UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LAVIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Spécialité : Modélisation Contrôle et Optimisation

Thème

Positivité et stabilité asymmptotique du model dynamique standard linéaire et scalaire de type 2D discret-continu

Présenté par

M^{elle} ETTAOUI Hanane

Soutenu le 26 /05/2015

Devant le jury

Président	Djillali	LAID	MAA	**U.Mostaganem.**
Examinateur	Djillali	BOUAGADA	Pr	**U.Mostaganem.**
Encadreur	Mohammed Amine	GHEZZAR	MAA	**U.Mostaganem**

Table des matières

INTRODUCTION

Dans de nombreux systèmes physiques les variables sont par nature positives, or les modèles usuels en particulier linéaires n'intègrent en général par cette contrainte.
Des modèles particuliers ont été développés par nombreux scientifiques, les modèles à compartiments pour la médecine et la biologie, les modèles électrique (circuits R.L.C), et d'autres modèles apparaissent dans les sciences de la communication et l'information.
Un système dynamique contien un certain nombre de grandeurs : $x(t)$ dénote l'état du système, $u(t)$ dénote les entrées du système, $y(t)$ dénote les sorties du système, Dans ce mémoire, nous interese nous nous interessons aux systèmes de type$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + BU \\ y = Cx + DU \end{array} \right.$.
Dans les systèmes continu-discrets, la variable du temps continue et la variable discret interagissent et ces composantes ne peuvent pas être séparées. de tels systèmes sont appelés les systèmes hybride.
Ce mémoire est dévolue à l'étude des positivité et stabilité des système dynamique standard linéaire et scalaire de type $2D$ discret- continu.
Pour ce faire, on couvre ce travail sur tois chapitres.
Le premier chapitre est un rappel introductif sur les systèmes linéaires et leurs développement dans la théorie de commande, et nous exposons une synthèse de la transformée Laplace et la transformée en Z comme outil servant à répondre à notre problématique.
Le deuxième chapitre présent la positivité d'un systèmes linéaires continu-discret de type $2D$ et quelque exemple applicable
Le troisième chapitre traite les nouvelles condition pour stabilité asymtotique des systèmes linéaires continu-discret de type $2D$ scalare et l'efficacité de la procédure est démontrée sur les exemples.

Notation :

$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}_+$: ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

$\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{Z}$: ensemble des entiers.

$\mathbb{Z}^+$: L'ensemble des entiers positif.

$\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.

$\mathrm{Re}\, z$: partie réelle du nombres complexes z

$\mathrm{Im}\, z$: partie imaginaire du nombre complexes z

λ : Les valeures propres d'une matrice carée.

$Tr(A)$: La trace d'une matrice carrée A tq : $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

$||$: Valeur absolue dans $\mathbb{R}$, ou module dans $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R}^{n\times m}$: L'espace des matrices de n lignes et m colonnes à entrée dans $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^{n\times n}$: L'espace des matrices carrées de dimension n à entrées dans $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}_+^{n\times m}$: L'espace des matrices de n lignes et m colonnes à entrée dans $\mathbb{R}_+$

$\bar{n}, \bar{m}$: L'ensemble des n premiers entiers natureles non nuls.

A^t : transposée d'une matrice A.

$com(A)$: commatrice d'une matrice A.

$\exp A, e^A$: L'exponnentielle d'une matrice A.

$\det(A)$: Le déterminant d'une matrice A.

$P_\lambda(A)$: Le polynôme caractiristique d'une matrice carrée A .

Chapitre 1

Generalites et notions de base

1.1 Introduction

Le but de cette section est d'anticiper et de définir des notions qui vont être en relation avec le sujet qui nous a été confié.
Dans un premier temps, nous introduisons dans ce qui suit, quelques notions utiliseés ultérieurement dans notre développement :

1.2 Exponentielle d'une matrice

Définition 1.2.1 *L'exponnentielle de la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrice de $\mathbb{R}^{n\times n}$ notée e^A ou $\exp(A)$ est définie par la relation :*

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k. \tag{1.1}$$

Propriétés Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\bullet\ e^{A+B} = e^A \cdot e^B \qquad \text{si} \quad AB = BA. \tag{1.2}$$

$$\bullet\ \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ e^A \text{ est inversible et } (\ e^A)^{-1} = e^{-A}\ . \tag{1.3}$$

$$\bullet\ \det(e^A) = e^{Tr(A)}. \tag{1.4}$$

1.3 Matrices non-négatives, positives et de Metzler

Soient $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ et $B = (b_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ des matrices à coefficients réels. Par la suite, nous notons I_n, la matrice identité d'ordre n ou plus brièvement I.

Définition 1.3.1 *Soit la matrice* $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$

•A est une matrice $\boldsymbol{non - négative}$ si $\forall i \in \bar{n}$, $\forall j \in \bar{m}$: $a_{ij} \geq 0$, autrement dit toute ses entrées sont non-négatives.Nous noterons une telle matrice par : $A \geq 0$ ou encore, $A \in \mathbb{R}_{+}^{n\times m}$.

•A est une matrice $\boldsymbol{positive}$ si A est non-négative et $\exists k \in \bar{n}$, $\exists l \in \bar{m}$: $a_{kl} > 0$, c'est à dire toutes ses entrées sont non négatives avec au moins une entrée strictement positive. Nous noterons une telle matrice par : $A > 0$.

•A est une matrice $\boldsymbol{strictement\ positive}$ si $\forall i \in \bar{n}$, $\forall j \in \bar{m}$: $a_{ij} > 0, ie.$toutes ses entrées sont (strictement) positives. Nous noterons une telle matrice par : $A >> 0$.

Ces défnitions et notations seront également valables pour des vecteurs de dimension $n, n \geq 2$. Cependant, pour les scalaires, la propriété strictement positif $\alpha >> 0$ coïncide avec $\alpha > 0$.

•A est une matrice de $\boldsymbol{Metzler}$ si $\forall i \in \bar{n}$, $\forall j \in \bar{m}$, $i \neq j$: $a_{ij} \geq 0$ $i.e$ toutes ses entrées hors diagonales sont non négatives.

Exemple 1.3.1 *La matrice A suivante est une matrice de Metzler,*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

1.4 Le polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\lambda \in \mathbb{k}(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique de A est noté $P_\lambda(A)$ et définit par :

$$P_\lambda(A) = \det(\lambda I - A). \tag{1.5}$$

1.5 La transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un outil important et très puissant pour résoudre les équations et les systèmes différentiels linéaires en temps continu·

Définition 1.5.1 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est causale si f est nulle pour tout $t < 0$*

$$f(t) = \begin{cases} f(t) & ; \quad t \geq 0 \\ 0 & ; \quad t < 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

Exemple 1.5.1 *Soit les fonctions H et f définit par :*

$$H(t) = \begin{cases} 1 & ; \quad t \geq 0 \\ 0 & ; \quad t < 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} e^t & ; \quad t \geq 0 \\ 0 & ; \quad t < 0 \end{cases}$$

sont des fonctions causales.

Définition 1.5.2 *Soit $f(t)$ une fonction causale. La transformée de Laplace de $f(t)$ notée $\mathcal{L}(f(t))$ ou $F(s)$, est définie par :*

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt. \tag{1.7}$$

où $s \in \mathbb{C}$.

Exemple 1.5.2 *Soit $f(t) = e^{kt}$ et $k \in \mathbb{R}$*

Alor :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{kt}) &= \int_0^{+\infty} e^{kt}e^{-st}dt \\
&= \lim_{r\longrightarrow+\infty}\int_0^r e^{(k-s)t}dt \\
&= \lim_{r\longrightarrow+\infty}\frac{1}{k-s}(e^{(k-s)r}-1), \quad \text{avec} \quad s=x+iy \\
&\quad \text{on a} \\
\lim_{r\longrightarrow+\infty} &\mid e^{(k-x-iy)r} \mid = \lim_{r\longrightarrow+\infty} \mid e^{(k-x)r} \mid\mid e^{-iyr} \mid \\
&= \lim_{r\longrightarrow+\infty} e^{(k-x)r} \quad \text{car} \mid e^{-iyr} \mid = 1 \text{ et } \mid e^{(k-x)r} \mid \in \mathbb{R}_+^* \\
&= 0 \ \text{ si } \quad k-x \prec 0 \\
&= 0 \quad \text{si} \quad k<\mathrm{Re}(s) \\
\text{d'où} \quad &: \quad \mathcal{L}(e^{kt}) = \frac{1}{s-k} \qquad si \ \ k<\mathrm{Re}(s) \\
\text{En particulier} \quad &: \\
\text{Si } k &= 0 \ \text{ et si } \ u(t)=1 \text{ est une fonction unité alors :} \\
\mathcal{L}(u(t)) &= \frac{1}{s} \ \text{ pour } \ \mathrm{Re}(s)>0
\end{aligned}$$

1.6 Propriétés de la transformée de Laplace

liniéarité : Soit α et β sont constantes quelconques et $f(t)$, $g(t)$ sont des fonctions dont les transformées de laplace sont respectivement $F(s)$ et $G(s)$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\alpha f\left(t\right)+\beta g(t)\right] &= \alpha\mathcal{L}\left[f(t)\right]+\beta\mathcal{L}\left[g(t)\right] \\
&= \alpha F(s)+\beta G(s).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Dérivation :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s)-f(0). \tag{1.9}$$

Dans le cas générale on a :

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-1}f\ '(0)-...-f^{(n-1)}(0). \tag{1.10}$$

Intégration :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(s)}{s}. \quad \text{si } f(0)=0 \tag{1.11}$$

Retard temporel :

$$\mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right] = \exp(-s\tau)F(s). \tag{1.12}$$

Convolution :

$$\mathcal{L}\left[f(t) * g(t)\right] = F(s) \cdot G(s) \tag{1.13}$$

Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \to \infty} sf(s). \tag{1.14}$$

Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sf(s). \tag{1.15}$$

La transformé de Laplace de t^α :

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad , n \in \mathbb{N} \tag{1.16}$$

Table de quelques transformée de laplace :

Les fonction	ça trasformée de laplace
a	$\frac{a}{s}$
at	$\frac{a}{s^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\sin(wt)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
$sh(wt)$	$\frac{w}{s^2-w^2}$
$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2+w^2}$
$ch(wt)$	$\frac{s}{s^2-w^2}$
$e^{-at}\sin(wt)$	$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$

1.7 Transformation de Laplace inverse

Définition 1.7.1 *La transformée de Laplace étant un opérateur bijectif, sa bijection inverse existe. Elle est unique et on l'appelle originale de F, elle est définie par :*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s\right)\right)=f\left(t\right). \tag{1.17}$$

1.7.1 Propriétés :

Linéarité : Si C_1 et C_2 sont des constantes quelconques et $F(s)$, $G(s)$ les transformées de Laplace de $f(t)$ et $g(t)$, respectivement alors :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{C_1F(s)+C_2G(s)\right\}=C_1f\left(t\right)+C_2g\left(t\right) \tag{1.18}$$

Changement d'échelle :

Si

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s\right)\right)=f\left(t\right) \tag{1.7.1}$$

alors,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s-a\right)\right)=\exp\left(at\right)f\left(t\right). \tag{1.19}$$

avec $a\in\mathbb{R}$.

Transformée inverse de dérivées :

a/Si

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F\left(s\right)\right)=f\left(t\right)$$

Alors,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(F^{(n)}\left(s\right)\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{dp^n}F\left(s\right)\right\} \\ &= \left(-1\right)^n t^n f\left(t\right).\end{aligned} \tag{1.20}$$

et n entier positif.

b/ Si $f(0) = 0$ alors,

$$\mathcal{L}^{-1}(sF(s)) = f^{'}(t)\,. \tag{1.21}$$

1.8 La transformée en Z

Définition 1.8.1 *La transformée en Z est une application qui transforme une suite définie sur les entiers en une fonction S d'une variable complexe noté Z telle que :*

$$X(z) = Z(x(n)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \tag{1.22}$$

$$z \in \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \ \textit{converge} \right\}$$

La variable n représente en général le temps discrétisé.

Exemple 1.8.1 *On note que les valeurs $n = 0$ sont notées par "$\wedge$";*

$$x_1(n) = \left\{ \hat{1}, 2, 5, 7, 0, 1 \right\}$$

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) z^{-n} \\ &= 1 \times z^0 + 2 \times z^{-1} + 5 \times z^{-2} + 7 \times z^{-3} + 0 \times z^{-4} + 1 \times z^{-5} \\ &= 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5} \end{aligned}$$

1.8.1 Propriétés de la transformée en Z :

La transformée en Z possède les proprietés formelles présentées dans le tableau ci dessous et qu'on détaillera par la suite.

opération sur les suites	opération sur la transformée en Z
$ax(n) + by(n)$	$aZ(x(n)) + bZ(y(n))$
$Z(x(n-k))$	$z^{-k} Z(x(n))$
$Z(x(n+k))$	$z^k Z(x(n)) - \sum_{j=0}^{k-1} x(j) z^{k-j}$
$Z(x(n) * y(n))$	$Z(x(n)) Z(y(n))$
$Z(a^n x(n))$	$Z(x(n))(z/a)$
$Z(nx(n))$	$-z\frac{d}{dz} Z(x(n))$
$Z(n^k x(n))$	$(-z\frac{d}{dz})^k Z(x(n))$

Linéarité :

La transformée en Z d'une combinaison linéaire de deux signaux est la combinaison linéaire des transformées en Z de chaque signal :

$$\forall\lambda_1 \quad \text{et} \quad \forall\lambda_2 \;\; Z(\lambda_1\, x_1(n) + \lambda_2\, x_2(n)) = \lambda_1 Z(x_1(n)) + \lambda_2 Z(x_2(n)) \;. \tag{1.23}$$

Théorème du retard :

Cas de la transformée en Z bilatérale

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \tag{1.8.1}$$

$$Z(x(n)) = X(z) \implies Z(x_{n-k}) = z^{-k} X(z) \tag{1.24}$$

Cas de la transformée en Z monolatérale

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

$$Z(x(n)) = X(z) \quad \implies$$

$$Z(x_{n-k}) = z^{-k}\; X(z) + \left(\sum_{n=1}^{k} x_{-n} z^{n-k} \right) \tag{1.25}$$

Théorème de convolution :

Soit z_n la suite obtenue par convolution de deux suites :

$$\begin{aligned} x_n \text{ et } y_n \;\; : \qquad & z_n = x_n *\; y_n = \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i} \qquad (1.26) \\ \text{Donc } Z(z_n) \;\; &= \;\; Z(x_n *\; y_n) \\ &= \;\; Y(z) X(z) \end{aligned}$$

Avec $X(z) = Z(x_n)$ et $Y(z) = Z(y_n)$.

Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{n\to 0} x(n) = \lim_{z\to\infty} X(z).$$

Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{n\to+\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z). \tag{1.27}$$

Multiplication par e^{-anT} :

$$Z(e^{-anT}x(n)) = X(ze^{at}). \tag{1.28}$$

Dérivation :

Comme

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \tag{1.29}$$

et on a aussi :

$$\begin{aligned} \frac{dX(z)}{dz} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} - nx(n)z^{-n-1} \\ -z\frac{dX(z)}{dz} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx(n)z^{-n} \end{aligned} \tag{1.30}$$

de ce fait il apparait que $-z\frac{dX(z)}{dz}$ est la transformée de $nx(n)$.

1.8.2 Table des transformées en Z usuelles

suite	transformée en Z	domaine de convergence
$u_0 = 1 \quad u_n = 0$ si $n > 0$	1	C
$u_k = 1 \quad u_n = 0$ si $n \neq k$	z^{-k}	$C*$
1	$\frac{Z}{Z-1}$	$\mid Z \mid > 1$
n	$\frac{Z}{(Z-1)^2}$	$\mid Z \mid > 1$
a^n	$\frac{Z}{Z-a}$	$\mid Z \mid > a$
na^n	$\frac{aZ}{(Z-a)^2}$	$\mid Z \mid > a$
$\cos(wn)$	$\frac{Z^2-Z\cos(w)}{Z^2-2Z\cos(w)+1}$	$\mid Z \mid > 1$
$\sin(wn)$	$\frac{Z\sin(w)}{Z^2-2Z\cos(w)+1}$	$\mid Z \mid > 1$
$a^n\cos(wn)$	$\frac{Z^2-aZ\cos(w)}{Z^2-2aZ\cos(w)+a^2}$	$\mid Z \mid > a$
$a^n\sin(wn)$	$\frac{aZ\sin(w)}{Z^2-2aZ\cos(w)+a^2}$	$\mid Z \mid > a$

1.9 Système d'état

Soit le système linéaire définit par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \qquad\qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{1.31}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ dénote l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ dénote les entrées du système, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ dénote les sorties du système, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, et $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$ est matrices de dimentions appropriées, et $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ dénote le dérivé de $x(t)$ par rapport au temp.

1.10 La fonction de transfert

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation d'état où la condition initiale est supposée nulle : $x(0) = 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\dot{x}(t)) &= Ax(t) + Bu(t)) \Longrightarrow sX(s) = Ax(s) + Bu(s) \\ &\Longrightarrow X(s) = (sI_n - A)^{-1}Bu(s), \end{aligned}$$

La matrice $(sI_n - A)$ est inversible pour quelque $s \in \mathbb{C}$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation de sortie :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y(t)) &= Cx(t) + Du(t)) \Longrightarrow Y(s) = Cx(s) + Du(s) \qquad (1.32)\\
y(s) &= (C(sI_n - A)^{-1}B + D)U(s)\\
H(s) &= C(sI_n - A)^{-1}B + D\\
&= \frac{C(com(sI_n - A))^T B}{\det(sI_n - A)} + D.
\end{aligned}$$

1.11 Système positif

Dans ce qui suit nous allons nous intresser à la notion de positivité et de stabilité concernant un système défini :

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \qquad (1.33)\\
y &= Cx + Du
\end{aligned}$$

Définition 1.11.1 *Un système est dit positif si pour toute entrée positive et condition initiale positive correspond un état positif et une sortie positive.*

Le système (1.33) est par définition dit positif si et seulement si :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+,\ \forall u \in \mathbb{R}_+ \text{ alors } x(t) \in \mathbb{R}_+ \text{ et } y(t) \in \mathbb{R}_+. \qquad (1.34)$$

1.12 Stabilité asymptotique

Définition 1.12.1 *Le système (1.33) est dit* ***aysmptotiquement stable*** *si et seulement si la solution à l'équation homogène*

$$\dot{x} = Ax \quad , \quad x(t_0) = x_0,$$

tend vers zéro quant $t \longrightarrow \infty$ quelque soit x_0 arbitraire.

Théorème 1.12.1 *Le sytème (1.33) est asymptotiquement stable si et seulement si les valeurs propres de la matrice A sont à partie réelle strictement négatives.*

Chapitre 2

La Positivité

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous introduirons une nouvelle classe de systèmes hybrides positifs. Des conditions nécessaires et suffisantes seront établies pour qu'un tel système soit positif. Pour cela, nous rappelons quelques définitions et résultats sur la positivité.

2.2 Formulation du problème

Considérons le nouveau modèle $2D$ de système linéaire continu-discret scalaire
(pour $i \in \mathbb{Z}_+$ et $t \in \mathbb{R}_+$) défini :

$$\dot{x}_1(t,i) = a_{11}x_1(t,i) + a_{12}x_2(t,i) + b_1u(t,i) \tag{2.1.a}$$

$$x_2(t,i+1) = a_{21}x_1(t,i) + a_{22}x_2(t,i) + b_2u(t,i) \tag{2.1.b}$$

$$y(t,i) = c_1x_1(t,i) + c_2x_2(t,i) + du(t,i) \tag{2.1.c}$$

$$\begin{aligned} \textit{où} \quad \dot{x}_1(t,i) &= \partial x_1(t,i)/\partial t \;\;,\; x_1(t,i) \in \mathbb{R} \;,\; x_2(t,i) \in \mathbb{R} \\ u(t,i) &\in \mathbb{R} \;,\; y(t,i) \in \mathbb{R} \;\; \text{et } a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2, c_1, c_2 \\ & \text{et } d \text{ sont des coefficients constants.} \end{aligned}$$

Les conditions aux limites pour (2.1.a) et (2.1.b) sont sous la forme :

$$\begin{aligned} x_1(0,i) &= x_1(i),\ i \in \mathbb{Z}_+, \\ x_2(t,o) &= x_2(t),\ t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Le modèle (2.1) peut être écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t,i) \\ x_2(t,i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t,i) \\ x_2(t,i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t,i), \tag{2.3.a}$$

$$y(t,i) = [c_1 \quad c_2] \begin{bmatrix} x_1(t,i) \\ x_2(t,i) \end{bmatrix} + du(t,i). \tag{2.3.b}$$

Le modèle général (2.1)(ou (2.3)) sera appelé le nouveau modèle générale standard linéaire bidimentionnel continu-discret scalaire.

2.3 La solution du probleme

D'apré [3] la solution de système (2.4) défini

$$\dot{x}_1(t,i) = A_{11}x_1(t,i) + A_{12}x_2(t,i) + B_1u(t,i) \tag{2.4.a}$$

$$x_2(t,i+1) = A_{21}x_1(t,i) + A_{22}x_2(t,i) + B_2u(t,i) \tag{2.4.b}$$

$$y(t,i) = C_1x_1(t,i) + C_2x_2(t,i) + Du(t,i) \tag{2.4.c}$$

où $\dot{x}_1(t,i) = \partial x_1(t,i)/\partial t$, $x_1(t,i) \in \mathbb{R}$, $x_2(t,i) \in \mathbb{R}$

$u(t,i) \in \mathbb{R}$, $y(t,i) \in \mathbb{R}$

et $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2, C_1, C_2$ et D sont des matrices à entrées constantes.

est donnée sous la forme :

$$x_1(t,i) = \begin{cases} \phi(t)x_1(0) + P_t x_2(t) + Q_t u(t,0) & \text{pour } i = 0 \\ \phi(t)x_1(i) + \sum\limits_{k=0}^{i-1} P_t(A_{21}P_t + A_{22})^{i-k-1}\left[A_{21}\phi(t)x_1(k) + (A_{21}Q_t + B_2)u(t,k)\right] & \\ \quad + P_t(A_{21}P_t + A_{22})^i x_2(t) + Q_t u(t,i) & \text{pour } i = 1.2... \end{cases} \tag{2.5}$$

$$x_2(t,i) = \sum_{k=0}^{i-1}(A_{21}P_t + A_{22})^{i-k-1}\left[A_{21}\phi(t)x_1(k) + (A_{21}Q_t + B_2)u(t,k)\right]$$

$$+(A_{21}P_t + A_{22})^i x_2(t) \qquad\qquad \text{pour } i = 1.2...$$

où $\phi_t = e^{A_{11}t}$ et les opérateurs P_t et Q_t sont définis par :

$$\begin{aligned} P_t x &= \int_0^t \phi(t-\tau)A_{12}x(\tau)d\tau, \\ Q_t x &= \int_0^t \phi(t-\tau)B_1 x(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Dans le cas particulier si on pose : $A_{11} = a_{11}$, $A_{12} = a_{12}$, $A_{22} = a_{22}$, $A_{21} = a_{21}$.

On obtien le système (2.1).

Alors la solution de système (2.1) est de la forme :

$$x_1(t,i) = \begin{cases} \phi(t)x_1(0) + P_t x_2(t) + Q_t u(t,0) & \text{pour } i = 0 \\ \phi(t)x_1(i) + \sum_{k=0}^{i-1} P_t(a_{21}P_t + a_{22})^{i-k-1}\left[a_{21}\phi(t)x_1(k) + (a_{21}Q_t + b_2)u(t,k)\right] & \\ +P_t(a_{21}P_t + a_{22})^i x_2(t) + Q_t u(t,i) & \text{pour } i = 1.2... \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} x_2(t,i) = \sum_{k=0}^{i-1} &(a_{21}P_t + a_{22})^{i-k-1}\left[a_{21}\phi(t)x_1(k) + (a_{21}Q_t + b_2)u(t,k)\right] \\ &+ (a_{21}P_t + a_{22})^i x_2(t) \qquad\qquad \text{pour } i = 1.2... \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

où $\phi_t = e^{a_{11}t}$ et les opérateurs P_t et Q_t sont définis par :

$$\begin{aligned} P_t x &= \int_0^t \phi(t-\tau)a_{12}x(\tau)d\tau, \\ Q_t x &= \int_0^t \phi(t-\tau)b_1 x(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

2.4 Conditions sur la positivité

Définition 2.4.1 *Le modèle général* (2.1) *est dit positif (intérieurement) si* $x_1(t,i) \geq 0$ *et* $x_2(t,i) \geq 0$ *pour toutes conditions aux limites* $x_1(i) \geq 0$, $i \in \mathbb{Z}_+$ *et* $x_2(t) \geq 0$, $t \in \Re_+$, *et toutes les entrées* $u(t,i) \geq 0$, $t \in \mathbb{R}_+$, $i \in \mathbb{Z}_+$.

Exemple 2.4.1 *Pour* $a_{12} = 1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0.5$, *et* $a_{11} = -1$

$$\begin{aligned} \phi(t) &= e^{-t} > 0 \\ P_t x &= \int_0^t \phi(t-\tau)x(\tau)d\tau > 0, \\ Q_t x &= \int_0^t \phi(t-\tau)b_1 x(\tau)d\tau > 0. \end{aligned}$$

$$x_1(t,i) = \begin{cases} e^{-t}x_1(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)x_2(\tau)d\tau + Q_t u(t,0) \quad > 0 \qquad \textit{pour } i=0 \\ e^{-t}x_1(i) + \sum_{k=0}^{i-1} P_t(P_t+0.5)^{i-k-1}\left[e^{-t}x_1(k) + (Q_t+b_2)u(t,k)\right] \\ +P_t(P_t+0.5)^i x_2(t) + Q_t u(t,i) \quad > 0 \qquad \textit{pour } i = 1.2... \end{cases}$$

$$x_2(t,i) = \sum_{k=0}^{i-1}(P_t+0.5)^{i-k-1}\left[e^{-t}x_1(k) + (Q_t+b_2)u(t,k)\right] > 0$$

Donc le système est positif.

Théorème 2.4.1 *Le modèle général* (2.1)*est positif (intéreurement) si et seulement si :*

$$a_{11} \in \Re,\ a_{12}, a_{21}, a_{22} \geq 0 \tag{2.7}$$

$$b_1, b_2 \geq 0, \quad c_1,\ c_2 \geq 0, \quad d \geq 0.$$

Preuve. La démonstration repose sur la preuve etablie par [3] prenant les matrice $A_{ij,}$ où i,j=1.2 comme étant des matrices scalaire aux dimention appropriées.

La fonction caractéristique du modèle (1.1) (et(1.3)) est un polynôme de deux variables indépendantes s et z, de la forme :

$$\begin{aligned} w(s,z) &= \det\begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & z-a_{22} \end{bmatrix} \\ &= sz - sa_{22} - za_{11} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

□

Chapitre 3

Stabilité

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier les nouvelles condition nécessaires et suffisantes pour la stabilité asymptotique des systèmes linéaires continu-discret de type $2D$. Une procédure pour vérifier la stabilité asymptotique est proposée. L'efficacité de la procédure est démontrée sur les exemples.

3.2 Stabilité asymptotique

Définition 3.2.1 [1]*Le modèle général* (2.1) *est dit asymptotiquement stable (ou Hurwitz-Shur stable) si pour* $U(t,i) \equiv 0$ *et des conditions aux limites bornées* (2.2) *l'état* $x(t,i) \longrightarrow 0$ *pour* $t, i \to \infty$.

Théorème 3.2.1 [1]*Le modèle général* (2.1) *est dit asymptotiquement stable ssi :*

$$w(s,z) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad \mid z \mid \geq 1 \quad s, z \in \mathbb{C}. \tag{3.1}$$

ou $w(s,z)$ la fonction caractéristique

3.3 conditions pour stabilité

Théorème 3.3.1 *Le modèle général (2.1) est dit asymmptotiquement stable si et seulement si les deux conditions vérifient :*

$$w(s,\exp(jw)) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad \forall w \in [0, 2\pi] \,, \tag{3.2}$$

$$w(jy, z) \neq 0, \quad \mid z \mid \geq 1, \ \forall y \in [0, \infty) \,. \tag{3.3}$$

tel que :

$$\begin{aligned} w(s,\exp(jw)) &= s\exp(jw) - sa_{22} - \exp(jw)a_{11} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \\ w(jy,z) &= jyz - jya_{22} - za_{11} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \end{aligned}$$

Preuve. [2]La relation (3.1) est equivalente aux conditions :

$$w(s,z) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s \geq 0, \quad \mid z \mid = 1 \ , \tag{3.4}$$

$$w(s,z) \neq 0, \quad \operatorname{Re} s = 0, \quad \mid z \mid \geq 1. \tag{3.5}$$

C'est facile de verifier que les conditions (3.4) et (3.5) peut veut être écrites sous les formes (3.2) et (3.3) respectivement.

Résoudre l'équation $w(s,z) = 0$ pour $z = \exp(jw)$, où $w(s,z)$ de la forme (2.8), on obtient :

$$\begin{aligned} w(s,z) &= 0 \ \text{ et } z = \exp(jw) \Rightarrow \\ & \quad s\exp(jw) - sa_{22} - \exp(jw)a_{11} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \\ &\Rightarrow s(\exp(jw) - a_{22}) = \exp(jw)a_{11} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &\Rightarrow s(\exp(jw) - a_{22}) = a_{11}(\exp(jw) - a_{22}) + a_{12}a_{21} \\ &\Rightarrow s(jw) = \frac{a_{11}(\exp(jw) - a_{22}) + a_{12}a_{21}}{(\exp(jw) - a_{22})} \end{aligned}$$

$$s(jw) = a_{11} + \frac{a_{12}a_{21}}{\exp(jw) - a_{22}}. \tag{3.6}$$

de (3.6) il s'en suit que $s(jw)$ est une fonction discontinue aux points $w = 0$ et $w = \pi$ pour $a_{22} = 1$ et $a_{22} = -1$, respectivement Par conséquent. pour exclure la discontinuité nous supposerons que $a_{22} \neq \pm 1$. La remplaçant $w = 0$ et $w = \pi$ dans (3.6) nous obtenons, respectivement,

$$s_0 = s(j0) = a_{11} + \frac{a_{12}a_{21}}{1 - a_{22}}, \tag{3.7}$$

$$s_\pi = s(j\pi) = a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{1 + a_{22}}. \tag{3.8}$$

Posons $s(jw) = u(w) + jv(w)$, où $u(w) = \operatorname{Re} s(jw)$, $v(w) = \operatorname{Im} s(jw)$,il facile de vérifier que $[u(w) - s_c]^2 + v(w)^2 = r^2$, ou $s_c = 0.5(s_0 + s_\pi)$, $r = \mid s_0 - s_c \mid = \mid s_\pi - s_c \mid$. Cela veut dire que la tragectoire de $s(jw)$, $w \in [0, 2\pi]$, est un cercle de centre s_c et de rayon r. D'où, la condition $\operatorname{Re} s(jw) < 0$ verefier pour tout $w \in [0, 2\pi]$ ssi :

$$\max\left\{a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22} - 1}, a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{1 + a_{22}}\right\} < 0 \tag{3.9}$$

□

Lemme 3.3.1 *Pour le modèle général* (2.1) *la condition* (3.2) *est équivalent à* (3.9)

Lemme 3.3.2 *Pour le modèle général* (2.1) *la condition* (3.3) *est équivalent à*

$$-1 < a_{22} < 1 \quad \text{et} \quad a_{11}^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2 > 0 \tag{3.10}$$

Preuve. On pose $w(jy, z) = 0$ et $\mid z \mid < 1$

$$\begin{aligned}
w(jy, z) &= 0 \implies \\
jyz - jya_{22} - za_{11} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) &= 0 \\
z(jy - a_{11}) - jya_{22} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) &= 0 \\
z(jy - a_{11}) &= jya_{22} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})
\end{aligned}$$

$$z(jy) = \frac{jya_{22} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{jy - a_{11}}.$$

$$\begin{aligned}
&\mid z \mid < 1 \quad \Rightarrow \mid z(jy) \mid < 1 \\
&\mid \frac{jya_{22} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{jy - a_{11}} \mid < 1 \\
\frac{\mid jya_{22} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \mid}{\mid jy - a_{11} \mid} &< 1 \\
\frac{\sqrt{(ya_{22})^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2}}{\sqrt{y^2 + a_{11}^2}} &< 1 \\
\frac{(ya_{22})^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2}{y^2 + a_{11}^2} &< 1 \\
(ya_{22})^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2 - y^2 - a_{11}^2 &< 0
\end{aligned}$$

$$y^2(1-a_{22}^2)+a_{11}^2-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^2>0$$

$$\begin{aligned}
y^2(1-a_{22}^2) &> 0 \text{ et } a_{11}^2-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^2>0\\
&\Longrightarrow 1-a_{22}^2>0 \text{ et } a_{11}^2-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^2>0\\
-1 &< a_{22}<1 \text{ et } a_{11}^2-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})^2>0\\
&\text{d'où le résultat.}
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.3.2 *Le modèle général* (2.1) *est dit asymptotiquement stable si et seulement si :*

$$-1<a_{22}<1 \tag{3.11}$$

et la relation (3.9) *est satisfaite,*

ou par équivalence , une des conditions suivantes est vérifiée :

$$a_{12}a_{21}\geq 0, \qquad a_{11}<\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1}. \tag{3.12}$$

$$a_{12}a_{21}< 0, \qquad a_{11}<\frac{a_{12}a_{21}}{1+a_{22}}. \tag{3.13}$$

Preuve. Pour $a_{12}a_{21}\geq 0$

du lemme (3.3.2) on a : $-1<a_{22}<1$

$$\begin{aligned}
-2 &< a_{22}-1<0 \quad \text{et} \quad 0<1+a_{22}<2\\
\frac{1}{a_{22}-1} &< -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+a_{22}}>\frac{1}{2}\\
\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1} &< -\frac{a_{12}a_{21}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a_{12}a_{21}}{1+a_{22}}>\frac{a_{12}a_{21}}{2}\\
-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1} &> \frac{a_{12}a_{21}}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{a_{12}a_{21}}{1+a_{22}}< -\frac{a_{12}a_{21}}{2}\\
&\Longrightarrow -\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1}>-\frac{a_{12}a_{21}}{1+a_{22}}\\
&\Longrightarrow a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1}>a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{1+a_{22}}.
\end{aligned}$$

d'apré (3.9) :

$$\begin{aligned}
\max\left\{a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1},\ a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{1+a_{22}}\right\} &= a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1}<0\\
&\Longrightarrow a_{11}<\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1}.
\end{aligned}$$

d'ou le résultat.

pour $a_{12}a_{21} < 0$

du lemme (3.3.2) on a : $\quad -1 < a_{22} < 1$

$$\begin{aligned}
-2 &< a_{22}-1<0 \quad \text{et} \quad 0<1+a_{22}<2\\
\frac{1}{a_{22}-1} &< -\frac{1}{2} \qquad\quad \text{et} \quad \frac{1}{1+a_{22}} > \frac{1}{2}\\
\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1} &> -\frac{a_{12}a_{21}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a_{12}a_{21}}{1+a_{22}} < \frac{a_{12}a_{21}}{2}\\
-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1} &< \frac{a_{12}a_{21}}{2} \qquad \text{et} \quad -\frac{a_{12}a_{21}}{1+a_{22}} > -\frac{a_{12}a_{21}}{2}\\
&\Longrightarrow -\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1} < -\frac{a_{12}a_{21}}{1+a_{22}}\\
&\Longrightarrow a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1} < a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{1+a_{22}}.
\end{aligned}$$

d'apré (3.9) :

$$\begin{aligned}
\max\left\{a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1},\ a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{1+a_{22}}\right\} &= a_{11}-\frac{a_{12}a_{21}}{1+a_{22}}<0\\
a_{11} &< \frac{a_{12}a_{21}}{1+a_{22}}.
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Exemple 3.3.1 *Considérons le modèle* (2.1) *avec* $a_{12}=1$ *et* $a_{21}=1$.

Vérifions la positivité et la stabilité du modèle pour $a_{22}=-0.5$ *et* $a_{11}=-3$

on a $a_{11}=-3<0$, $a_{12}a_{21}=1\geq 0$ *et* $a_{11}=-3<\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1}=-\frac{2}{3}$,

Donc le modèle est non positif mais il est stable car il vérifie la condition (3.12)

Exemple 3.3.2 *Considérons le modèle* (2.1) *avec* $a_{12}=-1$ *et* $a_{21}=1$.

Vérifions la positivité et la stabilité du modèle pour $a_{22}=0.5$ *et* $a_{11}=-1$,

on a $a_{11}=-3<0$, $a_{12}a_{21}=-1<0$ *et* $a_{11}=-1<\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}+1}=-\frac{2}{3}$,

Donc le modèle est stable mais non positif.

Théorème 3.3.3 *Le modèle scalaire positif* (2.1) *est dit asmptotiquement stable si et seulement si :*

$$\begin{aligned} a_{12}a_{21} &\geq 0, \quad 0 < a_{22} < 1, \\ a_{11} &< \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Preuve. Pour $a_{12}a_{21} \geq 0$

on a d'aprés le théorème (3.2.2) $-1 < a_{22} < 1$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow 0 < a_{22} < 1 \\ &\Longrightarrow -1 < a_{22} - 1 < 0 \quad \text{et} \quad 1 < 1 + a_{22} < 2 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{a_{22}-1} < -1 \qquad \text{et} \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{1+a_{22}} < 1 \\ \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1} &< -a_{12}a_{21} \qquad \text{et} \quad \frac{a_{12}a_{21}}{2} < \frac{a_{12}a_{21}}{1+a_{22}} < a_{12}a_{21} \\ \frac{-a_{12}a_{21}}{a_{22}-1} &> a_{12}a_{21} \qquad \text{et} \quad -\frac{a_{12}a_{21}}{2} > -\frac{a_{12}a_{21}}{1+a_{22}} > -a_{12}a_{21} \\ &\Longrightarrow -\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1} > -\frac{a_{12}a_{21}}{1+a_{22}} \\ &\Longrightarrow a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1} > a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{1+a_{22}}. \end{aligned}$$

d'aprés (3.9) :

$$\begin{aligned} \max\left\{a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1},\ a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{1+a_{22}}\right\} &= a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1} < 0 \\ a_{11} &< \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1}. \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Exemple 3.3.3 *Nous considérons la modèle positif (2.1) avec* $a_{12} = a_{21} = 1$ *et* $a_{11} = -3$.*vérifiez la stabilité du modèle pour* $a_{22} = 0.5$.

On a $a_{12}a_{21} = 1 \geq 0$, $0 < a_{22} = 0.5 < 1$ *et* $a_{11} = -3 < \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}-1} = -2$.

Donc le modèle est stable.

Conclusion

Dans ce travail, des conditions analytiques simples pour la stabilité d'un nouveau modèle de système bidimensionnels linéaire hybride continu-discret scalaire, ont été données. Ces conditions sont exprimées par rapport aux coefficients du modèle.

En particulier il a été montré que :

Le modèle général (2.1) est asymptotiquement stable si et seulement si les conditions de théorème (3.3.2) sont vérifiées.

Le modèle général (2.1) est dit positif et asymptotiquement stable si et seulement si les conditions de théorème (3.3.3) sont vérifiées.

Bibliographie

[1] Y, Bistritz. : "A stability test for continous-discrete bivariate polynomials ", Poroc. Int. Systems 3,682-685 (2003).

[2] J.P, Guiver and N.K, Bose . : "On test for zero-sets-sets of multivariate polynomials in noncompact polydomains ", Proc. IEEE 69 (4), 467-496 (1981).

[3] T, Kaczorek. : "Positive 2D hybrid linear systems", Bull. Pol. Ac. : Tech. 55 (4), 351-358 (2007).