UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES-INFORMATIQUES

Mémoire de master

Spécialité : Analyse Fonctionnelle

Thème

Problèmes aux limites concernant les équations différentielles fractionnaires avec des conditions non locales

Présenté par

Mlle BEHLOUL Amina

Soutenu le 26 /05/2015

Devant le jury

Mr BELAIDI Benharrat	**Président**	PROF	**U. MOSTAGANEM.**
Mr BOUAGADA Djilali	**Examinateur**	PROF	**U. MOSTAGANEM.**
Mme BELARBI HAMANI Samira	**Encadreur**	MCA	**U. MOSTAGANEM.**

Dédicace

Je dédie ce modeste travail d'abord :

À mes chèrs parents qui m'ont sontenu pendant toute la periode de mes études, pour leur encouragements continus à surmonter les problèmes et les difficultés que j'ai rencontré, et de leurs conseils pour éclairer mon chemin, ils on été un exemple parfait pour ma réussite, sans oublier toute ma famille, qui était une source de bonheur pour moi.

À toutes mes amies et mes collègues.

REMERCIEMENTS :

Je tiens avant tout à remercier Allah pour la force et la volonté qu'il m'a donné pour pouvoir achever ce travail.

J'exprime toute ma reconnaissance à mon encadreur, Mme BELARBI HAMANI Samira, maître de conférences classe-A- à l'université de Mostaganem d'avoir accepter la direction de mon mémoire. Elle m'a guide durant celui-ci et m'a apporté le soutien nécessaire.

De part ses qualités pédagogiques, ses précieux conseils, ses stimulants encouragements et sa disponibilité.

Je remercie Monsieur BELAIDI Benharrat, Professeur à l'université de Mostaganem de l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie également à Monsieur BOUAGADA Djilali, Professeur à l'université de Mostaganem d'avoir accepter de faire partie de ce jury.

Je suis également très reconnaissante envers ma famille qui s'est constamment préoccupée de m'a scolarité et soutenu pendant toutes mes études universitaires.

Table des matières

INTRODUCTION

Le calcul fractionnaire est la branche d'analyse mathématique qui étudie la généralisation des notions de dérivation et d'intégration a des ordres non nécessairement entiers (réels ou complexes).

Les origines du calcul fractionnaire remontaient à la fin du $17^{ème}$ siècle, partant de quelques spéculations de G.W.Leibniz concernant la question de l'Hopital, posée le 30/09/1695, sur la signification de $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$, le calcul fractionaire a été longuement considéré comme simple théorie mathématique sans aucune explication réel où pratique.

Le sujet principale de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité des solutions pour les problèmes aux limites concernant les équations différentielles fractionnaires avec des conditions non locales.

Les conditions non locales ont été étudié la première fois par Byszewsked [8] quand il a montré l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy non locale, les conditions non locales peuvent être plus utiles que la condition initiale standard pour d'écrire des phénomènes physique ; par exemple, on peut donner $g(y)$ sous la forme ;

$$g(y) = \sum_{i=1}^{p} c_i y(t_i)$$

où c_i, $i = 1.....p$ est une constante et $0 < t_1 < ..... < t_p < T$.

Ce mémoire est composé de deux chapitres. Dans le premier chapitre, nous donnerons notations, définitions, quelques propriétés de l'intégrale et dérivées fractionnaires aux sens de Riemann-Liouville et aux sens de Caputo, et la dernière section est consacrée quelques théorèmes du point fixe.

Le deuxième chapitre sera consacrée à l'étude du problème aux limites concernant les équations différentielles fractionnaires avec des conditions non locales suivante :

$$\begin{aligned} {}^cD^{\alpha}y(t) &= f(t, y(t)), \quad \text{pour tout } t \in J := [0, T], \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ y(0) &= g(y) \qquad , y(T) = y_T \end{aligned}$$

où ${}^cD^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo, f et g sont des fonctions continues et $y_T \in \mathbb{R}$.

Ensuite nous donnerons deux résultats d'existence et d'unicité.

Notre approche est basée sur les théorèmes du point fixe (Banach Scheafer).

Chapitre 1

Calcul Fractionnaires

On introduit dans ce chapitre les éléments nécessaires pour la bonne compréhension de ce manuscrit, il comporte deux sections.
Dans la première section nous rappelons brièvement certaines définitions et propriétés liées à la théorie du calcul fractionnaire. Dans la deuxième, on conclut le chapitre par une section réservée aux différents théorèmes de point fixe utilisés dans le présent travail.

1.1 Intégrales fractionnaires :

Notations :

Soit $J := [0, T]$.
•Soit $C(J, \mathbb{R})$ l'éspace de Banach des fonctions y définies de J dans $\mathbb{R}$ continues muni de la norme :

$$\|y\|_{\infty} = \{|y(t)| \quad : 0 \leq t \leq T\}$$

•Soit $L^1(J, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctins $y : J \to \mathbb{R}$ intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue muni de la norme :

$$\|y\|_{L^1} = \int_0^T |y(t)|\, dt.$$

1.1.1 fonction Gamma :

La fonction Gamma est simplement la généralisation de la factorielle, cette fonction est l'un des outils de base du calcul fractionnaire.

Définition 1.1.1 :

La fonction Gamma est définie par l'intégrale :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{z-1} dt \ , z > 0$$

où $t^{z-1} = \exp(z-1)\ln t$

Propriétés:

Pour tout $z \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
- $\Gamma(z+n) = z(z+1)\ldots(z+n-1)\Gamma(z)$
- $\Gamma(n+1) = n!$

1.1.2 fonction Delta :

Définition 1.1.2 :

La fonction Delta est définie par

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & si \ \ t \neq 0 \\ +\infty & si \ \ t = 0 \end{cases}$$

telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \ dt = 1$$

Propriété

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ on a :

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)\, dt = f(0)$

1.1.3 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann Liouville

L'approche de Riemann-Liouville relative à la définition de l'intégrale fractionnaire s'appuie sur la formule de Cauchy pour le calcul de l'intégrale répétée n fois qui est donnée par

$$I_a^{\alpha} h(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} h(s)\, ds, \quad t > a \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

En généralisant cette formule à un ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aura la définition suivante :

Définition 1.1.3 [4] :

Soit $h \in L^1([a,b], \mathbb{R}_+)$, on définit l'intégrale fractionnaire (arbitraire) d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ par la formule :

$$I_a^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds$$

• si $a = 0$, on écrit :

$$I^\alpha h(t) = h(t) * \varphi_a(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds$$

telle que

$$\varphi_a(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

et $\varphi_a \to \delta(t)$ quand $\alpha \to 0$.

Propriétés

• Si $\alpha = 0$, on écrit :

$$I^0 h(t) = h(t)$$

• Soit $\alpha, \beta > 0$, alors pour tout $h(t) \in L^1[a,b]$, on a :

$$I_a^\alpha I_a^\beta h(t) = I_a^{\alpha+\beta} h(t) = I_a^\beta I_a^\alpha h(t)$$

pour presque tout $t \in [a,b]$.

• Si $h \in L^1[a,b]$ avec a fini, alors $I_a^\alpha h(t)$ existe pour presque tout $t \in [a,b]$ et on a $I_a^\alpha \in L^1[a,b]$.

1.2 Dérivées fractionnaires :

Plusieurs approches ont été développées pour donner un sens à $\frac{d^n f}{dt^n}$ lorsque $n \in \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$.
Dans la présente sous-section on se limite à la présentation de deux approches de dérivation fractionnaire à savoir l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo.

1.2.1 Opérateur de dérivée n^{éme} :

Définition 1.2.1 :

L'opérateur de la dérivée d'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$ est noté par D^n;

$$D^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t)$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$.

Propriétés

$$\begin{aligned} D^n I^n f &= f\,;\ I^n D^n f \neq f \quad , f \in C^n(\mathbb{R}_+) \\ I^n D^n f &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \ , t > 0 \end{aligned}$$

Preuve. : On passe à démontrer , on a le dévellopement limités de f au point 0.

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)\, t + f^{(2)}(0) \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau$$

□:

On a le dévellopement limités de f au point 0.

$$f(t) = f(0) + f^{(1)}(0)\, t + f^{(2)}(0) \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau$$

d'où

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}$$

1.2.2 Dérivée au sens de Riemann –Liouville :

Définition 1.2.2 [4] :

Soit $h \in C^1([a,b])$. On définit la dérivée fractionnaire d'ordre $(0 < \alpha < 1)$ au sens de Riemann –Liouville par :

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha} h(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} h(s)\, ds \\ &= D^1 I_a^{1-\alpha} h(t) \end{aligned}$$

Définition 1.2.3 [6] :

Soit $h \in C^n([a,b])$ .On définit la dérivée fractionnaire d'ordre $(0 < n-1 < \alpha < n)$ au sens de Riemann –Liouville par :

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha} h(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} h(s)\, ds \\ &= D^n I_a^{n-\alpha} h(t) \end{aligned}$$

Cas particulier :

Si $(1 < \alpha < 2)$:

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha} h(t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dt^2} \int_a^t (t-s)^{1-\alpha} h(s)\, ds \\ &= D^2 I_a^{2-\alpha} h(t) \end{aligned}$$

telle que $n = [\alpha] + 1$.

Remarque 1.2.1 :

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} = \ldots\ldots = \frac{1}{\Gamma(-1)} = \frac{1}{\Gamma(0)} = 0$$

Propriétés :

Soient α, β deux paramètres réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,alors on a :

1.$D^{\alpha} I^{\alpha} f(x) = f(x)\,,\ \alpha > 0$

2.$D^{\beta} I^{\alpha} f(x) = D^{\beta-\alpha} f(x)\,,\ \beta < 0, \alpha > 0$

3.$D^{n} I^{\alpha} f(x) = D^{n+\alpha} f(x)\,,\ n \in \mathbb{N}, \alpha > 0$

4.$I^{\alpha} D^{\alpha} f(x) \neq f(x)$

5.$D^{\alpha} D^{\beta} f(x) \neq D^{\beta} D^{\alpha} f(x)$

6.$D^{\beta} D^{\alpha} f(x) \neq D^{\alpha+\beta} f(x)$

1.2.3 Dérivée au sens de Caputo :

Définition 1.2.4 [6] :

Soit $h \in C^n([a,b])$ .On définit la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction h par :

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha h(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} h^{(n)}(s)\,ds \\ &= I_a^{n-\alpha} D^n h(t) \end{aligned}$$

telle que $n = [\alpha] + 1$.

Cas particuliers :

• $(0 < \alpha < 1)$:

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha h(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} h'(s)\,ds \\ &= I_a^{1-\alpha} D^1 h(t) \end{aligned}$$

• $(1 < \alpha < 2)$:

$$\begin{aligned} {}^cD_a^\alpha h(t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{1-\alpha} h''(s)\,ds \\ &= I_a^{2-\alpha} D^2 h(t) \end{aligned}$$

Propriétés

1.${}^cD_a^\alpha c = 0$; c est une constante.

2.${}^cD_a^\alpha t^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)} t^{\beta-\alpha} & ;\beta > \alpha - 1 \\ 0 & ;\beta \leq \alpha - 1 \end{cases}$

1.2.4 Lien entre Riemann –Liouville et Caputo :

Pour tout $t > 0, n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$on a :

$$D_a^\alpha h(t) = {}^c D_a^\alpha h(t) + \sum_{k=0}^{n-1} h^{(k)}(0) \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}$$

preuve :

on a :

$$D^{\alpha}h(t)=\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}h(s)\,ds\right)$$

On intégre par partie, on obtient :

$$\begin{aligned}D^{\alpha}h(t) &= \frac{d^{n}}{dt^{n}\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{(t-s)^{n-\alpha}}{n-\alpha}h(0)+\frac{(t-s)^{n-\alpha+1}}{n-\alpha}h^{(1)}(0)\right.\\ &\qquad \left.+....+\int_{0}^{t}(t-s)^{n-\alpha+n-1}h^{(n)}(s)\,ds\right)\end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned}D^{\alpha}h(t) &= \sum_{k=0}^{n-1}h^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}+\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{t}(t-s)^{n-\alpha+n-1}h^{(n)}(s)\,ds\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}h^{(k)}(0)\frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}h^{(n)}(s)\,ds\end{aligned}$$

Corollaire 1.2.1 : *Si* ${}^{c}D_{a}^{\alpha}h$ *et* $D_{a}^{\alpha}h$ *existent, et si l'on suppose que* $h^{(n)}(a)=0$ *pour tout* $n\in\{0,1,......k-1\}$ *, alors la dérivée fractionnaire de Caputo coincide avec celle de Riemann-Liouville, ie.*

$${}^{c}D_{a}^{\alpha}h(t)=D_{a}^{\alpha}h(t)\,,\quad p,p\ t\in[a,b]$$

La dérivée fractionnaire de Caputo est également l'inverse gauche de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

Définition 1.2.5 :

On dit que A est un ensemble équicontinu si pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que $\forall g\in A$ et $\forall x_{1},x_{2}\in[a,b]\,,\ |x_{1}-x_{2}|<\delta$, on a

$$|g(x_{1})-g(x_{2})|<\varepsilon\ .$$

Définition 1.2.6 :

Soit X un espace de Banach de norme $\|.\|$, et $f:X\to X$.

On dit que f est lipshitzienne s'il existe $k\geq0$ tel que

$$|f(x)-f(y)|\leq k\,|x-y|\,,\qquad \forall x,y\in X\ .$$

1.2.5 Théorème d'Ascoli-Arzila :

Soient X et Y deux espaces de Banach. Si X est compact, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1.L'ensemble A est relativement compact dans $C(X, Y)$.

2.$\begin{cases} \bullet \text{ L'ensemble } A \text{ est équicontinu en tout point } x \text{ de } X \\ \bullet\ A(x) := \{f(x),\quad f \in A\} \text{ est borné.} \end{cases}$

1.3 Quelques théorèmes du Point Fixe :

Les théorèmes du point fixe sont très utiles en mathématique et particulièrement dans la résolution des équations différentielles et intégrales.

En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe, ainsi on assure l'existence de la solution d'un problème donné en le transformant en un problème de point fixe, et on détermine éventuellement ces points fixes qui sont les solutions du problème posé.

1.3.1 Théorèmes du Point Fixe de Banach [5] :

Théorème 1.3.1 :

Soient $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $f : X \subset E \to X$ (telle que :X est un fermé de E) est une application contractante. Alors f admet un point fixe unique ie :

$$\exists! x_0 \in X : f(x_0) = x_0$$

1.3.2 Théorèmes du Point Fixe de Schaefer [5] :

Théorème 1.3.2 :

Soient X un espace de Banach et $P : X \to X$ une appllication continue et compact sur X. Si l'ensemble $A = \{x \in X; x = \lambda P, 0 < \lambda < 1\}$ est borné, alors l'application P admet au moins un point fixe.

Chapitre 2

Existence et unicité des solutions :

Ce chapitre présente quelques résultas d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites concernant des équations différentielles fractionnaires avec des conditions non locales.

2.0.3 Problème aux limites avec des conditions non locales :

Soit α un réel positif vérifiant $1 < \alpha \leq 2$.

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}y\left(t\right) = f\left(t, y\left(t\right)\right), \quad t \in J = \left[0, T\right], \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ y\left(0\right) = g\left(y\right), \qquad\qquad y\left(T\right) = y_{T}, \end{cases} \tag{2.0.1}$$

où ${}^{c}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues et $y_T \in \mathbb{R}$

Définition 2.0.1 :

La fonction $y \in C^{2}\left(\left[0, T\right], \mathbb{R}\right)$ avec sa dérivée α existe et intégrable sur $[0, T]$ est dite solution de (2.0.1) si y satisfaite les équations ${}^{c}D^{\alpha}y\left(t\right) = f\left(t, y\left(t\right)\right)$ sur J, et les conditions $y\left(0\right) = g\left(y\right)$ et $y\left(T\right) = y_T$.

Pour l'existence de solutions pour le problème (2.0.1), nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.0.1 [8] :

Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$${}^{c}D^{\alpha}h\left(t\right) = 0$$

admet comme solution :

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1} t^{n-1}$$

Lemme 2.0.2 [8] :

Soit $\alpha > 0$, alors :

$$I^{\alpha c} D^{\alpha} h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1} t^{n-1}$$

où $n = [\alpha] + 1$

Lemme 2.0.3 :

Soit $1 < \alpha \leq 2$, et soit $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ continue, la fonction y est une solution de l'intégrale fractionnaire

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) g(y) + \frac{t}{T} y_T \tag{2.0.2}$$

si et seulement si y est une solution du problèmes aux limites fractionnaires suivant ;

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha} y(t) = h(t) & , \quad t \in [0, T] \\ y(0) = g(y) & , \quad y(T) = y_T \end{cases} \tag{2.0.3}$$

Preuve. : Soit $1 < \alpha \leq 2$, et soit $h : [0, T] \to \mathbb{R}$: □

On suppose que :

$$y(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds$$

on trouve c_0, c_1

$$\begin{aligned} y(0) &= c_0 + c_1.0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^0 (0-s)^{\alpha-1} h(s)\, ds \\ &\Rightarrow c_0 = g(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(T) &= c_0 + c_1.T + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\,ds \\ &= y_T \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} g(y) &= c_0 \\ y_T &= c_0 + c_1.T + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\,ds \end{aligned}$$

on remplace c_0 par $g(y)$, et on obtient :

$$y_T = g(y) + c_1.T + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\,ds$$

Donc

$$c_1 = \frac{1}{T}\left[-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\,ds - g(y) + y_T\right]$$

on remplace c_0, c_1 par ses valeurs, on trouve :

$$\begin{aligned} y(t) &= g(y) + \frac{t}{T}\left[-\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\,ds - g(y) + y_T\right] + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\,ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)\,ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)\,ds - \left(\frac{t}{T} - 1\right) g(y) + \frac{t}{T} y_T \end{aligned}$$

Notre premier résultat est basé sur le théorème du point fixe de Banach.

2.0.4 Le premier résultat :

Théorème 2.0.3 :

On suppose que :

(H_1) : Il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$\left|f(t,u) - f\left(t,\bar{u}\right)\right| \leq k\left|u - \bar{u}\right|; \quad u, \bar{u} \in \mathbb{R}, \quad t \in J$$

(H_2) : Il existe une constante $k^* > 0$ telle que :

$$\left| g(u) - g\left(\bar{u}\right) \right| \leq k^* \left| u - \bar{u} \right| ; \quad u, \bar{u} \in C\left([0, T]; \mathbb{R}\right), \ t \in J$$

si

$$\frac{2kT^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + k^* < 1 \tag{2.0.4}$$

Alors le problème aux limites (2.0.1) admet une unique solution dans $[0, T]$.

Preuve. : □

On transforme le problème (2.0.1) au un problème de point fixe. Considérons l'opérateur $F : C([0, T], \mathbb{R}) \to C([0, T], \mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{aligned} F(y)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))\, ds \\ &\quad - \left(\frac{t}{T} - 1\right) g(y) + \frac{t}{T} y_T \end{aligned}$$

clairement, les points fixes de l'opérateur F sont solutions du problème (2.0.1). On utilise le théorème de Banach pour montrer que F admet un point fixe unique.

Soient $x, y \in C([o, T], \mathbb{R})$ .Alors, pour tout $t \in J$ on a :

$$
\begin{aligned}
|F(x)(t)-F(y)(t)| &= \Bigg|\Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))\,ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))\,ds \\
&\quad -\left(\frac{t}{T}-1\right) g(x) + \frac{t}{T} y_T\Bigg] \\
&\quad +\Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\,ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\,ds \\
&\quad -\left(\frac{t}{T}-1\right) g(y) + \frac{t}{T} y_T\Bigg]\Bigg| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,x(s))-f(s,y(s))|\,ds \\
&\quad + \frac{t}{T\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s,x(s))-f(s,y(s))|\,ds + |g(x)-g(y)| \\
&\leq \frac{k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,ds + \frac{k\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\,ds + k^*\|x-y\|_\infty \\
&< \frac{2kT^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}\|x-y\|_\infty + k^*\|x-y\|_\infty
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\|F(x)-F(y)\|_\infty \leq \left[\frac{2kT^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} + k^*\right]\|x-y\|_\infty
$$

puisque, F est une contraction et d'aprés le théorème de Banach, F admet un seul point fixe qui l'unique solution du problème (2.0.1).

2.0.5 Le deuxième résultat :

Théorème 2.0.4 :

Supposons que :

(H_3) . $f : [0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue.

(H_4) . Il existe une constante $M>0$ telle que :

$$
|f(t,u)| \leq M \quad ; t\in[0,T], u\in\mathbb{R}.
$$

(H_5) . Il existe une constante $M_1 > 0$ telle que :

$$|g(y)| \leq M_1 \quad ; y \in C([0,T], \mathbb{R}).$$

alors le problème aux limites (2.0.1) admet au moins une solution sur $[0,T]$.

Preuve. : On utilise le théorème de point fixe de Schaefer pour démontrer que F définie dans le premier résultat admet un point fixe. Il faut passer par 4 étapes. □

Étape 1 : "F est continue".

Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite telle que $y_n \to y$ dans $C([0,T], \mathbb{R})$.

Alors, $\forall t \in [0,T]$ on a :

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t) - F(y)(t)| &= \Bigg| \Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_n(s))\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y_n(s))\, ds \\
&\quad - \left(\frac{t}{T} - 1\right) g(y_n) + \frac{t}{T} y_T \Bigg] \\
&\quad + \Bigg[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))\, ds \\
&\quad - \left(\frac{t}{T} - 1\right) g(y) + \frac{t}{T} y_T \Bigg] \Bigg| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))|\, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-1)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))|\, ds + |g(y_n) - g(y)| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-1)^{\alpha-1} \sup_{s\in[0,T]} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))|\, ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-1)^{\alpha-1} \sup_{s\in[0,T]} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))|\, ds + |g(y_n) - g(y)|
\end{aligned}$$

Comme f et g sont des fonctions continues,alors on a :

$$\|F(y_n)(t) - F(y)(t)\| \to 0 \qquad \text{quand } n \to \infty$$

Étape 2 : "F transforme un ensemble borné en un ensemble borné dans $C([0,T], \mathbb{R})$".

En effet, C'est assez pour montrer que $\forall \eta^* > 0$, $\exists l > 0$ telle que $y \in B_{\eta^*} - \{y \in C([0,T],\mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq \eta^*\}$, alors il faut montrer que $\|F(y)\|_\infty \leq l$, par (H_4) et (H_5) on a $\forall t \in [0,T]$.

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\, ds - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))\, ds \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{t}{T} - 1\right) g(y) + \frac{t}{T} y_T \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,y(s))|\, ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s,y(s))|\, ds \\
&\quad +2|g(y)| + |y_T| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, ds - \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\, ds + 2M_1 + |y_T| \\
&\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + 2M_1 + |y_T| .
\end{aligned}$$

Donc

$$\|F(y)(t)\| \leq \frac{2MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + 2M_1 + |y_T| := l.$$

Étape 3 : "F transforme un ensemble borné en un ensemble équicontinue dans $C([0,T],\mathbb{R})$".

Soient $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$, B_{η^*} est un ensemble borné de $C([0,T],\mathbb{R})$ comme dans étape

2, et soit $y \in B_{\eta^*}$. Alors :

$$\begin{aligned}
|F(y)(t_2) - F(y)(t_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right] f(s, y(s))\, ds \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s))\, ds \right| \\
&\quad + \frac{t_2 - t_1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^{T} (T - s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| + \frac{t_2 - t_1}{T} |g(y)| + \frac{t_2 - t_1}{T} |y_T| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1} \right] ds + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \\
&\quad + M \frac{t_2 - t_1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^{T} (T - s)^{\alpha-1} ds + \frac{t_2 - t_1}{T} M_1 + \frac{t_2 - t_1}{T} |y_T| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(t_2 - t_1)^{\alpha} + t_1^{\alpha} - t_2^{\alpha} \right] + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^{\alpha} \\
&\quad + M \frac{t_2 - t_1}{T\Gamma(\alpha)} T^{\alpha} + \frac{t_2 - t_1}{T} M_1 + \frac{t_2 - t_1}{T} |y_T| .
\end{aligned}$$

Quand $t_1 \to t_2$, le second membre de cette dernière inégalit tend vers zéro, Ainsi les étapes 1 à 3 et d'aprés le théorème d'Ascoli-Arzila, d'où $F : C([0,T], \mathbb{R}) \to C([0,T], \mathbb{R})$ est complètement continue.

Étape 4 : "Les limites à priori".

Maintenant il reste montrer que l'ensemble

$$\varepsilon = \{ y \in C(J, \mathbb{R}) : y = \lambda F(y) \quad 0 < \lambda < 1 \}$$

est borné.

$$F(y)(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t} (t - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) - \frac{\lambda t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^{T} (T - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) - \lambda \left(\frac{t}{T} - 1 \right) g(y) + \lambda \frac{t}{T} y_T.$$

Cela implique par (H_4) et (H_5) qui pour chaque $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) - \frac{\lambda t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) \\
&\quad -\lambda \left(\frac{t}{T} - 1\right) g(y) + \lambda \frac{t}{T} y_T \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} + 2M_1 + |y_T| \\
&\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + 2M_1 + |y_T| .
\end{aligned}$$

Donc pour chaque $t \in [0, T]$, on a :

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha + 2M_1 + |y_T| := R.$$

Cela montre que l'ensemble ε est borné. par suite théorème du point fixe de scheafer. nous déduisons ce F a un point fixe qui est une solution du problème (2.0.1).

2.0.6 Exemple :

On considère le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{aligned}
{}^c D^\alpha y(t) &= \frac{\exp(-t) |y(t)|}{(9 + \exp(t))(1 + |y(t)|)}, \qquad t \in J := [0, 1], 1 < \alpha \leq 2 \qquad (2.0.5) \\
y(0) &= \sum_{i=1}^n c_i y(t_i), \qquad y(1) = 0
\end{aligned}$$

où $0 < t_1 < t_2 < ..... < t_n < 1$, c_i, $i = 1.....n$ est donné des constantes positives avec $\sum_{i=1}^n c_i < \frac{4}{5}$.L'ensemble

$$f(t, x) = \frac{\exp(-t) x}{(9 + \exp(t))(1 + x)}, \quad (t, x) \in J \times [0, \infty),$$

et

$$g(y) = \sum_{i=1}^n c_i y(t_i) .$$

Soit $x, y \in [0, \infty)$ et $t \in J$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
|f(t,x) - f(t,y)| &= \frac{\exp(-t)}{(9+\exp(t))} \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| \\
&= \frac{\exp(-t)\,|x-y|}{(9+\exp(t))(1+x)(1+y)} \\
&\leq \frac{\exp(-t)}{(9+\exp(t))} |x-y| \\
&\leq \frac{1}{10} |x-y|
\end{aligned}$$

D'où la condition (H_1) avec $k = \frac{1}{10}$, et on a :

$$|g(x) - g(y)| \leq \sum_{i=1}^{n} c_i |x-y|$$

Donc (H_1) est satisfait avec $k^* = \sum_{i=1}^{n} c_i$. nous vérifierons cette condition (2.0.4) est satisfaite avec $T = 1$. En effet

$$\frac{2kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + k^* = \frac{1}{5\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i < 1 \Longleftrightarrow \Gamma(\alpha+1) > 1,$$

qui conviendrait pour tout $\alpha \in (1, 2]$. Alors par le théorème 1 le problème (2.0.5) a une solution unique sur $[0, 1]$.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites concernant les équations différentielles fractionnaires avec des conditions non locales.

Les résultats obtenus sont basés sur l'argument du piont fixe, en particulier nous avons utilisé le théorème du point fixe de Banach [8], et de Scheafer [8] .

Nous pourrons dans le future utiliser l'alternative non linéaire de Leray-Schauder pour montres l'existence des solutions de ce problème où les conditions sont plus faibles.

Bibliographie

[1] M.Benchohra, S.Hamani and S.K.Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, Nonlinear Analysis, V(71), (2009) 2391-2396

[2] L. Byszewski, V. Lakshmikanthan. Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy priblem in a Banach space. Appl. Anal. 40(1991) 11-19.

[3] K. Diethelm and A.D. Freed : On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modeling of viscoplasticity. Scientifice Computing in Chemical Engineering. Springer- Verlag, Heidelberg, (1999).

[4] A.M.A. El-Sayed, Fractional order evolution equation. J.Fract. Calc. 7(1995) 89-100.

[5] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Sringer-Verlas, New York, 2003.

[6] A.A. Kilbas, S.A.Marzan, Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions. Diff. Equ. 41 (2005) 84-89.

[7] S.Roudjane.Senouci, Problèmes Aux Limites D'ordre Fractionnaire, Master (MCO) 2012-2013,Université de Mostaganem.

[8] S.Zhang. Positive solution for boundary-value problem of nonlinear fractional differential equation, Electron. J.Differential Equation, No.36, pp 12(2006).