UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

Mémoire de Master

Spécialité : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Thème :

Approche Fractionnaire en Théorie des Probabilités

Présenté par :

BOUZIANE Aboubaker El Saddik

Soutenu le 26/05/2015

Devant le Jury

Président	**Pr. MOHAMMEDI. M,**	**U. MOSTAGANEM.**
Examinateur	**Pr. FETTOUCHE.**	**U. MOSTAGANEM.**
Encadreur	**Mr. DAHMANI. Z,**	**U. MOSTAGANEM.**

Remerciments

Je remercie mes parents qui m'ont donné un grand encouragement pour mes études universitaires et pour faire ce Mémoire.
Je veux remercier aussi mes frères qui m'ont poussé pour des efforts et des conseils exceptionnels et efficaces sans oublier les aides morales.
Dans ce cadre, je veux saluer **Mr DAHMANI Zoubir** de sa compétence et sa qualification.
Je remercie également **Mr MOHAMMEDI Mustapha** et **Mr FETTOUCHE** membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail et pour leurs conseils durant la réalisation de ce mémoire.
J'ai l'honneur d'offrir ce travail mathématique à notre établissement universitaire compris les enseignants et le personnel du Département des Mathématiques.

A. BOUZIANE.

Table des matières

Résumé

Dans ce Mémoire de Master, on s'intérèsse à développer certains résultats d'ordre non entier sur les "estimations" des variables aléatoires continues avec fonction de probabilité de densité définie sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$. On généralise ainsi certains résultats classiques et d'autres résultats non classiques publiés récemment.

INTRODUCTION

Les inégalités intégrales jouent un rôle fondamental en théorie des équations et des systèmes différentielles, en probabilités et statistiques et en sciences appliquées. Cette théorie a connu un développement dans les deux derniers décénées. De plus, l'étude des inégalités de type fractionnaire a aussi une grande importance dans la théorie des équations différentielles fractionnaires et des systèmes différentielles fractionnaires.

Dans ce Mémoire, nous allons nous intéresser à une nouvelle approche probabiliste dans le cas des variables aléatoires continues.

On applique la théorie des intégrales fractionnaires de Riemann-Lioville pour établir quelques résultats sur les estimations des espérances fractionnaires, des variances fractionnaires ainsi que des moments fractionnaires d'ordres (r, α).

Nous avons choisi de structurer notre travail selon le plan suivant :

Dans le premier chapitre, nous présentons des nouvelles estimations des espérances fractionnaires et des variances fractionnaires en utilisant les intégrales de Riemann-Lioville.

Le deuxième chapitre est consacré à une généralisation des espérances et des variances fractionnaires en utilisant une fonction poids positive.

Le troisième chapitre consiste à présenter quelques estimations des moments fractionnaires d'ordres $(r > 0, \alpha > 0)$.

Dans le quatrième chapitre, nous énonçons des inégalités des moments fractionnaires d'ordres $(r > 0, \alpha > 0)$ avec poids.

Chapitre 1

Estimations Fractionnaires : Espérances, Variances

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on introduit quelques définitions des espérances et des variances relativement au intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville énoncées dans [4]. On va aussi présenter des théorèmes importants sur les espérances et les variances fractionnaires cités dans [4].

1.2 Définitions

Définition 1.2.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale fractionaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de f la fonction définie par :*

$$\begin{aligned} J_a^\alpha [f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau; \alpha > 0, a < t \leq b, \\ J_a^0 [f(t)] &= f(t), t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Propriétés : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, on a :

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+; J_a^{\alpha+\beta} [f(t)] = J_a^\alpha J_a^\beta [f(t)]$.
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+; J_a^\alpha J_a^\beta [f(t)] = J_a^\beta J_a^\alpha [f(t)]$.

On va donner quelques applications sur les probabilités et les statistiques. On commence par introduire les concepts suivants. Etant donné une variable aléatoire continue X avec une fonction de densité de probabilité (f. d. p). $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$.

On rappelle que :

$E(X) = \int_a^b t f(t) dt$,

et $\sigma^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

On introduit aussi les définitions suivantes citées dans [4] :

Définition 1.2.2 *La fonction espérance fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de la variable aléatoire continue X ayant une f. d. p. $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ est définie par :*

$$E_{X,\alpha}(t) := J_a^\alpha [t f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau f(\tau) d\tau; a < t \leq b.$$

Pour $t = b$, on donne la définition suivante :

Définition 1.2.3 *L'espérance fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de la variable aléatoire continue X ayant une f. d. p. $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ est définie par :*

$$E_{X,\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-\tau)^{\alpha-1} \tau f(\tau) d\tau.$$

Définition 1.2.4 *La fonction espérance fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de la variable aléatoire $X - E(X)$ est définie par :*

$$E_{X-E(X),\alpha}(t) := J_a^\alpha [(t - E(X)) f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau - E(X)) f(\tau) d\tau; a < t \leq b,$$

avec $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ la fonction de densité de probabilité de X.

Pour $t = b$, on a :

Définition 1.2.5 *L'espérance fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de la variable aléatoire $X - E(X)$ est définie par :*

$$E_{X-E(X),\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-\tau)^{\alpha-1} (\tau - E(X)) f(\tau) d\tau,$$

avec $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ la fonction de densité de probabilité de X.

Définition 1.2.6 *La fonction variance fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ d'une variable aléatoire continue X de f. d. p. $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ est définie par :*

$$\sigma^2_{X,\alpha}(t) := J_a^\alpha \left[(t - E(X))^2 f(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau - E(X))^2 f(\tau) d\tau; a < t \leq b.$$

Pour $t = b$, on donne la définition suivante :

Définition 1.2.7 *La variance fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ d'une variable aléatoire continue X de f. d. p. $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ est définie par :*

$$\sigma^2_{X,\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-\tau)^{\alpha-1} (\tau - E(X))^2 f(\tau) d\tau.$$

1.3 Rappels

Dans cette section, on donne deux théorèmes démontrés dans [5] qu'on utilisera dans la démonstration des résultats qui vont suivre.

Théorème 1.3.1 *Soient h et g deux fonctions intégrables sur $[0,+\infty[$ satisfaisantes $l \leq h(t) \leq L, m \leq g(t) \leq M$ telles que $l, L, m, M \in \mathbb{R}$, et soit p une fonction positive sur $[0,+\infty[$. Alors pour tout $t > 0, \alpha > 0$ on a :*

$$\left| J_a^\alpha [p(t)] J_a^\alpha [phg(t)] - J_a^\alpha [ph(t)] J_a^\alpha [pg(t)] \right| \leq \frac{1}{4} \left(J_a^\alpha [p(t)] \right)^2 (L-l)(M-m).$$

Théorème 1.3.2 *Soient h et g deux fonctions intégrables sur $[0,+\infty[$ satisfaisantes $l \leq h(t) \leq L, m \leq g(t) \leq M$ telles que $l, L, m, M \in \mathbb{R}$, et soit p une fonction positive sur $[0,+\infty[$. Alors pour tout $t > 0, \alpha > 0$ et $\beta > 0$ on a :*

$$\left(J_a^\alpha\left[p(t)\right]J_a^\beta\left[phg(t)\right]+J_a^\beta\left[p(t)\right]J_a^\alpha\left[phg(t)\right]-J_a^\alpha\left[ph(t)\right]J_a^\beta\left[pg(t)\right]-J_a^\beta\left[ph(t)\right]J_a^\alpha\left[pg(t)\right]\right)^2$$

$$\leq\left[\left(LJ_a^\alpha\left[p(t)\right]-J_a^\alpha\left[ph(t)\right]\right)\left(J_a^\beta\left[ph(t)\right]-lJ_a^\beta\left[p(t)\right]\right)+\left(J_a^\alpha\left[ph(t)\right]-lJ_a^\alpha\left[p(t)\right]\right)\left(LJ_a^\beta\left[p(t)\right]-J_a^\beta\left[ph(t)\right]\right)\right]$$

$$\times\left[\left(MJ_a^\alpha\left[p(t)\right]-J_a^\alpha\left[pg(t)\right]\right)\left(J_a^\beta\left[pg(t)\right]-mJ_a^\beta\left[p(t)\right]\right)+\left(J_a^\alpha\left[pg(t)\right]-mJ_a^\alpha\left[p(t)\right]\right)\left(MJ_a^\beta\left[p(t)\right]-J_a^\beta\left[pg(t)\right]\right)\right]$$

1.4 Résultats Fractionnaires

Dans cette section, on présente des nouveaux résultats pour les variables aléatoires continues fractionnaires de [4]. On commence par le suivant :

1.4.1 Résultat 1

Théorème 1.4.1 *Soit X une variable aléatoire continue ayant une f. d. p. $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$. Alors, pour tout $a<t\leq b,\alpha>0$, on a :*

$$\text{(a) :}\quad J_a^\alpha\left[f(t)\right]\sigma_{X,\alpha}^2(t)-\left(E_{X-E(X),\alpha}\left(t\right)\right)^2\leq\|f\|_\infty^2\left[2\frac{(t-a)^{2\alpha+2}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)\Gamma\left(\alpha+3\right)}+2a^2\frac{(t-a)^{2\alpha}}{\Gamma^2\left(\alpha+1\right)}\right]+\|f\|_\infty^2\left[\frac{1}{4}\left(t-a\right)^{2\alpha+2}+2a\frac{(t-a)^{2\alpha+1}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\right].$$

$$\text{(b) :}\ J_a^\alpha\left[f(t)\right]\sigma_{X,\alpha}^2(t)-\left(E_{X-E(X),\alpha}\left(t\right)\right)^2\leq\frac{1}{2}\frac{(b-a)^{2\alpha}}{\Gamma^2\left(\alpha\right)}.$$

Preuve. □

Partie (a) :

Soient $f\in L_\infty\left([a,b]\right),\alpha>0$. On définit la quantité suivante :

$$H\left(\tau,\rho\right)=\left(g\left(\tau\right)-g\left(\rho\right)\right)\left(h\left(\tau\right)-h\left(\rho\right)\right);\tau,\rho\in\left[a,t\right],a<t\leq b.\qquad(1.4.1)$$

On développe (1.4.1).

$$H(\tau,\rho)=g(\tau)\,h(\tau)-g(\tau)\,h(\rho)-g(\rho)\,h(\tau)+g(\rho)\,h(\rho)\,. \tag{1.4.2}$$

Soit $p:[a,b]\to\mathbb{R}^{+}$. On multiplie (1.4.2) par $\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\tau)$, $\tau\in[a,t]$ puis on intègre par rapport à τ sur $[a,t]$.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-\tau)^{\alpha-1}p(\tau)\,H(\tau,\rho)\\
=\;&\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\tau)\,g(\tau)\,h(\tau)-\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\tau)\,g(\tau)\,h(\rho)-\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\tau)\,h(\tau)\,g(\rho)\\
&+\frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\tau)\,g(\rho)\,h(\rho)\,.
\end{aligned}$$

L'intégration sur $[a,t]$ de cette dernière identité donne :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}p(\tau)\,H(\tau,\rho)\,d\tau\\
=\;&J_a^\alpha[pgh(t)]-h(\rho)\,J_a^\alpha[pg(t)]-g(\rho)\,J_a^\alpha[ph(t)]+g(\rho)\,h(\rho)\,J_a^\alpha[p(t)]\,. \qquad (1.4.3)
\end{aligned}$$

On multiplie (1.4.3) par $\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\rho)\,,\rho\in[a,t]$ puis on intègre par rapport à ρ sur $[a,t]$.

$$\begin{aligned}
&\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\rho)\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}p(\tau)\,H(\tau,\rho)\,d\tau\\
=\;&\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\rho)\,J_a^\alpha[pgh(t)]-\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\rho)\,h(\rho)\,J_a^\alpha[pg(t)]-\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\rho)\,g(\rho)\,J_a^\alpha[ph(t)]\\
&+\frac{(t-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}p(\rho)\,g(\rho)\,h(\rho)\,J_a^\alpha[p(t)]\,.
\end{aligned}$$

L'intégration sur $[a,t]$ de cette dernière identité donne :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}p(\tau)\,p(\rho)\,H(\tau,\rho)\,d\tau d\rho\\
=\;&J_a^\alpha[p(t)]\,J_a^\alpha[pgh(t)]-J_a^\alpha[ph(t)]\,J_a^\alpha[pg(t)]-J_a^\alpha[pg(t)]\,J_a^\alpha[ph(t)]+J_a^\alpha[p(t)]\,J_a^\alpha[pgh(t)]\\
=\;&2J_a^\alpha[p(t)]\,J_a^\alpha[pgh(t)]-2J_a^\alpha[pg(t)]\,J_a^\alpha[ph(t)]\,. \qquad (1.4.4)
\end{aligned}$$

On prend $p(t) = f(t), g(t) = h(t) = t - E(X), a < t \leq b$ et on remplace tout ça dans (1.4.4), on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1} f(\tau) f(\rho)(\tau-\rho)^2 d\tau d\rho \\ = \;& 2J_a^\alpha[f(t)]\, J_a^\alpha\left[f(t)(t-E(X))^2\right] - 2(J_a^\alpha[f(t)(t-E(X))])^2.\end{aligned}$$

Comme $f \in L_\infty([a,b])$, alors on a :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1} f(\tau) f(\rho)(\tau-\rho)^2 d\tau d\rho \\ \leq \;& \|f\|_\infty^2 \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}(\tau-\rho)^2 d\tau d\rho \leq \|f\|_\infty^2\left[2\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J_a^\alpha\left[t^2\right] - 2(J_a^\alpha[t])^2\right].\end{aligned}$$

De plus,

$$J_a^\alpha\left[f(t)(t-E(X))^2\right] = \sigma_{X,\alpha}^2(t),\ \left(J_a^\alpha[f(t)(t-E(X))]\right)^2 = (E_{X-E(X),\alpha}(t))^2.$$

Donc,

$$J_a^\alpha[f(t)]\,\sigma_{X,\alpha}^2(t) - (E_{X-E(X),\alpha}(t))^2 \leq \|f\|_\infty^2\left[\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J_a^\alpha\left[t^2\right] - (J_a^\alpha[t])^2\right].$$

On calcule $J_a^\alpha[t^2]$ et $J_a^\alpha[t]$.

On commence par calculer $J_a^\alpha[t]$.

On sait que :

$$J_a^\alpha[(t-a)] = J_a^\alpha[t] - aJ_a^\alpha[1] = \frac{1}{2}(t-a)^{\alpha+1}.$$

On obtient alors :

$$J_a^\alpha[t] = \frac{1}{2}(t-a)^{\alpha+1} + a\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

De même on calcule $J_a^\alpha[t^2]$, on a :

$$J_a^\alpha\left[(t-a)^2\right] = J_a^\alpha\left[t^2\right] + a^2 J_a^\alpha[1] - 2aJ_a^\alpha[t] = 2\frac{(t-a)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)}.$$

On déduit que :

$$J_a^{\alpha}\left[t^2\right] = 2\frac{(t-a)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} + a^2\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + a\,(t-a)^{\alpha+1}.$$

D'où,

$$\begin{aligned} J_a^{\alpha}[f(t)]\,\sigma_{X,\alpha}^2(t) - \left(E_{X-E(X),\alpha}(t)\right)^2 &\leq \|f\|_{\infty}^2\left[2\frac{(t-a)^{2\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\alpha+3)} + a\frac{(t-a)^{2\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} + a^2\frac{(t-a)^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)}\right] \\ &\quad + \|f\|_{\infty}^2\left[\frac{1}{4}(t-a)^{2\alpha+2} + a^2\frac{(t-a)^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)} + a\frac{(t-a)^{2\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]. \end{aligned}$$

Partie (b) :

Soient $\tau, \rho \in [a,t]$, $a < t \leq b$, on a :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1} f(\tau)\, f(\rho)\,(\tau-\rho)^2\, d\tau d\rho \\ \leq\ &\sup_{\tau,\rho\in[a,t]} |(\tau-\rho)|^2\,\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1} f(\tau)\, f(\rho)\, d\tau d\rho = (t-a)^2\,(J_a^{\alpha}[f(t)])^2. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} 2J_a^{\alpha}[f(t)]\, J_a^{\alpha}\left[f(t)\,(t-E(X))^2\right] - 2(J_a^{\alpha}[f(t)(t-E(X)])^2 &\leq (t-a)^2\,(J_a^{\alpha}[f(t)])^2 \\ J_a^{\alpha}[f(t)]\,\sigma_{X,\alpha}^2(t) - (E_{X-E(X),\alpha}(t))^2 &\leq \frac{1}{2}(t-a)^2\,(J_a^{\alpha}[f(t)])^2. \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

De plus, on a

$$(J_a^{\alpha}[f(t)])^2 \leq \frac{(b-a)^{2(\alpha-1)}}{\Gamma^2(\alpha)}.$$

Comme

$$(t-a)^2 \leq (b-a)^2,$$

on aura donc

$$(t-a)^2\left(J_a^\alpha\left[f(t)\right]\right)^2 \leq (b-a)^2\,\frac{(b-a)^{2(\alpha-1)}}{\Gamma^2(\alpha)} = \frac{(b-a)^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha)}.$$

D'où,

$$J_a^\alpha\left[f(t)\right]\sigma_{X,\alpha}^2(t) - \left(E_{X-E(X),\alpha}(t)\right)^2 \leq \frac{1}{2}\frac{(b-a)^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha)}.$$

On va proposer une autre généralisation du théorème 3.1 de [4].

1.4.2 Résultat 2

Théorème 1.4.2 *Soit X une variable aléatoire continue ayant une f. d. p. $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$. Alors, pour tout $a<t\leq b, \alpha>0$ et $\beta>0$, on a*

$$\begin{aligned}
& J_a^\alpha\left[f(t)\right]\sigma_{X,\beta}^2(t) + J_a^\beta\left[f(t)\right]\sigma_{X,\alpha}^2(t) - 2\left(E_{X-E(X),\alpha}(t)\right)\left(E_{X-E(X),\beta}(t)\right) \\
\leq\ & \|f\|_\infty^2\left[2\frac{(t-a)^{\alpha+\beta+2}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+3)} + 2\frac{(t-a)^{\alpha+\beta+2}}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+3)} - \frac{1}{2}(t-a)^{\alpha+\beta+2}\right].
\end{aligned}$$

On a aussi

$$J_a^\alpha\left[f(t)\right]\sigma_{X,\beta}^2(t) + J_a^\beta\left[f(t)\right]\sigma_{X,\alpha}^2(t) - 2\left(E_{X-E(X),\alpha}(t)\right)\left(E_{X-E(X),\beta}(t)\right) \leq \frac{(b-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.$$

pour tout $a<t\leq b, \alpha>0$ et $\beta>0$.

Preuve. □

On commence par démontrer la première inégalité.

Soient $a<t\leq b, \alpha>0, \beta>0,\ f\in L_\infty([a,b])$.

On multiplie (1.4.3) par $\frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}p(\rho),\ \rho\in[a,t]$ puis on intègre par rapport à ρ sur $[a,t]$.

$$\begin{aligned}
& \frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}p(\rho)\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}p(\tau)\,H(\tau,\rho)\,d\tau \\
=\ & \frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}p(\rho)J_a^\alpha\left[pgh(t)\right] - \frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}p(\rho)h(\rho)J_a^\alpha\left[pg(t)\right] - \frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}p(\rho)g(\rho)J_a^\alpha\left[ph(t)\right] \\
& + \frac{(t-\rho)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}p(\rho)g(\rho)h(\rho)J_a^\alpha\left[p(t)\right]. \qquad (1.4.6)
\end{aligned}$$

L'intégration nous donne :

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}p(\tau)p(\rho)H(\tau,\rho)\,d\tau d\rho$$

$$= J_a^\alpha[p(t)]J_a^\beta[pgh(t)] + J_a^\beta[p(t)]J_a^\alpha[pgh(t)] - J_a^\alpha[ph(t)]J_a^\beta[pg(t)] - J_a^\beta[ph(t)]J_a^\alpha[pg(t)] \tag{1.4.7}$$

Dans (1.4.7), on prend $p(t) = f(t), g(t) = h(t) = t - E(X), a < t \leq b$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}f(\tau)f(\rho)(\tau-\rho)^2\,d\tau d\rho \\
= \;& J_a^\alpha[f(t)]J_a^\beta\left[f(t)(t-E(X))^2\right] + J_a^\beta[f(t)]J_a^\alpha\left[f(t)(t-E(X))^2\right] \\
& -2J_a^\alpha[f(t)(t-E(X))]J_a^\beta[f(t)(t-E(X))].
\end{aligned}$$

On remarque aussi qu'on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}f(\tau)f(\rho)(\tau-\rho)^2\,d\tau d\rho \\
\leq \;& \|f\|_\infty^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}(\tau-\rho)^2\,d\tau d\rho \\
\leq \;& \|f\|_\infty^2\left[\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J_a^\beta\left[t^2\right] + \frac{(t-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}J_a^\alpha\left[t^2\right] - 2J_a^\alpha[t]J_a^\beta[t]\right].
\end{aligned}$$

Comme

$$J_a^\beta\left[f(t)(t-E(X))^2\right] = \sigma_{X,\beta}^2(t), J_a^\beta[f(t)(t-E(X))] = E_{X-E(X),\beta}(t),$$

on obtient donc

$$\begin{aligned}
& J_a^\alpha[f(t)]\sigma_{X,\beta}^2(t) + J_a^\beta[f(t)]\sigma_{X,\alpha}^2(t) - 2(E_{X-E(X),\alpha}(t))(E_{X-E(X),\beta}(t)) \\
\leq \;& \|f\|_\infty^2\left[\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J_a^\beta\left[t^2\right] + \frac{(t-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}J_a^\alpha\left[t^2\right] - 2J_a^\alpha[t]J_a^\beta[t]\right].
\end{aligned}$$

De plus, on sait que :

$$J_a^{\alpha}\left[t^2\right]=2\frac{(t-a)^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)}+a^2\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+a\,(t-a)^{\alpha+1},$$

$$J_a^{\beta}\left[t^2\right]=2\frac{(t-a)^{\beta+2}}{\Gamma(\beta+3)}+a^2\frac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}+a\,(t-a)^{\beta+1},$$

$$J_a^{\alpha}[t]=\frac{1}{2}(t-a)^{\alpha+1}+a\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

et

$$J_a^{\beta}[t]=\frac{1}{2}(t-a)^{\beta+1}+a\frac{(t-a)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}&J_a^{\alpha}[f(t)]\,\sigma^2_{X,\beta}(t)+J_a^{\beta}[f(t)]\,\sigma^2_{X,\alpha}(t)-2\left(E_{X-E(X),\alpha}(t)\right)\left(E_{X-E(X),\beta}(t)\right)\\ \leq\ &\|f\|_\infty^2\left[2\frac{(t-a)^{\alpha+\beta+2}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+3)}+2\frac{(t-a)^{\alpha+\beta+2}}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+3)}-\frac{1}{2}(t-a)^{\alpha+\beta+2}\right].\end{aligned}$$

On passe maintenant à démontrer la deuxième inégalité.

On utilise le fait que $\sup\limits_{\tau,\rho\in[a,t]}\left|(\tau-\rho)\right|^2=(t-a)^2$.

$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_a^t\int\limits_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}f(\tau)\,f(\rho)\,(\tau-\rho)^2\,d\tau d\rho$

$\leq\sup\limits_{\tau,\rho\in[a,t]}\left|(\tau-\rho)\right|^2\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int\limits_a^t\int\limits_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}f(\tau)f(\rho)d\tau d\rho$

$\leq(t-a)^2\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\,d\tau\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int\limits_a^t(t-\rho)^{\beta-1}f(\rho)\,d\rho\leq(t-a)^2J_a^{\alpha}[f(t)]\,J_a^{\beta}[f(t)].$

Donc,

$$J_a^{\alpha}[f(t)]\,\sigma^2_{X,\beta}(t)+J_a^{\beta}[f(t)]\,\sigma^2_{X,\alpha}(t)-2(E_{X-E(X),\alpha}(t))(E_{X-E(X),\beta}(t))\leq(t-a)^2J_a^{\alpha}[f(t)]\,J_a^{\beta}[f(t)].$$

De plus, on a

$$J_a^{\alpha}[f(t)]\leq\frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

et

$$J_a^{\beta}\left[f(t)\right] \leq \frac{(b-a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}.$$

Donc,

$$(t-a)^2 J_a^{\alpha}\left[f(t)\right] J_a^{\beta}\left[f(t)\right] \leq (b-a)^2 \frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(b-a)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \frac{(b-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.$$

D'où,

$$J_a^{\alpha}\left[f(t)\right] \sigma_{X,\beta}^2(t) + J_a^{\beta}\left[f(t)\right] \sigma_{X,\alpha}^2(t) - 2\left(E_{X-E(X),\alpha}(t)\right)\left(E_{X-E(X),\beta}(t)\right) \leq \frac{(b-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.$$

1.4.3 Résultat 3

Théorème 1.4.3 *Soit f une f. d. p d'une variable aléatoire continue X sur $[a,b]$. Pour tout $a < t \leq b, \alpha > 0$, on a :*

$$J_a^{\alpha}\left[f(t)\right] \sigma_{X,\alpha}^2(t) - \left(E_{X-E(X),\alpha}(t)\right)^2 \leq \frac{1}{4} \frac{(b-a)^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha)}.$$

Preuve. □

Soient $\alpha > 0, a < t \leq b, l \leq h(t) \leq L$ et $m \leq g(t) \leq M$ telles que $l, L, m, M \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left|J_a^{\alpha}\left[p(t)\right] J_a^{\alpha}\left[phg(t)\right] - J_a^{\alpha}\left[ph(t)\right] J_a^{\alpha}\left[pg(t)\right]\right| \leq \frac{1}{4}\left(J_a^{\alpha}\left[p(t)\right]\right)^2 (L-l)(M-m).$$

Dans cette dernière inégalités, on prend $h(t) = g(t), a < t \leq b$, on aura.

$$\left|J_a^{\alpha}\left[p(t)\right] J_a^{\alpha}\left[pg^2(t)\right] - \left(J_a^{\alpha}\left[pg(t)\right]\right)^2\right| \leq \frac{1}{4}\left(J_a^{\alpha}\left[p(t)\right]\right)^2 (M-m)^2. \tag{1.4.8}$$

Maintenant, on prend $p(t) = f(t), g(t) = t - E(X), a < t \leq b$, on obtient :

$$\left|J_a^{\alpha}\left[f(t)\right] J_a^{\alpha}\left[f(t)(t-E(X))^2\right] - \left(J_a^{\alpha}\left[f(t)(t-E(X))\right]\right)^2\right| \leq \frac{1}{4}\left(J_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right)^2 (M-m)^2.$$

On pose $M = b - E(X), m = a - E(X)$, on obtient :

$$0 \leq J_a^{\alpha}\left[f(t)\right] J_a^{\alpha}\left[f(t)(t-E(X))^2\right] - \left(J_a^{\alpha}\left[f(t)(t-E(X))\right]\right)^2 \leq \frac{1}{4}\left(J_a^{\alpha}\left[f(t)\right]\right)^2 (b-a)^2.$$

Comme

$$J_a^\alpha\left[f(t)\right] \leq \frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

alors

$$\left(J_a^\alpha\left[f(t)\right]\right)^2 \leq \frac{(b-a)^{2(\alpha-1)}}{\Gamma^2(\alpha)}.$$

Donc

$$\frac{1}{4}\left(J_a^\alpha\left[f(t)\right]\right)^2(b-a)^2 \leq \frac{1}{4}\frac{(b-a)^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha)}.$$

D'où,

$$J_a^\alpha\left[f(t)\right]\sigma_{X,\alpha}^2(t) - \left(E_{X-E(X),\alpha}(t)\right)^2 \leq \frac{1}{4}\frac{(b-a)^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha)}.$$

1.4.4 Résultat 4

Théorème 1.4.4 *Soit f une f. d. p d'une variable aléatoire continue X sur $[a,b]$. Pour tout $a<t\leq b, \alpha>0, \beta>0$, on a :*

$$\begin{aligned} & J_a^\alpha\left[f(t)\right]\sigma_{X,\beta}^2(t) + J_a^\beta\left[f(t)\right]\sigma_{X,\alpha}^2(t) + 2\left(a-E(X)\right)\left(b-E(X)\right)J_a^\alpha\left[f(t)\right]J_a^\beta\left[f(t)\right] \\ \leq\ & (a+b-2E(X))\left(J_a^\alpha\left[f(t)\right]\left(E_{X-E(X),\beta}(t)\right) + J_a^\beta\left[f(t)\right]\left(E_{X-E(X),\alpha}(t)\right)\right). \end{aligned}$$

Preuve. $\square$

Soient $\alpha > 0, \beta > 0, a < t \leq b, p : [a,b] \to \mathbb{R}^{+}$ et soient $l \leq h(t) \leq L, m \leq g(t) \leq M$ telles que $l, L, m, M \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left(J_a^{\alpha}[p(t)]\,J_a^{\beta}[phg(t)] + J_a^{\beta}[p(t)]\,J_a^{\alpha}[phg(t)] - J_a^{\alpha}[ph(t)]\,J_a^{\beta}[pg(t)] - J_a^{\beta}[ph(t)]\,J_a^{\alpha}[pg(t)]\right)^2$$

$$\leq \left[\left(LJ_a^{\alpha}[p(t)] - J_a^{\alpha}[ph(t)]\right)\left(J_a^{\beta}[ph(t)] - lJ_a^{\beta}[p(t)]\right) + \left(J_a^{\alpha}[ph(t)] - lJ_a^{\alpha}[p(t)]\right)\left(LJ_a^{\beta}[p(t)] - J_a^{\beta}[ph(t)]\right)\right]$$

$$\times \left[\left(MJ_a^{\alpha}[p(t)] - J_a^{\alpha}[pg(t)]\right)\left(J_a^{\beta}[pg(t)] - mJ_a^{\beta}[p(t)]\right) + \left(J_a^{\alpha}[pg(t)] - mJ_a^{\alpha}[p(t)]\right)\left(MJ_a^{\beta}[p(t)] - J_a^{\beta}[pg(t)]\right)\right] \tag{1.4.9}$$

On prend $h(t) = g(t), a < t \leq b$ et on remplace dans (1.4.9), on obtient :

$$\left(J_a^{\alpha}[p(t)]\,J_a^{\beta}\left[pg^2(t)\right] + J_a^{\beta}[p(t)]\,J_a^{\alpha}\left[pg^2(t)\right] - 2J_a^{\alpha}[pg(t)]\,J_a^{\beta}[pg(t)]\right)^2$$

$$\leq \left[\begin{array}{c} \left(MJ_a^{\alpha}[p(t)] - J_a^{\alpha}[pg(t)]\right)\left(J_a^{\beta}[pg(t)] - mJ_a^{\beta}[p(t)]\right) \\ +\left(J_a^{\alpha}[pg(t)] - mJ_a^{\alpha}[p(t)]\right)\left(MJ_a^{\beta}[p(t)] - J_a^{\beta}[pg(t)]\right) \end{array}\right]^2. \tag{1.4.10}$$

On pose $p(t) = f(t), g(t) = t - E(X), a < t \leq b$ et on remplace dans (1.4.10).

$$\left[\begin{array}{c} J_a^{\alpha}[f(t)]\,J_a^{\beta}[f(t)(t-E(X))^2] + J_a^{\beta}[f(t)]\,J_a^{\alpha}[f(t)(t-E(X))^2] \\ -2J_a^{\alpha}[f(t)(t-E(X))]\,J_a^{\beta}[f(t)(t-E(X))] \end{array}\right]^2$$

$$\leq \left[\begin{array}{c} \left(MJ_a^{\alpha}[f(t)] - J_a^{\alpha}[f(t)(t-E(X))]\right)\left(J_a^{\beta}[f(t)(t-E(X))] - mJ_a^{\beta}[f(t)]\right) \\ +\left(J_a^{\alpha}[f(t)(t-E(X))] - mJ_a^{\alpha}[f(t)]\right)\left(MJ_a^{\beta}[f(t)] - J_a^{\beta}[f(t)(t-E(X))]\right) \end{array}\right]^2,$$

ce qui donne

$$\begin{array}{c} J_a^{\alpha}[f(t)]\,J_a^{\beta}[f(t)(t-E(X))^2] + J_a^{\beta}[f(t)]\,J_a^{\alpha}[f(t)(t-E(X))^2] \\ -2J_a^{\alpha}[f(t)(t-E(X))]\,J_a^{\beta}[f(t)(t-E(X))] \end{array}$$

$$\leq \begin{array}{c} \left(MJ_a^\alpha\left[f(t)\right]-J_a^\alpha\left[f(t)(t-E(X))\right]\right)\left(J_a^\beta\left[f(t)(t-E(X))\right]-mJ_a^\beta\left[f(t)\right]\right) \\ +\left(J_a^\alpha\left[f(t)(t-E(X))\right]-mJ_a^\alpha\left[f(t)\right]\right)\left(MJ_a^\beta\left[f(t)\right]-J_a^\beta\left[f(t)(t-E(X))\right]\right) \end{array}. \tag{1.4.11}$$

On développe (1.4.11), on obtient :

$$\begin{aligned} & J_a^\alpha\left[f(t)\right]J_a^\beta\left[f(t)(t-E(X))^2\right]+J_a^\beta\left[f(t)\right]J_a^\alpha\left[f(t)(t-E(X))^2\right] \\ \leq\ & M\left(J_a^\alpha\left[f(t)\right]\left(E_{X-E(X),\beta}\left(t\right)\right)+J_a^\beta\left[f(t)\right]\left(E_{X-E(X),\alpha}\left(t\right)\right)\right) \\ & +m\left(J_a^\alpha\left[f(t)\right]\left(E_{X-E(X),\beta}\left(t\right)\right)+J_a^\beta\left[f(t)\right]\left(E_{X-E(X),\alpha}\left(t\right)\right)\right)-2mMJ_a^\alpha\left[f(t)\right]J_a^\beta\left[f(t)\right]. \end{aligned} \tag{1.4.12}$$

Dans (1.4.12), on prend $M=b-E(X), m=a-E(X)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & J_a^\alpha\left[f(t)\right]J_a^\beta\left[f(t)(t-E(X))^2\right]+J_a^\beta\left[f(t)\right]J_a^\alpha\left[f(t)(t-E(X))^2\right] \\ \leq\ & (b-E(X))\left(J_a^\alpha\left[f(t)\right]\left(E_{X-E(X),\beta}\left(t\right)\right)+J_a^\beta\left[f(t)\right]\left(E_{X-E(X),\alpha}\left(t\right)\right)\right) \\ & +(a-E(X))\left(J_a^\alpha\left[f(t)\right]\left(E_{X-E(X),\beta}\left(t\right)\right)+J_a^\beta\left[f(t)\right]\left(E_{X-E(X),\alpha}\left(t\right)\right)\right) \\ & -2\left(a-E(X)\right)\left(b-E(X)\right)J_a^\alpha\left[f(t)\right]J_a^\beta\left[f(t)\right]. \end{aligned}$$

D'où, on oura :

$$\begin{aligned} & J_a^\alpha\left[f(t)\right]\sigma_{X,\beta}^2\left(t\right)+J_a^\beta\left[f(t)\right]\sigma_{X,\alpha}^2\left(t\right)+2\left(a-E(X)\right)\left(b-E(X)\right)J_a^\alpha\left[f(t)\right]J_a^\beta\left[f(t)\right] \\ \leq\ & (a+b-2E(X))\left(J_a^\alpha\left[f(t)\right]\left(E_{X-E(X),\beta}\left(t\right)\right)+J_a^\beta\left[f(t)\right]\left(E_{X-E(X),\alpha}\left(t\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Chapitre 2

D'autres Résultats Avec Poids

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on donne des résultats fractionnaires qui généralisent les théorèmes de [4] en utilisant une fonction poids positive .

2.2 Résultats

On commence par présenter et démontrer le résultat suivant :

2.2.1 Résultat 1

Théorème 2.2.1 *Soit X une variable aléatoire continue ayant une f. d. p. $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$, $q:[a,b]\to\mathbb{R}^+$. Alors, pour tout $a<t\leq b,\alpha>0$ on a.*

$$\begin{aligned}
&(a) \quad : \quad J_a^\alpha\left[qf(t)\right]J_a^\alpha\left[qf(t)(t-E(X))^2\right]-\left(J_a^\alpha\left[qf(t)(t-E(X))\right]\right)^2\\
&\leq \quad \|f\|_\infty^2\left[J_a^\alpha\left[q(t)\right]J_a^\alpha\left[q(t)t^2\right]-\left(J_a^\alpha\left[q(t)t\right]\right)^2\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(b) \quad : \quad J_a^\alpha\left[qf(t)\right]J_a^\alpha\left[qf(t)(t-E(X))^2\right]-\left(J_a^\alpha\left[qf(t)(t-E(X))\right]\right)^2\\
&\leq \quad \frac{1}{2}(t-a)^2\left(J_a^\alpha\left[qf(t)\right]\right)^2.
\end{aligned}$$

Preuve. □

Partie(a) :

Soient $q:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^{+};\tau,\rho\in[a,t],a<t\leq b,f\in L_{\infty}([a,b])$.

On prend $p(t)=q(t)f(t),g(t)=h(t)=t-E(X),a<t\leq b$ et on remplace dans (1.4.4), on obtient.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma^{2}(\alpha)}\int_{a}^{t}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}q(\tau)f(\tau)q(\rho)f(\rho)(\tau-\rho)^{2}d\tau d\rho\\ =\;&2J_{a}^{\alpha}[qf(t)]J_{a}^{\alpha}\left[qf(t)(t-E(X))^{2}\right]-2(J_{a}^{\alpha}[qf(t)(t-E(X))])^{2}.\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma^{2}(\alpha)}\int_{a}^{t}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}q(\tau)f(\tau)q(\rho)f(\rho)(\tau-\rho)^{2}d\tau d\rho\\ \leq\;&\|f\|_{\infty}^{2}\frac{1}{\Gamma^{2}(\alpha)}\int_{a}^{t}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}q(\tau)q(\rho)(\tau-\rho)^{2}d\tau d\rho\\ \leq\;&\|f\|_{\infty}^{2}\left[2J_{a}^{\alpha}[q(t)]J_{a}^{\alpha}\left[q(t)t^{2}\right]-2(J_{a}^{\alpha}[q(t)t])^{2}\right].\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}&J_{a}^{\alpha}[qf(t)]J_{a}^{\alpha}\left[qf(t)(t-E(X))^{2}\right]-(J_{a}^{\alpha}[qf(t)(t-E(X))])^{2}\\ \leq\;&\|f\|_{\infty}^{2}\left[J_{a}^{\alpha}[q(t)]J_{a}^{\alpha}\left[q(t)t^{2}\right]-(J_{a}^{\alpha}[q(t)t])^{2}\right].\end{aligned}$$

Partie (b) :

Soient $\tau,\rho\in[a,t],a<t\leq b,q:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^{+}$. On a :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma^{2}(\alpha)}\int_{a}^{t}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}q(\tau)f(\tau)q(\rho)f(\rho)(\tau-\rho)^{2}d\tau d\rho\\ \leq\;&\sup_{\tau,\rho\in[a,t]}|(\tau-\rho|^{2}\frac{1}{\Gamma^{2}(\alpha)}\int_{a}^{t}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1}q(\tau)f(\tau)q(\rho)f(\rho)d\tau d\rho\end{aligned}$$

$$= \sup_{\tau,\rho\in[a,t]} |(\tau-\rho)|^2 \left(J_a^\alpha [qf(t)]\right)^2.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & J_a^\alpha [qf(t)]\, J_a^\alpha \left[qf(t)(t-E(X))^2\right] - \left(J_a^\alpha [qf(t)(t-E(X))]\right)^2 \\ \leq\ & \frac{1}{2}(t-a)^2 \left(J_a^\alpha [qf(t)]\right)^2. \end{aligned}$$

Remarque 2.2.1 *Si on prend $q(t) = 1, a < t \leq b$ dans le théorème 2.2.1 on obtient le théorème 3.1 de [4].*

2.2.2 Résultat 2

Théorème 2.2.2 *Soit X une variable aléatoire continue ayant une f. d. p. $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$, $q : [a,b] \to \mathbb{R}^+$. Alors, pour tout $a < t \leq b, \alpha > 0, \beta > 0$.*

$$\begin{aligned} (a):\quad & J_a^\alpha [qf(t)]\, J_a^\beta \left[qf(t)(t-E(X))^2\right] + J_a^\beta [qf(t)]\, J_a^\alpha \left[qf(t)(t-E(X))^2\right] \\ & -2J_a^\alpha [qf(t)(t-E(X))]\, J_a^\beta [qf(t)(t-E(X))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leq\ & \|f\|_\infty^2 \left[J_a^\alpha [q(t)]\, J_a^\beta \left[q(t)t^2\right] + J_a^\beta [q(t)]\, J_a^\alpha \left[q(t)t^2\right]\right] \\ & -2\|f\|_\infty^2 J_a^\alpha [q(t)t]\, J_a^\beta [q(t)t]\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b)\quad :\quad & J_a^\alpha [qf(t)]\, J_a^\beta \left[qf(t)(t-E(X))^2\right] + J_a^\beta [qf(t)]\, J_a^\alpha \left[qf(t)(t-E(X))^2\right] \\ & -2J_a^\alpha [qf(t)(t-E(X))]\, J_a^\beta [qf(t)(t-E(X))] \\ \leq\ & (t-a)^2 J_a^\alpha [qf(t)]\, J_a^\beta [qf(t)]\,. \end{aligned}$$

Preuve. □

Partie(a) :

Soient $a < t \leq b, \alpha > 0, \beta > 0,\ f \in L_{\infty}([a,b])$.

On prend $p(t) = q(t)f(t), g(t) = h(t) = t - E(X), a < t \leq b$, puis on remplace dans (1.4.7).

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1} q(\tau)f(\tau)\,q(\rho)f(\rho)\,(\tau-\rho)^2 d\tau d\rho \\
=\ & J_a^{\alpha}[qf(t)]\,J_a^{\beta}\left[qf(t)(t-E(X))^2\right] + J_a^{\beta}[qf(t)]\,J_a^{\alpha}\left[qf(t)(t-E(X))^2\right] \\
& -2J_a^{\alpha}[qf(t)(t-E(X))]\,J_a^{\beta}[qf(t)(t-E(X))].
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1} q(\tau)f(\tau)\,q(\rho)f(\rho)\,(\tau-\rho)^2 d\tau d\rho \\
\leq\ & \|f\|_{\infty}^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1} q(\tau)q(\rho)(\tau-\rho)^2 d\tau d\rho \\
\leq\ & \|f\|_{\infty}^2\left[J_a^{\alpha}[q(t)]\,J_a^{\beta}\left[q(t)t^2\right] + J_a^{\beta}[q(t)]\,J_a^{\alpha}\left[q(t)t^2\right]\right] \\
& -2\|f\|_{\infty}^2 J_a^{\alpha}[q(t)t]\,J_a^{\beta}[q(t)t].
\end{aligned}$$

D'où, la partie (a) est démontrée.

Partie(b) :

Soient $q : [a,b] \to \mathbb{R}^+, t \in [a,b]$, on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1} q(\tau)f(\tau)\,q(\rho)f(\rho)\,(\tau-\rho)^2 d\tau d\rho \\
\leq\ & \sup_{\tau,\rho\in[a,t]}|(\tau-\rho)|^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1} q(\tau)f(\tau)q(\rho)f(\rho)d\tau d\rho \\
=\ & \sup_{\tau,\rho\in[a,t]}|(\tau-\rho)|^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} q(\tau)f(\tau)\,d\tau \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-\rho)^{\beta-1} q(\rho)f(\rho)\,d\rho \\
=\ & (t-a)^2 J_a^{\alpha}[qf(t)]\,J_a^{\beta}[qf(t)].
\end{aligned}$$

D'où, le résultat.

Remarque 2.2.2 *Pour $q(t)=1, a<t\leq b$ dans le théorème 2.2.2, on obtient alors le théorème 3.2 de [4].*

2.2.3 Résultat 3

Théorème 2.2.3 *Soit f une f. d. p d'une variable aléatoire continue X sur $[a,b]$, pour tout $a<t\leq b, \alpha>0$ et pour toute fonction $q:[a,b]\to\mathbb{R}^+$, on a le résultat suivant :*

$$J_a^\alpha\left[qf(t)\right]J_a^\alpha\left[qf(t)(t-E(X))^2\right]-\left(J_a^\alpha\left[qf(t)(t-E(X))\right]\right)^2\leq\frac{1}{4}(b-a)^2(J_a^\alpha\left[qf(t)\right])^2.$$

Preuve. □

Soient $a<t\leq b, \alpha>0$ et $q:[a,b]\to\mathbb{R}^+$.

On prend $p(t)=q(t)f(t), g(t)=t-E(X), a<t\leq b$ et on remplace dans (1.4.8), on obtient :

$$\left|J_a^\alpha\left[qf\left(t\right)\right]J_a^\alpha\left[qf(t)(t-E(X))^2\right]-\left(J_a^\alpha\left[qf(t)\left(t-E(X)\right)\right]\right)^2\right|\leq\frac{1}{4}\left(J_a^\alpha\left[qf(t)\right]\right)^2\left(M-m\right)^2.$$

On pose $M=b-E(X), m=a-E(X)$ et on les remplace.

$$0\leq J_a^\alpha\left[qf\left(t\right)\right]J_a^\alpha\left[qf(t)(t-E(X))^2\right]-\left(J_a^\alpha\left[qf(t)\left(t-E(X)\right)\right]\right)^2\leq\frac{1}{4}\left(J_a^\alpha\left[qf(t)\right]\right)^2\left(b-a\right)^2.$$

Remarque 2.2.3 *Si on prend $q(t)=1, a<t\leq b$ dans le théorème 2.2.3, on obtient le théorème 3.3 de [4].*

2.2.4 Résultat 4

Théorème 2.2.4 *Soit f une f. d. p d'une variable aléatoire continue X sur $[a,b]$, pour tout $a<t\leq b, \alpha>0, \beta>0$ et pour toute fonction $q:[a,b]\to\mathbb{R}^+$, on a :*

$$\begin{aligned}
& J_a^\alpha\left[qf(t)\right]J_a^\beta\left[qf(t)(t-E(X))^2\right]+J_a^\beta\left[qf(t)\right]J_a^\alpha\left[qf(t)(t-E(X))^2\right] \\
& +2\left(a-E\left(X\right)\right)\left(b-E\left(X\right)\right)J_a^\alpha\left[qf(t)\right]J_a^\beta\left[qf(t)\right] \\
\leq\ & (a+b-2E(X))\left(J_a^\alpha\left[qf(t)\right]J_a^\beta\left[qf(t)(t-E(X))\right]+J_a^\beta\left[qf(t)\right]J_a^\alpha\left[qf(t)(t-E(X))\right]\right).
\end{aligned}$$

Preuve. □

Soient $\alpha > 0, \beta > 0, t > 0, p : [a,b] \to \mathbb{R}^+$.

On pose $p(t) = q(t)f(t), g(t) = t - E(X), q : [a,b] \to \mathbb{R}^+, a < t \leq b$ et on remplace dans (1.4.10).

$$\left(\begin{array}{c} J_a^\alpha [qf(t)] J_a^\beta [qf(t)(t-E(X))^2] + J_a^\beta [qf(t)] J_a^\alpha [qf(t)(t-E(X))^2] \\ -2J_a^\alpha [qf(t)(t-E(X))] J_a^\beta [qf(t)(t-E(X))] \end{array} \right)^2$$

$$\leq \left(\begin{array}{c} (MJ_a^\alpha [qf(t)] - J_a^\alpha [qf(t)(t-E(X))]) \left(J_a^\beta [qf(t)(t-E(X))] - mJ_a^\beta [qf(t)]\right) \\ + (J_a^\alpha [qf(t)(t-E(X))] - mJ_a^\alpha [qf(t)]) \left(MJ_a^\beta [qf(t)] - J_a^\beta [qf(t)(t-E(X))]\right) \end{array} \right)^2, \tag{2.2.1}$$

donc,

$$\begin{array}{c} J_a^\alpha [qf(t)] J_a^\beta [qf(t)(t-E(X))^2] + J_a^\beta [qf(t)] J_a^\alpha [qf(t)(t-E(X))^2] \\ -2J_a^\alpha [qf(t)(t-E(X))] J_a^\beta [qf(t)(t-E(X))] \end{array}$$

$$\leq \begin{array}{c} (MJ_a^\alpha [qf(t)] - J_a^\alpha [qf(t)(t-E(X))]) \left(J_a^\beta [qf(t)(t-E(X))] - mJ_a^\beta [qf(t)]\right) \\ + (J_a^\alpha [qf(t)(t-E(X))] - mJ_a^\alpha [qf(t)]) \left(MJ_a^\beta [qf(t)] - J_a^\beta [qf(t)(t-E(X))]\right). \end{array} \tag{2.2.2}$$

On développe (2.2.2), on obtient :

$$\begin{aligned} & J_a^\alpha [qf(t)] J_a^\beta \left[qf(t)(t-E(X))^2\right] + J_a^\beta [qf(t)] J_a^\alpha \left[qf(t)(t-E(X))^2\right] \\ \leq \; & M(J_a^\alpha [qf(t)] J_a^\beta [qf(t)(t-E(X))] + J_a^\alpha [qf(t)(t-E(X))] J_a^\beta [qf(t)]) \\ & +m(J_a^\alpha [qf(t)(t-E(X))] J_a^\beta [qf(t)] + J_a^\alpha [qf(t)] J_a^\beta [qf(t)(t-E(X))]) \\ & -2mMJ_a^\alpha [qf(t)] J_a^\beta [qf(t)]. \end{aligned}$$

Dans cette dernière inégalité, on prend $M = b - E(X), m = a - E(X)$, on obtient :

$$\begin{aligned} & J_a^\alpha [qf(t)] J_a^\beta \left[qf(t)(t-E(X))^2\right] + J_a^\beta [qf(t)] J_a^\alpha \left[qf(t)(t-E(X))^2\right] \\ & +2\left(a - E\left(X\right)\right)\left(b - E\left(X\right)\right) J_a^\alpha [qf(t)] J_a^\beta [qf(t)] \\ \leq \; & (a+b-2E(X)) \left(J_a^\alpha [qf(t)] J_a^\beta [qf(t)(t-E(X))] + J_a^\beta [qf(t)] J_a^\alpha [qf(t)(t-E(X))]\right). \end{aligned}$$

Remarque 2.2.4 *Si on prend $q(t) = 1, a < t \leq b$ dans le théorème 2.2.4, on obtient le théorème 3.4 de [4].*

Chapitre 3

Estimations Fractionnaires : Moments

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on énonce des résultats sur les moments fractionnaires d'ordres $(r > 0, \alpha > 0)$ des variables aléatoires continues.
On rappelle aussi les définitions des moments fractionnaires d'ordres $(r > 0, \alpha > 0)$ ainsi qu'un théorème cité dans [6].

3.2 Définitions

Définition 3.2.1 *la fonction moment fractionnaire d'ordres $(r > 0, \alpha > 0)$ d'une variable aléatoire continue X ayant une f. d. p positive. $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ est définie par :*

$$M_{r,\alpha}(t) := J_a^\alpha \left[t^r f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^r f(\tau) d\tau; a < t \leq b.$$

Pour $t = b$, on a la définition suivante :

Définition 3.2.2 *le moment fractionnaire d'ordres $(r > 0, \alpha > 0)$ d'une variable aléatoire continue X est définie par :*

$$M_{r,\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b (b-\tau)^{\alpha-1} \tau^r f(\tau) d\tau.$$

3.3 Rappel

On donne le théorème suivant :

Théorème 3.3.1 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[0,+\infty[$ satisfaisantes $m \leq f(t) \leq M$ et $p \leq g(t) \leq P$ sur $[0,+\infty[$ telles que $m, M, p, P \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $t>0, \alpha>0$, on a :*

$$\left|\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_a^\alpha [fg(t)] - J_a^\alpha [f(t)]\, J_a^\alpha [g(t)]\right| \leq \frac{1}{4}\left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)^2 (M-m)(P-p).$$

3.4 Quelques résultats

Dans cette section, on présente des nouveaux résultats des moments fractionnaires d'ordres (r,α) des variables aléatoires continues. Le premier résultat est le suivant :

3.4.1 Résultat 1

Théorème 3.4.1 *Soit X une variable aléatoire continue ayant une f. d. p. $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$. Alors, pour tout $\alpha>0$ et $a<t\leq b$, on a les deux inégalités :*

$$\begin{aligned}
\textit{(a) :} \quad & J_a^\alpha [f(t)]\, J_a^\alpha \left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right] - E_{X-E(X),\alpha}(t) M_{r-1,\alpha}(t) \\
\leq \quad & \|f\|_\infty^2 \left[\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_a^\alpha [t^r] - \left(\frac{1}{2}(t-a)^{\alpha+1} + a\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) J_a^\alpha \left[t^{r-1}\right]\right]. \quad (3.4.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textit{(b) :} \quad & J_a^\alpha [f(t)]\, J_a^\alpha \left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right] - E_{X-E(X),\alpha}(t) M_{r-1,\alpha}(t) \\
\leq \quad & \frac{1}{2}(t-a)\left(t^{r-1}-a^{r-1}\right)\left(J_a^\alpha [f(t)]\right)^2. \quad (3.4.2)
\end{aligned}$$

Preuve. □

(a) : On montre (3.4.1).

Soient $f \in L_\infty([a,b]), \alpha>0$.

On prend $p(t)=f(t), g(t)=t-E(X), h(t)=t^{r-1}, a<t\leq b$ et on remplace dans (1.4.4), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_a^t \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (t-\rho)^{\alpha-1} (\tau-\rho) \left(\tau^{r-1} - \rho^{r-1}\right) f(\tau) f(\rho) d\tau d\rho \\
= \;& 2J_a^\alpha [f(t)] \, J_a^\alpha \left[f(t)(t-E(X))t^{r-1}\right] - 2J_a^\alpha [f(t)(t-E(X))] \, J_a^\alpha \left[t^{r-1} f(t)\right] \\
= \;& 2J_a^\alpha [f(t)] \, J_a^\alpha \left[t^{r-1}(t-E(X)) f(t)\right] - 2E_{X-E(X),\alpha}(t) M_{r-1,\alpha}(t). \qquad (3.4.3)
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_a^t \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (t-\rho)^{\alpha-1} (\tau-\rho) \left(\tau^{r-1} - \rho^{r-1}\right) f(\tau) f(\rho) d\tau d\rho \\
\leq \;& \|f\|_\infty^2 \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_a^t \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (t-\rho)^{\alpha-1} (\tau-\rho) \left(\tau^{r-1} - \rho^{r-1}\right) d\tau d\rho \\
\leq \;& \|f\|_\infty^2 \left[2 \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_a^\alpha [t^r] - 2J_a^\alpha [t] \, J_a^\alpha \left[t^{r-1}\right]\right]. \qquad (3.4.4)
\end{aligned}$$

De (3.4.3), (3.4.4) et comme

$$J_a^\alpha [t] = \frac{1}{2} (t-a)^{\alpha+1} + a \frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

on aura (3.4.1).

(b) : On montre (3.4.2).

Soit $\alpha > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_a^t \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (t-\rho)^{\alpha-1} (\tau-\rho) \left(\tau^{r-1} - \rho^{r-1}\right) f(\tau) f(\rho) d\tau d\rho \\
\leq \;& \sup_{\tau,\rho \in [a,t]} |(\tau-\rho)| \left|\left(\tau^{r-1} - \rho^{r-1}\right)\right| \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_a^t \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (t-\rho)^{\alpha-1} f(\tau) f(\rho) d\tau d\rho \\
= \;& (t-a) \left(t^{r-1} - a^{r-1}\right) \left(J_a^\alpha [f(t)]\right)^2. \qquad (3.4.5)
\end{aligned}$$

De la formule (3.4.3) et (3.4.5), on obtient (3.4.2).

3.4.2 Résultat 2

Théorème 3.4.2 *Soit X une variable aléatoire continue ayant une f. d. p. $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$.*
(i) : Pour tout $\alpha > 0, \beta > 0$ et $a < t \leq b$ on a :

$$\begin{aligned} & J_a^\alpha [f(t)] J_a^\beta \left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right] + J_a^\beta [f(t)] J_a^\alpha \left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right] \\ & -E_{X-E(X),\alpha}(t) M_{r-1,\beta}(t) - E_{X-E(X),\beta}(t) M_{r-1,\alpha}(t) \\ \leq\ & \|f\|_\infty^2 \left[\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_a^\beta [t^r] + \frac{(t-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} J_a^\alpha [t^r] - \left(\frac{1}{2}(t-a)^{\alpha+1} + a\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) J_a^\beta \left[t^{r-1}\right]\right] \\ & + \|f\|_\infty^2 \left[-\left(\frac{1}{2}(t-a)^{\beta+1} + a\frac{(t-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right) J_a^\alpha \left[t^{r-1}\right]\right]. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

(ii) : On a aussi :

$$\begin{aligned} & J_a^\alpha [f(t)] J_a^\beta \left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right] + J_a^\beta [f(t)] J_a^\alpha \left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right] \\ & -E_{X-E(X),\alpha}(t) M_{r-1,\beta}(t) - E_{X-E(X),\beta}(t) M_{r-1,\alpha}(t) \\ \leq\ & (t-a)\left(t^{r-1} - a^{r-1}\right) J_a^\alpha [f(t)] J_a^\beta [f(t)]. \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Preuve. □

(i) : On montre (3.4.6).

Soient $\alpha > 0, \beta > 0$ et $a < t \leq b, f \in L_\infty([a,b])$.

On prend $p(t) = f(t), g(t) = t - E(X), h(t) = t^{r-1}, a < t \leq b$ et on remplace dans (1.4.7), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (t-\rho)^{\beta-1} (\tau-\rho) \left(\tau^{r-1} - \rho^{r-1}\right) f(\tau) f(\rho) d\tau d\rho \\ =\ & J_a^\alpha [f(t)] J_a^\beta \left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right] + J_a^\beta [f(t)] J_a^\alpha \left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right] \\ & -J_a^\alpha [(t-E(X))f(t)] M_{r-1,\beta}(t) - J_a^\beta [(t-E(X))f(t)] M_{r-1,\alpha}(t). \\ =\ & J_a^\alpha [f(t)] J_a^\beta \left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right] + J_a^\beta [f(t)] J_a^\alpha \left[t^{r-1}(t-E(X))f(t)\right] \\ & -E_{X-E(X),\alpha}(t) M_{r-1,\beta}(t) - E_{X-E(X),\beta}(t) M_{r-1,\alpha}(t). \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

En utilisant le fait que $f \in L_\infty([a,b])$, on peut écrire.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}(\tau-\rho)\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right)f(\tau)f(\rho)d\tau d\rho \\
\leq\ & \|f\|_\infty^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}(\tau-\rho)\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right)d\tau d\rho \\
=\ & \|f\|_\infty^2 \left[\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}J_a^\beta[t^r]+\frac{(t-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}J_a^\alpha[t^r]-J_a^\alpha[t]\,J_a^\beta\left[t^{r-1}\right]-J_a^\beta[t]\,J_a^\alpha\left[t^{r-1}\right]\right].
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

De (3.4.8), (3.4.9) et comme

$$J_a^\alpha[t]=\frac{1}{2}(t-a)^{\alpha+1}+a\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$J_a^\beta[t]=\frac{1}{2}(t-a)^{\beta+1}+a\frac{(t-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)},$$

on obtient (3.4.6).

(ii) : Montrons (3.4.7).

Soient $\alpha>0, \beta>0$. On a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}(\tau-\rho)\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right)f(\tau)f(\rho)d\tau d\rho \\
\leq\ & \sup_{\tau,\rho\in[a,t]}|(\tau-\rho)|\left|\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right)\right|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1}f(\tau)f(\rho)d\tau d\rho \\
=\ & (t-a)\left(t^{r-1}-a^{r-1}\right)J_a^\alpha[f(t)]\,J_a^\beta[f(t)].
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

De (3.4.8) et (3.4.10), on a (3.4.7).

3.4.3 Résultat 3

Théorème 3.4.3 *Soit X une variable aléatoire continue ayant une f. d. p, $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$. Alors, on a :*

$$J_a^\alpha\left[f(t)\right] M_{2r,\alpha}(t) - M_{r,\alpha}^2(t) \leq \frac{1}{4}\frac{(b-a)^{2(\alpha-1)}}{\Gamma^2(\alpha)}\left(b^r - a^r\right)^2, \alpha > 0, a < t \leq b.$$

Preuve. □

Soient $\alpha > 0, a < t \leq b$, on a :

$$\left|J_a^\alpha\left[p(t)\right] J_a^\alpha\left[pg^2(t)\right] - \left(J_a^\alpha\left[pg(t)\right]\right)^2\right| \leq \frac{1}{4}\left(J_a^\alpha\left[p(t)\right]\right)^2 (M-m)^2. \quad (3.4.11)$$

On prend $p(t) = f(t), g(t) = t^r, a < t \leq b, m = a^r$ et $M = b^r$ puis on remplace dans (3.4.11).
$0 \leq J_a^\alpha\left[f(t)\right] J_a^\alpha\left[f(t)t^{2r}\right] - \left(J_a^\alpha\left[f(t)t^r\right]\right)^2 \leq \frac{1}{4}\left(J_a^\alpha\left[f(t)\right]\right)^2 (b^r - a^r)^2$.
Comme

$$J_a^\alpha\left[f(t)\right] \leq \frac{(b-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

alors

$$\left(J_a^\alpha\left[f(t)\right]\right)^2 \leq \frac{(b-a)^{2(\alpha-1)}}{\Gamma^2(\alpha)}.$$

On en déduit que :

$$J_a^\alpha\left[f(t)\right] M_{2r,\alpha}(t) - M_{r,\alpha}^2(t) \leq \frac{1}{4}\frac{(b-a)^{2(\alpha-1)}}{\Gamma^2(\alpha)}\left(b^r - a^r\right)^2.$$

3.4.4 Résultat 4

Théorème 3.4.4 *Soit X une variable aléatoire continue ayant une f. d. p. $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$. Alors, pour tout $\alpha > 0, \beta > 0$ et $a < t \leq b$, on a :*

$$\begin{aligned} & J_a^\alpha [f(t)] M_{2r,\beta}(t) + J_a^\beta [f(t)] M_{2r,\alpha}(t) + 2a^r b^r J_a^\alpha [f(t)] J_a^\beta [f(t)] \\ \leq \ & (a^r + b^r) \left[J_a^\alpha [f(t)] M_{r,\beta}(t) + J_a^\beta [f(t)] M_{r,\alpha}(t) \right]. \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

Preuve. □

Montrons (3.4.12) :

Soient $\alpha > 0, \beta > 0$ et $a < t \leq b$, on rappelle (1.4.10) :

$$\left(J_a^\alpha [p(t)] J_a^\beta \left[pg^2(t)\right] + J_a^\beta [p(t)] J_a^\alpha \left[pg^2(t)\right] - 2J_a^\alpha [pg(t)] J_a^\beta [pg(t)] \right)^2$$

$$\leq \left(\begin{array}{c} (MJ_a^\alpha [p(t)] - J_a^\alpha [pg(t)]) \left(J_a^\beta [pg(t)] - mJ_a^\beta [p(t)]\right) \\ + (J_a^\alpha [pg(t)] - mJ_a^\alpha [p(t)]) \left(MJ_a^\beta [p(t)] - J_a^\beta [pg(t)]\right) \end{array} \right)^2. \tag{3.4.13}$$

On prend $p(t) = f(t), g(t) = t^r, a < t \leq b$ et on remplace dans (3.4.13), on obtient :

$$\left(J_a^\alpha [f(t)] J_a^\beta \left[f(t)t^{2r}\right] + J_a^\beta [f(t)] J_a^\alpha \left[f(t)t^{2r}\right] - 2J_a^\alpha [t^r f(t)] J_a^\beta [t^r f(t)] \right)^2$$

$$\leq \left(\begin{array}{c} (MJ_a^\alpha [f(t)] - J_a^\alpha [t^r f(t)]) \left(J_a^\beta [t^r f(t)] - mJ_a^\beta [f(t)]\right) \\ + (J_a^\alpha [t^r f(t)] - mJ_a^\alpha [f(t)]) \left(MJ_a^\beta [f(t)] - J_a^\beta [t^r f(t)]\right) \end{array} \right)^2.$$

Donc,

$$\begin{aligned} & J_a^\alpha [f(t)] M_{2r,\beta}(t) + J_a^\beta [f(t)] M_{2r,\alpha}(t) - 2M_{r,\alpha}(t) M_{r,\beta}(t) \\ \leq \ & (MJ_a^\alpha [f(t)] - M_{r,\alpha}(t)) \left(M_{r,\beta}(t) - mJ_a^\beta [f(t)]\right) + (M_{r,\alpha}(t) - mJ_a^\alpha [f(t)]) \left(MJ_a^\beta [f(t)] - M_{r,\beta}(t)\right). \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

On développe (3.4.14), on obtient.

$$
\begin{aligned}
& J_a^{\alpha}\left[f(t)\right] M_{2r,\beta}(t) + J_a^{\beta}\left[f(t)\right] M_{2r,\alpha}(t) \\
\leq\ & M(J_a^{\alpha}\left[f(t)\right] M_{r,\beta}(t) + J_a^{\beta}\left[f(t)\right] M_{r,\alpha}(t)) + m(J_a^{\beta}\left[f(t)\right] M_{r,\alpha}(t) + J_a^{\alpha}\left[f(t)\right] M_{r,\beta}(t)) \\
& -2mM J_a^{\alpha}\left[f(t)\right] J_a^{\beta}\left[f(t)\right]. \qquad (3.4.15)
\end{aligned}
$$

Posons $M = b^r, m = a^r$ et remplaçons dans (3.4.15), on aura (3.4.12).

Chapitre 4

Moments à Poids

4.1 Introducrion

Dans ce chapitre, on donne des résultats plus généraux en utilisant une fonction poids positive $q : [a,b] \to \mathbb{R}^+$. Ces résultats généralisent les théorèmes du [7].

4.2 Quelques résultats fondamentaux

On commence par le résultat suivant :

4.2.1 Résultat 1

Théorème 4.2.1 *Soit X une variable aléatoire continue ayant une f. d. p. $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$. Alors, pour tout $\alpha > 0, a < t \leq b$ et $q : [a,b] \to \mathbb{R}^+$, on a les deux inégalités :*

$$\begin{aligned}
(a) \quad : \quad & J_a^\alpha [qf(t)]\, J_a^\alpha \left[t^{r-1}(t-E(X))qf(t)\right] - J_a^\alpha [(t-E(X))qf(t)]\, J_a^\alpha \left[t^{r-1}qf(t)\right] \\
\leq \quad & \|f\|_\infty^2 \left[J_a^\alpha [q(t)]\, J_a^\alpha [t^r q(t)] - J_a^\alpha [tq(t)]\, J_a^\alpha \left[t^{r-1}q(t)\right]\right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b) \quad : \quad & J_a^\alpha [qf(t)]\, J_a^\alpha \left[t^{r-1}(t-E(X))qf(t)\right] - J_a^\alpha [(t-E(X))qf(t)]\, J_a^\alpha \left[t^{r-1}qf(t)\right] \\
\leq \quad & \frac{1}{2}(t-a)\left(t^{r-1}-a^{r-1}\right)\left(J_a^\alpha [qf(t)]\right)^2.
\end{aligned}$$

Preuve. □

Partie (a) :

Soient $f \in L_{\infty}([a,b]), \alpha > 0, q : [a,b] \to \mathbb{R}^{+}$.

On prend $p(t) = q(t)f(t), g(t) = t - E(X), h(t) = t^{r-1}, a < t \leq b$ et on remplace dans (1.4.4), on obtient :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma^{2}(\alpha)} \int_{a}^{t}\int_{a}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1} q(\tau)f(\tau)q(\rho)f(\rho)(\tau-\rho)\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right) d\tau d\rho \\ = \;& 2J_{a}^{\alpha}[qf(t)]\, J_{a}^{\alpha}\left[t^{r-1}(t-E(X))qf(t)\right] - 2J_{a}^{\alpha}[(t-E(X))qf(t)]\, J_{a}^{\alpha}\left[t^{r-1}qf(t)\right] \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

De plus, on a.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma^{2}(\alpha)} \int_{a}^{t}\int_{a}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1} q(\tau)f(\tau)q(\rho)f(\rho)(\tau-\rho)\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right) d\tau d\rho \\ \leq \;& \|f\|_{\infty}^{2}\left[2J_{a}^{\alpha}[q(t)]\, J_{a}^{\alpha}[t^{r}q(t)] - 2J_{a}^{\alpha}[tq(t)]\, J_{a}^{\alpha}\left[t^{r-1}q(t)\right]\right]. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

De (4.2.1) et (4.2.2), on obtient la partie (a).

Partie (b) :

Soient $\alpha > 0, q : [a,b] \to \mathbb{R}^{+}$, on a :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma^{2}(\alpha)} \int_{a}^{t}\int_{a}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1} q(\tau)f(\tau)q(\rho)f(\rho)(\tau-\rho)\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right) d\tau d\rho \\ \leq \;& \sup_{\tau,\rho\in[a,t]} |(\tau-\rho)|\left|(\tau^{r-1}-\rho^{r-1})\right| \times \frac{1}{\Gamma^{2}(\alpha)} \int_{a}^{t}\int_{a}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\alpha-1} q(\tau)f(\tau)q(\rho)f(\rho) d\tau d\rho \\ = \;& (t-a)\left(t^{r-1}-a^{r-1}\right)\left(J_{a}^{\alpha}[qf(t)]\right)^{2}. \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

De (4.2.1) et (4.2.3), on obtient la partie (b).

4.2.2 Résultat 2

Théorème 4.2.2 *Soit X une variable aléatoire continue ayant une f. d. p. $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$. Alors, pour tout $\alpha > 0, \beta > 0$ et $q : [a,b] \to \mathbb{R}^+, a < t \leq b$ on a :*

$$\begin{aligned} (i) \quad : \quad & J_a^\alpha [qf(t)] J_a^\beta \left[t^{r-1}(t-E(X))qf(t)\right] + J_a^\beta [qf(t)] J_a^\alpha \left[t^{r-1}(t-E(X))qf(t)\right] \\ & -J_a^\alpha [(t-E(X))qf(t)] J_a^\beta \left[t^{r-1}qf(t)\right] - J_a^\beta [(t-E(X))qf(t)] J_a^\alpha \left[t^{r-1}qf(t)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leq \; & \|f\|_\infty^2 \left[J_a^\alpha [q(t)] J_a^\beta [t^r q(t)] + J_a^\beta [q(t)] J_a^\alpha [t^r q(t)]\right] \\ & + \|f\|_\infty^2 \left[-J_a^\alpha [tq(t)] J_a^\beta \left[t^{r-1}q(t)\right] - J_a^\beta [tq(t)] J_a^\alpha \left[t^{r-1}q(t)\right]\right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad : \quad & J_a^\alpha [qf(t)] J_a^\beta \left[t^{r-1}(t-E(X))qf(t)\right] + J_a^\beta [qf(t)] J_a^\alpha \left[t^{r-1}(t-E(X))qf(t)\right] \\ & -J_a^\alpha [(t-E(X))qf(t)] J_a^\beta \left[t^{r-1}qf(t)\right] - J_a^\beta [(t-E(X))qf(t)] J_a^\alpha \left[t^{r-1}qf(t)\right] \end{aligned}$$

$$\leq (t-a)\left(t^{r-1} - a^{r-1}\right) J_a^\alpha [qf(t)] J_a^\beta [qf(t)].$$

Preuve. □

Partie (i) :

Soient $\alpha > 0, \beta > 0$ et $a < t \leq b, f \in L_\infty([a,b]), q : [a,b] \to \mathbb{R}^+$.

On prend $p(t) = q(t)f(t), g(t) = t - E(X), h(t) = t^{r-1}, a < t \leq b$ et on remplace dans (1.4.7), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (t-\rho)^{\beta-1} q(\tau)f(\tau)q(\rho)f(\rho)(\tau-\rho)\left(\tau^{r-1} - \rho^{r-1}\right) d\tau d\rho \\ = \; & J_a^\alpha [qf(t)] J_a^\beta \left[t^{r-1}(t-E(X))qf(t)\right] + J_a^\beta [qf(t)] J_a^\alpha \left[t^{r-1}(t-E(X))qf(t)\right] \\ & -J_a^\alpha [(t-E(X))qf(t)] J_a^\beta \left[t^{r-1}qf(t)\right] - J_a^\beta [(t-E(X))qf(t)] J_a^\alpha \left[t^{r-1}qf(t)\right]. \quad (4.2.4) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $f \in L_\infty([a,b])$, on peut écrire.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1} q(\tau)f(\tau)q(\rho)f(\rho)(\tau-\rho)\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right)d\tau d\rho \\
\leq\ & \|f\|_\infty^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1} q(\tau)q(\rho)(\tau-\rho)\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right)d\tau d\rho \\
=\ & \|f\|_\infty^2 \left[J_a^\alpha[q(t)]\, J_a^\beta[t^r q(t)] + J_a^\beta[q(t)]\, J_a^\alpha[t^r q(t)]\right] \\
&+\|f\|_\infty^2\left[-J_a^\alpha[tq(t)]\, J_a^\beta\left[t^{r-1}q(t)\right] - J_a^\beta[tq(t)]\, J_a^\alpha\left[t^{r-1}q(t)\right]\right]. \qquad (4.2.5)
\end{aligned}
$$

De (4.2.4) et (4.2.5), on obtient la partie (i).

Partie (ii) :

Soient $\alpha > 0, \beta > 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1} q(\tau)f(\tau)q(\rho)f(\rho)(\tau-\rho)\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right)d\tau d\rho \\
\leq\ & \sup_{\tau,\rho\in[a,t]}|(\tau-\rho)|\left|\left(\tau^{r-1}-\rho^{r-1}\right)\right| \times \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(t-\rho)^{\beta-1} q(\tau)f(\tau)q(\rho)f(\rho)d\tau d\rho \\
=\ & (t-a)\left(t^{r-1}-a^{r-1}\right) J_a^\alpha[qf(t)]\, J_a^\beta[qf(t)]. \qquad (4.2.6)
\end{aligned}
$$

De (4.2.4) et (4.2.6), on obtient la partie (ii).

4.2.3 Résultat 3

Théorème 4.2.3 *Soit X une variable aléatoire continue ayant une f. d. p. $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$. Alors, pour tout $\alpha > 0$ et $q : [a,b] \to \mathbb{R}^+, a < t \leq b$ on a :*

$$
J_a^\alpha[qf(t)]\, J_a^\alpha\left[t^{2r}q^3(t)f(t)\right] - \left(J_a^\alpha\left[t^r q^2(t)f(t)\right]\right)^2 \leq \frac{1}{4}\left(J_a^\alpha[qf(t)]\right)^2 (b^r - a^r)^2, \alpha > 0, a < t \leq b.
$$

Preuve. □

Il suffit de prendre $p(t) = q(t)f(t), g(t) = t^r, a < t \leq b, m = a^r, M = b^r$ dans (3.4.11).

4.2.4 Résultat 4

Théorème 4.2.4 *Soit X une variable aléatoire continue ayant une f. d. p. $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$. Alors, pour tout $\alpha>0, \beta>0, a<t\leq b$ et $q:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ on a :*

$$\begin{aligned} & J_a^\alpha[qf(t)]\,J_a^\beta\left[t^{2r}qf(t)\right]+J_a^\beta[qf(t)]\,J_a^\alpha\left[t^{2r}qf(t)\right]+2a^rb^rJ_a^\alpha[qf(t)]\,J_a^\beta[qf(t)] \\ \leq\; & (a^r+b^r)\,J_a^\alpha[qf(t)]\,J_a^\beta[t^rqf(t)]+J_a^\beta[qf(t)]\,J_a^\alpha[t^rqf(t)]. \end{aligned}$$

Preuve. □

Soient $\alpha>0, \beta>0, a<t\leq b$ et $q:[a,b]\to\mathbb{R}^+$.

On prend $p(t)=q(t)f(t), g(t)=t^r, a<t\leq b$ et on remplace dans (3.4.13).

$$J_a^\alpha[qf(t)]\,J_a^\beta\left[t^{2r}qf(t)\right]+J_a^\beta[qf(t)]\,J_a^\alpha\left[t^{2r}qf(t)\right]-2J_a^\alpha[t^rqf(t)]\,J_a^\beta[t^rqf(t)]$$

$$\leq \begin{array}{c}\left(MJ_a^\alpha[qf(t)]-J_a^\alpha[t^rqf(t)]\right)\left(J_a^\beta[t^rf(t)]-mJ_a^\beta[qf(t)]\right)\\ +\left(J_a^\alpha[t^rqf(t)]-mJ_a^\alpha[qf(t)]\right)\left(MJ_a^\beta[qf(t)]-J_a^\beta[t^rqf(t)]\right)\end{array}. \tag{4.2.7}$$

On développe (4.2.7), et on remplace M par b^r et m par a^r, on obtient le résultat souhaité.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a introduit des estimations sur les variables aléatoires continues à espérance fractionnaire, variance fractionnaire et moments fractionnaires d'ordres (r, α). Les premières définitions et propriétés de cette nouvelle approche, on les trouve dans les travaux de [1], [4] et [7].
Nous avons montré, à travers la preuve des résultats des quatres chapitres, l'utilité de la théorie des intégrales fractionnaires aux sens de Riemann-Lioville.
Finalement, on souhaite appliquer ces téchniques d'estimation fractionnaire pour trouver d'autres approximations fractionnaires des espérances, des variances et des moments d'ordre $(r > 0, \alpha > 0)$.

Bibliographie

[1] A. Akkurt, Z. Kaçar, H. Yildirim : *Generalized fractional integral inequalities for continuous random variables*, Journal of probability and statistics. (2015), 7.

[2] N. S. Barnett, P. Cerone, S. S. Dragomir, J. Roumeliotis : *Some inequalities for the expectation and variance of a random variable whose PDF is n-time differentiable*, J. Inequal. Pure Appl. Math. 1 (21) (2000), 1-29.

[3] N. S. Barnett, P. Cerone, S. S. Dragomir and J. Roumeliotis : *Some inequalities for the dispersion of a random variable whose PDF is defined on a finite interval*, J. Inequal. Pure Appl. Math. 2 (1) (2001), 1-18.

[4] Z. Dahmani : *Fractional integral inequalities for continuous random variables*, Malaya J. Mat. 2 (2) (2014), 172-179.

[5] Z. Dahmani, L. Tabharit : *On weighted Gruss type inequalities via fractional integrals*, JARPM, Journal of Advanced Research in Pure Mathematics, 2 (4) (2010), 31-38.

[6] Z. Dahmani, L. Tabharit, S. Taf : *New generalizations of Gruss inequality using Riemann-Liouville fractional integrals*, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications. 2 (3) (2010), 93-99.

[7] Z. Dahmani, M. Houas, M. Z. Sarikaya : *Fractional moments for continuous random variables*, Submitted.

[8] R. Gorenflo, F. Mainardi, *Fractional calculus : integral and differential equations of fraction order*, Springer Verlag, Wien, (1997), 223-276.

[9] P. Kumar : *Moment inequalities of a random variable defined over a finite interval*, J. Inequal. Pure Appl. Math. 3 (3) (2002), 1-24.

[10] P. Kumar : *Inequalities involving moments of a continuous random variable defined over a finite interval*, Computers and Mathematics with Applications, 48 (2004), 257-273.