en utilisant l'inverse de Drazin [14] , qui a été développé ensuite par T.Kaczorek voir [13].

Nous avons quelques propriétés de la matrice fondamentale .

1

$$\phi_i = 0 \qquad \text{pour} \qquad i \prec -\mu$$

2

$$\phi_0 A_{\phi_i} = \begin{cases} \phi_{i+1} & \text{pour } i \succeq 0 \\ 0 & \text{pour } i \prec 0 \end{cases}$$

3

$$-\phi_{-1} E_{\phi_i} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \succeq 0 \\ \phi_{-i-1} & \text{pour } i \prec 0 \end{cases}$$

4

$$\phi_i = (\phi_0 A)^i \phi_0, \quad pour i \succeq 0$$

5

$$\phi_0 E_{\phi_i} = \begin{cases} \phi_i & \text{pour } i \succeq 0 \\ 0 & \text{pour } i \prec 0 \end{cases}$$

6

$$-\phi_{-1} A_{\phi_i} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \succeq 0 \\ \phi_i & \text{pour } i \prec 0 \end{cases}$$

7

$$\phi_0 A_{\phi_i} = \begin{cases} \phi_{i+1} & \text{pour } i \succeq 0 \\ 0 & \text{pour } i \prec 0 \end{cases}$$

8

$$-\phi_{-1} E_{\phi_i} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \succeq 0 \\ \phi_{i-1} & \text{pour } i \prec 0 \end{cases}$$

Exemple 2.1.1 *Considérons les matrices E et A suivantes,*

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

alors,

$$(sE - A)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -s \end{bmatrix}$$

Ici l'indice de nilpotence est $\mu = 2$. Les matrices fondamentales sont,

$$\phi_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi_{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

pour $\quad i \succeq 0$

$$\phi_{-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Remarque 2.1.2 *Si $E = I_n$, alors*

$$\phi_i = 0 \quad \textit{pour } i \prec 0 \tag{2.1.7}$$

$$\phi_i = A^i \;\text{ pour } i \succeq 0 \tag{2.1.8}$$

2.Si E est inversible,

$$(sE - A)^{-1} = (I - (s^{-1}E^{-1}A))^{-1}E^{-1}s^{-1} = \left[\sum_{i=0}^{\infty}(E^{-1}A)^i s^{-i}\right] E^{-1}s^{-1} \tag{2.1.9}$$

on en déduit alors,

$$\begin{aligned} &\phi_i = 0, \qquad\qquad \text{pour } i \prec 0 \\ &\phi_0 = E^{-1}; \quad \phi_1 = (E^{-1}A)E^{-1}; \\ &\phi_2 = E^{-1}A\phi_1 = (E^{-1}A)^2E^{-1}; \\ &\vdots \\ &\phi_i = (E^{-1}A)\phi_{i-1} = (E^{-1}A)^iE^{-1}, \qquad\quad \text{pour } i \succeq 0 \end{aligned}$$

La solution $x(t)$ du systéme (2.1.1) avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ et le contrôle u est donnée par (voir par exemple [15]) :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\phi_0 \ A(t-t_0)} E x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\phi_0 \ A(t-\tau)} \phi_0 B u(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{-j} (B u^{(j-1)} + E x_0 \delta^{(j-1)}) \quad (2.1.10) \\ \text{où} \quad u^{(j)} &= \frac{d^j u}{dt}, \qquad j = 1, ..., \mu - 1. \end{aligned}$$

Preuve. par application de la transformée de Laplace à l'équation () on obtient, $\square$ par application de la transformée de Laplace à l'équation (2.1.1) on obtient,

$$\begin{aligned} sEX(s) - Ex_0 &= AX(s) + BU(s) \\ sEX(s) - AX(s) &= Ex_0 + BU(s) \\ (sE - A)X(s) &= Ex_0 + BU(s) \end{aligned}$$

Le système (2.1.1) étant régulier, donc $(sE - A)^{-1}$ existe pour un certain nombre s$\in \mathbb{C}$, par suite

$$X(s) = (sE - A)^{-1}(Ex_0 + BU(s))$$

De la relation (2.1.4), il s'ensuit,

$$X(s) = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} (Ex_0 + BU(s))$$

,

$$X(s) = \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} Ex_0 \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} BU(S)$$

,

$$X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} Ex_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)} BU(s)) + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_i s^{-(i+1)} Ex_0 + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_i s^{-(i+1)} BU(s).$$

Enfin, nous utiliserons la transformée inverse de Laplace et le théoréme de convolution pour obtenir la solution du système,

sachant que

$$\mathcal{L}(e^{\phi,0AT}\phi_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i s^{-(i+1)}$$

On aura alors :

$$\begin{aligned}
x(t) &= Ex_0 e^{\phi_0 At}\phi_0 + B\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}(e^{\phi_0 At}\phi_0)\mathcal{L}(u(t))] + Ex_0 \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{i-1}\delta^{(i-1)} + B\sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i}u^{(i-1)}(t) \\
x(t) &= Ex_0 e^{\phi_0 AT}\phi_0 + [(e^{\phi_0 AT}\phi_0) * B[u(t)] + Ex_0 \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i}\delta^{(i-1)} + B\sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i}u^{(i-1)}(t)
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$x(t) = e^{\phi_0 At}\phi_0 Ex_0 + \int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 Bu(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-i}(Bu^{i-1)}(t) + Ex_0\delta^{(i-1)}(t))$$

Exemple 2.1.2 *: Si on considère le système (2.1.1) avec :*

$$\begin{aligned}
E &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 2
\end{aligned}$$

alors,

$$det(sE - A) = -s$$

donc le système est régulier et l'indice de nilpotence $\mu = 2$, par conséquent les matrices fondamentales sont tels que,

$$\phi_{-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \phi_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Par suite,

$$\phi_0 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad e^{\phi_0 A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d'après la propriété 2, on obtient,

$$\phi_i = \phi_0 A \phi_{i-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{pour } i \succeq 0,$$

La solution du système est par suite donnée par,

$$x(t) = e^{\phi_0 At}\phi_0 Ex_0 + \phi_{-1}Bu(t) + \phi_{-1}Ex_0 + \phi_{-2}Bu^{(1)}(t) + \phi_{-1}Ex_0\delta^{(1)}(t))$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} -u(t) \quad -x_{2,}\delta(t) \quad -u^{(1)}(t) \\ -u(t) \\ x_{3,0} \end{bmatrix}$$

Nous allons maintenant montrer une autre caractérisation qui nous permettra de vérifier l'existence de la solution de l'equation(2.1.1)

.

Théorème 2.1.1 *Si la relation (2.1.2) est vèrifiée, alors l'équation (2.1.1) et l'équation,*

$$\dot{x} = \phi_0 Ax_0 + \phi_0 Bu + \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{-j}(Bu^{(j)} + Ex_0\delta^{(j)}) \tag{2.1.11}$$

$x(0) = x_0$ possédent la même solution,

$$x(t) = e^{\phi_0 At}\phi_0 Ex_0 + \int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 Bu(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{-j}(Bu^{(j-1)} + Ex_0\delta^{(j-1)} \tag{2.1.12}$$

Preuve.

D' aprés ce qui précéde, la relation () est solution de ().inversement, moyennant () et les propriétés 7 et 8,on vérifie facilement que,

$$\phi_0 Ax + \phi_0 Bu + \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{-j}(Bu^{(j)} + Ex_0\delta^{(j)}) = \phi_0 A(e^{\phi_0 At} + \phi_0 Ex_0 +$$

$$\int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 Bu(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{\mu}\phi_{-j}(Bu^{(j-1)} + Ex_0\delta^{(j-1)}) + \phi_0 Bu + \sum_{j=1}^{\mu}\phi_{-j}(Bu^{(j)} + Ex_0\delta^{(j)})$$

$$= \phi_0 Ae^{\phi_0 At}\phi_0 Ex_0 + \phi_0 A\int_0^t e^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 Bu(\tau)d\tau + \phi_0 Bu + \sum_{j=1}^{\mu}\phi_{-j}(Bu^{(j)} + Ex_0\delta^{(j)}) = \dot{x}$$

Ce qui achéve notre pr □

2.2 Réponse de système singulier en temps continu :

2.2.1 Cas standard :

Considérons le système linéaire standard en temps invariant suivant,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Pour tout $t \geq t_0$, nous obtenons,

_Trajectoire d'état :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{2.2.2}$$

Réponse du système :

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + D(\tau) \tag{2.2.3}$$

Matrice de réponse impulsionnelle :

$$G(t, t_0) = Ce^{A(t-t_0)}B + D\delta(t - t_0) \tag{2.2.4}$$

Après avoir rappelé les trajectoires d'état et les réponses d'un système standard, la notion de réponse impulsionelle sera donc développée dans le cas des systèmes singuliers à temps continu . Nous expliciterons en parallèle la notion de fonction de transfert pour ce type de systèmes.

2.2.2 Cas singulier :

La sortie du système singulier (2.1.1) est donnée par :

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2.2.5}$$

$$y(t) = Ce^{\phi_0 At}Ex_0 \int_0^t Ce^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 Bu(\tau)d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} C\phi_{-j}(Bu^{(j-1)} + Ex_0\delta^{(j-1)}) + Du(t) \tag{2.2.6}$$

En substituant $x_0 = 0$ et $u(t) = \delta(t)$ dans (2.1.1), on obtient la réponse impulsionnelle g(t) du système (2.2.7)

$$g(t) = \begin{cases} Ce^{\phi_0 At}\phi_0 B & \text{pour} \quad t \succ 0 \\ Ce^{\phi_0 At}\phi_0 B + \sum_{j=1}^{\mu} C\phi_{-j}(B\delta^{(j-1)}(t) + D\delta(t) & \text{pour} \quad t = 0 \end{cases}$$

La matrice de transfert du système est,

$$T(s) = C(sE - A)^{-1}B + D \tag{2.2.7}$$

Une substitution de (2.1.6) dans (2.2.8) donne,

$$T(s) = \sum_{i=0}^{\infty} C\phi_i Bs^{-(i+1)} + \sum_{j=1}^{\mu} C\phi_{-j}Bs^{(j-1)} + D \tag{2.2.8}$$

Si on remplace la propriété 4 dans (2.2.9) , on obtient,

$$T(s) = C\left[\sum_{i=0}^{\infty}(\phi_0 A)^i s^{-(i+1)}\right]\phi B + \sum_{j=1}^{\mu} C\phi_{-j}(Bs^{(j-1)} + D \tag{2.2.9}$$

Enfin, en appliquant, la tranformèe de Laplace, on aura alors la relation (1.1.2).

Chapitre 3

Theorie de KRONECKER-WEIERSTRAS des faisceaux de matrices

Définition 3.0.1 *On appelle* λ *matrice ou matrice pôlynomiale* $(\lambda \in \mathbb{k})$ *toute matrice* $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))_{\substack{\overline{i=1,m} \\ \overline{j=1,n}}}$
où

$$a_{ij}(\lambda) = \alpha_{ij}^{c}\lambda^{l} + ... + \alpha_{ij}^{l}$$

Définition Un faisceau de matrices $\lambda A + B$ est une matrice polynômiale dont les coefficients sont des polynômes de degré inférieur où égal à 1, où λ est une variable indéterminé.
A et B sont deux matrices quelconques de même ordre $(m \times n)$.

Définition Si le rang r du faisceau de matrice $\lambda A + B$ est tel que $r = m = n$, alors le faisceu est dit **régulier** $(F.R)$. $(i.e \quad det(\lambda A + B) \neq 0)$.

Définition Si $r \prec m = n$ le faisceau est appelé **faisceau singulier carré** $(F.S.C)$ Si $m \neq n$, il sera dit **singulier rectangulaire** $(F.S.R)$.
Une forme canonique pour les faisceaux réguliers est établie par WEIERSTRASS (en1867) sur la base de sa théorie des diviseurs élémentaires.(Algorithme ci dessous)

Plus tard KRONECKER (en 1890) par ses recherches a formulé un résultat fondamental pour les faisceaux singuliers qui porte sur l'éxistence de bases dans les quelles le faisceau $\lambda A+B$ prend un forme canonique quasi diagonale plus générale que celle de WEIERSTRASS.

Nous donnerons par la suite les deux théorèmes de WEIERSTRASS et KRONECKER suivi d'un algorithme.

Théorème 3.0.1 *De Weierstrass :*

Cas d'un Faisceau Régulier

Tout faisceau régulier $\lambda A + B$ peut être réduit en une forme quasi-diagonale canonique (strictement équivalente)

$$\begin{bmatrix} J+\lambda I & & & 0 \\ & N^{\mu_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & N^{\mu_S} \end{bmatrix}$$

où la forme normale du premier bloc diagonal $J + \lambda I$ est déterminée d'une façon unique par les diviseurs élémentaires finis (D.E.F) de $\lambda A + B$ et les s derniers blocs diagonaux correspondent aux diviseurs élémentaires infinis (D.E.I) $\mu_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, \mu_S$. du faisceau donné.

avec :

$$N^{\mu_1} = I^{\mu_1} + \mu_1 H = \begin{bmatrix} 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ldots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Théorème 3.0.2 *GENERAL* (*KRONECKER* (1890))

Un faisceau $\lambda A + B$ peut toujours être mis sous la forme quasi -diagonale suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & L_{\varepsilon} & & & \\ & L_{\varepsilon'} & & & \\ & & & \begin{bmatrix} N & \\ & J+I \end{bmatrix} & \\ \lambda A_{0+}B_0 & & & & \end{bmatrix}$$

Avec :

$$L_{\varepsilon=}\begin{bmatrix} L_{\varepsilon_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{\varepsilon_F} \end{bmatrix} \quad , \ o\grave{u} \ \ L_{\varepsilon_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$L'_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} L'_{\varepsilon_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & L'_{\varepsilon_F} \end{bmatrix} \quad , o\grave{u} \ \ L'_{\varepsilon_1} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots\dots\dots\dots \varepsilon_F = 0 \ et \ \ \varkappa_1 = \varkappa_2 = \dots\dots = \varkappa_F = 0$$

correspondent au bloc nul.

Le faisceau $\lambda A_0 + B_0$ est règulier (WEIERSTRAS).

3.0.3 ALgorithme :[3]

a)**<u>Bloc nul</u>** :

g (resp.h) est le nombre maximum de solutions constantes, independantes et non nulles appartenant à $Ker(\lambda A + B)$ (resp $Ker(\lambda A' + B')$) : ($\lambda A' + B'$ est le faisceau transposé du faisceau$\lambda A + B$).

b)**<u>Bloc $\mathbf{L}_{\varepsilon}$et $\mathbf{L}'_{\varepsilon}$:</u>**

Dons ce cas, on s'intéresse uniquement aux solutions polynomiales non nulles .

Si l'équation $(\lambda A+B)\,x=0$ (x matrice colonne inconnue) posséde des solutions polynomiales , considérer celle de degré minimal $\varepsilon\succ 0$, soit :

$$x(\lambda)=x_0-\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^{\varepsilon_1}\lambda^{\varepsilon_1}x_{\varepsilon_1}\qquad x_{\varepsilon_1}\neq 0$$

d'où naissance du bloc L_{ε_1}

on a deux possibilités :

p.1 : Présence du bloc nul :

$$\lambda A+B\sim\begin{bmatrix} 0\rfloor & & \\ & L_{\varepsilon_1} & \\ & & \lambda A_1'+B_1' \end{bmatrix}(F)$$

p.2 :Absence du bloc nul :

$$\lambda A+B\sim\begin{bmatrix} L_{\varepsilon}\rfloor & \\ & \lambda A_1+B_1 \end{bmatrix}$$

Etudions par exemple le cas P.1 alors :

_ Si $\varepsilon_1\prec m-h$ on a la forme (F), sinon i.e : $\varepsilon=m-h$le bloc $\lambda\tilde{A}_1+\tilde{B}_1$ est absent et stop.

_ Si les lignes de $\lambda A_1'+B_1'$ sont linéairements indépendantes stop.

Considérer alors le faisceau transposé $\lambda\tilde{A}_1+\tilde{B}_1$, i.e.considérer l'équation $(\lambda A_1'+B_1')\,y=0$ et refaire le même raisonnement de $\{A\}$, d'où naissance du bloc L_{ε_1}

_ Sinon on s'intérèsse aux solutions polmynomiales non nulles de degré minimale $\varepsilon_2\succeq\varepsilon_1\succ 0$ appartenant à $Ker\,(\lambda A_2'+B_1')$, si de telles solutions éxistent : d'où le bloc L_{ε_2}.

a) **Si** $\varepsilon_2+\varepsilon_1\prec m-h$, **on a**

$$\lambda A+B=\begin{bmatrix} 0\rfloor & & & \\ & L\varepsilon_1\rfloor & & \\ & & L\varepsilon_2\rfloor & \\ & & & \lambda\tilde{A}_2+\tilde{B}_2 \end{bmatrix}$$

b) **Dans le cas contraire**, i.e. si $\varepsilon_1+\varepsilon_2=m-h$,le bloc $\lambda\tilde{A}_2+\tilde{B}_2$ est absent

Dans a si les lignes de $\lambda\tilde{A}_2+\tilde{B}_2$ sont lineairement indépendantes stop : regarder $\lambda\tilde{A}_{2+}'\tilde{B}_2'$ d'où le bloc $L'\varepsilon_2$, sinon on s'intérèsse à $\left(\lambda\tilde{A}+\tilde{B}\right)x^2=0$.

* Le processus se continu, vue le nombre de solutions linéairement independantes est toujours au plus n, ce processus a donc une fin·

Remarque 3.0.1

une fois que les blocs $L_\epsilon$sont déterminés, vient le tour des blocs L'_ε donc on arréte jusqu au bloc régulier $\lambda A_0 + B_0$
(où les colonnes et les lignes sont lineairement indépendantes).

_Si dans le faisceau donné $\lambda A + B$, le rang $r = n$ alors , les blocs L_ε sont absents $(p = 0)$
_Si $r = m$, alors les blocs L'_ε sont absents $(q = 0)$.
_Chaque bloc $\lambda A_i + B_i$ est déterminé comme en (§)
(§) :Quand le faisceau $\lambda\tilde{A} + \tilde{B}$ est présent , il est déterminé grâce à la stricte équivalence du faisceau $\lambda A + B$ à la forme $(\mathcal{F})$ (i.e .il existe deux matrices réguliéres à coefficients constants p' et Q' telles que :

$$(p) : \lambda A + B = p' \begin{bmatrix} 0\rfloor & & \\ & L_{\varepsilon_1}\rfloor & \\ & & \lambda\tilde{A}_1 + \tilde{B}_1 \end{bmatrix} Q'$$

par résolution de (p) on retrouve $\lambda A' + B'$

c) Bloc $J + \lambda I$: il est déterminé par les diviseurs élémentaires finis.

Définition et calcul des D.E.F :

(i) : Calculer $r = rang\ (\lambda A + B)$;
(ii) : Calculer les $D_J(\lambda) = P.G.C.D$ de tous les mineurs d'ordre $j = \overline{1, r}$ on a $C_m^J \times C_n^J$ mineurs d'ordre j avec $D_J(\lambda)/D_{J-1}(\lambda)$ $\quad j = \overline{2, r}$ $\quad$ et $\quad D_0(\lambda) = 1$ $\quad$ (par convention)

(iii) :Recherche des polynômes dits invariants $i_j(\lambda)$, $j = \overline{1, r}$ avec les formules suivantes :
$i_1(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$, $i_2(\lambda) = \frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)}$,.............................., $i_r(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)} = D_1(\lambda)$.

où $i_j(\lambda)/i_{j-1}(\lambda)$, $j=\overline{2,r}_1$

(iv) : Décomposer les $i(\lambda)$ $(i=\overline{1,r})$ en facteurs irréductibles

$$\begin{aligned}
i_1(\lambda) &= [g_1(\lambda)]^{s_1}\,[g_2(\lambda)]^{s_2}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,[g_s(\lambda)]^{s_s}\,;\\
i_2(\lambda) &= [g_1(\lambda)]^{d_1}\,[g_2(\lambda)]^{d_2}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,[g_s(\lambda)]^{d_s}\,;\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
i_r(\lambda) &= [g_1\,(\lambda)]^{s_1}\,[g_2(\lambda)]^{L_2}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,[g_s(\lambda)]^{L_s}\,.
\end{aligned}$$

par définition, les $[g_1(\lambda)]^{d_1}\,[g_2]^{d_2}\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,[g_s(\lambda)]^{d_s}$distincts de i sont appelés les **diviseurs élémentaires finis** (D.E.F) du faisceau $\lambda A+B$.

d) Bloc N^u : il est déterminé par les D.E.I

Recherchedes D.E.I :

(i) : Considérer $\lambda A{+}uB$ (faisceau de matrices homogènes en λ et u) et calculer $D(\lambda,\mu)$ =det$(\lambda A,\mu B)$.

(ii') : Calculer Les D$_k$ $(\lambda,\mu)=P.G.C.D$ de tous les mineurs d'ordre k ,k=$\overline{1,r}$

(iii) :Recherche des polynômes invariants i$_k$ (λ,μ) .

$$i_1(\lambda,\mu)=\frac{D_r(\lambda,\mu)}{D_{r-1}(\lambda,\mu)};\qquad i_2(\lambda,\mu)=\frac{D_{r-1}(\lambda\mu)}{D_{r-2}(\lambda,\mu)};\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(iv) : Réduction à une forme irréductible des i$_k(\lambda,\mu)$, il vient donc les (D.E.I).

Remarque 3.0.2 *:*

Les facteurs de la forme $e_\alpha(\lambda,\mu)$ sont appelés les diviseurs élémentaires infinis du faisceau $\lambda A+B$ ils existent lorsque det$A=0$

-A partir de tout diviseur élémentaire $e_\alpha(\lambda)$ de degré q du faisceau $\lambda A+B$, on obtient le diviseur élémentaire correspondant $e_\alpha(\lambda,\mu)$ par la formule : $e_\alpha(\lambda,\mu)=\mu^qe(\lambda/\mu)$.

Exemple 3.0.1

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \lambda\ A + B &= \begin{bmatrix} \lambda+1 & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$D(\lambda) = \det(\lambda A + B) = \lambda \qquad , \qquad r = 2; \textit{ il s'agit donc d'un faisceau régulier.}$$

$$\begin{aligned} *D_2(\lambda) &= \lambda \\ D_1(\lambda) &= 1 \\ D_0(\lambda) &= 1 \end{aligned}$$

D'où $\quad i_1(\lambda) = \lambda$ et $i_2(\lambda) = 1$

il existe alors un seul D.E.F qui est :"λ"

** $\quad \lambda\ A + \mu B = \begin{bmatrix} \lambda+\mu & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} D(\lambda, \mu) &= \mu; \\ D_2(\lambda, \mu) &= \mu\lambda; \\ D_1(\lambda, \mu) &= \mu; \\ D_0(\lambda, \mu) &= \mu. \end{aligned}$$

par suite : $\mathrm{i}_1(\lambda, \mu) = \lambda$ et $\mathrm{i}_2(\lambda, \mu) = \mu$. il existe donc un seul D.E.I"λ"d'ordre1.

Donc d'après le théorème de WEIERSTRASS,

$$\lambda A + B \sim \lambda\tilde{A} + \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ 0 & \vdots & \lambda \end{bmatrix}$$

on se donne

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \; et \;\; B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\ A + B = \begin{bmatrix} \lambda-1 & \lambda+1 \\ \lambda-1 & \lambda+1 \end{bmatrix} \qquad \text{est un faisceau F.S.C derang 1.}$$

Recherche des blocs de KRONECKER :

on a : r$\prec m=2$;

r$\prec n=2$; *donc* dépendance linéaire des colonnes et des lignes du faisceau donné.

on considère l'équation $(\lambda\ A+B)x=0$ *où* x est une matrice colonne inconnue .

soit donc le système

$$\begin{array}{lcl}(\lambda-1)x^1 & + & (\lambda+1)x^2=0\\ (\lambda-1)x^1 & + & (\lambda+1)x^2=0\end{array}$$

-Pas de solutions constantes non nulles;

-Une infininité de solutions en λ :

$$(\lambda-1)(a\lambda+b)+(\lambda-1)(a'\lambda+b')=0 \Longrightarrow a=b\ et\ a'=b';$$

donc :

une solutionen λ estε

$$\text{x}(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda+1\\ -\lambda+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=x_0-\lambda x_1$$

Ainsi le degré de x(λ) est égal à ε =1 et il est minimal.

Il existe un bloc L$_\varepsilon$=L$_1$ $=[\lambda \quad 1]$ $\quad \varepsilon=1 \quad \varepsilon=2$

on a $m=n=2$, reste alors n-$\varepsilon-1=0$ colonnes et n-$\varepsilon=1$ lingne.

Chapitre 4

Application aux équations différentielles implicites (approche de F.R.GANTMACHER)

On considére l'équation différentielle implicite suivante

$$\begin{cases} Ax'(t) + Bx(t) = f(t)...............................(1) \\ x(0) = x_{0,} \quad t = 0 \end{cases}$$

avec A et B deux matrices d'ordre $m \times n$; $f(t) \equiv M_{m.n}$ et l'état x(t) est d'ordre (n,1). A est inversible sinon (1) est explicite.

On passe de l'équation (1) à l'équation (1') :

$$\begin{aligned} \tilde{A}z'(t) + \tilde{B}z(t) &= \tilde{f}(t)..........................(1') \\ z(0) &= Q^{-1}x_0 = z_0 \end{aligned}$$

où

$$\tilde{A} = PAQ; \; \tilde{B} = PBQ \;\text{ et }\; \tilde{f}(t) = Pf(t).$$

par les transformations suivantes :

a) Poser $x(t) = Qz(t)$, où Q est une matrice régulière ($detQ \neq 0$) $x(0) = Qz(0)$.

b) Multiplier à gauche les deux membres de l'équation obtenue par une matrice réguliére P ($\det P \neq 0$).

Remarque 4.0.3 *:*

Les matrices P et Q sont régulières à coefficients constants, et choisies de telle sorte que le faisceau $\lambda A + B$ a la forme quasi diagonale du à KRONECKER-WEIERSTRASS.

On considère par la suite l'équation :

$$\begin{aligned} \lambda(\tilde{A}+\tilde{B})z(t) &= \tilde{f}(t) \text{..........................(2)} \\ z(o) &= z_0 \text{ où jouera le rôle de la dérivée.} \end{aligned}$$

(2) équivaut donc à :

$$\begin{bmatrix} 0 \rfloor & & & & \\ & L_\varepsilon \rfloor & & & \\ & & L_\eta \rfloor & & \\ & & & N^{(u)} \rfloor & \\ & & & & J+\lambda I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{(1)} \\ z^{(2)} \\ z^{(3)} \\ z^{(4)} \\ z^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}^{(1)} \\ \tilde{f}^{(2)} \\ \tilde{f}^{(3)} \\ \tilde{f}^{(4)} \\ \tilde{f}^{(5)} \end{bmatrix}$$

où le z$^{(i)}$, $\tilde{f}^{(i)}, i = \overline{1,5}$ sont des vecteurs aux blocs correspondant chacun à un bloc de la matrice de KRONECKER-WEIERSTRASS et avec :

$$\begin{aligned} z^{(1)} &= z^1 = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_g \end{bmatrix}; \\ z^{(2)} &= \begin{bmatrix} z^2 \\ \vdots \\ z^{1+p-g} \end{bmatrix}; \\ z^{(3)} &= \begin{bmatrix} z^{p-g+2} \\ \vdots \\ z^{p-g+1+q-h} \end{bmatrix} \\ z^{(4)} &= \begin{bmatrix} z^{p-g+q-h+2} \\ \vdots \\ z^{p-g+q-h+1+s} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad z^{(5)} = z^\nu \quad \text{où} \quad \nu =^{p-g+q-h+\varepsilon+2} \end{aligned}$$

avec :

$$z^2 = \begin{bmatrix} z_{g+1} \\ \vdots \\ z_{\varepsilon_{g+1}}+1 \end{bmatrix}; z^3 = \begin{bmatrix} z_{\varepsilon_{g+1}}+2 \\ \vdots \\ z_{\varepsilon_{g+2}}+1 \end{bmatrix}; \text{........} \tilde{f}^{(1)} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_h \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \quad \tilde{f}^{(1)} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{h+1} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{\nu_{h+1}+1} \end{bmatrix} \qquad \text{..}$$

(3) équivaut à

$$(s)\begin{cases} 0 \quad z^{(1)} = \tilde{f}^{(1)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I); \\ L\varepsilon \quad z^{(2)} = \tilde{f}^{(2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II); \\ L_\eta \quad z^{(3)} = \tilde{f}^{(3)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (III); \\ N^{(u)} \quad z^{(4)} = \tilde{f}^{(4)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV); \\ (J+\lambda I) \quad z^{(5)} = \tilde{f}^{(5)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (v). \end{cases}$$

En écrivant (s) explicitement et afin de ne pas encombrer les notations, on utilisera dans tous les cas les symboles z et $\tilde{f}$ au lieu de $z^{(i)} = \tilde{f}^{(i)}$, $i = \overline{1,5}$.

Alors :

(I) est satisfaite si et seulement si $\tilde{f}$ est un bloc de vecteurs nuls.

(II) équivaut :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_{\varepsilon+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{f}_\varepsilon \end{bmatrix},$$

Soit donc le sous système possédant plus d'inconnues (états) que d'équations.

$$\left[\begin{array}{c} z'_1 + z_2 = \tilde{f}_1 \\ z'_2 + z_3 = \tilde{f}_2 \\ z'_3 + z_4 = \tilde{f}_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z'_\varepsilon + z_{\varepsilon+1} = \tilde{f}_\varepsilon \end{array}\right.$$

Ce qui ce traduit par l'existence d'une infinité de soluions indépendament de f(t) et quelque soit la condition initiale.

Pour obtenir les solutions, il est clair qu'il faut donner une valeur à un des inconnues. pour l'unicité. le problème est lié à la présence du bloc L_ε. pour que (1) posséde une solution unique, il faut que ce dernier soit absent (exclu).

(III) é$q u$ivaut à :

$$\left[\begin{array}{c} Z_1 = \tilde{f}_1 \\ Z\prime_2 + Z_1 = \tilde{f}_2 \\ Z\prime_3 + Z_2 = \tilde{f}_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z\prime\eta + Z_{\eta-1} = \tilde{f}_\eta \\ Z_\eta = \tilde{f}_{\eta-1} \end{array}\right.$$

Plus d'équations que d'inconnues. une contrainte sur les f(t) et leurs dérivées est imposée. sous cette contrainte, la solution existe et est unique.

soit alors,

$Z_\eta = \tilde{f}_{\eta+1}$

$Z_{\eta-1} = \tilde{f}_\eta - \tilde{f}_{\eta+1}$

....

$Z_1 = \tilde{f}_2 - \tilde{f}_3' + ... + (-1)^{\eta-1}\tilde{f}'^{\eta-1}_{\eta+1}$

il vient donc la condition de possibilité"C.P"

$\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2 + \tilde{f}_3'..... + (-1)^\eta \tilde{f}'^{\eta}_{\eta+1} = 0$ "C.P"

(IV) équivaut à :

$$\begin{bmatrix} Z_2 + Z_1 = \tilde{f}_1 : \\ Z_3 + Z_2 = \tilde{f}_2 : \\ .... \\ Z_\eta + Z_{\eta-1} = \tilde{f}_{\eta-1} : \\ Z_\eta = \tilde{f}_\eta : \end{bmatrix}$$

sous systéme de solution unique : $Z_\eta = \tilde{f}_\eta$:

$Z_{\eta-1} = \tilde{f}_{\eta-1} - \tilde{f}_\eta$

.... :

$Z_1 = \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2' + \tilde{f}_3'' + ... + (-1)\tilde{f}^{(u-1)}$

(V) équivaut à : $\begin{bmatrix} JZ + Z = \tilde{f} \\ Z(0) = Z_0 \end{bmatrix}$

.

la solution générale de ce sous système est unique et donnée par :

$$Z(t) = e^{-Jt}Z_0 + \int_0^t e^{-J(t-s)}f(s)ds.$$

D'où le

Théorème 4.0.3 *(EXISTENCE ET UNICITE)*

Le problème (1) admet une solution de la forme :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ x^{(5)}(t) \end{bmatrix}$$

si et seulement si la partie droite f (t) est indéfiniment dérivable et satisfait aux conditions suivantes :

(i)

$$f_1 = f_2 = ... = f_g = 0;$$

(ii)

$$Pf_1 - pf_2 + ... + (-1)^{\eta} pf^{\eta}_{\eta+1} = 0.$$

avec :

$$x^{(i)} = QZ^{(i)}, i = \overline{1,5}, \text{ où } \quad Z^{(i)}\text{satisfait} \quad (s)$$

P et Q sont les matrices de passage pour la forme canonique de WEIERSTRASS-KRONECKER.
(1) est supposée vraie pour t $\succeq$ 0.
La solution est unique si et seulement si de plus les blocs $L\varepsilon$ sont absents (exclus) ce qui ce traduit par la condition suivante : Ker$(\lambda A + B) = \{0\}$.

R.1 :- Si le bloc nul est absent , il n'en est pas question de la condition (i) dans le théorème.
R.2 :- Si le faisceau $\lambda A + B$ est régulier, il existe une solution unique X (t)=$\begin{bmatrix} x^4(t) \\ x^5(t) \end{bmatrix}$

sans les condition (i) et (ii), du théorème ci dessus, du fait que les blocs Lε,Lη et bloc nul sont absents (théorème 1).
R.3 : si f(t) =0 et si (1) est vérifiée à l'instant t=0, alors x(t)=0 $\forall$T $\succeq$ 0 est une solution triviale.

Exemple 4.0.2 ***(Cas particulier)***

I)

$$A \text{ et } B \in M^{(\mathbb{R})}_{2x2}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \qquad \text{donnée}$$

Supposons A non inversible.

$$\det(\lambda A + B) = \lambda^2\alpha + \lambda\beta + \gamma. \text{ (polynôme de degré 1 si } \beta \neq 0)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \alpha &= d\acute{e}tA = 0; \\ \gamma &= d\acute{e}tB \\ \beta &= d\acute{e}t([a_{i1} \;\; b_{i2}]_{i=1,2}) - d\acute{e}t([a_{i2} \;\; b_{i1}]_{i=1,2}). \end{aligned}$$

Traitons le cas B inversible et $\beta \neq 0$: faisceau régulier.

Notons par :D_0^f =l'ensemble des D.E.F.

D_0^∞ =l'ensemble des D.E.i

Alors trois (03) cas se présentent :

i_1) Card $\mathrm{D}_0^f = 2$ et i_1')card $\mathrm{D}_0^\infty = 0 (ou\ \mathrm{D}_0^\infty = \emptyset)$;

i_2) Card $\mathrm{D}_0^f = 1$ et i_2')card $\mathrm{D}_0^\infty = 1$

i_3) Card $\mathrm{D}_0^f = 0$ ($\mathrm{D}_0^f = \emptyset$) et i_3') card $\mathrm{D}_0^\infty = 2$.

TABLEAU 1 :(utilisation du théoreme de Weierstrass)

CAS1 :

$$\mathrm{i}_1)+\mathrm{i}_1') \Longrightarrow \lambda\tilde{A} + \tilde{B} = \begin{bmatrix} e_1(\lambda) & 0 \\ 0 & e_1(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_0(\lambda) & 0 \\ 0 & e_0(\lambda) \end{bmatrix} .$$

CAS2 :

$$\mathrm{i}_1)+\mathrm{i}_2') \Longrightarrow \lambda\tilde{A} + \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e(\lambda) \end{bmatrix}$$

CAS3 :

$$\mathrm{i}_3)+\mathrm{i}_3') \Longrightarrow \lambda\tilde{A} + \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TABLEAU 2 :

Le cas 1 donne :$(\lambda\tilde{A}+\tilde{B})z=\tilde{f} \iff \begin{cases} e_1(\lambda)z_1=\tilde{f}_1 \\ e_2(\lambda)z_2=\tilde{f}_2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} e_1(\lambda)z_1=\tilde{f}_1 \\ e_2(\lambda)z_2=\tilde{f}_2 \end{cases}$$

Le cas 2 donne :$(\lambda\tilde{A}+\tilde{B})z=\tilde{f} \iff \begin{cases} z_1=\tilde{f}_1 \\ e(\lambda)z_2=\tilde{f}_2 \end{cases}$

Le cas 3 donne :$(\lambda\tilde{A}+\tilde{B})z=\tilde{f} \iff \begin{cases} z_1=\tilde{f}_1-\tilde{f}_2' \\ z_2=\tilde{f}_2 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} z_1=\tilde{f}_1 \\ z_2=\tilde{f}_2 \end{cases}$$

Remarque 4.0.4 *:*

Il découle les solutions de (1) par transformation inverse x=Qz.

Il) Considérons le faisceau de l'exemple 1, i.e :

$(\lambda A+B)\sim\ (\lambda\tilde{A}+\tilde{B})=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\, avec: f(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} et$

$$\mathrm{x}(0)=\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2.$$

On choisira les matrices P Q régulières et telles que le faisceau $\lambda A+B$ aura la forme quasi diagonale trouvée

$$P=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

On aura donc avec x=Qz, $(1)\iff \begin{cases} Z_1=0; \\ \lambda Z_1=Z_2'=0. \end{cases}$ soit donc :

$\mathrm{z}_2=a$ (constante), par suite $\mathrm{z}(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$; enfin:

x(t)=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}.$

variété initiale $\mathrm{D}_{0:}$

$$x(0)=\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}, donc:$$

$\mathrm{D}_0=\{(o,a)/a\in\mathbb{R}\}$ $a=\beta$ sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 4.0.5 *:*

$\mathrm{D}_0\neq X=\mathbb{R}^2$, mais pas le cas pour les équations différentielles explicites.

Chapitre 5

Forme quasi-diagonale pour des faisceaux de types $(\lambda A + B(t))$

5.1 (Généralisation du théorème de WEIERSTRASS)

On se donne l'équation implicite suivante :

$$\begin{aligned} Ax'(t) + B(t)x(t) &= f(t) \text{.............} I \\ x(o) &= x_0 \quad t \in [0, +\infty[= 1 \end{aligned}$$

et on se propose d'étudier le problème (I) en l'éxistence et l'unicité de solution par une méthode analogue à celle de F.R GANTMACHER ; tout en généralisant le théorème de WEIERSTRASS au cas de faisceaux de type $\lambda A + B(t)$.

Définition 5.1.1 *Un faisceau de matrices $(\lambda A + B(t))_{nxn}$ est appelé :*

- **proprement régulier,** si le rang r=rang $(\lambda A + B(t))$=n pour tout $t \in I$
-Il est dit **localement régulier si** $\det(\lambda A + B(t)) \neq 0, \forall t \in I \setminus \{t_i\}$.

Théorème 5.1.1 *Si le faisceau $(\lambda A + B(t))$ est proprement régulier (resp-localement régulier), alors il est équivalent (strictement) à la forme quasi-diagonale suivant :*

$$(\lambda A + B(t))diag\{\lambda I + J(t); N^{(u)}\}$$

où

$$N^{(u)} = \begin{bmatrix} N^{(u1)} & & \\ & \ddots & \\ & & N^{(us)} \end{bmatrix}$$

est le bloc des diviseurs élémentaires ; $(\lambda I + J(t))$ est le bloc de Jordan

Preuve.

Etant donné un faisceau proprement régulier (resp - localement régulier) $(\lambda A + B(t))$,

il existe alors α tel que dét$(\alpha A + B(t)) \neq 0$ pour tout t, (resp $\forall t \in I \setminus \{t_i\}$).

on pose $B_1(t) = \alpha A + B(t)$, $\quad [d\acute{e}t\ B_1(t) \neq 0]$

par la suite :

$$(\lambda A + B(t)) = B_1(t) + (\lambda - \alpha)A, \text{ pour tout } \quad t..........*$$

on multiplie (*) par $B_1^{-1}(t)$ à gauche, il vient :

$$I + B_1^{-1}(t) = B_1(t) + (\lambda - \alpha)A = I + (\lambda - \alpha)B_1^{-1}(t)A = H(t).$$

on décompose $B_1^{-1}(t)A$ en deux céllules $\{J_0(t), J_1(t)\}$ de la forme normale ;ou $J_0(t)$ =matrice de JORDAN

nilpotente , pour tout t (resp.$\forall t \in I \setminus \{t_i\}$); et $J_1(t)$ est tel que dét $(J_1(t) \neq 0$, pour tout t (resp.$\forall t \in I \setminus \{t_i\}$);

D'ou

$$H(t) = I + (\lambda - \alpha)\{J_0(t), J_1(t)\}$$

soit encore

$$\begin{aligned} H(t) &= I - \alpha J_0(t) + \lambda J_0(t), I J_1(t) - \lambda J_1(t)\} \\ &= \{A(t), B(t)\ \} \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} A(t) &= I - \alpha J_0(t) + \lambda J_0(t); \\ B(t) &= I - \alpha J_1(t) + \lambda J_1(t). \end{aligned}$$

on multiplie ensuite le bloc $A(t)$ par $(I - \alpha J_0(t))^{-1}$et le bloc $B(t)$ par $J^{-1}(t)$; $H(t)$ prend donc la forme :

$$H(t) = \{I + \lambda J_0(t), \lambda I + J(t)\}$$

où

$$\hat{J}_0(t) = (I - \alpha J_0(t))^{-1} J_0(t)$$

est nilpotente car $J_0(t)$ l'est

le bloc $I + \lambda \hat{J}_0(t)$ est équivalent au bloc

$$N^{(u)} = \begin{bmatrix} N^{(u_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & N^{(u_s)} \end{bmatrix}$$

Qu on obtient par une transformation semblable c'est à dire ,il existe P(t) et Q(t) ou :dét $P(t) \neq 0$dét $Q(t) \neq 0$

et tel que :

$$I + \lambda \hat{J}_0(t) = P(t)(I^{(u)} + \lambda H^{(u)})Q(t).$$

□

Remarque 5.1.1 *Ce théorème reste valable pour les faisceaux de type $\lambda A(t) + B(t)$.*

5.1.1 APPLICATION A L'EQUATION (I) :[3]

Par application du théorème ci-dessus, (I) sera équivalent à :

$(II) : \begin{cases} (\lambda \tilde{A} + \tilde{B}(t)) = f(t), \\ Z(0) = Z_0 = Q^{-1}(t) x_0 \end{cases}$

avec :

$$\begin{aligned} x(t) &= Q(t)Z(t); & \det P(t) \neq 0 \\ \tilde{f}(t) &= P(t)f(t); & \text{ou} \\ \tilde{A} &= P(t)AQ(t) & \det Q(t) \neq 0 \\ \tilde{B}(t) &= P(t)B(t)Q(t). \end{aligned}$$

i /Les matrices $P(t)$ et $Q(t)$ sont choisies de telles sorte que le faisceau $(\lambda A + B(t))$ ait la forme quasi diagonale donnée par le théorème.

ii/Elles peuvent dans certains cas ne pas dépendre de t.

(II) équivaut à

$$\begin{bmatrix} \lambda I + J(t) = & \\ & N^{(u)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z^{(1)}(t) \\ Z^{(2)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}^{\ (1)}(t) \\ \tilde{f}^{\ (2)}(t) \end{bmatrix}$$
$$[\dim(\lambda I + J(t) = n - s]$$

Ce qui revient à :

$$\begin{aligned} \lambda I + J(t) &= Z^{(1)}(t)\tilde{f}^{(1)}(t)........................(i); \\ N^{(u)} &= Z^{(2)}(t)\tilde{f}^{(2)}(t)........................(ii) \end{aligned}$$

où

$$Z^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} Z_1(t) \\ \vdots \\ Z_{n-s}(t) \end{bmatrix}$$

et

$$Z^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} Z^{n-s+1}(t) \\ \vdots \\ Z^{s}(t) \end{bmatrix}$$

Afin de ne pas encombrer les notations, étudions le problème (ii) (explicitement) i.e :

$$N^{(u)}Z(t) = \tilde{f}(t)$$
$$\text{(ii) équivaut} \quad : \quad \begin{cases} N^{(u)}Z^{n-s+1}(t)\tilde{f}^{n-s+1}(t).....(1) \\ ----------- \qquad \vdots \\ ----------- \qquad \vdots \\ N^{(u)}Z^{s}(t) = \tilde{f}^{s}(t).........(s) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{f}_u \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 + \acute{Z}_2 = \tilde{f}_1 \\ ----------- \\ ----------- \\ Z_u = \tilde{f}_u \end{cases}$$

Supposons que f(t) est indéfiniment dérivable, par conséquent :

$$\begin{aligned}
Z_u &= \tilde{f}_u \\
Z_{u-1} &= \tilde{f}_{u-1} - \tilde{f}'_u \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Z_1 &= \tilde{f}_1 - \tilde{f}'_2 + \tilde{f}''_3 - \ldots\ldots + (-1)^{u-1}\tilde{f}_u(^{u-1}).
\end{aligned}$$

De plus on a : $(\lambda I + J(t))Z^{(1)}(t) = \tilde{f}^{(1)}(t)$.

Théorème 5.1.2 *: [3] Le problème (I) admet une solution unique de la forme :*

$$X(t) = \begin{bmatrix} X^{(1)}(t) \\ X^{(2)}(t) \end{bmatrix} = Q(t) \begin{bmatrix} Z^{(1)}(t) \\ Z^{(2)}(t) \end{bmatrix}$$

où $Z^{(1)}(t)$ est la solution de l'équation (i).

f(t) est indéfiniment dérivable.

Exemple 5.1.1 *: On se donne :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & t \end{bmatrix} \quad et \quad f(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\lambda A + B(t) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 \\ 0 & t \end{bmatrix} .$$

d'où $\det(\lambda A + B(t)) = t(\lambda + 1)$, *le faisceau est donc régulier pour* $t \neq 0$.

$$\begin{aligned}
D_2^t(\lambda) &= t(\lambda+1); & i_1^t(\lambda) = t(\lambda+1;) \\
D_1^t(\lambda) &= 1; & \text{D'où :} \\
D_0^t &= 1. & i_2^t(\lambda) = 1. \\
\text{Ainsi} \quad D.E.F &= (\lambda+1)
\end{aligned}$$

par la suite, on considère le faisceau :

$$\lambda A + \mu B(t) = \begin{bmatrix} \lambda + \mu & -\mu \\ 0 & \mu t \end{bmatrix}$$

Soit donc,

$$\begin{aligned} d\acute{e}t(\lambda A + \mu B(t)) &= t\mu^2(\lambda/\mu + 1) \\ D_2^t(\lambda, \mu) &= t\mu^2(\lambda/\mu + 1) \quad ; D_1^t(\lambda, \mu) = \mu \qquad et\ D_0^t(\lambda, \mu) = 1. \end{aligned}$$

par conséquent, les polynômes invariants sont :

$$\begin{aligned} i_2^t(\lambda, \mu) &= \mu t(\lambda/\mu + 1) \\ i_1^t(\lambda, \mu) &= \mu \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lambda \tilde{A} + \tilde{B}(t) = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1/t \\ 0 & 1/t \end{bmatrix} \quad et \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(I) \iff \left[\begin{array}{c} Z_1'(t) + Z_1(t) = 0 \\ Z_2(t) = 0 \end{array} \right. \implies \left[\begin{array}{c} Z_1(t) = e^{-t}\alpha \\ Z_2(t) = 0 \end{array} \right.$$

où $\alpha = Z_1(0) = Q^{-1}x_1(o) = Q^{-1}x_0$

La solution est alors : $x(t) = \begin{bmatrix} \alpha e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}.$

Methode directe :

$$Ax'(t) + B(t)x(t) = 0 \iff \left[\begin{array}{c} x_1' + x_1 + x_2 = 0 \\ tx_2 = 0 \end{array} \right.$$

Pour $t \neq 0$, $x_2(t) = 0$; *soit donc* $x_1(t) = \alpha e^{-t} x(t) = \begin{matrix} \alpha e^{-t} \\ 0 \end{matrix}$

Les système singuliers sont d'une classe importante de systèmes dynamiques et sont consitités d'un certain nombre de composantes interconnectées les unes aux antres selon une structure déterminée. Dans le but de comprendre et maîtriser ces systèmes, il convient alors de leur attribuer des représentations (modèles) mathématiques. Dans un premier temps, on a eu recours à des modèles standards pour ensuite étudier le cas singulier. On a fait appel dans une étape préliminaire à la notion de la transformée de Laplace pour une analyse et une résolution des systèmes

Notre intérêt a porté sur l'aspect matriciel pour une profonde utilisation de deux grands théorèmes : WEIERSTRASS et KRONECKER.

cela pour une résolution de cette classe de systèmes.

Dans le dernier chapitre, nous avons mis en évidence la classe des systèmes à temps variables.

Pour se faire, une extension des deux théorèmes de WEIERSTRASS et de KRONECKER pour cette classe a été dérivée.

Enfin, nous avons terminé notre travail par la traditionnelle conclusion.

Bibliographie

[1] F. R. Gantmacher " Théorie des matrices" Tome 1. Donod, 1965.

[2] F. R. Gantmacher " Théorie des matrices" Tome 2. Donod, 1965.

[3] D. Bouagada " Sur l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles implicites" 1994.

[4] T.Kaczorek, Positive linear systems and their relationship with electrical circuits, XX-SPETO : 33-41. 1997.

[5] T.Kaczorek, Positive 1D and 2D systems, Springer Verlag, Berlin, Academy 2002. 431 pages.

[6] F.L. Lewis, Descriptor systems : Decomposition into forward and backward subsystems IEEE, Trans. Automat. Control 29 : (1984), pp. 167-170.

[7] D. Cobb,Singular control systems (Lecture Note in Control and Information Sciences) Springer-Verlag , 1989.

[8] F.L. Lewis and B.G. Mertzios, On the analysis of discrete linear time-invariant singular systems, IEEE, Trans. Automat. Control Vol35, Nr4, April 1990.

[9] B.G. Mertzios and F.L. Lewis,Fundamental matrix of discrete singular systems. Circuits syst., signal processing , 8 (3) 341-355,1989.

[10] N.J. Rose, The laurent expansion of generalized resolvent with some applications, SIAM J. Appl . Math. Anal., Vol.9, pp. 751-758, Aug.1978.

[11] F.L, Lewis, Adjoint matrix, Cayley-Hamilton theorem and Fadeev's method for the matrix pencil (sE -A), in proc. 22nd IEEE, Conf. Decision Control, San Antonio,TX, 1983, pp. 1282-1288.

[12] C.E. Langenhop, Controllability and Stabliization of regular singular linear systems with constant coefficients, Dept. Math., Southern Illiois Univ., Carbondale, Dec .6,1979.

[13] T. Kaczorek, Reachability and Controllability of weakly positive singular descrete linear systems, Problemy automatyki i informayki, Pol. Akad. N . pp. 101-113.

[14] S.L.Campbll, C.D. Meyor, Jr. and N.J. Rose , Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients, SIAM J. App. Math., Vol. 31 , pp 411-425, Nov.1976.

[15] T.Kaczorek, Weakly positive continuous-time linear systems, Bull. Pol. Acd.of SPA 2000.