**UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM**

**FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE**

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**

**Mémoire de Master**

**Spécialité : Modilésation Contrôle et Optimisation**

**Thème**

# Lemme PR et lemme NI pour la classe des systèmes linéaires singuliers

**Présenté par**

DOHRIDJI HALIMA

**Soutenu le 26 /05/2015**

**Devant le jury**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Président :** | **SAIDANI Mansouria** | **M.A.A** | **UMAB** |
| **Examinateur** | **Mohammed Amine GHEZZAR** | **M.A.A** | **UMAB** |
| **Encadreur** | **Djillali BOUAGADA** | **Professeur** | **UMAB** |

# Table des matières

# INTRODUCTION

Des systèmes implicites parfois dits singuliers notés $E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ peuvent être utilisés pour décrire beacoup de systèmes dynamiques comme les installations électriques, les systèmes biologiques et économiques ; on les retrouve de même en robotique, dans les systèmes interconnectés et les réseaux. Donc beaucoup de problèmes de contrôle pour des systèmes implicites ont été bien développés pendant plusieurs décennies. Parmi ces problèmes sont l'analyse de stabilité et la stabilisation, le problème de valeurs propres la robustesse etc... Nombreux problèmes demeurent encore à développer.

Le principe de positivité réelle notée PR et négativité imaginaire notée NI de systèmes dynamiques est fondamental dans la théorie de contrôle et a trouvé beaucoup de demandes et d'applications dans des problèmes de contrôle comme l'analyse de circuits (où on parle de même de la dissipation d'énergie), le contrôle adaptif et la stabilité.

Dans ce mémoire nous allons nous intéressé à la classe de systèmes implicites ou non pour tester la PR et la NI à travers des conditions algébriques. Des caractérisations LMI pour garantir la stabilité seront développées ; pour ce faire, nous nous basons sur les références suiantes [5], [2].

Le chapitre 1 est consacré aux notions de bases et les préliminaires tout en introduisant le formalisme LMI.

Les systèmes singuliers on pris leur part dans le chapitre 2

Dans le chapitre suivant nous étudions la positivité réelle pour la classe des systèmes singuliers tout en caractérisant des condition sous forme LMI.

Le chapitre 4 sera consacré à la négativité imaginaire pour de même donner des condition LMI.

Le dernier chapitre fera l'objet d'extention des résultats des chapitres (3) et (4) à la classe des système de type lyapunov.

Chapitre 1

# Notions de bases et préliminaires

## 1.1 Les systèmes linéaires en temps continu et en temps discret :

### 1.1.1 Notion de système

Un système, combinaison d'éléments interconnectés entre eux, est constitué naturellement ou artificiellement afin d'accomplir une tâche prédéfinie. Son état est affecté par une ou plusieurs variables, dites les entrées du système. Le résultat de l'action des entrées est la réponse du système qui peut être caractérisée par le comportement d'une ou plusieurs variables de sorties.

### 1.1.2 Systèmes Linéaires Invariants

**Définition 1.1.1** *On appelle système linéaire invariant, un système dont le comportement dans le temps, peut-être décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.*

**Remarque 1.1.1** *Un processus transformant un signal d'entrée en un signal de sortie (signaux électriques par exemple) est appelé système invariant (ou stationnaire) lorsqu'une translation du temps appliquée à l'entrée se retrouve à la sortie. Dans ce sens, la sortie ne dépend pas explicitement du temps.*

### 1.1.3 Trajectoire d'états et réponse des systèmes en temps continu :

Nous rappelons brièvement dans cette section l'expression des trajectoires d'état et des réponses des systèmes linéaires en temps continu.

Considérons le système linéaire standard en temps invariant suivant,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1.1.1}$$

où, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie et $A, B, C, D$ sont des matrices réelles de dimensions appropriées.

Pour tout $t \geq t_0$,

$A$ est appeleé la matrice d'évolution

$B$ est appeleé la matrice de contrôle

$C$ est appeleé la matrice de sortie

$D$ est appeleé la matrice de transmission,

nous obtenons,

**Trajectoire d'état :**

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-t_0-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

**Réponse du système :**

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-t_0-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t)$$

### 1.1.4 Trajectoire d'état et réponse des systèmes en temps discret :

Considérons le système linéaire suivant,

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases} \qquad k \geq 0 \tag{1.1.2}$$

**Trajectoire d'état :**

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-(i+1)}Bu_i \qquad k > 0$$

**Réponse du système :**

$$y_k = CA^k x_0 + C\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-(i+1)} Bu_i + Du_k$$

### 1.1.5 Critères de commandabilité (contrôlabilité)

**Définition 1.1.2** *Un système de type* (1.1.1) *est contrôlable s'il existe un contrôle* $u(t)$ *pour* $t \in [o, T]$ *transférant l'état du système d'un état initial vers une cible finale* $x_f$ *i.e*

$$\exists u \in \mathbb{R}^m \quad / \ x \ \ (T, x_0, u) \ \ = x_f \quad \forall x_0, \forall x_f \in \mathbb{R}^n$$

**Définition 1.1.3** *Le système* (1.1.1) *ou la paire* $(A,\ B)$ *est complètement contrôlable si tous les états sont contrôlable.*

La commandabilité est une propriété caractéristique du couplage entre l'entrée et la sortie du système et fera donc intervenir les matrices $A$ et $B$ : Kalman a proposé un critère simple construit à partir de ces deux matrices. Nous le résumons dans le théorème suivant

**Théorème 1.1.1** *(Critère de Kalman) Un système LTI d'équation dynamique d'état,*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

*où,* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *est commandable si et seulment si la matrice de commandabilité,* $C$ *est de rang plein i.e ,*

$$rang\,(C) = rang\left(\begin{bmatrix} B & AB \cdots\cdots A^{n-1}B \end{bmatrix}\right) = n$$

*On illustre cela par l'exemple d'application suivant,*

**Exemple 1.1.1** *Soit le sysyème de bacs modélisé par :*

noter que physiquement, le système n'est pas contrôlable car, il est clair que le niveau du bac 2 ne peut être modifié par la commande $u$.

$$
\begin{aligned}
c_2\frac{dh_2}{dt} &= q_2 = \frac{h_2}{R_2} \\
c_1 &= \frac{dh_1}{dt} = q_{2-}q_1 + u = \frac{h_2}{R_2} - \frac{h_1}{R_1} + u
\end{aligned}
$$

En choisissant $(x_1, x_2) = (h_1, h_2)$ et $R_1 = 1$, $c_1 = c_2 = 1$, on obtient

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)
$$

On peut alors calculer, $rang\,(C) = rang\,([B \quad AB]) = rang \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$. Cela implique que le système n'est pas complètement commandable.

**Théorème 1.1.2** *(Test Popov-Belevitch-Hautus)*

La paire $(A, B)$ est commandable si et seulement si la matrice complexe $n \times (n+m)$ :

$$
[\lambda I - A \quad B]
$$

est de rang égal à $n$ pour toute valeur propre $\lambda$ de $A$.

### 1.1.6 Critère d'observabilité

Une caractéristique structurelle complémentaire de la contrôlabilité peut être définie. Elle correspond à la capacité pour un système de connaître l'historique d'un état internne à partir de la seule connaissance de variables de sorties mesurées. Il s'agit de l'observabilité.
Un critère de Kalman existe également pour la notion d'observabilité et fait intervenir
la matrice dynamique $A$ et la matrice de sortie $C$.

**Théorème 1.1.3** *(Critère de Kalman) Un système LTI d'équations dynamique et de mesures,*

$$
\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}
$$

où, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ est observable si et seulement si la matrice d'observabilité noteé, $O$ est de rang $n$,

$$rang\left(O\right) = rang\left(\left[\begin{array}{c} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{array}\right]\right) = n$$

De même que pour la commandabilité, un critère d'observabilité équivalent au critère de Kalman quoique moins facile à manipuler est donné par le test Popov-Belevitch-Hautus (PBH).

**Théorème 1.1.4** *(Test PBH) La paire $(A, C)$ est observable si et seulement si la matrice complexe $(n+p)\times n$ :*

$$\left[\begin{array}{c} \lambda I - A \\ C \end{array}\right]$$

*est de rang égal à $n$ pour toute valeur propre $\lambda$ de $A$.*

**Remarque 1.1.2** *Il existe de nombreux critères pour tester si oui ou non un système est contrôlable ou observable, autres que les tests cités plus haut.*

### 1.1.7 Réalisation minimale

On appelle réalisation d'une matrice de transfert donnée $G\left(p\right) \in \mathbb{C}^{p\times m}$, toute représentation d'état LTI $(A, B, C, D)$ telle que :

$$G\left(p\right) = C\left(pI - A\right)^{-1} B + D$$

La réalisation $(A, B, C, D)$ est minimale (irréductible) si et seulement si, elle est commandable et observable. Dans ce cas, on utilise la notation :

$$G\left(p\right) := \left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right].$$

### 1.1.8 La transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un outil important et très puissant pour résoudre les équations et les systèmes différentiels linéaires en temps continu.

**Définition 1.1.4** *Une fonction est dite Causale, si elle est nulle pour $t < 0$.*

**Définition 1.1.5** *Soit $f$ une fonction du temps $t$ et causale, sa transformée de Laplace notée $F(p)$ est donnée par,*

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt}dt$$

où, $p$ est à priori un nombre complexe.

### 1.1.9 Conditions suffisantes d'existence

Nous allons maintenant donner une condition sur $f(t)$ qui garantisse l'existence de

$$\int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt}dt.$$

**Théorème 1.1.5** *Si $f(t)$ est continue par morceaux sur tout intervalle fini $[0,a]$ , $a > 0$ , et est de l'ordre de $e^{bt}$ quand $t \to +\infty$ , la transformée de Laplace $L(f(t))$ existe pour tout $Re(p) > b$.*

La démonstration découle directement de la définition de la transformée de Laplace et d'une fonction d'ordre exponentiel.

**Propriétés**

Quelques propriétés seront citeés. Pour plus d'information on se réfère à [7], [11].
Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour $f, g$ deux fonctions causales, nous décrivons les propriétés importantes et utiles pour répondre à certains problèmes de résolution,

1. Linéarité :
$$L[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha F(p) + \beta G(p)$$

2. Dérivation :
$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p) - f(0).$$

3. Intégration :

$$L\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{F(p)}{p}$$

4. Convolution :

$$L[f(t).g(t)] = F(p)\,G(p).$$

### 1.1.10 Transformée inverse de Laplace

La transformée inverse de Laplace notée $f(t)$ dite aussi originale d'une fonction $F(p)$ est définie par,

$$L^{-1}[F(p)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_0^{+\infty} F(p).e^{pt}dp,$$

où, le chemin d'intégration peut être choisi quelconque dans le plan complexe à condition de rester dans le domaine de convergence de $F(p)$.

### 1.1.11 La Z-transformée

La Z-transformée est aussi un outil important et très puissant pour résoudre les équations et les systèmes différentielles linéaires mais en temps discret.

**Définition 1.1.6** *La transformée en $Z$ d'une séquence $x(n)$ est définie comme la série $X(z)$, calculée comme suit,*

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\,z^{-n},$$

où, $z$ est une variable complexe. On appelle encore l'équation, la transformée directe car c'est la relation qui permet d'obtenir $X(z)$ à partir de $x(n)$.
Cette transformation est qualifiée de bilatérale par opposition à unilatérale.
La transformée en $Z$ unilatérale est définie par $X_\mu(z)$, calculée comme suit,

$$X_\mu(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)\,z^{-n}.$$

**Remarque 1.1.3** *Dans le cas de séquences causales, ces deux transformations sont les mêmes. Toute transformée en $Z$ doit être accompagnée de la région pour laquelle elle converge.*

**Propriétés**

Quelques propriétés importantes seront cependant données,

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x_1(n)$, $x_2(n)$ deux séquences, nous avons,

1. Linéarité : si
$$x(n) = \alpha x_1(n) + \beta x_2(n),$$
alors,
$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha x_1(n) z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta x_2(n) z^{-n} \\ &= \alpha X_1(z) + \beta X_2(z). \end{aligned}$$

2. Dérivation : comme,
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n},$$
on a aussi
$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-n) x(n) z^{-n-1},$$
et donc,
$$-z\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx(n) z^{-n}$$
De ce fait, il apparait que $-z\frac{dX(z)}{dz}$ est la transformée de $nx(n)$.

3. Convolution :

Cette propriété est une des plus importantes et justifie à elle seule l'usage qui est fait de la transformée en $Z$ pour étudier les systèmes linéaires permanents en temps discret. Si $y(n)$ est obtenue par convolution de $x(n)$ et $g(n)$, on a que :

$$y(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx(m) g(n-m),$$

donc,

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(m) g(n-m) z^{-n}$$
$$= \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) z^{-m}\right]\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n-m) z^{-(n-m)}\right]$$
$$= X(z) G(z).$$

### 1.1.12 Z-Transformée inverse

Pour inverser une transformée en Z, on peut s'aider utilement du théorème de Cauchy qui établie que :

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} z^{l-1}dz = \begin{cases} 1 & \text{pour } l=0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où, $\Gamma$ est un contour qui entoure l'origine du plan complexe et parcouru dans le sens anti horlogique.

En reprenant la définition de la transformée en $Z$ en multipliant les deux membres par $z^{l-1}$ et on intégre le long d'un contour entourant l'origine et appartenant au domaine de convergence, on trouve :

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} X(z)\, z^{l-1}dz &= \oint_{\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n+l-1}dz \\ &= x(n) \oint_{\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{-n+l-1}dz, \end{aligned}$$

où, l'inversion de l'intégrale de la somme est licite compte tenu du fait que l'on opère dans la zone de convergence de la transformée.

En utilisant le théorème de Cauchy, on a finalement,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{-n+l-1}dz,$$

## 1.2 Matrice et Fonction de transfert pour les systèmes LTI

#### Matrice de transfert

Soit le système multivariable dont le modèle d'état est donné ci-dessous.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad x(t_0) = x_0$$

où $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$.

Du fait de la linéarité de l'opérateur de Laplace, il est possible de l'appliquer aux équations ci-dessus,

$$pX(p) - x_0 = AX(p) + BU(p)$$

$$Y(p) = CX(p) + DU(p)$$

où $X(p) = L[x(t)]$, $U(p) = L[u(t)]$ et $Y(p) = L[y(t)]$. En résolvant les équations par rapport à $Y(p)$, il vient :

$$Y(p) = C(pI - A)^{-1}(BU(p) + x_0) + DU(p)$$

Pour des conditions initiales nulles, $x_0 = 0$, on obtient la relation entrées-sorties :

$$Y(p) = \left[C(pI - A)^{-1}B + D\right]U(p) = G(p)U(p).$$

La matrice $G(p) \in \mathbb{C}^{p\times m}$ est appelée matrice de transfert liant l'entrée $U(p)$ à la sortie $Y(p)$.

$$Y(P) = G(p)U(p)$$

**Remarque 1.2.1** -*La notion de matrice de transfert n'est définie que pour des conditions initiales nulles.*

- Le concept de matrice de transfert permet de représenter le comportement dynamique du système de manière algèbrique.
- La matrice de transfert est une caractéristique du système indépendante de l'amplitude et de la nature de l'entrée du système.
- C'est un modèle entrée-sortie qui ne contient aucune information sur la structure physique du système.

**Fonction de transfert**

Soit un système LTI mono-entrée, $u(t)$, mono-sortie, $y(t)$. Il peut alors être décrit par l'équation différentielle à coefficients constants

$$a_n y^{(n)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \cdots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t)$$

Si les conditions initiales sur l'entrée et la sortie sont nulles :

$$\begin{aligned} u(0) &= \dot{u}(0) = \cdots = u^{(m-1)}(0) = 0 \\ y(0) &= \dot{y}(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0 \end{aligned}$$

et si la transformée de Laplace est appliquée aux entrées et aux sorties, on obtient,

$$[a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0] Y(p) = [b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0] U(p)$$

Sous l'hypothèse des conditions initiales nulles, le rapport entre la transformée de Laplace du signal de sortie et la transformée de Laplace du signal d'entrée d'un système LTI est la fonction de transfert de ce système.

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0}$$

## 1.3 Les formulations IMLs

Le terme IML (Inégalité Matricielle Linéaire), (LMI : Linear Matrix Inequality en anglais) est maintenant couramment employé dans la littérature liée à l'analyse ou à la commande des systèmes.

Nous rappelons néanmoins quelques notions IMLs,nous nous basons sur les références suivantes [4], [1].

**Définition 1.3.1** *Une inégalité matricielle linéaire (IML) est une expression de la forme*

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0 \tag{1.3.1}$$

*où* $x = (x_i)$ , $i = 1 \cdots m$ *est un vecteur de nombres réels (variables de décisions) et* $(F_i)$ , $i = 0 \cdots m$, *sont des matrices réelles symétriques i.e* $F_i = F_i^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0 \cdots m$.

**Remarque 1.3.1** *L'inégalité " > " dans (1.3.1) signifie "'définie positive"' c'est à dire* $u^\top F(x) u > 0$ *pour tout* $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$ *ce qui est équivalent à ce que la plus petite valeur propre de* $F(x)$ *est positive.*

**Définition 1.3.2** *Une inégalité matricielle linéaire (IML) est une inégalité*

$$F(x) > 0 \tag{1.3.2}$$

*où $F$ est une fonction affine d'un espace vectoriel de dimension fini $V$ vers un ensemble*

$$S^n := \left\{M/M = M^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}\right\}_{n>0} \tag{1.3.3}$$

*de matrices réelles symétriques.*

**Remarque 1.3.2**

1. *Le terme inégalité matricielle linéaire est utilisée dans la littérature sur les systèmes et contrôle, mais la terminologie n'est pas consistante avec l'expression $F(x) > 0$ que $F$ n'est pas une fonction linéaire. Le terme inégalité matricielle affine peut mieux correspondre à la formulation.*

2. *Les inégalités matricielles $F(x) < 0$ et $F(x) < G(x)$ où $F, G$ étant des fonctions affines, sont des cas particuliers de* (1.3.1) *puisqu'elles peuvent être reformulées sous la forme IML :*

$$\begin{aligned} -F(x) &> 0 \\ F(x) - G(x) &> 0 \end{aligned}$$

*On écrit toujours une IML sous la forme $F(x) < 0$ avec $F : \mathbb{R}^m \to S^n$ une fonction affine. L'objectif est de trouver $x \in \mathbb{R}^m$ satisfaisant l'inégalité. Ce choix de $x$ est appelé problème de faisabilité.*

### 1.3.1 Problèmes IML standard

1. **Problème de faisabilité**

   Le problème de faisabilité est basé sur les notions de dualité et d'optimalité en optimisation convexe . Il consiste à

$$\begin{cases} \textit{trouver} \quad x \in \mathbb{R}^m, \\ \textit{tel que} \quad F(x) > 0 \end{cases}$$

   ou bien prouver qu'il n'en existe pas.

2. **Problème de programmation semi-définie**

   Un problème de Programmation Semi-Définie (SDP) est un problème d'optimisation qui s'écrit
$$\begin{cases} \textit{minimiser} & c^\top x \\ \textit{sous la contrainte} & F(x) > 0 \end{cases}$$
   où $c \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur définissant l'objectif du problème. Si une formulation SDP est obtenue pour un problème donné, alors nous pouvons considérer ce problème comme "résolu" si on démontre qu'il est faisable.

### 1.3.2 Complément de Schur

Il s'agit d'un résultat préliminaire qui permettra dans ce qui suit, de simplifier des expressions matricielles.

**Lemme 1.3.1** *L'IML*
$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^\top & R \end{bmatrix} > 0$$
*où,* $Q = Q^\top$ *et* $R = R^\top$ *est équivalente à* $R > 0$, $Q - SR^{-1}S^\top > 0$, *ou encore* $Q > 0$, $R - SQ^{-1}S^\top > 0$

**Preuve.** La preuve se fait facilement en multipliant la premier équation de système à droite par, $\begin{bmatrix} I & 0 \\ -R^{-1}S^\top & R \end{bmatrix}$ et à gauche par la transposée de cette dernière matrice. On obtient alors,
$$\begin{bmatrix} Q - SR^{-1}S^\top & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} > 0$$
□

### 1.3.3 Propriétés

**Intersection**

Si
$$\begin{aligned} G(x) &> 0 \\ H(x) &> 0 \end{aligned}$$

sont deux IMLs, alors,

$$\begin{bmatrix} G(x) & 0 \\ 0 & H(x) \end{bmatrix} > 0$$

est une IML.

On peut de même dire qu'un système de plusieurs IMLs est un ensemble fini d'IMLs

$$F_1(x) > 0, \cdots, F_k(x) > 0$$

et s'écrit sous une forme d'une simple IML.

$$F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & F_k(x) \end{bmatrix} > 0 \tag{1.3.4}$$

l'inégalité a un sens puisque $F(x)$ est symétrique.

L'ensemble des valeurs propres de $F(x)$ est simplement l'union de toutes les valeurs propres de $F_i(x)$, $i = \overline{1, k},$.

Tout $x$ vérifiant l'inégalité

$$F(x) > 0$$

satisfait aussi le système d'IMLs (1) et vice versa.

### Mise à échelle

Pour $\alpha > 0$, on a $G(x) > 0$.

Pour terminer, on montre quelques applications de cette rubrique.

**Exemple 1.3.1** *(Stabilité de Lyapunov)*

*Les IMLs ne se présentent pas directement sous la forme de l'inégalité présentée ci-dessus. Prenons un exemple classique de l'automatique : la stabilité de Lyapunov pour un système linéaire,*

$$\dot{x} = Ax$$

*Il s'agit de trouver une matrice réelle $P = P^\top > 0$ de même dimensions que $A$ telle que $A^\top P + PA < 0$.*

*Considérons à titre d'exemple, le cas où $A$ est une matrice $2 \times 2$.*

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

*La matrice $P$ dépend alors de trois paramètres $x_i$, $i = 1,\ 2,\ 3$ et peut s'écrire*

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

*La condition de positivité de $P$ s'écrit,*

$$x_1 \begin{bmatrix} 2a_1 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & a_1 + a_4 \\ a_1 + a_4 & a_2 + a_3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & a_3 \\ a_2 & 2a_4 \end{bmatrix} < 0$$

Chapitre 2

# Systèmes Linéaires Singuliers

## 2.1 Systèmes Linéaires Singuliers à Temps Continu

La classe des systèmes singuliers est d'un grand intérêt pour modéliser de nombreux procédés pratique comme leurs homologues les systèmes standards. Notons que ces derniers se rencontrent dans l'étude des systèmes interconnectés, les réseaux électriques, et en robotique. Considérons le système linéaire continu suivant,

$$\left\{ \begin{array}{c} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{array} \right. \tag{2.1.1}$$

où, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie et $E$, $A$, $B$, $C$, $D$ sont des matrices réelles de dimensions appropriées. $E$ est généralement non inversible.

**Définition 2.1.1** *Le système est dit singulier si* $\det E = 0$.

-Dans le cas contraire, c'est à dire si $\det E \neq 0$ il est dit standard.

-Si $E = I_n$, le système est aussi appelé standard (ou explicite).

**Définition 2.1.2** *Le système est dit régulier si et seulement si*

$$\det(Es - A) \neq 0,$$

*pour un certain* $s \in \mathbb{C}$.

**Remarque 2.1.1** *Si* $\det E \neq 0$, *alors en multipliant la première équation du système par* $E^{-1}$, *on obtient le système suivant,*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

qui est un système explicite.

Pour un système singulier, on supposera pour la suite que $\det(Es - A) \neq 0$ pour un certain $s \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, on peut écrire la matrice résolvante comme unique série de Laurent.

$$(sE - A)^{-1} = s^{-1} \sum_{i=-\mu}^{\infty} \phi_i s^{-i}$$

où, $\mu$ est appelée indice de nilpotence du faisceau $(sE - A)$ et $\phi_i$ est appelée la matrice fondamentale du système.

**Remarque 2.1.2** *1. Si* $E = I_n$, *alors*

$$\begin{aligned} \phi_i &= 0, \textit{pour} \quad i < 0, \\ \phi_i &= A^i \textit{ pour} \quad i \geq 0 \end{aligned}$$

*2. Si* $E$ *est inversible,on en déduit alors,*

$$(sE - A)^{-1} = \left(I - \left(s^{-1}E^{-1}A\right)\right)^{-1} E^{-1}s^{-1} = \left[\sum_{i=0}^{+\infty} \left(E^{-1}A\right)^i s^i\right] E^{-1}s^{-1}$$

$\phi_i = 0$, *pour* $i < 0$,

$\phi_0 = E^{-1}, \phi_1 = (E^{-1}A)\, E^{-1}$

$\phi_2 = E^{-1}A\phi_1 = (E^{-1}A)^2\, E^{-1}$

$\vdots$

$\phi_i = (E^{-1}A)\, \phi_{i-1} = (E^{-1}A)^i\, E^{-1}$, *pour* $i \geq 0$.

### 2.1.1 Trajectoire d'état de systèmes singuliers en temps continu :

La solution $x(t)$ du système singulier avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$ et le contrôle $u$ est donnée par :

$$x(t) = e^{\phi_0 A(t-t_0)}Ex_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\phi_0 A(t-\tau)}\phi_0 Bu(\tau)\, d\tau + \sum_{j=1}^{\mu} \phi_{-j} \left(Bu^{(j-1)} + Ex_0\delta^{(j-1)}\right)$$

où $u^{(j)} = \frac{d^j u}{dt^i}$, $j = 1, \ldots, \mu - 1$.

### 2.1.2 Fonction de transfert pour un système singulier

Considérons un système linéaire à temps-invariant à une seule entrée et une seule sortie (SISO) donnée par :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ y(t) = c^{\top}x(t) + du(t) \end{cases} \tag{2.1.2}$$

où, $A, E \in \mathbb{R}^{n\times n}, b, c \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ et $d \in \mathbb{R}$.

La terminologie temps-invariant est utilisé pour indiquer que le temps ne paraît pas comme une variable indépendante.

la première relation dans (2.1.2) est un système à différentielle ordinaire si $E$ est non singulier et un système d'équations algébriques différentielles si $E$ est singulier.

Définissons $X(s)$ comme transformée de Laplace de $x(t)$.

$$X(s) = L[x(t)] = \int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-st} dt$$

et prenant la transformée de Laplace de (2.1.2) avec des conditions initiales nulles, on obtient alors

$$\begin{gathered} sEX(s) = AX(s) + bU(s) \\ Y(s) = c^{\top}X(s) + dU(s) \end{gathered}$$

d'où

$$Y(s) = h(s)\, U(s)$$

où, $h(s)$ est la fonction de transfert de la forme

$$h(s) = c^{\top}(sE - A)^{-1}\, b + d \tag{2.1.3}$$

Si $E = I$ dans (2.1.3), $h(s)$ est appelée une fonction du transfert standard.

## 2.2 Systèmes Linéaires Singuliers à Temps discret

Dans cette section, nous considérons les systèmes linéaires singuliers discret en temps invariant.

Soit alors le système linéaire singulier en temps discret suivant,

$$\begin{cases} Ex_{i+1} = Ax_i + Bu_i \\ y_i = Cx_i + Du_i \end{cases}$$

où, $x_i \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état, $u_i \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y_i \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie et $E$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

**Définition 2.2.1** *Le système est dit singulier si* $\det E = 0$. *Dans la cas contraire,il sera dit standard.*

*On suppose que*

$$\det(Ez - A) \neq 0$$

*Pour certain* $z \in \mathbb{C}$, *si cette dernière relation est satisfaite, alors,*

$$(Ez - A)^{-1} = \sum_{i=-\mu}^{+\infty} \phi_i z^{-(i+1)}$$

*où* $\mu$ *est l'indice de nilpotence et les* $\phi_i$ *sont les matrices fondamentales .*

### 2.2.1 Fonction de transfert pour le cas discret :

Considérons un système linéaire en temps discret d'une seule entrée et une seule sortie (SISO) donnée par :

$$\begin{aligned} Ex_{i+1} &= Ax_i + bu_i \\ y_i &= c^\top x_i + du_i \end{aligned}$$

En temps discret, la fonction de transfert est définie par la z- transformée.

Soit,

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_0^{+\infty} x(t) z^{-t} \\ Z[x(t+1)] &= \sum_0^{+\infty} x(t+1) z^{-t} \\ &= x(1) + x(2) z^{-1} + \cdots \\ &= z\sum_0^{+\infty} x(t) z^{-t} - zx(0) \\ &= zX(z) - zx(0) \end{aligned}$$

pour $x(0) = 0$, la fonction de transfert est de la forme

$$G(z) = c^{\top}(zE - A)^{-1} b + d$$

### 2.2.2 Faisceau régulier

Un faisceau de matrices est une matrice dont les coefficients sont des polynômes de degré 1, il est dit régulier si :

1. $E$ et $A$ sont des matrices carrées de même ordre.
2. Le déterminant $|Ez - A|$ ne s'annule pas identiquement.

Notons que dans le cas où le déterminant $|Ez - A| = 0$, le faisceau est dit singulier.
Pour plus d'information sur cette notion voir [6]

**Chapitre 3**

# Lemme de positivité réelle pour les systèmes singuliers

Dans ce chapitre, notre intérêt porte sur la notion de positivité réelle d'une certaine classe de systèmes LTI. On étudiera la classe des systèmes singuliers comme extention des résultats de [10].

Considérons un système LTI à m-entrées et m-sorties décrit par les équations suivantes,

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = C^{\top}x(t) + Du(t) \end{cases} \tag{3.0.1}$$

où, $A,\ E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B,\ C \in \mathbb{R}^{n\times m}$, et $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sont des matrices données, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie.

Quelques définitions et résultats de bases sont alors donnés,

**Définition 3.0.2** *Une paire* $(E,\ A)$ *est dite régulière si* $\det(sE - A) \neq 0$, *et elle est dite implusive et libre si* $\deg\det(sE - A) = rang(E)$.

**Définition 3.0.3** *Les zéros de* $\det(sE - A)$ *sont appelés des pôles finies de* $(E,\ A)$.

**Proposition 3.0.1** *Une paire* $(E,\ A)$ *est appelée stable si et seulement si toutes les pôles finies de* $(E,\ A)$ *sont dans le demi plan gauche i.e* $\operatorname{Re}[s] < 0$. *Et* $(E,\ A)$ *est appelé admissible s'il est régulier impulsif libre et stable.*

**Définition 3.0.4** *le sysème linéaire est appelé régulier si la matrice* $E$ *dans* (3.0.1) *est non-singulier, et il est appelé singulier si* $E$ *est singulière.*

Notez que , dans le cas régulier, le système (3.0.1) peut être écrit comme :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(E^{-1}A\right)x(t) + \left(E^{-1}B\right)u(t) \\ y(t) &= C^{\top}x(t) + Du(t) \end{aligned}$$

le système (3.0.1) peut être décrit par sa fonction de transfert

$$H(s) := D + C^{\top}(sE - A)^{-1}B, \quad s \in \mathbb{C} \tag{3.0.2}$$

On a cependant,

$$H: \ \mathbb{C} \to (\mathbb{C} \cup \infty)^{m \times m} \tag{3.0.3}$$

qui est une matrice de dimention $m$ et qui contient des fonctions rationnelles.

Toute représentation de $H$ de la forme (3.0.2) est appelée une réalisation de $H$.

Une réalisation (3.0.2) de $H$ est dite minimale si il n'existe aucune réalisation de $H$ de dimension inferieure à $n$ tel que $n = \dim E = \dim A$.

Il est donc bien connu qu'un système décrit par (3.0.1) est passif si et seulement si sa fonction de transfert (3.0.2) est positive-réelle. Une définition précise de positivité-réelle est comme suit

**Définition 3.0.5** *Une fonction de transfert* $H : \mathbb{C} \to (\mathbb{C} \cup \infty)^{m \times m}$ *est dite positive-réelle si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $H$ *est analytique dans* $\mathbb{C}_+ = \{s \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} s > 0\}$ ;
2. $H(\overline{s}) = \overline{H(s)}$ *pour tout* $s \in \mathbb{C}$;
3. $H(s) + (H(s))^* \geq 0$ *pour tout* $s \in \mathbb{C}_+$.

Les tests de positivité réelle seront de suite caractérisées par les formules LMIs suivantes

$$\begin{bmatrix} A^{\top}X + X^{\top}A & X^{\top}B - C \\ B^{\top}X - C^{\top} & -D - D^{\top} \end{bmatrix} \leq 0 \quad et \quad E^{\top}X = X^{\top}E \geq 0 \tag{3.0.4}$$

Notez que, trouver une solution $X$ des LMIs $(3.0.4)$, est équivalent à trouver les matrices $X$, $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$, et $W \in \mathbb{R}^{n\times m}$ telles que

$$\begin{aligned} A^\top X + X^\top A &= -LL^\top \\ X^\top B - C &= -LW \\ D + D^\top &\geq W^\top W \\ E^\top X &= X^\top E \geq 0 \end{aligned} \tag{3.0.5}$$

En premier, nous montrons que la solvabilité de (3.0.4) est en effet suffisante pour la positivité réelle de $H$.

**Théorème 3.0.1** *(condition suffisante) Si les LMIs* (3.0.4) *possèdent une solution $X$, alors la fonction $H$ est positive-réelle.*

**Preuve.** Soit $s \in \mathbb{C}_+$ telque $s$ n'est pas un pôle de $H$, et qui vérifie que la matrice $(A - sE)$ est non singulière. Soient $X$, $L$, et $W$ solutions de (3.0.5) de la formulation équivalente des LMIs $(3.0.4)$. La première et la dernière relation dans (3.0.5) implique que :

$$\begin{aligned} (sE - A)^H X + X^\top (sE - A) &= -A^\top X - X^\top A + \overline{s}E^\top X + sE^\top s + sX^\top E \\ &= LL^\top + (\operatorname{Re} s)\left(E^\top X + X^\top E\right) - i\,(\operatorname{Im} s)\left(E^\top X - X^\top E\right) \\ &= LL^\top + 2\,(\operatorname{Re} s)\,E^\top X. \end{aligned} \tag{3.0.6}$$

Ensuite notez que

$$(sE - A)F = B, \text{ où } F = F(s) := (sE - A)^{-1} B. \tag{3.0.7}$$

A patir de $(3.0.2)$ et $(3.0.7)$, et la deuxième relation dans (3.0.5) nous aurons

$$\begin{aligned} H(s) &= D + C^\top F \\ &= D + W^\top L^\top F + B^\top X F \\ &= D + W^\top L^\top F + F^\top (sE - A)^H X F. \end{aligned} \tag{3.0.8}$$

Utilisons $(3.0.8)$, $(3.0.6)$, et la troisième relation dans (3.0.5) nous obtenons ce pendant,

$$\begin{aligned} H(s) + (H(s))^H &= D + D^\top + W^\top L^\top F + F^H L W + F^H \left[(sE - A)^H X + X^\top (sE - A)\right] F \\ &\geq W^\top W + W^\top L^\top F + F^H L W + F^H \left[\left(LL^\top + 2\,(\operatorname{Re} S)\right) E^\top X\right] F \\ &= \left(W + L^\top F\right)^H \left(W + L^\top F\right) + 2\,(\operatorname{Re} s)\, F^H \left(E^\top X\right) F. \end{aligned} \tag{3.0.9}$$

Evidemment

$$\left(W + L^{\top}F\right)^{H}\left(W + L^{\top}F\right) \geq 0.$$

De plus, $\operatorname{Re} s > 0$ et $E^{\top}X = \left(E^{\top}X\right)^{\top} \geq 0$, on a donc

$$(\operatorname{Re} s)F^{H}\left(E^{\top}X\right)F \geq 0.$$

En suite, à partir de (3.0.9)

$$H(s) + (H(s))^{H} \geq 0. \tag{3.0.10}$$

Rappelons que $s \in \mathbb{C}_{+}$ est supposé être tel qu'il ne soit pas un pôle de $H$. Supposons maintenant $H$ a un pôle $s_0 \in \mathbb{C}_{+}$. Il existe un voisinage de $s_0$ qui est libre de toutes les pôles de $H$. $H$ satisfait (3.0.10) dans ce voisinage de $s_0$ ceci est donc impossible si $s_0$ était en effet un pôle de $H$. Donc $H$ n'a pas de pôle dans $\mathbb{C}_{+}$ et (3.0.10) est vrai pour tous les $s \in \mathbb{C}_{+}$, où $H$ est réel positif. $\square$

## 3.1 Lemme de positivité réelle pour les systèmes réguliers

**Théorème 3.1.1** *Soit $H$ une matrice de dimension $m$ contenant des fonctions rationnelles décrites par :*

$$H(s) = D + C^{\top}(sI - A)^{-1}B. \tag{3.1.1}$$

Alors

**a** (condition suffisante) si les LMIs

$$\begin{bmatrix} A^{\top}X + XA & XB - C \\ B^{\top}X - C^{T} & -D - D^{\top} \end{bmatrix} \leq 0 \qquad et \qquad X \geq 0 \tag{3.1.2}$$

admettent une solution $X$, alors $H$ est positive-réelle.

**b** (condition nécessaire)

Supposez que (3.1.1) est une réalisation minimale de $H$. Si $H$ est positive-réelle , alors il existe une solution $X$ pour les LMIs (3.1.2) .

Le but de cette section est d'étendre le résultat de ce théorème aux systèmes linéaires singuliers (3.0.1) .

Chapitre 4

# Lemme de négativité imaginaire (NI)

Dans ce chapitre nous allons présenté une extension du lemme imaginaire négatif issu de [9] pour les systèmes linéaires à temps-invariants au cas singulier.

**Définition 4.0.1** *Une matrice $G(s)$ de la fonction de transfert est imaginaire négative si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $G(s)$ n'a aucun pôle dans $\operatorname{Re}[s] > 0$.
2. Pour tout $w \geq 0$, tel que $jw$ n'est pas un pôle de $G(s)$, $j\left(G(jw) - G(jw)^{*}\right) \geq 0$.
3. si $s = jw_0$ est un pôle pour $G(s)$ alors c'est une pôle simple. En outre si $w_0 > 0$ la matrice résiduelle $K_0 = \lim\limits_{s \to jw_0} (s - jw_0)\, jG(s)$ est semi définie positive.
4. $s = \infty$ n'est pas un pôle de $G(s)$.

En s'inspirant du lemme NI [9], notre objectif est de faire une analyse d'extention de [9] pour le cas singulier. On considère alors le système LTI suivant :

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{array} \tag{4.0.1}$$

tel que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$; ici $x$ représente l'état du système et $u$ le côntrole.

Le résultat principal issu de [9] est donc caractérisé par le lemme suivant.

**Lemme 4.0.1** *Soit $(A,\ B,\ C,\ D)$ une réalisation minimale de la matrice de transfert $G(s)$ pour le système (4.0.1), alors $G(s)$ est négative imaginaire si et seulement si il existe des* *matrices* $P = P^\top \geq 0$, $W \in \mathbb{R}^{m\times m}$, *et* $L \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *telles que les LMIs suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{bmatrix} PA + A^\top P & PB - A^\top C^\top \\ B^\top P - CA & -\left(CB + B^\top C^\top\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L^\top L & -L^\top W \\ -W^\top L & -W^\top W \end{bmatrix} \leq 0 \tag{4.0.2}$$

*L'idée principale pour étendre le lemme NI au cas singulier est d'utiliser les transformations élémentaires [6], qui nécesite l'utilisation du Théorème de Weierstrass.*

On considère dans cette phase, le modèle à espase d'état singulier décrit par (3.0.1).
Tout d'abord on commence par décrire la forme de Weierstrass à fin de réduire le système (3.0.1)

### 4.0.1 Réduction à la forme de Weierstrass :

Nous introduisons les trasformations de la forme de Weierstrass, qui montrent que les matrices $A$ et $E$ peuvent être réduit pour être dans une forme spéciale.
Pour toute paire de matrices $A$ et $E$, il existe des matrices réelles non singulières $T$ et $Q$ telle que :

$$QAT = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{bmatrix}, QET = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \tag{4.0.3}$$

où, $N \in \mathbb{R}^{(n-q)\times(n-q)}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{q\times q}$ et $N^l = 0$ pour tout nombre entier $l \geq 0$.

### 4.0.2 Principaux résultats :

Le résultat principal issu de [9] de cette section est l'extension du lemme pour le cas des systèmes singuliers

**Théorème 4.0.2** *Supposons que le système singulier* (3.0.1) *est tel que* $(A - sE)$ *est régulier, i.e*

$$rang\,[A - sE \quad B] = n$$

*et* $rang\left[A^\top - sE^\top \quad C^\top\right] = n$*, alors la matrice de transfert* $G(s)$ *est négative imaginaire si :*

1. *La matrice* $N$ *dans la formule* (4.0.3) *satisfait* $N = 0$.

*2. Il existe une matrice $P = P^\top \geq 0$ telle que les LMIs suivantes sont satisfaites*

$$\begin{bmatrix} PA + A^\top P & PB - A^\top E^\top C^\top \\ B^\top P - CEA & -\left(CEB + B^\top E^\top C^\top\right) \end{bmatrix} \leq 0, \qquad PE^\top = EP \tag{4.0.4}$$

**Preuve.** Nous pouvons supposer que les matrices $A$ et $E$ sont dans la forme de Weierstrass :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \tag{4.0.5}$$

et la matrice semi définie positive $P$ prend la forme suivante

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3^\top & P_2 \end{bmatrix} \geq 0. \tag{4.0.6}$$

donc

$$(sE - A)^{-1} = \begin{bmatrix} (sE - A_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (sN - I)^{-1} \end{bmatrix} \tag{4.0.7}$$

aussi, depuis $N^l = 0$ pour tout $l$ tel que $l \geq 1$ on a

$$(sN - I)^{-1} = -\sum_{i=0}^{\infty} N^i s^i = -\sum_{i=0}^{l-1} N^i s^i \tag{4.0.8}$$

alors, la fonction de transfert du système singulier prend la fome

$$G(s) = D + C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 - C_2 \left( \sum_{i=0}^{l-1} N^i s^i \right) B_2 \tag{4.0.9}$$

où,

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}; \quad C = [C_1 \;\; C_2]\,. \tag{4.0.10}$$

par ailleur pour $N = 0$ et la matrice $(A - sE)$ est régulière, la fonction de transfert $G(s)$ dans la formule (4.0.9) sera,

$$\begin{aligned} G(s) &= D + C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 - C_2 B_2 \\ &= D_1 + C_1 (sI - A_1)^{-1} B_1 \end{aligned} \tag{4.0.11}$$

avec, $D_1 = D - C_2 B_2$. Substituons (4.0.5) et (4.0.6) avec $N = 0$ dans l'équation $PE^\top = EP$, on obtient cependant,

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{4.0.12}$$

puis on remplace (4.0.5) et (4.0.12) dans les LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} PA + A^\top P & PB - A^\top E^\top C^\top \\ B^\top P - CEA & -\left(CEB + B^\top E^\top C^\top\right) \end{bmatrix} \leq 0$$

il s'ensuit donc,

$$\begin{bmatrix} P_1A_1 + A_1^\top P_1 & 0 & P_1B_1 - A_1^\top C_1^\top \\ 0 & 0 & 0 \\ B_1^\top P_1 - C_1A_1 & 0 & -\left(C_1B_1 + B_1^\top C_1^\top\right) \end{bmatrix}. \tag{4.0.13}$$

Ce qui implique

$$\begin{bmatrix} P_1A_1 + A_1^\top P_1 & P_1B_1 - A_1^\top C_1^\top \\ B_1^\top P_1 - C_1A_1 & -\left(C_1B_1 + B_1^\top C_1^\top\right) \end{bmatrix} \leq 0. \tag{4.0.14}$$

Finalement, une substitution de (4.0.5) dans $\begin{bmatrix} A - sE & B \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} A^\top - sE & C^\top \end{bmatrix}$ donne

$$\begin{bmatrix} A - sE & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - sI & 0 & B_1 \\ 0 & I_{n-q} & B_2 \end{bmatrix} \tag{4.0.15}$$

$$\begin{bmatrix} A^\top - sE^\top & C^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^\top - sI & 0 & B_1 \\ 0 & I_{n-q} & C_2^\top \end{bmatrix}. \tag{4.0.16}$$

Par conséquent $rang \begin{bmatrix} A - sE & B \end{bmatrix} = n$, et $rang \begin{bmatrix} A^\top - sE^\top & C^\top \end{bmatrix} = n$ et cela implique que

$rang \begin{bmatrix} A_1 - sI & B_1 \end{bmatrix} = q$ et $\begin{bmatrix} A_1^\top - sI & C_1^\top \end{bmatrix} = q$. En fin, on conclut que la réalisation de l'epace d'état $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$ est minimale.

et, d'après les LMIs (4.0.14) et le lemme, la fonction de transfert $G(s)$ est négative imaginaire (NI). $\square$

**Exemple 4.0.1** *Considérons le système singulier avec la représentation de l'espace d'état suivante,*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};\; E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};\; D = 0$$

*Notez que ce système singulier est déjà dans sa forme de Weierstrass. La fonction de transfert est :*

$$G(s) = \left(\frac{2s+3}{s^2+3s+2}\right)$$

*Suite à un calcul direct en résolvant les LMIs* (4.0.4) , *nous obtennons la solution suivante qui est une matrice semi définie positive :*

$$P = \begin{bmatrix} 2.484 & -2.969 & 0 \\ -2.969 & 7.939 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Chapitre 5

# Systèmes linéaires de Lyapunov à temps continu

Ce chapitre traite une nouvelle classe de systèmes qui sont des systèmes dit de Lyapunov. Nombreuses sont les applications de cette classe. La contrôlabilité et l'observabilité de ces systèmes a été étudiée par [12].
Le problème de positivité dans son cas discret a été considéré dans [13]. L'ideé originale dans ce chapitre est de faire une généralisation adaptée des résultats des chapitres (3) et (4) pour cette classe.

**Définition 5.0.2** *Un système décrit par les équations*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + x(t)B + Fu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{5.0.1}$$

*est appelé système linéaire de Lyapunov à temps continu, où* $x(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est l'état,* $u(t) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *le contrôle,* $y(t) \in \mathbb{R}^{p\times n}$ *la sortie.* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

Quelques proprietés nécéssaires à l'étude seront mises en évidence dans cette section ; nous nous basons pour ce faire sur les références suivantes [14], [15].
Nous rappelons dans ce qui suit, la définition du produit de Kronecker et quelques de ces propriétés utiles à l'étude de la positivité réelle et de la négativité imaginaire pour la classe des systèmes de Lyapunov.

Le travail est donc structuré en deux étapes, la premiére c'est de faire une transformation via les propriétés de ce produit au système (1.1.1) à un système de type (5.0.1) . La dernière étape consiste à adapter les lemmes, d'où l'extension, des lemmes PR et NI.

### 5.0.3 Produit de Kronecker

**Définition 5.0.3** *Le produit de kronecker* $A \otimes B$ *des matrices* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *et* $B = (bij) \in \mathbb{R}^{p\times q}$ *est une matrice bloc définie par*

$$A \otimes B = (a_{ij}B)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in \mathbb{R}^{mp\times nq}$$

**Quelques propriétés**

Des propriétés de bases seront données par le théorème suivant

**Théorème 5.0.3** *Soit* $A \in M_{m,n}(\mathbb{k})$*, alors*

1. $(\alpha A) \otimes B = \alpha (A \otimes B) = A \otimes (\alpha B)$ , $\forall \alpha \in \mathbb{k}$ *et* $\forall B \in M_{p,q}(\mathbb{k})$ .
2. $(A \otimes B)^\top = A^\top \otimes B^\top$
3. $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$.
4. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ *par* $B \in M_{p,q}(\mathbb{k})$ *et* $C \in M(\mathbb{k})$ .
5. $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$.
6. $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$ , $B, C \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ .
7. $I_m \otimes I_n = I_{mn}$
8. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ *(si* $A$ *et* $B$ *sont inversible )*

Pour les besoins de l'étude du lemme PR et le lemme NI pour des systèmes de type Lyapunov, nous avons définit le produit de Kronecker qui est une autre manière de définir la notion de produit de matrices.
Il est aussi appelé produit direct de deux matrices ou produit tensoriel. Il se note $\otimes$. Nous faisons donc appel aux résultats suivants en nous basant sur [3], [8].

**Théorème 5.0.4** *Soit* $A \in M_{m,n}(\mathbb{k})$ , $B \in M_{p,q}$,

alors $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$

**Généralisation :**

**Corollaire 5.0.1** *1. Pour $A_i$, $B_i$ $i = \overline{1,n}$ de dimension appropriées*

$$\left(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n\right).\left(B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_n\right) = A_1B_1 \otimes A_2B_2 \otimes \cdots A_nB_n$$

*2.* $\left(A_1 \otimes B_1\right)\left(A_2 \otimes B_2\right) \cdots \left(A_n \otimes B_n\right) = \left(A_1A_2 \cdots A_n\right) \otimes \left(B_1B_2 \cdots B_n\right)$

**Corollaire 5.0.2** *Soit $A \in M_m(\Bbbk)$ et $B \in M_n(\Bbbk)$ , alors*

1. $(A \otimes I)^k = A^k \otimes I$ *et* $(I \otimes B)^k = I \otimes B^k$ *pour* $k = 1, 2, \cdots$
2. $\forall P(t)$ *polynôme* $P(A \times I) = P(A) \otimes I$ *et* $P(I \otimes B) = I \otimes P(B)$.

**Vectorisation d'une matrice :**

**Définition 5.0.4** *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice d'ordre $m \times n$, on associe à $A$ le vecteur noté $vec(A)$ définit par :*

$$vec(A) = \left[a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}, a_{12}, \cdots, a_{m2}, \cdots\cdots, a_{1n}, \cdots a_{mn}\right]^\top$$

**Proposition 5.0.1** *Soient $A \in M_{mn}$ et $B \in M_{np}$, alors*

$$vec(AB) = (I \otimes A)\, vec(B)$$

Le resultat fondamentale à la résolution des équations matricielles et servant à réduire notre système est caractérisé par le théorème suivant,

**Théorème 5.0.5** *L'équation $AXB = C$ où $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times q}$, et $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ est equivalente à $\left(B^\top \otimes A\right) vecX = vecC$.*

Moyennant ces résultats, on peut donc transformer le système de Lyapunov en un système à $mq$ équations et $np$ inconus donnés par :

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{x}}(t) &= \overline{A}\widetilde{x}(t) + \overline{B}\widetilde{u}(t) \\ \widetilde{y}(t) &= \overline{C}\widetilde{x}(t) + \overline{D}\widetilde{u}(t) \end{aligned} \tag{5.0.2}$$

où $\widetilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{n^2}$le vecteur d'état, $\widetilde{u}(t) \in \mathbb{R}^{nm}$ le vecteur d'entreé, $\widetilde{y}(t) \in \mathbb{R}^{pn}$ le vecteur de sorties, $\overline{A} \in \mathbb{R}^{n^2 n^2}$, $\overline{B} \in \mathbb{R}^{n^2(nm)}$, $\overline{C} \in \mathbb{R}^{(pn)n^2}$ et $\overline{D} \in \mathbb{R}^{(pn)(nm)}$ tel que :

$$\begin{aligned} vecx &= \widetilde{x} = [x_1 \ x_2 \cdots\cdots x_n]^\top \\ vecu &= \widetilde{u} = [u_1 \ u_2 \cdots\cdots u_m]^\top \\ vecy &= \widetilde{y} = [y_1 \ y_2 \cdots\cdots y_p]^\top \end{aligned}$$

$x_i, u_i, y_i$ sont les lignes des matrices $x, u$, et $y$ respectivement.
$\overline{A} = \left(A \otimes I_n + I_n \otimes B^\top\right)$, $\overline{B} = F \otimes I_n$, $\overline{C} = C \otimes I_n$ et $\overline{D} = D \otimes I_n$.
Nos résultats récents dans ce chapitre sont formulés dans ce théorème,

### 5.0.4 Lemme positif réel pour les systèmes de Lyapunov

Pour le système de Lyapunov de type (5.0.1), on a la fonction de transfert qui devient :

$$\begin{aligned} \overline{H}(s) &= \overline{D} + \overline{C}^\top \left(sI - \overline{A}\right)^{-1} \overline{B} \qquad (5.0.3) \\ &= D \otimes I_n + \left(I_n \otimes C^\top\right) \left(sI - \left(A \otimes I_n + I_n \otimes B^\top\right)\right)^{-1} F \otimes I_n, \end{aligned}$$

Doù l'extension,

**Théorème 5.0.6** *(condition suffisante) Si les LMIs*

$$\begin{bmatrix} \overline{A}^\top \overline{X} + \overline{X}\,\overline{A} & \overline{X}\,\overline{B} - \overline{C} \\ \overline{B}^\top \overline{X} - \overline{C}^\top & -\overline{D} - \overline{D}^\top \end{bmatrix} \leq 0 \quad \text{et} \quad \overline{X} \geq 0$$

admettent une solution $\overline{X}$, alors $\overline{H}$ est positive-réelle, où, $\overline{A} = \left(A \otimes I_n + I_n \otimes B^\top\right)$, $\overline{B} = F \otimes I_n$, $\overline{C} = C \otimes I_n$, $\overline{D} = D \otimes I_n$. qui s'ecrit donc sous forme,

$$\begin{bmatrix} \left(A \otimes I_n + I_n \otimes B^\top\right)^\top \overline{X} + \overline{X}\left(A \otimes I_n + I_n \otimes B^\top\right) & \overline{X}\left(F \otimes I_n\right) \\ \left(F \otimes I_n\right)^\top \overline{X} - \left(C \otimes I_n\right) & -\left(D \otimes I_n\right) - \left(D \otimes I_n\right)^\top \end{bmatrix} \leq 0 \quad et \quad \overline{X} \geq 0$$

(condition nécessaire)
Supposez que (5.0.3) est une réalisation minimale de $\overline{H}$. Si $\overline{H}$ est positive-réelle, alors il existe une solution $\overline{X}$ pour les LMIs en question.

**Remarque 5.0.1**

1. *Le lemme NI est de mème admissible à l'extention pour cette classe de systèmes.*
2. *les résultats dans tout ce mémoire s'adapterons aux cas des systèmes à temps discret.*

### 5.0.5 Lemme négativité imaginaire pour les systèmes de Lyapunov

On énonce de même notre extention et adaptation du lemme N.I pour le cas des systèmes de Lyapunov.

**Lemme 5.0.2** *Soit* $\left(\overline{A},\overline{B},\overline{C},\overline{D}\right)$ *une réalisation minimale de la matrice de transfert* $\overline{H}\left(s\right)$ *pour le système* (5.0.2), *alors* $\overline{H}\left(s\right)$ *est négative imaginaire si et seulement si il existe les matrices* $\overline{P}=\overline{P}^{\top}$, $\overline{W}\in\mathbb{R}^{(pn)(nm)}$, *et* $\overline{L}\in\mathbb{R}^{(pn)n^{2}}$ *tel que les LMIs suivantes sont vérifies :*

$$\left[\begin{array}{cc}\overline{P}\ \overline{A}+\overline{A}^{\top}\overline{P} & \overline{P}\ \overline{B}-\overline{A}^{\top}\overline{C}^{\top}\\ \overline{B}^{\top}\overline{P}-\overline{C}\ \overline{A} & -\left(\overline{C}\ \overline{B}+\overline{B}^{\top}\overline{C}\right)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}-\overline{L}^{\top}\overline{L} & -\overline{L}^{\top}\overline{W}\\ -\overline{W}\ \overline{L} & -\overline{W}^{\top}\overline{W}\end{array}\right]\leq 0$$

*où,* $\overline{A}=\left(A\otimes I_{n}+I_{n}\otimes B^{\top}\right)$, $\overline{B}=F\otimes I_{n}$, $\overline{C}=C\otimes I_{n}$, $\overline{D}=D\otimes I_{n}$.

**Conclusion :** Ce chapitre traîte le classe des systèmes de Lyapunov. Nous avons mis en évidence les récents résultats adaptés à cette classe comme extension des lemmes NI et PR des chapitre précédents.

# CONCLUSION

L'étude que nous avons mené est organisée en deux grandes parties, d'une part, nous avons traité les systèmes singuliers dans leur cas continu. Une adaptation des résultats est donc possible voir [4], [10].

Lors de cet étude, nous avons notamment étudié les deux lemmes PR et NI et faire une description des résultats en s'inspirant des résultats de [10] [9].

Noun avons cependant utilisé le formalisme LMI pour répondre à la question. La dernière partie de ce mémoire a été consacrée à une récente classe de systèmes dits de Lyapunov.

Nous avons caractérisé par des extensions les résultats des chapitres (3) et (4) à cette classe de systèmes. Le produit de Kronecker est utilisé ainsi que ses propriétés et le formalisme LMI pour déduire nos résultats.

De nombreuses questions et prochaines études restent ouvertes et à effectuer. Comme l'extension des résultats au cas des systèmes de Lyapunov singuliers. D'autres études pour le cas bidimensionnel feront l'objet de nos investigations futures.

# Bibliographie


[1] D. Arzelier. "Représentation et analyse des systèmes linéaires".Notes de cours. Version 6 - 2010.

[2] Z.Bai and R.W.Freund, Eigenvalue-based characterization and test for positive realness of scale transfer functions, IEEE Trans. Automat. Control AC-45 (2000), 2396-2401.

[3] B. Broxson. The Kronecker Product. UNF Thesis-2006

[4] D. BOUAGADA, "Systèmes différentiels singuliers positifs et LMIs" These de Doctorat. 2007.

[5] L. DAI 'Singular control system' (Springer-Verlag, 1989).

[6] F.R.Gantmacher "Théorie des matrices" Tome 1 et Tome 2. 1966.

[7] J. L. GRAYE ; Transformation de Laplace : Definition, proprietes et exemples d'utilisation en physique.

[8] R. A. Horu et C. R. Johnson. matrix analysis cambridge university press, 1985.

[9] M. A. Mabr, A. G. Kallapur, I. R. Petersen, and A. Lanzon "A Negative Imaginary lemma for Descriptor systems" 10-11 November 2011, Melbourne, Australia.

[10] R. W. Freund et F. Jarre "An Extension of the Positive Real Lemma to descriptor Systems". Numerical Analysis Manuscript No. 00-3-09, Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey, December 2000.

[11] Murry R. Spiegel, "Tansformées de Laplace" Serie schaum cours et Problèmes.

[12] M.S.N. Murty and B.V. Apprao, "controllability and observability of Lyapunove systems", Ranich University Mathematical Journal 2005, vol. 32, pp. 55-65.

[13] T. Kaczorek, "Positive discrete-time linear Lyapunov systems" Submitted to the $15^{th}$ Mediterranean conference of control and Automation-MED 2007, 27-29 June, Athens.

[14] T. Kaczorek, "Vectors and Matrices in Automation and Electrotechnics", Wydawnictow Naukowo-Techiczne , Warszawa 1998 (in Polish).

[15] T. Kaczorek and P. Przybororowski "Positive Continuous-Time Linear Lyapunov systems" Warsaw, September 9-12.