UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET L'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Spécialité : Analyse Fonctionnelle

Thème

Croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

Présenté par

M$^{\text{lle}}$ MERDJI Hanane

Soutenu le 26 /05/2015

Devant le jury

Dr	**AZIZ HAMANI Karima**	**Président**	**M.C.A**	**UMAB**
Dr	**HAMOUDA Saâda**	**Examinateur**	**M.C.A**	**UMAB**
Dr	**BELAÏDI Benharrat**	**Encadreur**	**Pr**	**UMAB**

Année universitaire : 2014-2015

Table des matières

INTRODUCTION

On sait que les équations différentielles linéaires constituent une partie très intéressante en mathématique, elles apparaissent dans prèsque tous les domaines de science et de la technique mathématiques, physique , chimie, biologie ,ingénierie, économie, mécanique ,l'astronomie, l'électricité et d'autres. D'autre part, l'analyse complexe a été introduite pour résoudre certains problèmes épineux en mathématiques, à savoir le fameux théorème de Cauchy et la méthode d'intégration des résidus.

Depuis environ trois décennies la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes fondée par le célèbre mathématicien Rolph Nevanlinna est devenu un outil indispensable dans l'étude de certaines propriétés des solutions des équations différentielles dans le domaine complexe.

Soit l'équation différentielle

$$f'' + A(z) f' + B(z) f = 0, \tag{0.0.1}$$

où $A(z), B(z)$ sont des fonctions entières.

Gundersen a démontré dans [1] que si $\sigma(B) < \sigma(A) < 1/2$, alors toute solution $f (\not\equiv 0)$ de (0.0.1) est d'ordre infini.

Dans [11] Hellerstein, Miles et Rossi ont donné des conditions suffisantes qui assurent que toute solution $f (\not\equiv 0)$ de (0.0.1) soit d'ordre infini.

Plus tard, dans [12] ils ont également considéré l'équation différentielle linéaire

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + ... + A_0 f = F, \tag{0.0.2}$$

où $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, F$ sont des fonctions entières sous certaines conditions sur les coefficients, ils ont montré que chaque solution de (0.0.2) est un polynôme ou une fonction entière transcendante d'ordre infini. La question qui se pose ici, qu'en est -il lorsque $A_0, A_1, .., A_{k-1}, F$ sont des fonctions méromorphes ? Plusieurs auteurs ont étudié l'équation différentielle (0.0.2) et cherchaient des conditions sur les coefficients A_j $(j = 0, ..., k-1)$ pour garantie que chaque solution de (0.0.2) est d'ordre infini.

Plusieurs auteurs se sont intéressés à la distribution des valeurs des solutions de (0.0.2) et son équation différentielle homogène correspondante

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + ... + A_0 f = 0, \tag{0.0.3}$$

où $A_0, A_1, ..., A_{k-1}$ sont de fonctions méromorphes et ont obtenu que chaque solution de (0.0.3) est d'ordre infini.

Ce mémoire contient deux chapitres, le premier est consacré à quelques éléments de la théorie de R.Nevanlinna , la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes, des lemmes préliminaires qu'on aura besoin pour la démonstration des théorèmes du chapitre 2. Dans le deuscième chapitre, on étudie la croissance des solutions méromorphes de l'équation différentielle (0.0.2) et d'autres qui sont liées.

Chapitre 1

Quelques éléments de la théorie de R. Nevanlinna

Dans ce chapitre, nous allons citer des définitions indispensables. On en distingue essentiellement les éléments de la théorie de R. Nevanlinna ainsi que ceux de la théorie de Wiman.Valiron.

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Soit f une fonction méromorphe non constante. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t,a,f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z)=a$ dans le disque $|z|\leq t$, chaque racine étant compté avec son ordre de multiplicité, par $\overline{n}(t,a,f)$ les racines distinctes dans $|z|\leq t$.

On désigne par $n(t,\infty,f)$ le nombres de pôles de f dans $|z|\leq t$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité, par $\overline{n}(t,\infty,f)$ le nombre de pôles distincts de f dans $|z|\leq t$. Notons par

$$N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=N(r,a,f)=\int_0^r\frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}dt+n(0,a,f)\ln r \text{ si } f\not\equiv a\in\mathbb{C}$$

$$N(r,\infty,f)=N(r,f)=\int_0^r\frac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t}dt+n(0,\infty,f)\ln r,$$

et

$$m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)=m\left(r,a,f\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\ln^{+}\frac{1}{\left|f\left(r\exp\left(i\varphi\right)\right)-a\right|}d\varphi,\left(a\neq\infty\right)$$

$$m\left(r,\infty,f\right)=m\left(r,f\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\ln^{+}\left|f\left(r\exp\left(i\varphi\right)\right)\right|d\varphi$$

où

$$\ln^{+}x=\max\left(\ln x,0\right)=\begin{cases}\ln x & , \quad x>1\\ 0 & , \quad 0<x\leq 1\end{cases}$$

$N\left(r,a,f\right)$ est appelée fonction a-points de la fonction f dans le disque $\left|z\right|\leq t$.

$m\left(r,a,f\right)$ est dite fonction de proximité de la fonction f au point a.

Définition 1.1.1 *Soit f une fonction méromorphe on définit la fonction caractéristique de Nevanlinna par*

$$T\left(r,f\right)=N\left(r,f\right)+m\left(r,f\right)$$

Cette fonction joue un rôle très important dans la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes.

Exemple 1.1.1 *Pour la fonction $f\left(z\right)=\exp\left(z\right),$ On a*

$$N\left(r,f\right)\equiv 0$$

et

$$\begin{aligned} m(r,\infty,f) &= m(r,f) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|\exp\left(r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right)\right| d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|\exp\left(r\cos\varphi\right)\right| d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi d\varphi \\ &= \frac{r}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \\ &= \frac{r}{\pi}\left[\sin\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{r}{\pi} \end{aligned}$$

D'où

$$T\left(r,\exp\left(z\right)\right) = \frac{r}{\pi}$$

1.2 Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.2.1 *Soit f une fonction méromorphe avec son développement de Laurant*

$$f\left(z\right) - a = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j, c_m \neq 0, a \in \mathbb{C}$$

On a

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T\left(r,a,f\right) = T\left(r,f\right) - \ln\left|c_m\right| + \varphi\left(r,a\right),$$

où

$$\left|\varphi\left(r,a\right)\right| \leq \ln^+\left|a\right| + \ln 2$$

et

$$\ln |c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |f(r\exp(i\varphi))|\, d\varphi + N(r,f) - N\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

1.3 Ordre d'une fonction méromorphe

Définition 1.3.1 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe. Alors l'ordre de f noté $\sigma(f)$ est défini par*

$$\sigma(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}$$

Exemple 1.3.1 *La fonction $f(z) = \frac{1}{z}e^{z^n}$ est d'ordre $\sigma(f) = n$.*

Exemple 1.3.2 *Soit $f(z) = e^{e^z}$, alors*

$$T(r,f) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}}, \qquad (\textit{quand } r\to\infty).$$

D'où $\sigma(f) = \infty$.

Exemple 1.3.3 *La fonction $g(z) = \frac{1}{z+1}\exp(\exp z^n)$ est d'ordre $\sigma(g) = \infty$.*

Définition 1.3.2 *[3] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non constante dans le plan complexe. Alors l'hyper-ordre de f est défini par*

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log^+ \log^+ T(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 1.3.4 *La fonction $f(z) = \frac{1}{z}e^{z^n}$ est d'hyper-ordre $\sigma_2(f) = 0$.*

Exemple 1.3.5 *La fonction $g(z) = \frac{1}{z+1}\exp(\exp z^n)$ est d'hyper-ordre $\sigma_2(g) = n$.*

Définition 1.3.3 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non constante dans le plan complexe. Alors l'ordre inférieur de f noté $\mu(f)$ est défini par*

$$\mu(f) = \liminf_{r\to+\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 1.3.6 *La fonction $f(z) = \frac{1}{z}e^{z^n}$ est d'ordre inférieur $\mu(f) = n$.*

Définition 1.3.4 *Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction entière et soit $0 \le r < +\infty$.*

Notons par $\mu(r,f) = \max\{|a_n| r^n; n = 0, 1, ...\}$. Alors l'indice central de la fonction f est défini par $\nu(r,f) = \max\{m; \mu(r,f) = |a_m| r^m\}$.

Exemple 1.3.7 *Soit le polynôme* $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0, (a_n \neq 0, n \geq 1)$, *on a*

$$\mu(r,P) = |a_n| r^n, \qquad r \to \infty$$

et donc

$$v(r,P) = n.$$

Exemple 1.3.8 *Soit* $f(z) = e^z$. *Donc le développement de* f *est* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$. *Posons* $a_n = \frac{1}{n!}$. *On a*

$$\mu(r,f) = \max_{n\geq 0} |a_n| r^n = \max_{n\geq 0} \frac{1}{n!} r^n.$$

Posons $U_n = |a_n| r^n = \frac{1}{n!} r^n$. *Etudions la monotonie de la suite* U_n *.On a*

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{r}{n+1}.$$

Donc U_n *est décroissante si* $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$, *c'est-à-dire* $n > [r] - 1$, *où le crochet* $[.]$ *désigne la partie entière. La suite* U_n *est croissante si* $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$, *c'est-à-dire* $n < [r] - 1$, *d'où*

$$\mu(r,f) = \frac{1}{[r!]} r^{[r]}$$

et par suite

$$v(r,f) = [r].$$

Théorème 1.3.1 *Soit* $f(z)$ *une fonction entière d'ordre infini et d'hyper- ordre* $\sigma_2(f) = \sigma$. *Alors*

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log^+ \log^+ v(r,f)}{\log r} = \sigma,$$

où $v(r,f)$ *est l'indice central de la fonction* f.

1.4 Exposant de convergence des zéros d'une fonction méromorphe

Définition 1.4.1 [3] *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non constante dans le plan complexe. Alors l'exposant de convergence des zéros et des zéros distincts de $f(z)$ sont respectivement définis par*

$$\lambda(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}, \qquad \overline{\lambda}(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

Exemple 1.4.1 *Soit $f(z) = e^z - a, \quad a \neq 0, \infty$.*

On a $e^z = a \Leftrightarrow z = \log a = \log|a| + i(\arg a + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
|z| &\leq t \Rightarrow \sqrt{(\log a)^2 + (\arg a + 2k\pi)^2} \leq t \\
&\Rightarrow \frac{-\sqrt{t^2 - (\log a)^2} - \arg a}{2\pi} \leq k \leq \frac{\sqrt{t^2 - (\log a)^2} - \arg a}{2\pi} \\
&\Rightarrow n\left(t, \frac{1}{f}\right) \sim \frac{\sqrt{t^2 - (\log a)^2}}{2\pi} \sim \frac{t}{\pi}, t \to +\infty \\
&\Rightarrow N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \frac{r}{\pi} + O(1) \\
&\Rightarrow \lambda(f) = 1.
\end{aligned}$$

Définition 1.4.2 [3] *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe non constante dans le plan complexe. Alors l'hyper-exposant de convergence des zéros et des zéros distincts de $f(z)$ sont respectivement définis par*

$$\lambda_2(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log^+ \log^+ N(r, f)}{\log r}, \qquad \overline{\lambda}_2(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log^+ \log^+ \overline{N}(r, f)}{\log r}.$$

Exemple 1.4.2 *L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction $f(z) = e^{e^z} + 2$ sont égaux respectivement à ∞ et 1.*

Exemple 1.4.3 *L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction $f(z) = e^{e^z} + e^z$ sont égaux respectivement à ∞ et 1.*

Définition 1.4.3 *On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty)$ par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\,dt,$$

où χ_E est la fonction caractéristique de l'ensemble E. Et Les densités supérieure et inférieure de l'ensemble E sont respectivement définies par

$$\overline{densE} = \limsup_{r \to +\infty} \frac{m(E \cap [0, r])}{r}$$

et

$$\underline{densE} = \liminf_{r \to +\infty} \frac{m(E \cap [0, r])}{r}$$

Exemple 1.4.4 *La mesure linéaire de l'ensemble $E = [a, b] \subset [1, +\infty[$ est*

$$m(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t)\,dt = \int_a^b dt = b - a$$

Exemple 1.4.5 *La mesure linéaire d'un ensemble fini E est nulle $m(E) = 0$.*

Définition 1.4.4 *La mesure logarithmique d'un ensemble $H \subset [1, +\infty)$ est définie par*

$$lm(H) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_H(t)}{t}dt,$$

où χ_H est la fonction caractéristique de l'ensemble H

Les densités logarithmiques supérieure et inférieure de l'ensemble H sont respectivement définies par

$$\overline{\log densH} = \limsup_{r \to +\infty} \frac{m(H \cap [1, r])}{\log r}$$

et

$$\underline{\log densH} = \liminf_{r \to +\infty} \frac{m(H \cap [1, r])}{\log r}.$$

Exemple 1.4.6 *La mesure logarithmique de l'ensemble $E = [b, e] \subset [1, +\infty[$ est*

$$lm(E) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_E(t)}{t}dt = \int_b^e \frac{dt}{t} = 1 - \ln b.$$

1.5 Dérivée logarithmique

Théorème 1.5.1 *Soit f une fonction méromorphe transcendante. Alors*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = S\left(r, f\right),$$

où

$$S\left(r, f\right) = O\left(\ln T\left(r, f\right) + \ln r\right)$$

à l'extérieur d'un ensemble $E \subset (0, +\infty)$ de mesure linéaire finie. Si f est d'ordre fini, alors

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O\left(\ln r\right).$$

1.6 Produit canonique

Théorème 1.6.1 *[3] Soit $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ une suite dont les zéros n'est pas des nombres complexes et d'exposant de convergence fini λ et soit k un nombre entier non-négatif $> \lambda - 1$. Alors le produit canonique*

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{a_n}\right),$$

où

$$\begin{cases} E_0\left(z\right) := 1 - z \\ E_m\left(z\right) := \left(1 - z\right)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^m}{m}\right), m\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

définit une fonction entière des zéros exactement aux points a_n, chaque zéro étant compté avec son ordre de multiplicité.

1.7 Théorème de factorisation d'Hadamard

Théorème 1.7.1 *[3] Soit f une fonction entière ayant un zéro de multiplicité $m \geq 0$ en $z = 0$. Soit $a_1, a_2, ...,$ les autres zéros de f Chaque zéro étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$f\left(z\right) = \exp\left(g\left(z\right)\right) z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right), \tag{1.7.1}$$

où g est une fonction entière et m_n des nombres entièrs. Si l'exposant de convergence de $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ λ est fini, alors m_n peut être pris comme $K = [\lambda] - 1$.

1. Si f est une fonction entière d'exposant de convergence fini $\lambda(f)$, alors nous écrivons (1.7.1) sous la forme
$$f(z) = Q(z)\exp(g(z)).$$
Où Q est une fonction entière.
2. Si dans le Théorème (1.7.1) f est une fonction entière d'ordre fini σ, alors g est un polynôme de degré $\leq \sigma$.

1.8 Lemmes préliminaires

Dans cette partie du chapitre 1, nous présentons des lemmes nécessaires pour la démonstration des Théorèmes du chapitre 2.

Lemme 1.8.1 ([2])*Soit f une fonction méromorphe transcendante, et soit $\Gamma = \{(k_1, j_1), ..., (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de distinctes paires de nombres entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$ $(i = 1, ..., m)$. Soit $\alpha > 1$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, et une constante $B > 0$ dépendant seulement de α et Γ, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$ et $(k, j) \in \Gamma$, nous avons*
$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq B\left(\frac{T(\alpha r, f)}{r}\log^{\alpha} r.\log T(\alpha r, f)\right)^{k-j}. \tag{1.8.2}$$

Lemme 1.8.2 ([2]) *Soit f une fonction méromorphe transcendante avec $\sigma(f) = \mu < \infty$. Soit $\Gamma = \{(k_1, j_1), ..., (k_m, j_m)\}$ un ensemble fini de distinctes paires de nombres entiers vérifiant $k_i > j_i \geq 0$ $(i = 1, ..., m)$, soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors il existe un sous -ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie $lm(E_1) = \left(\int_0^{+\infty}\left(\frac{\chi_{E_1}(t)}{t}\right)dt\right)$, où $\chi_{E_1}(t)$ est la fonction caractéristique de E_1 tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, et $(k, j) \in \Gamma$, on a*
$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\mu-1+\varepsilon)}. \tag{1.8.3}$$

Lemme 1.8.3 ([15]) *Soit $f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}$ une fonction méromorphe, où $g(z)$ et $d(z)$ sont des fonctions entières, telles que*
$$\mu(g) = \mu(f) = \mu < \sigma(g) = \sigma(f) < +\infty, \lambda(d) = \sigma(d) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) = \beta < \mu. \tag{1.8.4}$$

Alors il existe un ensemble $E \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E$ et $|g(z)| = M(r,g)$, nous avons

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^n (1 + o(1)), \quad (n \geq 1), \tag{1.8.5}$$

où $\nu_g(r)$ est l'indice central de $g(z)$.

Preuve. En utilisant l'induction mathématique , on peut facilement voir que

$$f^{(n)}(z) = \frac{g^{(n)}}{d} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g^{(j)}}{d} \cdot \sum_{(j_1,..,j_n)} c_{jj_1\cdots j_n} \left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}, \tag{1.8.6}$$

où $c_{jj_1\cdots j_n}$ sont des constantes, et $j + j_1 + 2j_2 + ... + nj_n = n$. D'où,

$$\frac{f^{(n)}}{f} = \frac{g^{(n)}}{g} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g^{(j)}}{g} \cdot \sum_{(j_1,...,j_n)} c_{jj_1\cdots j_n} \left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}. \tag{1.8.7}$$

D'après la théorie de Wiman-Valiron, on a

$$\frac{g^{(j)}(z)}{g(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^j (1 + o(1)) \quad (j = 1, ..., n), \tag{1.8.8}$$

où $|z| = r, |g(z)| = M(r,g), r \notin E_0, lmE_0 < \infty$.Equations (1.8.7) et (1.8.8) conduire à

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} &= \left(\frac{v_g(r)}{z}\right)^n [(1 + o(1)) + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{v_g(r)}{z}\right)^{j-n} (1 + o(1)). \\ &\quad \sum_{(j_1\cdots j_n)} c_{jj_1\cdots j_n} \left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}]. \end{aligned} \tag{1.8.9}$$

D'après le Lemme 1.8.2 et $\sigma(d) = \beta$, pour tout $\varepsilon > 0$ donné $(0 < 2\varepsilon < \mu - \beta)$ et $m = 1, ..., n$, il existe un sous-ensemble $E_1 \subset (1, \infty)$ avec $lmE_1 < \infty$ telle que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E_1$, on a

$$\left|\frac{d^{(m)}(z)}{d(z)}\right| \leq |z|^{m(\beta - 1 + \varepsilon)}. \tag{1.8.10}$$

D'où,

$$|z|^{n-j} \left|\left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}\right| \leq |z|^{(n-j)+(n-j)(\beta-1+\varepsilon)} = |z|^{(n-j)(\beta+\varepsilon)}. \tag{1.8.11}$$

D'après $\mu(g) = \mu > \beta$, il s'ensuit que $v_g(r) > r^{\mu-\varepsilon}$ pour r suffisamment grand. Ainsi,

$$\left|\left(\frac{v_g(r)}{z}\right)^{j-n} \left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}\right| \leq r^{(n-j)(\beta-\mu+2\varepsilon)} \to 0 \, (r \to \infty). \tag{1.8.12}$$

Posons $E_2 = [0,1] \cup E_0 \cup E_1$. Alors $lmE_2 < \infty$, on peut choisir z vérifiant $|z| = r \notin E_2$, $|g(z)| = M(r,g)$, d'où 1.8.5. $\square$

Lemme 1.8.4 ([15]) *Soit* $f(z) = \frac{g(z)}{d((z)}$ *une fonction méromorphe, où* $g(z)$ *et* $d(z)$ *sont des fonctions entières telles que*

$$\mu(g) = \mu(f) = \mu \leq \sigma(g) = \sigma(f) \leq +\infty,\ \lambda(d) = \sigma(d) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu. \tag{1.8.13}$$

Alors il existe un ensemble $E \subset (1, +\infty)$ *de mesure logarithmique* $lmE < \infty$, *on peut choisir* z *vérifiant* $|z| = r \notin [0.1] \cup E$ *et* $|g(z)| = M(r, g)$, *on a*

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right| \leq r^{2s}, \tag{1.8.14}$$

où s *est un entier positif.*

Preuve. D'après le Lemme 1.8.3 il existe un ensemble $E_1 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique $lmE < \infty$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$ et $|g(z)| = M(r, g)$, on a

$$\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_g(r)}{z}\right)^s (1 + o(1)). \tag{1.8.15}$$

On a $\mu(g) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log^+ v_g(r)}{\log r}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe $R > 0$ tel que

$$\nu_g(r) > r^{\mu(g)-\varepsilon} \tag{1.8.16}$$

est vérifiée pour $r > R$. Si $\mu(g) = \infty$, alors on remplace $\mu(g) - \varepsilon$ par une constante positive M suffisamment grande. Soit $E = E_1 \cup [1, R]$, alors E un ensemble de mesure logarithmique $lmE < \infty$, et d'après (1.8.15) et (1.8.16) on obtient le résultat du Lemme 1.8.4. □

Lemme 1.8.5 ([8, p21]) *Supposons que* $Q(z)$ *est le produit canonique formé avec des zéros* $\{z_n; n = 1, 2, ...\}$ $(z_n \neq 0)$ *et* $\lambda(Q) = \beta < \infty$. *Posons* $Q_n = \left\{z; |z - z_n| < |z_n|^{-\alpha}\right\}$ ($\alpha > \beta$ *est une constante*
Alors pour tout $\varepsilon > 0$ *donné,*

$$|Q(z)| \geq \exp\left\{-|z|^{\beta+\varepsilon}\right\} \tag{1.8.17}$$

est vérifiée pour tout $z \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$.

Lemme 1.8.6 ([8, 16]) *Soit* $g(z)$ *une fonction méromorphe avec* $\sigma(g) = \beta < \infty$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$,*il existe un ensemble* $E_3 \subset (1, +\infty)$ *de mesure logarithmique finie, tel que pour tout* z *vérifiant* $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_3$, *nous avons*

$$|g(z)| \leq \exp\left\{r^{\sigma(g)+\varepsilon}\right\}. \tag{1.8.18}$$

Preuve. Si $g(z)$ a un nombre fini de pôles, alors le Lemme 1.8.6 est trivial. Maintenant supposons que $g(z)$ a une infinité de pôles. Posons $g(z) = \frac{h(z)}{[z^m Q(z)]}$, où m est un entier non-négatif, $h(z)$ est une fonction entière et $Q(z)$ est le produit canonique qui n'est pas pôles de $g(z)$ $\{z_j : j = 1, 2, ...; |z_j| = r_j, +0 < r_1 \leq r_2 \leq ...\}$. D'où, $\sigma(h) \leq \sigma(g) = \beta, \sigma(Q) = \lambda(Q) \leq \beta$. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, posons $Q_j = \left\{ z : |z - z_j| \leq r_j^{-\left(\beta + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)} \right\}$ $(j = 1, 2, ...)$ et $O = \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j$. Posons

$$E_3 = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(r_j - r_j^{-\left(\beta + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)}, r_j + r_j^{-\left(\beta + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)} \right). \tag{1.8.19}$$

Et

$$\sum_{j=1}^{\infty} r_j^{-\left(\beta + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)} < \infty, \tag{1.8.20}$$

nous savons que la mesure linéaire de E_3 est finie. Pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_3$, d'après le Lemme 1.8.5, on a

$$|Q(z)| \geq \exp\left\{ -r^{\beta + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \right\}. \tag{1.8.21}$$

Il s'ensuit que

$$|g(z)| \leq \frac{\exp\left\{ 2r^{\beta + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \right\}}{r^m} \leq \exp\left\{ r^{\beta + \varepsilon} \right\} \tag{1.8.22}$$

pour $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_3, r \to \infty$. Maintenant nous prouvons que la mesure logarithmique de E_3 est encore finie. On a

$$\begin{aligned} lmE_3 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[\log\left(r_j + r_j^{-\left(\beta + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)} \right) - \log\left(r_j - r_j^{-\left(\beta + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)} \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{2r_j^{-\left(\beta + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)}}{r_j - r_j^{-\left(\beta + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)}} \right), \end{aligned} \tag{1.8.23}$$

et, pour r_j suffisamment grand,

$$\log\left(1 + \frac{2r_j^{-\left(\beta + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)}}{r_j - r_j^{-\left(\beta + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)}} \right) \leq \frac{2r_j^{-\left(\beta + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)}}{r_j - r_j^{-\left(\beta + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)}} \leq 2r_j^{-\left(\beta + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)}, \tag{1.8.24}$$

donc $lmE_3 < \infty$. □

Lemme 1.8.7 ([7, 6]) *Soit $g(z)$ une fonction entière avec $0 \leq \mu(g) < 1$. Alors pour tout $\alpha \in (\mu(g), 1)$, il existe un ensemble $E \subset [0, \infty)$ tel que*

$$\overline{\log dens E} \geq 1 - \frac{\mu(g)}{\alpha}, \tag{1.8.25}$$

où $E=\{r\in[0,\infty);m(r)>M(r)\cos\pi\alpha\}$, $m(r)=\inf_{|z|=r}\log|g(z)|$, $M(r)=\sup_{|z|=r}\log|g(z)|$

Lemme 1.8.8 ([3]) *Soit $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ et $h:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ deux fonctions croisssantes telles que $g(r)\leq h(r)$ en dehors d'un ensemble H de mesure logarithmique $lmE<\infty$. Alors pour tout $\alpha>1$, il existe $r_0>0$ tel que $g(r)\leq h(\alpha r)$ pour tout $r>r_0$.*

Lemme 1.8.9 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe telle que $\lambda\left(\frac{1}{f}\right)<\mu(f)<\frac{1}{2}$. Alors pour tout ε donné $\left(0<2\varepsilon<\mu(f)-\lambda\left(\frac{1}{f}\right)\right)$, il existe un ensemble $E\subset(1,+\infty)$ avec $\overline{\log dens E}>0$, tel que pour tout z vérifiant $|z|=r\in E$, nous avons*

$$|f(z)|\geq\exp\left\{(1-o(1))\,r^{\mu(f)-\varepsilon}\right\}. \tag{1.8.26}$$

Preuve. D'après le Théorème de factorisation d'Hadamard, on a

$$f(z)=\frac{g(z)}{d(z)}, \tag{1.8.27}$$

où $g(z)$ est une fonction entière, $d(z)$ est le produit canonique de $f(z)$ formé avec ses pôles telle que

$$\lambda(d)=\sigma(d)=\lambda\left(\frac{1}{f}\right)<\mu(f). \tag{1.8.28}$$

D'après (1.8.27) nous obtenons $T(r,g)\leq T(r,f)+T(r,d)$. Alors en combinant (1.8.28), nous obtenons $\mu(g)\leq\mu(f)$. D'autre part, en choisissant la suite $\{r_n\}$ telle que

$$\lim_{r_n\to\infty}\frac{\log T(r_n,g)}{\log r_n}=\mu(g),$$

d'où on a

$$\liminf_{r_n\to\infty}\frac{\log T(r_n,f)}{\log r_n}\geq\mu(f). \tag{1.8.29}$$

D'après (1.8.28) et (1.8.29), pour tout ε donné$(0<2\varepsilon<\mu(f)-\sigma(d))$, il existe une sous-suite de $\{r_n\}$, pour plus de commodité, on la note aussi comme $\{r_n\}$, telle que pour r_n suffisamment grand, nous avons

$$T(r_n,f)>r_n^{\mu(f)-\varepsilon},\quad T(r_n,d)<r_n^{\sigma(d)+\varepsilon}. \tag{1.8.30}$$

Plus en combinant avec $T(r,f)\leq T(r,g)+T(r,d)+O(1)$, nous obtenons $\mu(f)\leq\mu(g)$.D'où on a

$$\mu(g)=\mu(f)<\frac{1}{2}. \tag{1.8.31}$$

D'après le Lemme 1.8.7, soit $\alpha_0 = \frac{\frac{1}{2}+\mu(g)}{2}$, alors il existe un ensemble E_1 avec $\overline{\log dens E_1} \geq 1 - \frac{\mu(g)}{\alpha_0}$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_1$, nous avons

$$\log|g(z)| \geq \cos(\pi\alpha_0) \log M(r,g). \tag{1.8.32}$$

D'après la définition de $\mu(g)$, pour tout ε donné $\left(0 < 2\varepsilon < \mu(f) - \lambda\left(\frac{1}{f}\right)\right)$, il existe $r_1 > 0$ tel que

$$\log M(r,g) \geq r^{\mu(g)-\frac{\varepsilon}{2}} \tag{1.8.33}$$

est vérifiée pour $r > r_1$. Comme

$$\frac{\cos(\pi\alpha_0)\, r^{\mu(g)-\frac{\varepsilon}{2}}}{r^{\mu(g)-\varepsilon}} \to +\infty, (r \to +\infty), \tag{1.8.34}$$

d'après (1.8.32)−(1.8.34), il existe $(r_2 \geq r_1)$ tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in E_1 \setminus [0, r_2]$, on a

$$|g(z)| \geq \exp\left\{\cos(\pi\alpha_0)\, r^{\mu(g)-\frac{\varepsilon}{2}}\right\} \geq \exp\left\{r^{\mu(g)-\varepsilon}\right\}. \tag{1.8.35}$$

D'autre part, il existe $R > 0$ tel que pour $r > R$, nous avons

$$|d(z)| \leq \exp\left\{r^{\sigma(d)+\varepsilon}\right\}. \tag{1.8.36}$$

Posons $E = E_1 \cap [R, +\infty] \cap [r_2, +\infty]$, alors $\overline{\log dens E} > 0$, d'après (1.8.27), (1.8.35) et (1.8.36), on obtient que

$$|f(z)| \geq \exp\left\{r^{\mu(g)-\varepsilon} - r^{\sigma(d)+\varepsilon}\right\} = \exp\left\{(1 - o(1))\, r^{\mu(f)-\varepsilon}\right\} \tag{1.8.37}$$

est vérifiée pour $|z| = r \in E$. □

Chapitre 2

Croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

---

Soit

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + ... + A_0 f = 0,$$

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + ... + A_0 f = F,$$

où $A_j, F\ (j = 0, ..., k-1)$ sont des fonctions méromorphes.

2.1 Introduction et résultats

Dans ce Chapitre, on s'intéresse à étudier la croissance des solutions des équations différentielles linéaires avec coefficients fonctions entières et méromorphes.

Théorème 2.1.1 [12] *Supposons que* $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, F$ *sont des fonctions entières. S'il existe un certain* $s \in \{0, 1, ..., k-1\}$ *tel que* $\max\{\sigma(F), \sigma(A_j) : j \neq s\} < \sigma(A_s) \leq 1/2$. *Alors chaque solution* f *de* (0.0.2) *est soit un polynôme ou une fonction entière transcendante d'ordre infini.*

Théorème 2.1.2 [9, 10, 15, 16, 13, 6] *Supposons que* $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, F$ *sont des fonctions méromorphes. S'il existe un certain* $A_s\ (0 \leq s \leq k-1)$ *satisfaisant*

$$\max\left\{\sigma(A_j)\,(j \neq s), \lambda\left(\frac{1}{A_s}\right)\right\} < \mu(A_s) \leq \sigma(A_s) < 1/2. \quad (2.1.1)$$

Alors chaque solution méromorphe transcendante f de (0.0.3) *dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée satisfait* $\sigma_2(f) = \sigma(A_s)$, *et chaque solution méromorphe non transcendante f est un polynôme avec degré* $\deg f \leq s-1$.

Théorème 2.1.3 [13] *Supposons que $A_0, A_1, , A_{k-1}, F$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. S'il existe un certain A_s $(0 \leq s \leq k-1)$ tel que*

$$b = \max\left\{\sigma(F), \sigma(A_j)(j \neq s), \lambda\left(\frac{1}{A_s}\right)\right\} < \mu(A_s) < 1/2. \tag{2.1.2}$$

Alors

i Chaque solution méromorphe transcendante f de (0.0.2) dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée satisfait $\mu(A_s) \leq \sigma_2(f) \leq \sigma(A_s)$. De plus, si $F \not\equiv 0$, alors on a $\mu(A_s) \leq \overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) \leq \sigma(A_s)$.

ii Si $s \geq 2$, alors chaque solution méromorphe non transcendante f de (0.0.2) est un polynôme de degré $\deg f \leq s-1$. Si $s = 0$ ou 1, alors chaque solution non constante de (0.0.2) est transcendante.

Théorème 2.1.4 [13] *Supposons que $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, Q\ (\not\equiv 0)$ sont des fonctions méromorphes d'ordre fini. P est une fonction entière transcendante, telle que*

$$\max\left\{\sigma(P), \sigma(Q), \sigma(A_j)(1 \leq j \leq k-1), \lambda\left(\frac{1}{A_0}\right)\right\} < \mu(A_0) < \frac{1}{2}. \tag{2.1.3}$$

Alors chaque solution f de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k_{-1}} f^{(k-1)} + ... + A_0 f = Qe^P \tag{2.1.4}$$

est transcendante, et chaque solution méromorphe transcendante f de (2.1.4) *dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée satisfait* $\mu(A_0) \leq \overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) \leq \sigma(A_0)$.

Corollaire 2.1.1 *Supposons que $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, F\ (\not\equiv 0)$ sont des fonctions méromorphes. S'il existe un certain A_s $(0 \leq s \leq k-1)$ tel que*

$$\max\left\{\sigma(F), \sigma(A_j)(j \neq s), \lambda\left(\frac{1}{A_s}\right)\right\} < \mu(A_s) = \sigma(A_s) < 1/2,$$

alors chaque solution méromorphe transcendante f de (0.0.2) *dont les pôles sont de multiplicitié uniformément bornée satisfait* $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(A_s)$.

Corollaire 2.1.2 *Supposons que* $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, F\,(\not\equiv 0)$ *sont de fonctions entières. S'il existe un certain* $A_s\,(0 \leq s \leq k-1)$ *tel que*

$$\max\{\sigma(F), \sigma(A_j)\,(j \neq s)\} < \mu(A_s) = \sigma(A_s) < 1/2,$$

alors chaque solution transcendante f *de* (0.0.2) *satisfait* $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(A_s)$, *et chaque solution non transcendante* f *est un polynôme de degré* $\deg f \leq s-1$.

Remarque 2.1.1 *À partir du Corollaire 2.1.1 nous obtenons l'estimation précise de la croissance des solutions transcendantes dans le Théorème 2.1.1.*

Corollaire 2.1.3 *Supposons que* $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, Q\,(\not\equiv 0)$ *sont des fonctions entières d'ordre fini,* P *est une fonction entière transcendante, telle que*

$$\max\{\sigma(P), \sigma(Q), \sigma(A_j)\,(1 \leq j \leq k-1)\} < \mu(A_0) < \frac{1}{2}.$$

Alors chaque solution f *de* (2.1.4) *satisfait* $\mu(A_0) \leq \overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) \leq \sigma(A_0)$.

Corollaire 2.1.4 *Supposons que* $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, Q\,(\not\equiv 0)$ *sont des fonctions entières d'ordre fini,* P *est une fonction entière transcendante, telle que*

$$\max\{\sigma(P), \sigma(Q), \sigma(A_j)\,(1 \leq j \leq k-1)\} < \mu(A_0) = \sigma(A_0) < \frac{1}{2}.$$

Alors chaque solution f *de* (2.1.4) *satisfait* $\overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.

Dans la suite, nous utilisons les symboles E et E_1 pour désigner tout ensemble de mesure logarithmique finie et tout ensemble de mesure linéaire finie, pas nécessairement le même à chaque apparition. On utilise également M pour désigner toute constante positive , et pas nécessairement la même dans chaque cas.

2.2 Preuve du Théorème 2.1.3

Preuve. Supposons que $f(z)$ est une solution méromorphe transcendante de (0.0.2) dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée. D'après (0.0.2), nous savons que les pôles de $f(z)$ se déduisent seulement des pôles de $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, F$. Notons que la multiplicitié des pôles de f est uniformément bornée, et donc nous avons

$$n(r,f) \leq O\left\{\sum_{j=0}^{k-1} \overline{n}(r,A_j) + \overline{n}(r,F)\right\}. \tag{2.2.1}$$

Alors d'après (2.1.2) et (2.2.1) on obtient

$$\lambda\left(\frac{1}{f}\right) \leq b. \tag{2.2.2}$$

D'après (0.0.2) on obtient

$$-A_s = \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} + ... + A_{s+1}.\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}} + \left[A_{s-1}.\frac{f^{(s-1)}}{f} + ... + A_0\right].\frac{f}{f^{(s)}} - \frac{F}{f}\frac{f}{f^{(s)}}. \tag{2.2.3}$$

D'après le Lemme de la dérivée logarithmique et (2.2.3), on obtient

$$\begin{aligned} T(r,A_s) &\leq N(r,A_s) + \sum_{j\neq s} m(r,A_j) + m\left(r,\frac{F}{f}\right) + 2m\left(r,\frac{f}{f^{(s)}}\right) + O(\log rT(r,f)) \\ &\leq N(r,A_s) + \sum_{j\neq s} T(r,A_j) + T(r,F) + T\left(r,\frac{1}{f}\right) \\ &\quad +2N\left(r,f^{(s)}\right) + 2N\left(r,\frac{1}{f}\right) + O(\log rT(r,f)) \\ &\leq N(r,A_s) + \sum_{j\neq s} T(r,A_j) + T(r,F) + 2(s+1)N(r,f) \\ &\quad +3T(r,f) + O(\log rT(r,f)) \\ &\leq N(r,A_s) + \sum_{j\neq s} T(r,A_j) + T(r,F) + 2(s+1)N(r,f) \\ &\quad +4T(r,f), (r \notin E_1). \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

D'après (2.1.2), (2.2.2), (2.2.4) et le Lemme1.8.8 on obtient

$$\mu(A_s) \leq \mu(f). \tag{2.2.5}$$

D'après le Théorème de factorisation d'Hadamard, on obtient

$$f(z) = \frac{g(z)}{d(z)}, \tag{2.2.6}$$

où $g(z)$ est une fonction entière, $d(z)$ est le produit canonique de $f(z)$ formé avec ses pôles telle que $\lambda(d) = \sigma(d) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right)$ .D'après (2.1.2), (2.2.2) et (2.2.5), on obtient

$$\lambda(d) = \sigma(d) = \lambda\left(\frac{1}{f}\right) < \mu(f). \tag{2.2.7}$$

D'après la définition de l'ordre, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < \sigma(f) - \sigma(d))$, il existe une suite $\{r_n\}$ tel que pour r_n suffisamment grand, nous avons

$$T(r_n, f) > r_n^{\sigma(f)-\varepsilon},\ T(r_n, d) < r_n^{\sigma(d)+\varepsilon}. \tag{2.2.8}$$

D'après $(2.2.6)$, on obtient

$$T(r, f) \leq T(r, g) + T(r, d) + O(1). \tag{2.2.9}$$

D'où d'après (2.2.8) et $(2.2.9)$, on obtient $\sigma(f) \leq \sigma(g)$. D'autre part, d'après (2.2.6) on obtient $T(r, g) < T(r, f) + T(r, d)$. Alors en combinant avec $(2.2.7)$, on obtient $\sigma(g) \leq \sigma(f)$. D'où nous avons

$$\sigma(g) = \sigma(f). \tag{2.2.10}$$

En Utilisant une preuve semblable à celle du Lemme 1.8.9 on obtient

$$\mu(g) = \mu(f). \tag{2.2.11}$$

Donc par $(2.2.7), (2.2.10), (2.2.11)$ et le Lemme 1.8.4, il existe un ensemble $E \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$ et $|g(z)| = M(r, g)$, nous avons

$$\left| \frac{f(z)}{f^{(s)}(z)} \right| < r^{2s}. \tag{2.2.12}$$

D'après le Lemme 1.8.1 , il existe un ensemble $E \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie et $B > 0$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$, nous avons

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f^{(s)}(z)} \right| \leq Br\left[T(2r, f)\right]^{j-s+1}, \quad (j = s+1, ..., k), \tag{2.2.13}$$

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq Br\left[T(2r, f)\right]^{j+1}, \quad (j = 1, ..., s-1). \tag{2.2.14}$$

D'après $(2.1.2), (2.2.2), (2.2.7)$ et le Lemme 1.8.6, pour tout ε donné $(0 < 2\varepsilon < \mu(A_s) - b)$,il existe un ensemble $E \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0, 1] \cup E$, nous avons

$$|A_j(z)| \leq \exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\} (j \neq s), \quad |F(z)| \leq \exp\left\{r^{b+\varepsilon/2}\right\}, \quad |d(z)| \leq \exp\left\{r^{b+\varepsilon/2}\right\}. \tag{2.2.15}$$

D'où pour tout z tel que $|z| = r \notin [0,1] \cup E$ et $|g(z)| = M(r,g)$, nous avons

$$\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| = \frac{|F(z)\,d(z)|}{M(r,g)} \leq \exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}. \tag{2.2.16}$$

D'après le Lemme 1.8.9, il existe un ensemble $H_0 \subset (1,+\infty)$ avec $\overline{\log dens H_0} > 0$, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \in H_0$, nous avons

$$|A_s(z)| \geq \exp\left\{(1 - o(1))\, r^{\mu(A_s)-\varepsilon}\right\}. \tag{2.2.17}$$

Soit $H = H_0 - ([0,1] \cup E)$, alors nous avons $\overline{\log dens H} > 0$, et pour tout z tel que $|z| = r \in H$ et $|g(z)| = M(r,g)$, d'après $(2.2.3)$, $(2.2.12)$, $(2.2.17)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\exp\left\{(1 - o(1))\, r^{\mu(A_s)-\varepsilon}\right\} &\leq |A_s(z)| \\
&\leq (k-s).\exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\} Br.\left[T(2r,f)\right]^{k-s+1} + s.\exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\} \\
&\quad \times Br.\left[T(2r,f)\right]^{s}.r^{2s} + \exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}.r^{2s} \\
&\leq (k+1)\, Br.\exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}.\left[T(2r,f)\right]^{k+1}.r^{2s}.
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

D'où d'après (2.2.18), on obtient $\sigma_2(f) \geq \mu(A_s)$. Maintenant nous prouvons que $\sigma_2(f) \leq \sigma(A_s)$. D'après $(2.2.7)$, $(2.2.10)$, $(2.2.11)$ et le Lemme 1.8.3, il existe un ensemble $E \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E$ et $|g(z)| = M(r,g)$,nous avons

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{v_g(r)}{z}\right)^j (1 + o(1)), (j = 1, ..., k). \tag{2.2.19}$$

D'après le Lemme 1.8.6, pour tout $\varepsilon > 0$ donné , il existe un ensemble $E \subset (1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin [0,1] \cup E$, nous avons

$$|A_s(z)| \leq \exp\left\{r^{\sigma(A_s)+\varepsilon}\right\}. \tag{2.2.20}$$

Alors d'après (0.0.2),$(2.2.16)$, $(2.2.19)$ et $(2.2.20)$, pour tout z tel que $|z| = r \notin [0,1] \cup E$ et $|g(z)| = M(r,g)$, nous avons

$$v_g(r) \leq Mr\exp\left\{r^{\sigma(A_s)+\varepsilon}\right\}. \tag{2.2.21}$$

d'où d'après $(2.2.10)$, $(2.2.21)$ et le Lemme 1.8.8, on obtient $\sigma_2(f) \leq \sigma(A_s)$.

Soit $F \not\equiv 0$.Ensuite nous prouvons que $\overline{\lambda_2}(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f)$. D'après (2.1.2) on obtient

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F}\left(\frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f} + ... + A_0\right). \tag{2.2.22}$$

Supposons que z_0 est un zéro de f d'ordre $\alpha\,(> k)$, si z_0 n'est pas un pôle de $A_j\ (j = 0, ..., k-1)$, alors z_0 doit être un zéro de f d'ordre $\alpha - k$. D'où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} N(r, A_j). \tag{2.2.23}$$

D'après (2.2.22) on obtient

$$m\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq m\left(r, \frac{1}{F}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} m(r, A_j) + O(\log rT(r,f)), (r \notin E_1). \tag{2.2.24}$$

En Combinant (2.2.23) et (2.2.24), on obtient

$$T(r,f) \leq k\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + T(r,F) + \sum_{j=0}^{k-1} T(r, A_j) + O(\log rT(r,f)), (r \notin E_1). \tag{2.2.25}$$

Soit $\left\{r_n'\right\}$ une suite satisfaisant $\lim_{r_n'\to\infty} \frac{\log\log T\left(r_n', f\right)}{\log r_n'} = \sigma_2(f)$, soit $E_1 = \delta$, alors il existe $r_n \in \left[r_n', r_n' + \delta + 1\right]$ telle que

$$\liminf_{r_n\to\infty} \frac{\log\log T(r_n, f)}{\log r_n} \geq \lim_{r_n'\to\infty} \frac{\log\log T\left(r_n', f\right)}{\log\left(r_n' + \delta + 1\right)} = \sigma_2(f). \tag{2.2.26}$$

D'où d'après (2.1.2), (2.2.26) et $\sigma_2(f) \geq \mu(A_s)$, pour r_n suffisamment grand, nous avons

$$T(r_n, F) = o(T(r_n, f)), \quad T(r_n, A_j) = o(T(r_n, f)), \quad (0 \leq j \leq k-1). \tag{2.2.27}$$

Alors d'après (2.2.25) et (2.2.27), on obtient $\sigma_2(f) \leq \overline{\lambda}_2(f)$. Or $\overline{\lambda}_2(f) \leq \sigma_2(f)$, on obtient $\mu(A_s) \leq \overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) \leq \sigma(A_s)$.

supposons que f est une solution rationalle non constante de (0.0.2). Si $s \geq 2$, et z_0 est un pôle de f d' ordre $(m \geq 1)$, or f est un polynôme de degré plus que $s-1$, alors $f^{(s)} \not\equiv 0$. D'où d'après (0.0.2),(2.2.15) et (2.2.17), pour tout z vérifiant $|z| = r \in H_0 - ([0,1] \cup E)$, nous avons

$$\exp\left\{\left(1 - o(1)\, r^{\mu(A_s)-\varepsilon}\right)\right\} < |A_s(z)| < r^M \exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}.$$

C'est impossible. Donc chaque solution non transcendante f de (0.0.2) est un polynôme avec degré deg $f \leq s-1$. Par un raisonnement semblable, on obtient que chaque solution de (0.0.2) est transcendante si $s = 0$ ou 1. $\square$

2.3 Preuve de Théorème 2.1.4

Preuve. D'après les hypothèses nous savons que chaque solution méromorphe de (2.1.4) est d'ordre infini. Donc chaque solution méromorphe de (2.1.4) est transcendante. Supposons que $f(z)$ est une solution méromorphe transcendante dont les pôles sont de multiplicitié uniformément bornée. Soit $f = ge^P$alors nous avons

$$\overline{\lambda}_2(g) = \overline{\lambda}_2(f), \quad \lambda_2(g) = \lambda_2(f). \tag{2.3.28}$$

En Substituant $f = ge^P$ dans $(2.1.4)$, on obtient

$$g^{(k)} + B_{k-1}g^{(k-1)} + ... + B_0 g = Q, \tag{2.3.29}$$

où

$$B_{k-1} = A_{k-1} + kP'. \tag{2.3.30}$$

$$\begin{aligned} B_{k-j} &= A_{k-j} + (k-j+1)A_{k-j+1}P' + \sum_{m=2}^{j} A_{k-j+m}\left[\binom{m}{k-j+m}\left(P'\right)^m + D_{m-1}\left(P'\right)\right], \\ j &= 2,3,...,k;\ A_k \equiv 1. \end{aligned} \tag{2.3.31}$$

ici $D_{m-1}(P')$ est un polynôme différentiel en P' de degré $m-1$, ses coefficients sont constantes. D'après $(2.1.3), (2.3.30)$ et $(2.3.31)$, on obtient

$$\mu(B_0) = \mu(A_0), \quad \lambda\left(\frac{1}{B_0}\right) < \mu(A_0), \quad \sigma(B_j) < \mu(A_0), (1 \leq j \leq k-1). \tag{2.3.32}$$

D'où d'après $(2.1.3), (2.3.29), (2.3.32)$ et le Théorème 2.1.3, on obtient

$$\mu(A_0) \leq \overline{\lambda}_2(g) = \lambda_2(g) = \sigma_2(g) \leq \sigma(A_0). \tag{2.3.33}$$

Or $\sigma_2\left(e^P\right) = \sigma(P) < \mu(A_0) \leq \sigma_2(g)$, on obtient $\sigma_2(f) = \sigma_2(g)$. Puis en combinant $(2.3.28)$ et $(2.3.33)$, on obtient $\mu(A_0) \leq \overline{\lambda}_2(f) = \lambda_2(f) = \sigma_2(f) \leq \sigma(A_0)$. □

CONCLUSION

Le sujet de notre travail a été consacré sur la croissance des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur dont les cas ou les fonctions coefficients $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, F$ sont des fonctions méromorphes, et cela ouvre la porte pour plusieurs perspectives. Les questions suivantes se posent : Conserve-t-on ces mêmes conditions sur les fonctions coefficients ? Peut-on généraliser les résultats obtenus si on change les conditions sur les fonctions coefficients $A_0, A_1, ..., A_{k-1}, F$? Et sous quelles conditions cette généralisation serait possible ? Et il possible de enlever la conditions de multiplicité des pôles ? En effet, les résultats obtenus peuvent être généralisés sous certaines conditions posées sur l'ordre, l'ordre inférieur et l'exposent de convergence dont la condition

$$\max\left\{\sigma\left(F\right), \sigma\left(A_j\right)\left(j \neq s\right), \lambda\left(\frac{1}{A_s}\right)\right\} \leq \mu\left(A_s\right) < \frac{1}{2}.$$

Pour l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + ... + A_0 f = F,$$

cela nous amènera aussi à réfléchir sur d'autres conditions sur les fonctions coefficients et me donne sans doute un avant -gout de ce que réserve la recherche scientifique.

Bibliographie

[1] **G. Gundersen,** *Finite order solutions of second order linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc.,305(1988),415-429.

[2] **G. Gundersen**, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function*, plus similar estimates, J. London Math. Soc., 37(2)(1988), 88-104.

[3] **I. Laine**, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, Walter de Gruyter, Berlin,1993.

[4] **J. Wang, H. X. Yi**, *Fixed points and hyper-order of differential polynomials generated by solutions of differential equation, complex variables*, 48(2003),83-94.

[5] **L. Yang,** *Value distribution theory and new research*, Science Press, Beijing, 1982 (in Chinese).

[6] **P. C. Wu, J. Zhu**, *On the growth of solutions to the complex differential equation* $f'' + Af' + Bf = 0$, Science China, Mathematics, 54(2011),939-947.

[7] **P. D. Barry**, *Some theorems related to the* $\cos \pi\rho$ *theorem*, Proc. London Math. Soc., 21(1970),334-360.

[8] **R. P. Boas***, Entire functions,* Academic Press INC., New York, 1954.

[9] **S. Bank**, *A note on algebraic differential equations whose coefficients are entire functions of finite order*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 26(1972),291-297.

[10] **S. Bank**, **I. Laine**, *On the growth of meromorphic solutions of linear and algebraic differential equations*, Math. Scand.,40(1977),119-126.

[11] **S. Hellerstein, J. Miles, J. Rossi**, *On the growth of solutions of* $f^{''} + gf^{'} + hf = 0$, Trans.Amer. Math. Soc., 324(1991),693-706.

[12] **S. Hellerstein, J. Miles, J. Rossi**, *On the growth of solutions of certain linear differential equations*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.,17(1992),327-341.

[13] **T. B. Cao, J. F. Xu, Z. X. Chen,** *On the meromorphic solutions of linear differential equations on the complex plane*, J. Math. Anal. Appl.,364(2010),130-142.

[14] **W. Hayman,** *Meromorphic Functions*, Clarendon Press, Oxford,1964.

[15] **Z. X. Chen**, *On the rate of growth of meromorphic solutions of higher order linear differential equations*, Acta Math. Sin.,42(3)(1999),551-558(inChinese).

[16] **Z, X. Chen, K. H. Shon**, *On the growth and fixed points of solutions of second order differential equations with meromorphic coefficients*, Acta Math. Sinica, 21(4)(2005),753-764.

[17] **Lijun Wang, Huifangliu**, *On the growth of meromorphic solutions of higer order linear differential equations*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol.2014(2014), No. 125,pp. 1-11.