

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique Algérie**  
**Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem**



**Faculté des Sciences Exactes et Informatique**  
**Département de Mathématiques et Informatique**

**MÉMOIRE DE PROJET DE FIN D'ÉTUDES**

Pour l'Obtention du Diplome de Master en Mathématique

SPÉCIALITÉ : MODÉLISATION CONTRÔLE & OPTIMISATION

Thème

**Modélisation & Simulation de la Propagation des Feux  
dans la Forêt**

Présenté par

**Melle BOUKRÂA Salima**

Encadreur :

Mr BELHAMITI Omar, Maître de Conférences, Université de Mostaganem.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>2</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Rappels</b>	<b>2</b>
1.1 Polynômes de Lagrange : . . . . .	2
1.2 Dérivée de polynomes de Lagrange . . . . .	3
1.3 Equation différentielle ordinaire . . . . .	4
1.4 Résidu pondéré . . . . .	6
1.4.1 La méthode de collocation par points . . . . .	7
1.4.2 La méthode de collocation par sous domaine . . . . .	7
1.4.3 La méthode des moments . . . . .	7
1.4.4 La méthde de Galerkin . . . . .	7
<b>2 La méthode de résolution</b>	<b>8</b>
2.1 Developpement de la méthode de Galerkin . . . . .	8
2.2 Dcouplage Quasi Linéarésation Technique . . . . .	11
2.3 Test de la méthode . . . . .	11
<b>3 La modélisation de la propagation des feux de forêt</b>	<b>15</b>
3.1 Modélisation . . . . .	15
3.2 Les incendies dans les forêt . . . . .	15
3.3 Le modèle pour décrire les incendies de forêt . . . . .	18
<b>Bibliographie</b>	<b>22</b>

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu pour la force intellectuelle et physique qu'il m'a offerte afin de réaliser ce travail dans de bonnes conditions morales tout en espérant qu'il sera à la hauteur de vos attentes et de celles de mes proches. Je remercie aussi mes parents pour tous les efforts déployés, mon encadreur Mr BELHAMITI Omar pour sa patience et son assistance dans l'élaboration et la conception de ce mémoire.

Mes sincères remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont accordé à ma recherche en acceptant de l'examiner et de l'enrichir par leurs propositions. Par ailleurs, je remercie mes professeurs qui m'ont forgé à travers les connaissances qu'ils m'ont transmis tout au long de mon cursus universitaire, et toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce projet.

# Introduction

Depuis des siècles la forêt a joué et continue de tenir un rôle important dans le développement de l'humanité par ses multiples fonctions.

Les pouvoirs publics ont pris conscience de cette grande importance de ce patrimoine, ils inscrivent annuellement des programmes de protection d'entretien, et de développement. Malgré toute cette volonté politique, au fil des ans on enregistre des catastrophes incendiaires qui surgissent d'une manière tantôt volontaire et tantôt d'une manière involontaire, l'étude des images satellitaires (Fig. 1) de nombreuses catastrophes incendiaires enregistrées à travers certains pays démontre l'ampleur des dégâts causés.

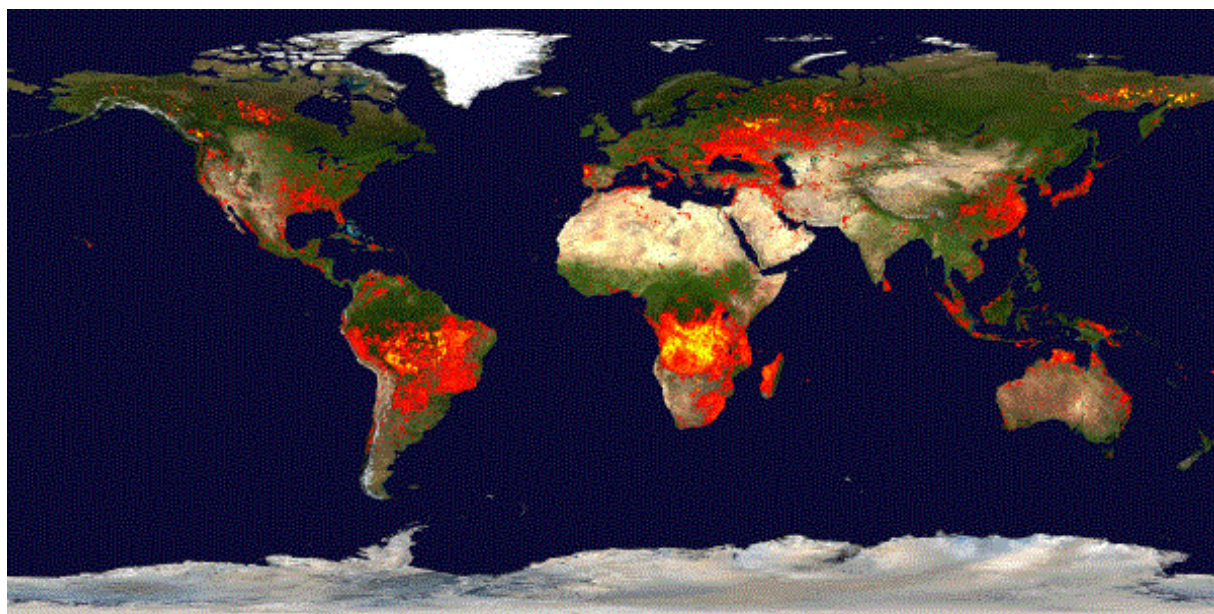


FIG. 1 - Les satellites d'observation témoins des incendies de l'été 2010 dans le monde

Cette situation descriptive a imposée aux scientifiques de faire appel à des études approfondies pour maintenir un environnement stable sain, et sans dégât.

Le scientifique peut améliorer et créer des outils d'aide à la décision grâce à une meilleure connaissance des mécanismes physiques de propagation du feu. Il s'agit d'aller un peu plus loin que de considérer uniquement l'information qualitative donnée par le mécanisme élémentaire connu sous le nom de triangle du feu (Fig. 2)

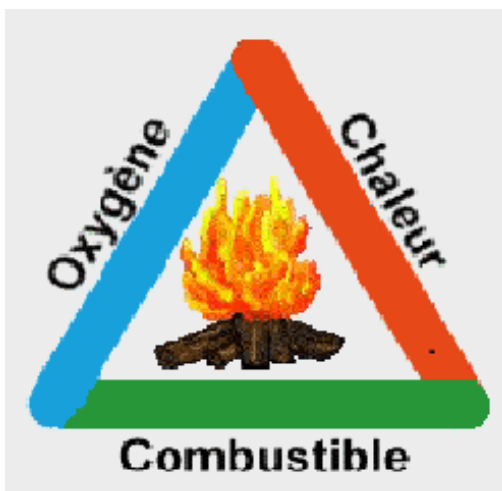


FIG. 2 - Triangle de feu

Notre document est élaboré sur la base de nos études en modélisation et simulation ayant pour thème l'étude de la propagation des feux dans la forêt, tout en utilisant la méthode de Galerkin combinée avec la méthode DQLT.

La présentation de ce document est organisée de la façon suivante :

Chapitre 1 : décrit les rappels sur les outils mathématique tel que les polynômes de Lagrange et sa dérivée, les équations différentielles et la méthode des résidu pondéré.

Chapiter 2 : retrace la méthode Galerkin combiné avec DQLT, que nous avons choisit comme élément clé pour résoudre le problème de la propagation des feux de forêt, après avoir testé son efficacité par des exemples académique.

Chapiter 3 : non seulement il met en relief la gravité des incendies de forêt, mais aussi il expose mes travaux qui consistent a posé mon modèle et sa simulation.

# Chapitre 1

## Rappels

### 1.1 Polynômes de Lagrange :

Les polynômes de Lagrange, du nom de Joseph-Louis Lagrange mathématicien français né en 1736 et mort en 1813.

**Définition 1.1** Soient  $n$  un entier naturel,  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $(n+1)$  point complexes deux à deux distincts sur  $[a, b]$ , on définit les polynômes de Lagrange par la formule suivante :

$$l_i(x) = \frac{(x - x_k) \cdots (x - x_{i-1}) (x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_k) \cdots (x_i - x_{i-1}) (x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \quad 0 \leq i \leq n$$

qui peut se présenter aussi :

$$l_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}. \quad (1.1)$$

L'une des propriétés fondamentale des polynômes de Lagrange est de satisfaire  $\delta_{ij}$  (le symbole de Kronecker)

$$\delta_{ij} = l_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases},$$

**Proposition 1.1** Les polynômes de Lagrange  $l_0, l_1, \dots, l_n$  forment une base de l'espace vectoriel des polynômes  $\mathbb{R}_n[X]$  de degré au plus  $n$ .

*Preuve.* [1] ■

## 1.2 Dérivée de polynômes de Lagrange

Il est connu que les polynôme de Lagrange représentent des fonctions régulières. On définit la dérivée du polynôme de Lagrange par la formule suivante :

$$l'_i = \frac{\sum_{\substack{s=0 \\ s \neq i}}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq s}}^n (x - x_k)}{\prod_{\substack{s=0 \\ s \neq i}}^n (x_i - x_s)} \quad (1.2)$$

**Preuve.** Pour déterminer la dérivée première de polynôme de Lagrange, on utilise le raisonnement par récurrence.

Soient  $p_0, p_1, \dots, p_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(n + 1)$  fonctions polynômiales, on calcul la dérivée d'un produit de deux polynômes,

$$\frac{d}{dx}(p_0 \times p_1) = p'_0 \times p_1 + p_0 \times p'_1,$$

ensuite, pour trois polynômes, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(p_0 \times p_1 \times p_2) &= (p_0 \times p_1)' \times p_2 + (p_0 \times p_1) \times p'_2 \\ &= (p'_0 \times p_1 + p_0 \times p'_1) \times p_2 + p_0 \times p_1 \times p'_2 \\ &= p'_0 \times p_1 \times p_2 + p_0 \times p'_1 \times p_2 + p_0 \times p_1 \times p'_2. \end{aligned}$$

On suppose que la formule est vraie jusqu'à  $n - 1$

$$\frac{d}{dx} \left( \prod_{i=0}^{n-1} p_i \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n-1} p_i p'_j,$$

on calcul la dérivée pour un produit  $n$  polynôme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \prod_{i=0}^n p_i \right) &= \frac{d}{dx} \left( \prod_{i=0}^{n-1} p_i \times p_n \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( \prod_{i=0}^{n-1} p_i \right) \times p_n + \prod_{i=0}^{n-1} p_i \times p'_n \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n-1} p_i p'_j p_n + \prod_{i=0}^{n-1} p_i \times p'_n \\ &= \sum_{j=0}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n p_i p'_j. \end{aligned}$$

Maintenant, on peut déduire que la dérivée du polynôme de Lagrange est

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(l_i) &= \frac{d}{dx} \left( \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} \right) \\
 &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{(x_i - x_k)} \cdot \frac{d}{dx} \left( \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (x - x_k) \right) \\
 &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{(x_i - x_k)} \cdot \sum_{\substack{s=0 \\ s \neq i}}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq s}}^n (x - x_k)(x - x_s) \\
 &= \frac{\sum_{\substack{s=0 \\ s \neq i}}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq s}}^n (x - x_k)}{\prod_{\substack{s=0 \\ s \neq i}}^n (x_i - x_s)} \quad \forall 0 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

■

**Remarque 1.1** Les polynômes de Lagrange  $l_i(x)$  forment une base de  $L^2([a, b])$ .

### 1.3 Equation différentielle ordinaire

Les problèmes posés ou menant à des équations différentielles sont aussi vieux que l'analyse elle-même, avant même qu'on ait complètement élucidé la question des infiniment petits, on se préoccupe déjà de résoudre des problèmes de tangente, qui mènent invariablement à une équation différentielle.

Depuis trois siècles et demi, la théorie des équations différentielles joue un rôle essentiel aussi bien dans les divers domaines des mathématiques que dans d'autres sciences, elle sont utilisées pour construire des modèles mathématiques, de phénomènes physiques et biologiques, Par conséquent, elles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

Pour un mathématicien de la fin du  $XVII^{eme}$  siècle/début du  $XVIII^{eme}$  siècle, résoudre une équation différentielle consiste à écrire la solution générale de l'équation, et de préférence en termes finis et avec des fonctions élémentaires, à cette étape Il n'est pas question de problème de conditions initiales.



En mathématiques, une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

L'adjectif ordinaire est surtout là pour faire la distinction entre les *E.D.O* et les *E.D.P* (équations aux dérivées partielles).

**Définition 1.2** Soient  $E$  un espace vectoriel normé,  $R$  une fonction continue de  $(n + 1)$  variables,  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $(\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C})$  de classe  $C^n$  et  $g$  une fonction de la variable  $x$ .

– L'équation différentielle de manière générale :

$$R(x, f, f', f'', \dots, f^n)(x) = g(x).$$

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $(\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C})$  dérivable. Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois fonctions à variable réelle, avec  $a$  non nul.

– Une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre un :

$$a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x).$$

– Une équation différentielle ordinaire linéaire homogène d'ordre un :

$$a(x)f'(x) + b(x)f(x) = 0$$

soit  $h$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  dans  $(\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C})$  non linéaire

– Une équation différentielle ordinaire non linéaire d'ordre un :

$$f'(x) = h(x)$$

– Un système d'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \cdots + a_{1n}y_n + b_1(t) \\ y' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \cdots + a_{2n}y_n + b_2(t) \\ \vdots \\ y' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 \cdots + a_{nn}y_n + b_n(t). \end{cases}$$

– où, les inconnues sont  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , fonctions de la variable réelle  $t$ , à valeurs dans  $(\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C})$ , dérivables par rapport à la variable réelle  $t$ , les  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sont des fonctions continue sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Et les coefficient  $a_{i,j}$  représentent :  $A = (a_{i,j}) \in M_{nn}(\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C})$ .

## 1.4 Résidu pondéré

Dans les années 40, des ingénieurs (Hrennikoff, Mc Henry) posent les bases d'une méthode de résolution des EDP par une approximation simple des variables inconnues, et en 1956, Turner introduit le concept d'élément fini.

Dès 1960 la méthode est également reformulée à partir des considérations énergétiques et variationnelles sous la forme générale des résidus pondérés.

La méthode utilise comme point de départ les équations différentielles définies sur l'intérieur du domaine, et les conditions aux limites du problème définies sur la frontière du domaine.

Soit un problème d'inconnue  $y$ , défini sur un domaine  $\Omega$  avec des conditions aux limites sur la frontière du domaine,

$$\begin{cases} L(y) = f & \text{sur } \Omega \\ \text{conditions aux limites.} \end{cases}$$

Si on suppose que  $y$  appartient à  $L^2(\Omega)$ , alors

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \varphi_i(x), \quad (1.3)$$

où les composantes  $y_i$  deviennent les inconnues du problème et  $\varphi_i$  forme une base dans  $L^2$ .

Pour le calcul numérique, on tronque la série (1.3)

$$y(x) \simeq \sum_{i=0}^N y_i \varphi_i(x). \quad (1.4)$$

On peut choisir pour  $\varphi_i$  les polynômes de Lagrange  $l_i(x)$ .

En remplaçant (1.4) dans l'équation de problème, on obtient

$$R(x) = L\left(\sum_{i=0}^N y_i \varphi_i(x)\right) - f \neq 0.$$

La méthode des résidus pondérés consiste à minimiser l'erreur commise, en la pondérant sur le domaine. Le principe ici est de multiplier le  $R(x)$  par une fonction de pondération ou encore dite fonction poids  $\psi$ , et on intègre sur  $\Omega$

$$\int_{\Omega} R(x) \psi(x) dx = 0$$

où,  $\psi$  est une fonction de classe  $C^\infty$  à support compacte.

Le choix de  $\psi$  abouti à plusieurs méthodes, les plus connues de ces méthodes sont :

### 1.4.1 La méthode de collocation par points

Cette méthode consiste à utiliser comme fonctions de pondération des fonctions de Dirac. Ce qui revient à annuler l'erreur d'approximation en un nombre fini de points du domaine. L'intérêt est évident : c'est la simplicité de mise en oeuvre, à savoir le calcul de l'intégrale sur le domaine est évité. Par contre, les résultats sont très sensibles au choix des points de collocation, et les matrices obtenues sont quelconques, dans cette méthode le choix de la fonction test est comme suit :

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i = x_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### 1.4.2 La méthode de collocation par sous domaine

Cette méthode consiste à choisir  $n$  sous domaine  $v^i$  de l'intervalle  $[a, b]$ , et prenons comme fonction de pondération  $\psi_i$  la fonction caractéristique de chaque sous domaine :

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ appartient à } v^i \\ 0 & \text{si } x \text{ n'appartient pas à } v^i, \end{cases}$$

or la précision de la solution dépend du choix des sous domaine  $v^i$ . Cette méthode est plus précise que la précédente, mais le désavantage qu'elle a le calcul d'intégrale sur chaque  $v^i$ .

### 1.4.3 La méthode des moments

Le choix de la fonction de pondération dans cette méthode est le suivant :

$$\psi_i(x) = x^i$$

### 1.4.4 La méthode de Galerkin

**Galerkin** a choisit comme fonctions tests les éléments de la base de l'espace des solutions.

Dans la suite de notre travail on a été intéressé par la méthode de Galerkin.

# Chapitre 2

## La méthode de résolution

La méthode de Galerkin est une méthode très intéressante et très robuste, elle est couramment utilisée dans la méthode des éléments finis.

La méthode de **Galerkin**, comme toute méthode de résolution numérique, cherche à résoudre de manière discrète la solution d'une équation aux dérivées partielles / équation différentielle ordinaire, dont on cherche une solution approchée sur un domaine. On ajoute à l'équation des conditions aux bords permettant d'assurer l'existence et unicité d'une solution, ainsi que des conditions initiales dans le cas d'une étude d'évolution temporelle (conformément au théorème de Cauchy-Lipschitz).

La solution approchée est définie sur  $\Omega$  par :

$$y(x) = \sum_{i=0}^n y_i \varphi_i(x). \quad (2.1)$$

### 2.1 Développement de la méthode de Galerkin

Dans cette section, on considère le problème type suivant :

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = f(x) & x \text{ sur } ]0, 1] \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

on utilise l'approximation (2.1) et sa dérivée dans l'équation du problème, se qui résulte

$$\sum_{i=0}^n y_i l'_i(x) + a(x) \sum_{i=0}^n y_i l_i(x) \neq f(x)$$

d'où le résidu est représenté par :

$$R(x) = \sum_{i=0}^n y_i l'_i(x) + a(x) \sum_{i=0}^n y_i l_i(x) - f(x) \neq 0.$$

Le but est de minimiser ce résidu, en le pondérant sur  $]0, 1]$  par une fonction test représenté ici par le polynome de Lagrange, on obtien

$$\int_0^1 R(x) l_i(x) dx = \sum_{i=0}^n y_i \int_0^1 ((l'_i(x) l_j(x) + a(x) l_i(x) l_j(x)) - f(x) l_j(x)) dx = 0. \quad (2.3)$$

A titre d'exemple, on a fait un calcul des quantités interieur de la somme.

Pour  $x = [0, 0.5, 1]$ , les polynômes de Lagrange

$$l_0(x) = (1 - 2x)(1 - x)$$

$$l_1(x) = (2 - 2x)2x$$

$$l_2(x) = (2x - 1)x,$$

la dérivée des polynômes de Lagrange

$$dl_0(x) = 4x - 3$$

$$dl_1(x) = -8x + 4$$

$$dl_2(x) = 4x - 1,$$

et

$$\int_0^1 l_i(x) \cdot l_j(x) dx = \begin{pmatrix} 0.1333 & 0.0667 & -0.0333 \\ 0.0667 & 0.5333 & 0.0667 \\ -0.0333 & 0.0667 & 0.1333 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^1 l'_i(x) \cdot l_j(x) dx = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.6667 & 0.1667 \\ 0.6667 & 0 & -0.6667 \\ -0.1667 & 0.6667 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Pour  $x = [0, 0.25, 0.50, 0.75, 1]$ , les polynômes de Lagrange

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= 2 \cdot 10^{-10} (4x - 1)(2x - 1) (6.6665 \cdot 10^9 x - 4.9999 \cdot 10^9) (x - 1.) \\
l_1(x) &= -(2x - 1)(4x - 3)(x - 1)5.3332x \\
l_2(x) &= 4t (4t - 1) (4x - 3)(x - 1) \\
l_3(x) &= -(4x - 1)(2x - 1)(x - 1)5.3332x \\
l_4(x) &= (6.6665 \cdot 10^9 x - 1.6666 \cdot 10^9)(2x - 1)(4x - 3)2 \cdot 10^{-10}x
\end{aligned}$$

la dérivée des polynômes de Lagrange

$$\begin{aligned}
dl_0(x) &= 42.6666x^3 - 79.9998x^2 + 46.6666x - 8.3332 \\
dl_1(x) &= -170.6666x^3 + 287.9999x^2 - 138.6666x + 16 \\
dl_2(x) &= 256x^3 - 384x^2 + 152x - 12 \\
dl_3(x) &= -170.6666x^3 + 223.9999x^2 - 74.6665x + 5.3332 \\
dl_4(x) &= 42.6666x^3 - 47.9999x^2 + 14.6666x - 0.9996
\end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 l_i(x).l_j(x)dx = \begin{pmatrix} 0.0514 & 0.0522 & -0.0306 & 0.0098 & -0.0051 \\ 0.0522 & 0.316 & -0.0677 & 0.0451 & 0.0098 \\ -0.0306 & -0.0677 & 0.3301 & -0.0677 & -0.0306 \\ 0.0098 & 0.0451 & -0.0677 & 0.3160 & 0.0522 \\ -0.0051 & 0.0098 & -0.0306 & 0.522 & 0.0515 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^1 l'_i(x).l_j(x)dx = \begin{pmatrix} -0.4998 & -0.7788 & 0.4254 & -0.2032 & 0.0566 \\ 0.7788 & 0 & -1.1175 & 0.5418 & -0.2032 \\ -0.4254 & 1.1175 & 0 & -1.1175 & 0.4254 \\ 0.2032 & -0.5418 & 1.1175 & 0 & -0.7788 \\ -0.0566 & 0.2032 & -0.4254 & 0.7788 & 0.4998 \end{pmatrix}$$

L'écriture compacte de l'équation (2.3) est donnée par

$$AY = F \tag{2.4}$$

où

$$A_{ij} = \int_0^1 ((l'_i(x)l_j(x) + a(x)l_i(x)l_j(x))) dx,$$

$$F_j = \int_0^1 f(x)l_j(x)dx$$

et

$$Y = [y_0, y_1, \dots, y_n]^T.$$

Pour trouver la solution de problème (2.2), il suffit de résoudre le système algébrique (2.4).

## 2.2 Dcouplage Quasi Linéarisation Technique

Soit un système de deux équations différentielle ordinaires non linéaire sur un domaine  $[0, 1]$

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2). \end{cases}$$

La technique itérative de découplage et linéarisation permet sur chaque itération de transformer ce système en un système d'équation différentielles découplées et linéaires, en écrivant le système sous une forme variationnelle par schémat le plus simple suivant :

$$\begin{cases} y_1^{(k+1)} = f_1(x, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}) \\ y_2^{(k+1)} = f_2(x, y_1^{(k)}, y_2^{(k)}). \end{cases}$$

L'objectif de cette technique est de séparer et linéariser les variables dépendantes du système, puis résoudre les équation une par une indépendamment.

## 2.3 Test de la méthode

Dans cette partie de notre travail, on vas tester la méthode **DQLT** combiné avec la méthode de **Galerkin** sur l'exemple suivant :

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = e^x + 2e^{2x} \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

dont la solution exacte est :

$$y(x) = e^x$$

Le présent tableaux représente l'erreur ponctuelle, on constate qu'il une amélioration de l'erreur quand  $n$  augmente.

$n = 3$	$n = 5$	$n = 7$	$n = 9$	$n = 11$
0	0	0	0	0
$2.0204e - 03$	$1.8277e - 04$	$2.5045e - 06$	$2.0596e - 08$	$3.6155e - 09$
$3.1572e - 02$	$7.9095e - 05$	$9.1493e - 07$	$6.3142e - 08$	$6.1922e - 09$
—	$3.9943e - 05$	$5.7828e - 08$	$1.1528e - 07$	$7.5902e - 09$
—	$3.5153e - 04$	$7.3145e - 07$	$1.8788e - 07$	$1.0263e - 08$
—	—	$7.5879e - 07$	$3.0740e - 07$	$1.3238e - 08$
—	—	$5.1191e - 07$	$4.4155e - 07$	$1.4935e - 08$
—	—	—	$5.5703e - 07$	$1.6270e - 08$
—	—	—	$2.1125e - 07$	$1.1118e - 08$
—	—	—	—	$4.0430e - 08$
—	—	—	—	$4.6313e - 07$



La courbe de la figure (Fig. 2.1) indique que l'erreur diminue exponentiellement ce qui prouve que la méthode DLQT donne une bonne quasi-linéarisation.

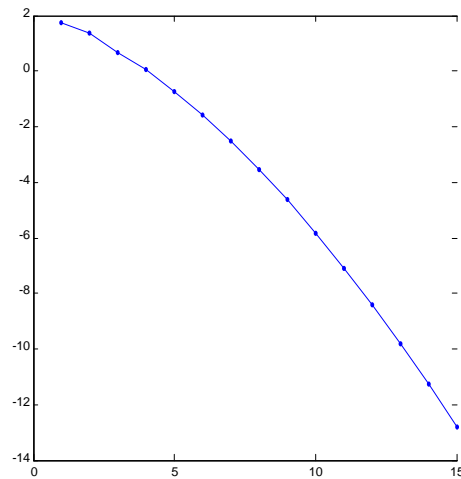


FIG. 2.1 - L'erreur de la Méthode DLQT

Les courbes de la figure (Fig. 2.2) met en relief la solution exacte juxtaposée à la solution approchée ce qui démontre que la méthode converge parfaitement.

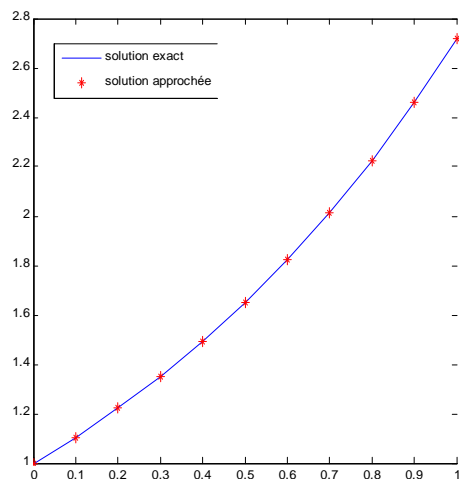


FIG. 2.2 - Les solutions Exacte et Approche

La courbe de la figure (Fig. 2.3) à chaque fois qu'on minimise le sous domaine l'erreur déminue.

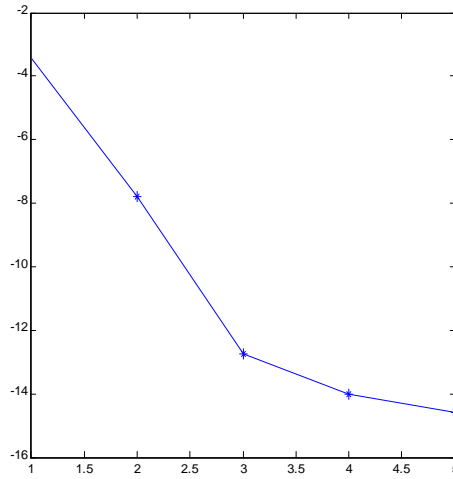


FIG. 2.3 - L'erreure de la Méthode de Galerkin et DQLT

# Chapitre 3

## La modélisation de la propagation des feux de forêt

### 3.1 Modélisation

Simplifier le réel, pour mieux le comprendre, ce principe, énoncé par Aristote dès l'Antiquité est à l'origine de la notion de modèle, structuré au sein des mathématiques dès les années 1930, elle prend une dimension importante d'une manière plus empirique, au sein de la physique, de l'économie ou des sciences sociales.

La modélisation est initialement un outil dédié à la connaissance scientifique, elle se tourne vers des objectifs plus opérationnels après la Seconde Guerre mondiale (simulation pour le nucléaire militaire ou météorologie) et devient dès lors également un instrument prédictif. John von Neumann (Automate cellulaire) et Alan Turing (Intelligent machinery) ouvrent, dès la fin des années 1940, les perspectives les plus larges, évoquant même la perspective de l'« intelligence artificielle ».

### 3.2 Les incendies dans les forêt

l'incendie de forêt le plus meurtrier semble être celui des 8 et 9 octobre 1871 à Peshtigo (Winsconsin/Etats-Unis), qui a fait entre 800 et 1.200 morts, selon les estimations. Le feu, qui s'était déclaré dans la bourgade forestière de 1.700 habitants avait ravagé seize autres villages, répartis sur 500.000 hectares (Fig. 3.1).

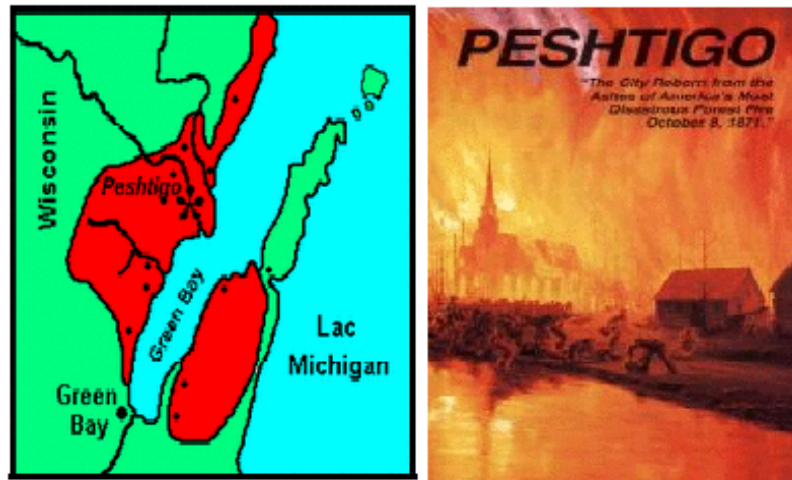


FIG. 3.1 - 8-9 octobre 1871 Peshtigo  
(Winsconsin/Etats-Unis)

Les feux de forêt constituent un phénomène chronique et récurrent qui menacent de nombreux pays dans le monde et plus particulièrement ceux du bassin méditerranéen tel que Portugal, l'Italie, la Grèce, et le Maroc.

Les récents statistiques démontrent que les incendies sont la cause principale de l'extermination des forêts dans les pays du pourtour méditerranéen, environ 50.000 incendies/année ravagent une superficie de 700.000 à 1million d'hectares de forêt méditerranéenne.

Bien que le Maroc enregistre une grande variation inter-annuelle, il a été constaté, au cours des dix dernières années, une tendance progressive du nombre d'incendies et de superficie ravagée, particulièrement dans le nord du pays pour deux raisons : la sensibilité élevée au feu des formations forestières, et la forte pression anthropique exercée sur le domaine forestier ([2]).

La lecture de la (Fig. 3.2) et le tableau montrent que durant les périodes 1960 – 2004 et 2009 – 2011 respectivement 12.912 et 6941 incendies ont ravagés de manière respective 149.292 et 1.101 d'hectares de forêt,

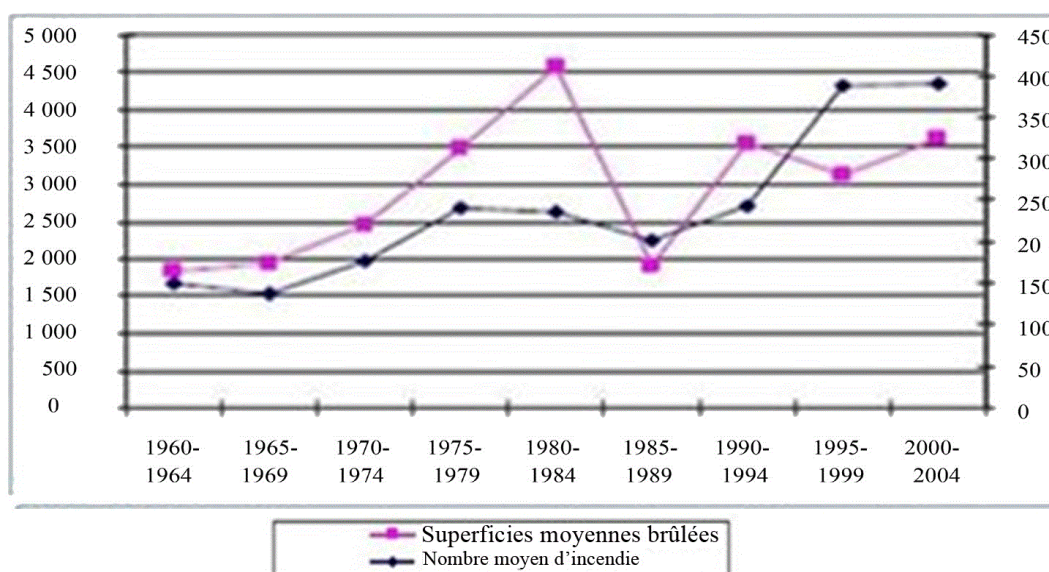


FIG. 3.2 - Evolution des incendies de forêts au Maroc par tranche de 5 ans

Année	2009	2010	2011
Superficie Brûlée (ha)	3108	1133	2600
Nombre d'incendie	501	213	387

Aussi il y a lieu de signaler les catastrophes incendières dans certains pays au début des années de 2010 à 2013 :

1. 2010 en Israël, 40 personnes ont péri à cause d'un incendie de végétation.
2. été 2012, un feu en Espagne a ravagé totalement une superficie causée de 130 km<sup>2</sup> plus une perte humaine de 4 personnes.
3. début d'année 2013 en Australie on enregistre comme perte plus de 200 km<sup>2</sup> de forêts et de terres agricoles, qui a contraint une population avoisinante de 2000 personnes à quitter leur habitations.

En effet, les impacts environnementaux et socio-économiques des feux de forêt obligent les pays concernés à fournir d'intenses efforts tant au niveau préventif ou extinctif. Ainsi, l'élaboration de nouveaux paradigmes induisant l'élaboration d'outils d'aide à la décision (simulateur d'incendie) pour des luttes efficaces contre ce fléau, est un défi majeur.

Mais la lutte contre les feux de forêt est d'autant plus efficace qu'il est possible d'anticiper leurs comportements au cours du temps, grâce à la modélisation mathématiques et la programmation informatique des modèles de feux de forêt permettent d'obtenir des simulations numériques qui prédisent par exemple l'intensité d'un feu et sa vitesse de propagation en fonction de facteurs environnementaux tels que le type de végétation et la couverture, la topographie du terrain et les conditions climatiques.

Malheureusement, il existe encore peu de méthodes permettant d'étudier la propagation.

### 3.3 Le modèle pour décrire les incendies de forêt

Il existe des ouvrages généraux sur les feux de forêt [4] [6] [10] [11] [12] [15] [16] [17]. Des articles de synthèses sur les mécanismes de la propagation du feu dans les forêts sont [5] [7] [8] [9] [13] [14] ainsi que les livres de R.C. Rothermel [18] (1983) et A.M. Grishin [8] (1997).

Lors de nos lectures dans le but de choisir notre thème de modélisation, nous avons été interpellés par un article d'accromath [3]. Cette article d'une revue de vulgarisation présente un modèle pour simuler des feux de forêt (Fig. 3.3). Nous reproduisons ici un extrait de cet article :

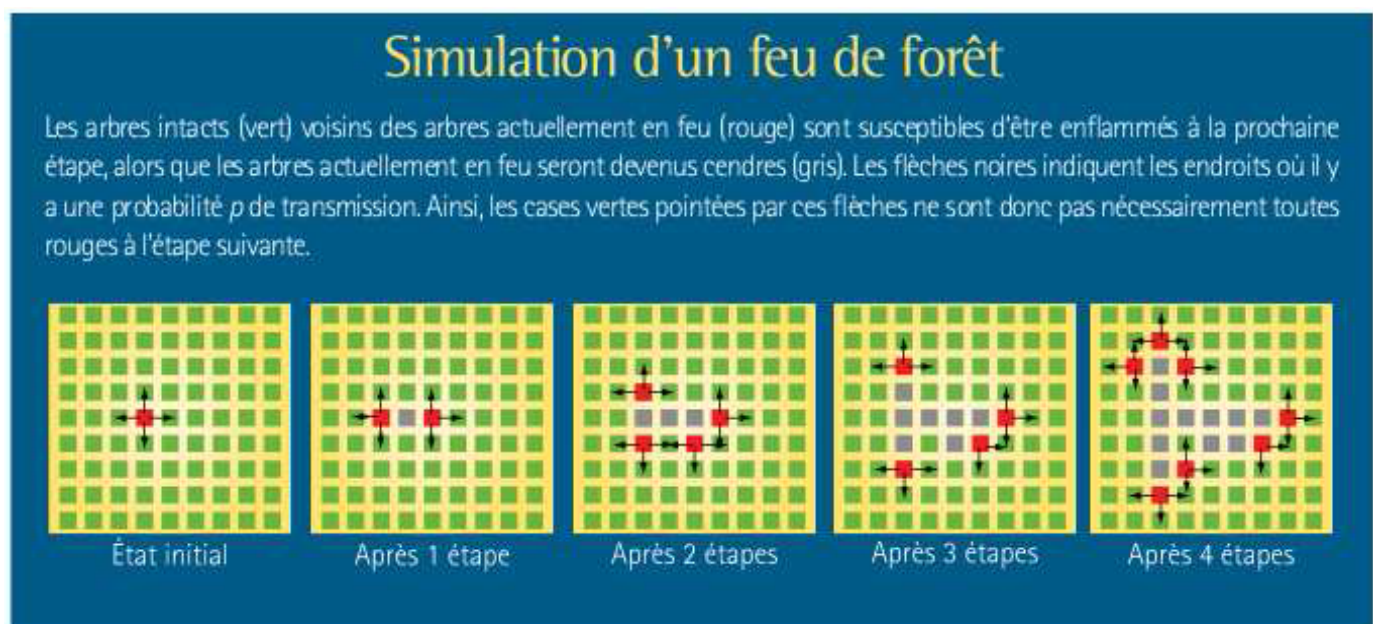


FIG. 3.3 - Quatre tapes successives d'un feu

Clairement le modèle proposé implique de fortes hypothèses :

- La structure de la forêt La structure de la forêt est, dans cette modélisation, totalement homogène. En effet les arbres sont espacés de manière régulière, ils sont de même nature -essence du bois, taux d'humidité dans l'arbre, et le modèle étant en deux dimensions on peut aussi considérer que les arbres sont de même taille.
- La structure du feu Là encore, les hypothèses de modélisation sont extrêmement fortes. Le feu a la même probabilité de se propager dans chacune des directions. Si la combustion a lieu, elle est complète.
- La discrétisation du temps : le temps est vu comme un paramètre discret. La combustion d'un arbre n'est pas continue mais instantanée.

l'objet de cette étude est la modélisation et la simulation des propagation des feux dans une forêt, et leur implémentation est basée sur le paradigme suivant :

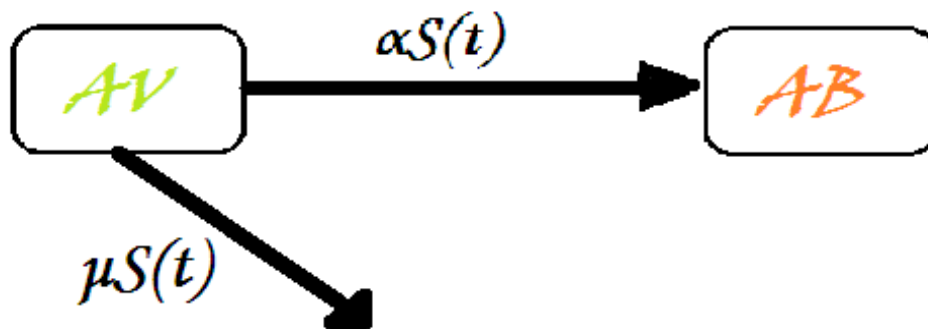


FIG. 3.4 - Le modle

on suppose que a l'instant zéro aucun arbre n'est brûlée, porté a votre connaissance que dans la période de notre étude y a pas de plantation d'arbre, ceci se traduit par

$$N = S(t) + I(t)$$

et la formulation mathématique du diagramme (Fig. 3.4) est

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\alpha S(t) (N - S(t)) - \mu S(t) \\ \frac{dI}{dt} = \alpha S(t) (N - S(t)) . \end{cases}$$

On note par

Parametres	Description
$N$	Le nombre total d'arbre
$S(t)$	Le nombre d'arbre vert à l'instant $t$ .
$I(t)$	Le nombre d'arbre brûlé à l'instant $t$
$\alpha$	La probabilité qu'un arbre prenne feu. la vitesse du vent, le type et nature d'arbres
$\mu$	Le nombre d'arbre asséché hors incendie

L'objet de cette partie est de simuler numériquement le système de propagation du feu obtenu lors de modélisation. Afin de mieux comprendre le comportement des feux de forêt en fonction des valeurs des paramètres de la propagation.

Pour la résolution on prend les données suivantes,

lors de notre étude faite sur une forêt de 5000 arbres, aucune nouvelle implantation n'a été effectuée, et on a constaté qu'aucun arbre s'est asséché.

$$N = 5000$$

$$\mu = 0$$

$$\alpha = 0.0018.$$

Après appliquée la méthode **Galerkin** on trouve les résultats suivants



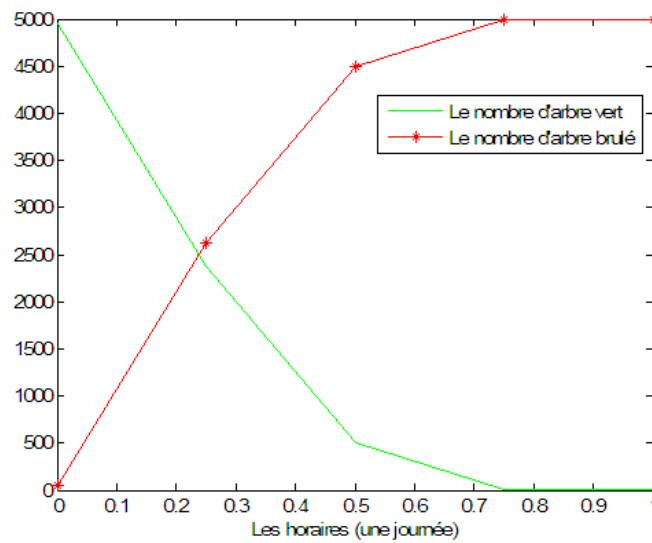


FIG. 3.5 - La propagation de Feu dans une forêt

Le courbe ci dessus présente la propagation des feux dans une forêt de 5000 arbre en une journée, sa lecture nous renseigne qu'après 6h d'incendi la moitié de la forêt a été ravagé et son extinction totale a pris une durée de 18h de feu.

**Conclusion 3.1** *L'ensemble de mes travaux de mémoire ayant pour thème modélisation et simulation des propagations des feux de forêt ont démontrés que la méthode de Glerkin combiné avec DQLT est fiable avec seulement une discrétisation de cinq points lors des tests qu'on a exposés, aussi l'analyse du graphe démontre que les résultats sont logiques.*

# Bibliographie

- [1] <http://www.maths-france.fr> c Jean-Louis Rouget, 2007. Tous droits réservés.
- [2] Journal La Vie éco Département des Ressources Naturelles et Environnement, Institut Agronomique et Vétérinaire Hassan II, B.P. 6202 Rabat- Instituts, Rabat, Maroc. E-mail : l.abibi@iav.ac.ma
- [3] Antoine Allard, Pierre-André Noël, and Louis J. Dubé. Des ponts d'euler à la grippe aviaire. Accromath, numéro 4 :24 à 29, Hiver - Printemps 2009. ISSN 1911-0197.
- [4] Brown A.A. and Davis K.P., Forest Fire : Control and use, McGraw-Hill : New York, 1973, 686 pp
- [5] Catchpole E.A. and De Mestre N.J., Physical models for a spreading line fire, Aust. For., 1986, Vol. 49, No.2, p.102-111.
- [6] Chandler C., Cheney P., Thomas P., Trabaud L. and Williams D., Fire in forestry, Forest fire behaviour and effects, Vol. 1, John Wiley, 450 pp., 1983.
- [7] Duarte J .A.M.S., Modelling Forest Fires, Seientifie Computing In Europe,2-4 sep. 1996.
- [8] Fernandez-Pello A.C., Flame spread mode ling, Comb. Sei. and Teehnol., 1984, vol. 39, pp. 119-134.
- [9] Lee S.L. and Hellman J.M., Heat and mass transfer in fire research, Adv. Heat Transfer, 1974, Vol. 10, pp. 219-284.
- [10] Naville L., Etude expérimentale et modélisation de la propagation d'une flamme sur un combustible poreux : Applications aux feux de végétation, Thèse de l'université Aix-Marseille II, 1997.
- [11] Pyne S.J., Andrews P.L and Laven R.D., Introduction to wildland fire, New York : Wiley, 1996.

- 
- [12] Trabaud L., Les feux de forêts (mécanismes, comportement et environnement), France Sélection, Février 1992.
- [13] Von Niessen W. and Blumen A., Dynamic simulation of forest fires, *Cano J. For. Res.*, 1988, Vol. 18, pp. 805-812.
- [14] Weber R.O., Modelling fire spread through fuel beds, *Prog. Energy Combust. Sei.*, 1991, vol. 17, pp. 67-82.
- [15] Les incendies de forêts, Supplément La Recherche, 1991, Vol. , pp. 886-935.
- [16] Les incendies de forêts Tome 1 et 2, *Revue Forestière Française*, N° spécial 1974-1975, 552 p.
- [17] Espaces forestiers et incendies, *Revue Forestière Française*, N° spécial 1990, 380 p.