Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master en

Mathémathiques Cycle LMD

Spécialité :Analyse Harmonique et EDP

Thème

Fermeture de l'image d'un opérateur non borné

Présentée Par

ABSI AICHA

Soutenu le 26/05/2015

Les mombres de Jury

Mr.Bahri	**Président**	**M.C.A**	**U.MOSTAGANEM**
Mme.Bensikaddeur	**Examinateur**	**M.A.A**	**U.MOSTAGANEM**
Mr.Ould Ali.	**Encadreur**	**M.C.A**	**U.MOSTAGANEM**

Année Universitaire 2014 -2015

Table des matières

Remerciments **i**

Résumé **ii**

Introduction **1**

1 Rappel **2**

1.1 Produit scalaire, norme, espace de Hilbert 2

1.2 Opérateur borné, opérateur non borné 3

1.3 Opérateur fermé et le théorème du graphe fermé 8

2 Opérateurs associés à un opérateur fermé **10**

3 Caractérisation des opérateurs non bornés à image fermé **14**

3.1 Fermeture de l'image d'un opérateur borné 14

3.2 Stabilité de Hyers-Ulam, et l'inverse généralisé 15

3.2.1 Définition de la propriété de stabilité de Hyers-Ulam 15

3.2.2 L'inverse généralisé d'un opérateur 16

3.3 Fermeture de l'image d'un opérateur non borné 19

3.3.1 Exemple : Application aux opérateurs de multiplication 23

Conclusion **26**

Bibliographie **27**

Remerciements

Je tiens à remercier l'enseignant **Mohand Ouldali** qui à dérigé mon travail, Je tiens aussi à remercier les mombres du jury pout m'avoir donné l'occasion de discuter ce travail.
Il est important pour moi de remercier ma famille : mes parents , mes frères et ma soeur, qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragements.

RÉSUMÉ

Ce mémoire est consacré à l'étude de la fermeture de l'image d'un opérateur fermé densement défini sur un Hilbert H (c'est à dire non borné). En effet, on donne toutes les caractérisations récoltées dans la litterature mathématique pour q'un opérateur non borné ait une image fermée.

INTRODUCTION

Il ya beaucoup d'applications importantes de la fermeture de l'image dans l'étude spectrale d'opérateurs différentiels et aussi dans le contexte de la théorie de perturbation, cette importance à été confirmé par plusieurs travaux de recherche, nous citerons par exemple les articles suivants :

-(**Q.Huang ; M.S.Moslehian**[6]) qui ont donné la relation entre la fermeture de l'image d'un opérateur $A \in C(H)$, la propriété Hyers-Ulam stabilité et l'inverse de Moore-Penrose.

-(**S.H.Kulkarni ; M.T.Nair ; G.Ramesh**[8]) qui ont donné quelques propriétés d'opérateurs non bornés à image fermè.

Dans ce travail nous rassemblons plusieurs resultats équivalents sur la fermeture de l'image d'un opérateur non borné sur un espace de Hilbert.

En rappel que l'étude de la fermeture de l'image d'un opérateur non borné A est en relation direct avec la résolution de l'équation $Ax = y$ dans H, parce que la fermeture de $R(A)$ est équivalente au fait que l'équation $Ax = y$ est résolvable.

Notre manuscrit se compose de trois chapitres :

-Dans le premier on donne les différentes notions mathématiques dont on a besoin : espace de Hilbert ; opérateur non borné ; opérateur fermé.

-Dans le deuxième chapitre on définit des opérateurs associes à un opérateur fermé $A \in C(H)$. Ces opérateurs R_A et S_A sont bornés.

-Le dernier chapitre est consacré à l'étude des caractérisation de la fermeture de l'image d'un opérateur non borné (on donne le resultat principal de notre travail c'est-à-dire on montre les resultats équivalentes pour $R(A)$ est fermé, avec A un opérateur non borné).

Chapitre 1

Rappel

1.1 Produit scalaire, norme, espace de Hilbert

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel complexe. Un produit scalaire sur E noté $\langle .,.\rangle$ est une forme sesquilinéaire, hetmitienne, définie positive :*

$$\begin{array}{rcl} E\times E & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \to & \langle x,y\rangle \end{array}$$

$-$Sesquilinéaire : $\quad - \forall\ u,v,w\in E : \left\{ \begin{array}{rcl} \langle u,v+w\rangle & = & \langle u,v\rangle +\ \langle u,w\rangle \\ \langle u+v,w\rangle & = & \langle u,w\rangle +\ \langle v,w\rangle \end{array} \right.$

et $\forall u,v\in E\ ,\ \forall\alpha\in\mathbb{C} : \left\{ \begin{array}{l} \langle \alpha u,v\rangle = \alpha\ \langle u,v\rangle \\ \langle u,\alpha v\rangle = \overline{\alpha}\ \ \langle u,v\rangle \end{array} \right.$

$-$Hermitienne : $\quad \forall u,v\in E :\ \ \langle u,v\rangle =\ \ \overline{\langle v,u\rangle}$

$-$Définie Positive : $\quad \forall u,v\in E :\ \langle u,u\rangle \geq 0$ et $\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u=0$

Définition 1.1.2 *Une norme sur un $\mathbb{k}$-espace vectoriel E est une application $\|\ \| : E\to\mathbb{R}_+$ vérifiant :*

$$\begin{array}{llll} \|\ x\| = 0 & \Longleftrightarrow & x=0 & \forall x\in E \\ \|\lambda\ x\| & = & |\ \lambda\ |\ \|\ x\| & \forall\lambda\in\mathbb{k},\forall x\in E \\ \|\ x+y\| & \leq & \|x\| + \|\ y\| & \forall x,y\in E \end{array}$$

Un $\mathbb{k}$-espace véctoriel muni d'une norme $\|\ \|$ est appelé un $\mathbb{k}$-espace véctoriel normé ou simplement un espace normé.

Définition 1.1.3 *Un espace de Hilbert est un espace véctoriel H muni d'un produit scalaire (ie-une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, symétrique et définie positive) et qui est complet pour la norme associé*

$$\forall x \in H \qquad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

1.2 Opérateur borné, opérateur non borné

Définition 1.2.1 *Soit H un espace de Hilbert et soit $A : H \to H$ un opérateur lineaire. On dit que A est borné s'il existe un nombre réel positif K telle que*

$$\|Ax\| \leq K\|x\| \ ; \forall x \in H$$

On note par $B(H)$ l'ensembles des opérateurs lineaires bornés sur H.

Notation

$\mathcal{L}(E, F)$: L'ensemble des opérateurs lineaires de E dans F.

$D(A)$: Le domaine de A est l'ensemble des vecteurs $x \in E$ pour lesquels il existe une image $y \in F$.

$$D(A) = \{\ x, \quad Ax \text{ est existe }\}$$

$N(A)$: Le noyau de A est le sous espace de E défini par :

$$N(A) = \{\ x \in D(A)\ ;\ A(x) = 0\}$$

$R(A)$: L'image de A est le sous espace de F défini par :

$$R(A) = \{\ y \in F\ ;\ y = A(x)\,,\ x \in D(A)\}$$

Définition 1.2.2 *Soient E et F deux espaces de Hilbert. et $A \in \mathcal{L}(E, F)$ .l'unique application lineaire $A^* \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que pour tous $x \in E$, $y \in F$ on ait*

$$\langle A(x), y\rangle \ = \ \langle x, A^*(y)\rangle$$

est appelée adjoint de A.

Proposition 1.2.1 *Soient E et F deux espaces de Hilbert. l'application $A \to A^*$ est antilineaire de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F, E)$. de plus $\forall\ A \in \mathcal{L}(E, F)$*

1) $(A^*)^* = A$

2) $\|A\| = \|A^*\|$

3) $\|A^*A\| = \|A\|^2$

4) $(AS)^* = S^*A^*$.

Preuve. Par définition du produit scalaire et de l'adjoint, pour tous $x \in E$, $y \in F$ et $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \langle x, (A_1+\lambda A_2)^*(y)\rangle & = & \langle (A_1+\lambda A_2)(x), y\rangle \\ & = & \langle A_1(x), y\rangle + \lambda\langle A_2(x), y\rangle \\ & = & \langle x, (A_1^*)(y)\rangle + \langle x, \overline{\lambda}\, A_2^*(y)\rangle \\ & = & \langle x, \left(A_1^* + \overline{\lambda}\, A_2^*\right)(y)\rangle \end{array}$$

ainsi $A \to A^*$ est antilineaire.

1) Monrons que $(A^*)^* = A$ pour cela on montre que pour tous $x \in E$ et $y \in F : \langle A(x), y\rangle = \langle (A^*)^*(x), y\rangle$.on a :

$$\begin{array}{rcl} \langle A(x), y\rangle & = & \langle x, A^*(y)\rangle \\ & = & \overline{\langle A^*(y), x\rangle} \\ & = & \overline{\langle y, (A^*)^*(x)\rangle} \\ & = & \langle (A^*)^*(x), y\rangle \end{array}$$

d'où $(A^*)^* = A$.

2) Montrons que $\|A\| = \|A^*\|$

on montre $\|A^*\| \leq \|A\|$.

on utilise l'inégalité de cauchy schwartsz

$\|A^*(y)\|^2 = \langle A^*(y), A^*(y)\rangle \leq \|A\ A^*(y)\|\|y\| \leq \|A\|\|\ A^*(y)\|\|y\|$c'est-à-dire on a :

$$\|A^*(y)\|^2 \leq \|A\|\|A^*(y)\|\|y\| \tag{1.2.1}$$

Si $\|\ A^*(y)\| > 0$ alors on peut déviser l'inégalité 1.2.1 sur $\|\ A^*(y)\|$ on obtient

$$\|A^*(y)\| \leq \|A\|\|y\|$$

Si $\|\ A^*(y)\| = 0$ l'inégalité 1.2.1 est vérifie

donc pour tout $y \in F$ on a $\|\ A^*(y)\| \leq \|A\|\|y\|$ d'où $\|A^*\| \leq \|A\|$

Maintenant on montre $\|A\| \leq \|A^*\|$

on a $\| A^*\| \leq \|A\|$ et comme $(A^*)^* = A$ on a $\|A\| = \| (A^*)^* \| \leq \|A^*\|$

d'où $\|A\| = \|A^*\|$.

3) Montrons que $\|A^*A\| = \|A\|^2$

comme $\|A\| = \|A^*\|$, on a :

$$\|A^*A\| \leq \|A^*\|\|A\| = \|A\|^2 \tag{1.2.2}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} \|A(x)\|^2 &= \langle A(x), A(x)\rangle \\ &= \langle A^*A(x), Ax\rangle && \text{par la définition de } A^* \\ &\leq \|A^*A(x)\|\|x\| && \text{par l'inégalité de cauchy schwartz} \\ &\leq \|A^*A\|\|x\|^2 \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|A\|^2 \ \leq \ \|A^*A\| \tag{1.2.3}$$

de 1.2.2 et 1.2.3 on a $\| A\|^2 = \|A^*A\|$

4) Pour vérifier que $(AS)^* = S^*A^*$,il suffit de montrer que pour tous $x \in E$ et $y \in F$ on a :

$\langle (AS)^*(x), y\rangle \ = \ \langle S^*A^*(x), y\rangle$

par définition de l'adjoint, on a :

$$\begin{aligned} \langle (AS)^*(x), y\rangle &= \langle x, (AS)(y)\rangle \\ &= \langle A^*(x), S(y)\rangle \\ &= \langle S^*A^*(x), y\rangle \end{aligned}$$

comme ceci est vrai pour tous vecteur x, y on a l'égalité $(AS)^* = S^*A^*$. $\square$

Définition 1.2.3 *Soit H un espace de Hilbert et $A \in B(H)$ alors A est auto-adjoint si $A = A^*$.*

Exemples

1 Soit H un espace de Hilbert et I est l'opérateur identité

si $x, y \in H$ alors

$\langle Ix, y\rangle = \langle x, y\rangle = \langle x, Iy\rangle$ par conséquant $I = I^*$, d'où I est un opérateur auto-adjoint.

2 Soit H un espace de Hilbert et $A \in B(H)$ alors les opérateurs A^*A et AA^* sont auto-adjoint.

on a d'aprés la proposition précédente :

$(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$ d'où A^*A est auto-adjoint.et aussi l'opérateur AA^* est auto-adjoint.

Lemme 1.2.1 *Soient H_1, H_2 deux espace de Hilbert et $A \in B(H_1, H_2)$*

a) $N(A) = R(A^*)^{\perp}$

b) $N(A^*) = R(A)^{\perp}$

c) $N(A^*)^{\perp} = \overline{R(A)}$

Preuve. 1) D'abord. on montre que $N(A) \subseteq R(A^*)^{\perp}$ pour cela .soit $x \in N(A)$ et soit $z \in R(A^*)$ .comme $z \in R(A^*)$ il existe $y \in H_2$ telle que $A^*(y) = z$ donc $\langle x, z\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle = \langle Ax, y\rangle = 0$ ainsi $x \in R(A^*)^{\perp}$ d'où $N(A) \subseteq R(A^*)^{\perp}$
ensuite nous montrons que $R(A^*)^{\perp} \subseteq N(A)$ .dans ce cas soit $v \in R(A^*)^{\perp}$
comme $A^*Av \in R(A^*)$ on a :

$$\langle Av, Av\rangle = \langle v, A^*Av\rangle = 0$$

donc $Av = 0$ d'où $v \in N(A)$ .Par conséquant $N(A) = R(A^*)^{\perp}$.
2) D'apès a) et la proposition précédente on a :

$$N(A^*) = (R((A^*)^*))^{\perp} = R(A)^{\perp}$$

3) On a :
$N(A^*) = R(A)^{\perp} \Leftrightarrow N(A^*)^{\perp} = \left(R(A)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{R(A)}$. □

Définition 1.2.4 *Si $A \in C(H)$, $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ est appelé spectre de l'opérateur A où $\rho(A)$ désigne l'ensemble résolvant défini par :*

$$\rho(A) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C};\ (A - \lambda I) \text{ défini de } D(A) \text{ dans } H \text{ est inversible} \\ \text{et } R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} \in B(H) \end{array} \right\}$$

Définition 1.2.5 *Soient H un espace de Hilbert et $A \in B(H)$, on dit que A est positif si A auto-adjoint et*

$$\langle Ax,\ x\rangle \geq 0,\ \forall x \in H$$

Remarque 1.2.1 *Si H un espace de Hilbert complexe et $A \in B(H)$ est auto-adjoint A est positif si et seulement si $\sigma(A) \subseteq [0, +\infty[$.*

Exemples

Soient H un espace de Hilbert complexe, R et $S \in B(H)$ sont positives, et $A \in B(H)$ et soit α un nombre real positive.

i/ I est un opérateur positif

ii/ A^*A est un opérateur positif

iii/ $R+S$ et αS sont positives.

Solution :

i/ On a I est auto-adjoint. si $x \in H$ alors

$$\langle Ix, x\rangle = \langle x, x\rangle \geq 0$$

d'où I est positif.

ii/ On a A^*A est auto-adjoint. si $x \in H$ alors

$$\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle \geq 0$$

d'où A^*A est positif.

iii/ $R+S$ et αS sont auto-adjoint. si $x \in H$ alors

$$\langle (R+S)\, x, x\rangle = \langle Rx, x\rangle + \langle Sx, x\rangle \geq 0$$

et

$$\langle (\alpha S)\, x, x\rangle = \alpha\langle Sx, x\rangle \geq 0$$

d'où $R+S$ et αS sont positives.

Définition 1.2.6 *Soit H un espace de Hilbert complexe et $A \in B(H)$, La racine carrée de A est un opérateur $B \in B(H)$ telle que $B^2 = A$.*

Définition 1.2.7 *Soit $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est dit densement définie si $\overline{D(A)} = H_1$.*

Définition 1.2.8 *Soient E et F deux espaces de Banach. on appelle opérateur lineaire non borné de E dans F toute application lineaire $A : D(A) \subset E \to F$ définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$ à valeur dans F.*

Définition 1.2.9 *Soit H un espace de Hilbert complexe. une projection orthogonal sur H est un opérateur $P \in B(H)$ telle que*

$$P = P^* = P^2$$

1.3 Opérateur fermé et le théorème du graphe fermé

Définition 1.3.1 *Soient E et F deux espaces de Banach. et soit $A : D(A) \subset E \to F$ une application. le graphe de A est le sous espace vectoriel de $E \times F$ noté $G(A)$ définie par :*

$$G(A) = \{(x, \ Ax) \ ; \ x \in D(A)\}$$

L'opérateur A est fermé si et seulement si $G(A)$ est fermé dans $E \times F$.

Proposition 1.3.1 *Un opérateur A défini sur H et de domaine $D(A)$ est fermé si et seulement si l'assertion suivante a lieu :*

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall \{x_n\} \subset D(A) \\ \lim_{n \to +\infty} \ x_n = x \\ \lim_{n \to +\infty} \ Ax_n = y \end{array} \right. \Rightarrow x \in D(A) \quad et \quad y = Ax$$

On note par $C(H)$ l'ensemble des opérateurs fermés à domaine dense dans H .

Corollaire 1.3.1 *Soit E un espace de Banach muni de deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$.s'il existe $c > 0$ telle que*

$$\forall x \in E \quad \|x\|_2 \leq c\|x\|_1$$

alors les deux normes sont équivalentes.

Théorème 1.3.1 (du graphe fermé) *Soient E et F deux espaces de Banach. et soit $A : E \to F$ une application. alors A est continue si et seulement si le graphe $G(A)$ de A est fermé dans $E \times F$.*

Preuve. On considére sur E la norme $\|.\|_2$ définie par :

$$\|x\|_2 = \|x\|_E + \|Ax\|_F$$

appelée norme du graphe.

Comme A est fermé alors $(E, \ \|.\|_2)$ est de Banach car :

$(E,\ \|.\|_2)$ est complet c-à-d :

Soit $(x_n) \in E$ une suite de cauchy. alors

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}. \forall n, m \geq n_0 : \ \|x_n - x_m\|_2 \ \leq \varepsilon$$

et on a :

$$\|x_n - x_m\|_2 = \|x_n - x_m\|_E + \|Ax_n - Ax_m\|_F$$

ceci implique que

$$\begin{cases} \|x_n - x_m\|_E \leq \varepsilon \\ \|Ax_n - Ax_m\|_F \leq \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_n) \text{ est une suite de cauchy dans } (E,\ \|.\|_E) \\ (Ax_m) \text{ est une suite de cauchy dans } (F,\ \|.\|_F) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \exists\ x \in E : x_n \to x \\ \exists\ y \in F : x_m \to y \end{cases}$$

d'où (x_n) converge pour $\|.\|_2$.

d'autre part

d'après le corollaire précédent on déduit qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \|x\|_2 \leq c\|x\|_E &\Rightarrow \|x\|_E + \|Ax\|_F \leq c\|x\|_E \\ &\Rightarrow \|Ax\|_F \leq (c-1)\,\|x\|_E \end{aligned}$$

d'où A est continue. $\square$

Chapitre 2

Opérateurs associés à un opérateur fermé

Dans ce chapitre nous associerons à tout opérateur $A \in C(H)$, des opérateurs bornés R_A et S_A sur H. Ce lien nous permetra par la suite de caractériser la fermeture de l'image de A à l'aide de ces opérateurs bornés

Soit $A \in C(H)$, alors l'opérateur $I + A^*A$ est bijectif, auto-adjoint et positif de domaine dense dans H. On définit alors les opérateurs $R_A = (I + A^*A)^{-1}$ et $S_A = \sqrt{R_A}$.

Proposition 2.0.2 *Pour tout opérateur $A \in C(H)$, on a les assertions suivantes :*

1. Si $u \in D(A)$, $R_{A^*}Au = AR_A\, u$.
2. $(AR_A)^* = A^*R_{A*}$.
3. $\|R_Au\|^2 + \|AR_Au\|^2 = \langle u, R_A\, u\rangle$, $\forall u \in H$.
4. $\|AR_Au\|^2 + \|(I - R_A)u\|^2 = \|R_Au\|^2 - \langle u, R_A\, u\rangle$, $\forall u \in H$

   R_A et AR_A sont bornés sur H et on a : $\|R_A\| \leq 1$, $\|AR_A\| \leq \frac{1}{2}$.
5. $N(AR_A) = N(A)$.
6. Si $u \in D(A)$, $S_{A^*}Au = AS_A\, u$.
7. $(AS_A)^* = A^*S_{A^*}$.
8. $\|S_Au\|^2 + \|AS_Au\|^2 = \|u\|^2$, $\forall u \in H$

   D'où , S_A et AS_A sont bornés dans H et on a : $\|S_A\| \leq 1$, $\|AS_A\| \leq 1$.
9. $R(S_A) = D(A)$.

10. $N(AS_A) = N(A)$.

Preuve. 1) Soit $u \in D(A)$, on pose $z = (I + A^*A)^{-1} u = R_A u$, alors on a :

$$\begin{aligned} Au &= A(I + A^*A) z \\ &= Az + AA^*Az \\ &= (I + A^*A) Az \\ &= (I + A^*A) AR_A u \end{aligned}$$

Nous obtenons directement la propriété en multipliant par $R_{A^*} = (I + AA^*)^{-1}$.

2) On a :

$$(AR_A)^* u = (R_A)^* (A)^* u = R_A A^* u = A^* R_{A^*} u, \forall u \in D(A^*).$$

En utilisant la propriété 1 et le fait que $D(A^*)$ est dense dans $D(AR_A)$, on trouve le resultat.

3) On a :

$$\begin{aligned} \|R_A u\|^2 + \|AR_A u\|^2 &= \langle R_A u, R_A u\rangle + \langle AR_A u, AR_A u\rangle \\ &= \langle R_A u, R_A u\rangle + \langle R_A u, A^*AR_A u\rangle \end{aligned}$$

Or, $A^*AR_A = I - R_A$, car

$$\begin{aligned} A^*AR_A &= A^*A(I + AA^*)^{-1} = [(A^*A + I) - I](I + AA^*)^{-1} \\ &= I - (I + AA^*)^{-1} = (I - R_A) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \|R_A u\|^2 + \|AR_A u\|^2 &= \langle R_A u, R_A u\rangle + \langle R_A u, (I - R_A) u\rangle \\ &= \langle u, R_A u\rangle \quad , \quad \forall u \in H \end{aligned}$$

4) Estimons maintenant les normes de R_A et AR_A :

a) D'après la propriété (8) on a $\|S_A\| \leq 1$ donc

$\|R_A\| = \|(S_A)^2\| \leq \|S_A\|^2 \leq 1$ d'où $\|R_A\| \leq 1$.

b) D'aprés la propriété (3), on a pour tout $u \in H$

$$\begin{aligned} \|AR_A u\|^2 + \|\left(R_A - \frac{1}{2}I\right) u\|^2 &= \langle u, R_A u\rangle - \|R_A u\|^2 + \|\left(R_A - \frac{1}{2}I\right) u\|^2 \\ &= \langle u,\ R_A u\rangle - \langle R_A u,\ R_A u\rangle + \langle R_A u,\ R_A u\rangle \\ &\quad + \langle R_A u,\ -\frac{1}{2}u\rangle + \langle -\frac{1}{2}u,\ R_A u\rangle \\ &\quad + \langle -\frac{1}{2}u,\ -\frac{1}{2}u\rangle \end{aligned}$$

Donc

$$\|AR_Au\|^2 \leq \frac{1}{4}\|u\|^2, \quad \forall u \in H$$

D'où $\|AR_A\| \leq \frac{1}{2}$

5) Soit $u \in H$, tel que $AR_Au = 0$, alors $A^*AR_Au = (I - R_A)\,u = 0$ d'où $u = R_Au$. Par conséquent $Au = 0$, ce qui implique que $u \in N(A)$.

Inversement, soit $u \in N(A)$ alors $u \in D(A)$ et $Au = 0$ d'où $AR_Au = R_{A^*}Au = 0$, ce qui nous donne que $u \in N(AR_A)$.

6) On sait qu'il existe une suite de polynômes $(q_n)_n$ telle que $(q_n(R_A))_n$ converge vers S_A dans $B(H)$. Donc pour $u \in D(A)$, on a :

$$S_{A^*}A = \lim_{n\to+\infty} q_n(R_{A^*})\,Au = \lim_{n\to+\infty} Aq_n(R_A)\,u = AS_Au$$

7) Soit $u \in D(A)$, alors $\forall v \in H$ on a :

$$\langle AS_Au, v\rangle = \langle S_{A^*}Au, v\rangle = \langle u, A^*S_{A^*}v\rangle$$

donc $AS_A = A^*S_{A^*}$ sur $D(A)$. comme $D(A)$ est dense dans H, on obtient la propriété sur H.

8) En vertu de 3), on a $\forall v \in H$,

$$\|S_Av\|^2 + \|AS_AS_Av\|^2 = \|S_Av\|^2$$

Ce qui montre que (AS_A) est borné sur $R(S_A) \supseteq R(R_A)$ qui est dense dans H, par conséquent il est fermarble sur H.

Notons par B sa fermeture. soit $v \in H$ et $v_n = (S_Aw_n)$ une suite qui converge vers v dans H, alors les suites (AR_Aw_n) et (R_Aw_n) convergent respectivement vers Bv et S_Av.

Comme A est fermé, on déduit que $S_Av \in D(A)$ et $Bv = AS_Av$ c'est à dire $AS_A = B$.

D'après la propriété 6 et le fait que $R(S_A)$ est dense dans H, on obtient pour tout $u \in H$

$$\|S_Au\|^2 + \|AS_Au\|^2 = \|u\|^2$$

9) Il est clair que $R(S_A) \subseteq D(A)$ et que $R(S_A) \supseteq R(R_A)$ qui est dense dans $D(A)$ muni de la norme du graphe.

De la propriété (8), on déduit que $R(S_A)$ est fermé dans le même espace ; finalement $D(A) = R(S_A)$.

10) Soit $u \in H$, tel que $AS_A u = 0$, donc $S_{A^*} AS_A u = AR_A u = 0$ et alors $u \in N(AR_A) = N(A)$.

Inversement, soit $u \in N(A)$, alors $u \in D(A)$ et $Au = 0$ donc

$AS_A u = S_{A^*} Au = 0$, d'où $u \in N(AS_A)$. $\square$

Chapitre 3

Caractérisation des opérateurs non bornés à image fermé

3.1 Fermeture de l'image d'un opérateur borné

Nous présontons dans cette partié une caractérisation qualitative de l'image d'un opérateur borné A sur un espace de Hilbert H. En fait nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que $R(A)$ soit fermé.

Théorème 3.1.1 *Si $A \in B(H)$, alors les propiétés suivantes sont équivalentes :*

1. $R(A)$ est fermé
2. $R(A^*)$ est fermé
3. $R(AA^*)$ est fermé
4. $R(A^*A)$ est fermé
5. $\gamma(A) > 0$
6. A^+ est borné
7. La famille $\{R_\alpha\}_{\alpha>0}$ est uniformément bornée où $R_\alpha = (A^*A + \alpha I)^{-1}$
8. 0 n'est pas point d'accumulation de $\sigma(A^*A)$.(voir [7] et [3])

3.2 Stabilité de Hyers-Ulam, et l'inverse généralisé

3.2.1 Définition de la propriété de stabilité de Hyers-Ulam

Définition 3.2.1 *Soient X, Y deux espaces lineaires normées et soit A est une application (n'est pas nécessairement lineaire) de X dans Y. on dit que A posséde la stabilité de Hyers-Ulam s'il existe une constante $K > 0$ tel que :*

(a) $\forall y \in R(A), \forall \varepsilon > 0, \forall x \in D(A) / \| Ax - y \| \leq \varepsilon$, il existe un élément $x_0 \in D(A)$ telle que $Ax_0 = y$ et $\| x - x_0 \| \leq K\varepsilon$.

nous appelons K la constante de stabilité de Hyers-Ulam pour A. et on note par K_A l'infinimum de tous les constantes de la stabilité de Hyers-Ulam pour A.
Si A posséde la stabilité de Hyers-Ulam, alors pour tout ε, la solution approximative x de l'équation $Ax = y$ il correspent une solution exacte x_0 de l'équation dans un voisinage K_ϵ de x.

Remarque 3.2.1 *Si A est lineaire alors la condition (a) est équivalent à (b) et (c)*

telle que :

(b) Pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in D(A)$ avec $\| Ax \| \leq \varepsilon$, il existe $x_0 \in D(A)$ telle que $Ax_0 = 0$ et $\| x - x_0 \| \leq K\varepsilon$.

(c) Pour chaque $x \in D(A)$, il existe $x_0 \in N(A)$ telle que

$$\| x - x_0 \| \leq K \| Ax \| .$$

Définition 3.2.2 *Soient X, Y deux espaces de Banach. la conorme de $T \in C(X, Y)$ est définie par :*

$$\gamma(T) = \inf \left\{ \| Tx \| : \ x \in D(T) \quad \text{avec } d(x, N(T)) = \inf_{z \in N(T)} d(x, z) = 1 \right\}$$

Si X, Y deux espaces de Hilbert, alors :

$$\gamma(T) = \inf \left\{ \| Tx \| : \ x \in D(T) \cap N(T)^{\perp} \ \text{ avec } \ \| x \| = 1 \right\}$$

3.2.2 L'inverse généralisé d'un opérateur

La notion d'inversibilité est une notion très importante dans tous les domaine de mathématiques. L'équation $Ax = y$ possède une solution unique lorsque l'opérateur linéaire A est inversible, malheureusement, on ne se trouve pas toujours dans ce cas, en pratique, on obtient souvent des données sous forme d'une matrice rectangulaire qui est un opérateur non inversible, ou bien dans le cas général on se trouve avec un opérateur non surjectif ou non injectif, ou d'inverse non borné. Dan ce cas on essaie de trouver un opérateur qui possède le maximum de propriété que possède l'inverse s'il existait, un tel opérateur sera appelé un inverse généralisé de A.

Définition 3.2.3 *Un opérateur $A \in C(X,Y)$ posséde un inverse généralisé s'il existe un opérateur $S \in B(Y,X)$ telle que $R(S) \subseteq D(A)$ et*

1. $ASAx = Ax \qquad \forall\, x \in D(A)$
2. $SASy = Sy \qquad \forall y \in Y$
3. SA est continue.

on note l'inverse généralisé de A par A^{+}.

Lemme 3.2.1 (a) *Soit $A \in C(X,Y)$ .supposons que $N(A)$ admet un complément topologique $N(A)^{C}$ sur X et $\overline{R(A)}$ admet un complément topologique $\overline{R(A)}^{c}$, ie*

$$X = N(A) \oplus N(A)^{C} \qquad et \qquad Y = \overline{R(A)} \oplus \overline{R(A)}^{C}$$

Soit P est le projecteur de X sur $N(A)$ parallélement à $N(A)^{C}$ et Q est le projecteur de Y sur $\overline{R(A)}$ parallélement à $\overline{R(A)}^{c}$, alors il existe un unique $S \in C(Y,X)$ vérifie :

$$\begin{array}{lll} (1) & ASA = A & sur\ D(A) \\ (2) & SAS = S & sur\ D(S) \\ (3) & SA = I - P & sur\ D(A) \\ (4) & AS = Q & sur\ D(S)\ où\ D(S) = \overline{R(A)} + \overline{R(A)}^{c} \end{array}$$

(b) Sous les hypothése de la partie (a), S est borné si et seulement si $R(A)$ est fermé. dans ce cas, S est un inverse généralisé borné de A avec $D(S) = Y$, $N(A) = R(A)^{C}$ et $R(S) = D(A) \cap N(A)^{C}$.

Définition 3.2.4 (L'inverse de Moore-Penrose) *Soient X, Y deux espaces de Hilbert et $A \in C(X, Y)$. Si les décompositions topologique dans le lemme 3.2.1 sont orthogonaux ie $X = N(A) \oplus N(A)^{\perp}$ et $Y = \overline{R(A)} \oplus R(A)^{\perp}$, alors l'inverse généralisé correspondant est appelé habituellement l'inverse de Moore-Penrose de A. dans ce cas, les opérateurs P et Q dans le lemme 3.2.1 sont orthogonaux.*
on note l'inverse de Moore-Penrose de A par $A^{\dagger}$.

Définition 3.2.5 (L'inverse de Moore-Penrose) *Soit $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$. on définit $\underline{A^{\dagger}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ par :*

$\underline{A^{\dagger}}(y) = 0\,; \forall y \in R(A)^{\perp}$ et $\underline{A^{\dagger}}(y) = \left(A_{/R(A^*)}\right)^{-1} y\,; \forall y \in R(A)$.

Proposition 3.2.1 *Soit $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$, alors :*

a) $A^+Ax = 0.\ \forall x \in N(A)$ et $A^+Ax = x. \quad \forall x \in R(A^*) = R(A^+)$.

b) $A^+Ay = 0.\ \forall y \in R(A)^{\perp}$ et $A^+Ay = y \quad \forall y \in R(A)$.

c) $(A^+)^+ = A$

Preuve. *a)* $Ax = 0\,; \forall x \in N(A) \Longrightarrow A^+Ax = 0.\ \forall x \in N(A)$.
et $Ax \in R(A)\,; \forall x \in R(A^*) \Longrightarrow A^+Ax = \left(A_{/R(A^*)}\right)^{-1} Ax = x \ \ \forall x \in R(A^*)$.
b) $\forall y \in R(A)^{\perp} \Longrightarrow A^+y = 0.\ \forall y \in R(A) \Longrightarrow A^+Ay = 0.\ \forall y \in R(A)^{\perp}$
et $\forall y \in R(A) \Longrightarrow A^+y = \left(A_{/R(A^*)}\right)^{-1} y \Longrightarrow A^+Ay = A\left(A_{/R(A^*)}\right)^{-1} y = y$
c) $(A^+)^+ : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$
$\forall\ x \in R(A^*)\,;\ \left(\underline{A}^+\right)^+ x = \left(\left(\underline{A}_{/R(A^*)}\right)^{-1}\right)^+ x = \left(\left(\underline{A}_{/R(A^*)}\right)^{-1}\right)^{-1} x = \underline{A}\ x$
et $\forall\ x \in R(A^*)^{\perp}\,;\ \left(\underline{A}^+\right)^+ x = 0$, donc $(A^+)^+ = A$. □

Lemme 3.2.2 *Soient X, Y deux espaces de Hilbert et $A \in C(X, Y)$ avec un inverse généralisé $A^+ \in B(Y, X)$, alors A est à inverse de Moore-Penrose $A^{\dagger}$ et $A^{\dagger} = \left[I - P^{\perp}_{N(T)}\right] A^+ P^{\perp}_{\overline{R(T)}}$.*

Théorème 3.2.1 *Soient X, Y deux espaces de Hilbert et $A \in C(X, Y)$, alors les assertions suivantes sont équivalents :*

1. A possède la propriété de Hyers-Ulam stabilité.
2. A possède un inverse de Moore-Penrose borné $A^{\dagger}$.

3. A possède un inverse généralisé borné A^{+}.
4. A à image fermé.

de plus, si l'une des conditions au-dessus est vraie, alors
$D\left(A^{\dagger}\right)=Y$, $N\left(A^{\dagger}\right)=R\left(A\right)^{\perp}$, $R\left(A^{\dagger}\right)=D\left(A\right)\cap N\left(A\right)^{\perp}$ et $K_{A}=\|A^{\dagger}\|=\gamma\left(A\right)^{-1}$.

Preuve. Notons que $A/_{N(A)^{\perp}}:D\left(A\right)\cap N\left(A\right)^{\perp}\rightarrow R\left(A\right)$ est inversible et $A^{\dagger}$est définie par :

$$A^{\dagger}y=\left(A/_{N(A)^{\perp}}\right)^{-1}Qy \qquad \left(y\in R\left(A\right)+R\left(A\right)^{\perp}\right)$$

où Q est le projecteur orthogonale de Y sur $\overline{R\left(A\right)}$ parallélement à $R\left(A\right)^{\perp}$, alors $A^{\dagger}$est un opérateur fermé densement défini avec $D\left(A^{\dagger}\right)=R\left(A\right)+R\left(A\right)^{\perp}$ et $R\left(T^{\dagger}\right)=D\left(T\right)\cap N\left(T\right)^{\perp}$.

(2)⇒(1) Si A possède un inverse de Moore-Penrose borné $A^{\dagger}$, alors pour tout $x\in D\left(A\right)$ $\left(I-A^{\dagger}A\right)x\in N\left(A\right)$ et

$$\|x-\left(I-A^{\dagger}A\right)x\|=\|A^{\dagger}Ax\|\leq\|A^{\dagger}\|\|Ax\|$$

ceci veut dire que A possède la propriété de Hyers-Ulam stabilité et $K_{A}\leq\|A^{\dagger}\|$.

supposons que K est la constante de Hyers-Ulam stabilité ie, pour tout $x\in D\left(A\right)$, il existe $x_{0}\in N\left(A\right)$ telle que $\|x-x_{0}\|\leq K\|Ax\|$ alors pour tout $y\in Y,A^{\dagger}y\in D\left(A\right)\cap N\left(A\right)^{\perp}$ et il existe $x_{1}\in N\left(A\right)$

telleque $\|A^{\dagger}y-x_{1}\|\leq K\|A^{\dagger}Ay\|$.

comme $A^{\dagger}y\perp x_{1}$, nous obtenons :

$$\|A^{\dagger}y\|\leq\|A^{\dagger}y-x_{1}\|\leq K\|AA^{\dagger}y\|\leq K\|y\| \tag{3.2.1}$$

d'où $K\geq\|A^{\dagger}\|$ et donc $K_{A}\geq\|A^{\dagger}\|$ par conséquent $K_{A}=\|A^{\dagger}\|$.

(1)⇒(2) Si A possède la propriété de Hyers-Ulam stabilité alors de 3.2.1 on a que l'inverse de Moore-Penrose $A^{\dagger}$ est borné.

(2)⇔(3) D'aprés le lemme 3.2.2 on a (3) ⇒ (2). et comme l'inverse de Moore-Penrose est un inverse généralisé, d'où (2) ⇒ (3).

(4)⇒(2) Si $R\left(A\right)$ est fermé, alors $D\left(A^{\dagger}\right)=Y$, et d'après le lemme 3.2.1 $A^{\dagger}$ est borné.

(2)⇒(4) Si $A^{\dagger}$ est borné, comme $A^{\dagger}$est un opérateur fermé densement défini, nous obtenons $D\left(A^{\dagger}\right)=Y$, ie $Y=R\left(A\right)+R\left(A\right)^{\perp}$.

ceci implique que $R\left(A\right)$ est fermé.

dans la suite, montrerons que $\gamma(A) = \|A^{\dagger}\|^{-1}$.
en effet, pour tout $x \in D(A)$, nous avons
$\left(I - A^{\dagger}A\right)x \in N(A)$ et

$$d(x\ , N(A)) \leq \|x - \left(I - A^{\dagger}A\right)x\| = \|A^{\dagger}Ax\| \leq \|A^{\dagger}\|\|Ax\|$$

alors $\gamma(A) \geq \|A^{\dagger}\|^{-1}$. comme $\gamma(A) \leq \|A^{\dagger}\|^{-1}$ pour tout $x \in D(A) \cap N(A)^{\perp}$ avec $\| x \| = 1$. nous obtenons pour tout $y \in Y$ tel que $\| T^{\dagger}y \| = 1$,

$$\gamma(A) \leq \|AA^{\dagger}y\| = \| Qy \ \| \leq \| y \|$$

D'où pour tout $y \in Y$ avec $A^{\dagger}y \neq 0$, $\gamma(A) \leq \frac{\|y\|}{\|A^{\dagger}y\|}$, donc

$$\gamma(A) \leq \inf\left\{\frac{\| y \|}{\| A^{\dagger}y \|} : y \in Y\ ,\ A^{\dagger}y \neq 0\right\} = \left(\sup\left\{\frac{\| A^{\dagger}y \|}{\| y \|} : y \in Y\right\}\right)^{-1} = \|A^{\dagger}\|^{-1}$$

par conséquent $\gamma(A) = \|A^{\dagger}\|^{-1}$. □

3.3 Fermeture de l'image d'un opérateur non borné

Dans cette partié on donne toutes les caractérisations récoltes dans la litterature mathématique pour q'un opérateur non borné ait une image fermée.
Ces caractérisations sont liées à :

1. La fermeture des images de A^*, $A_0 = A_{|C(A)}$, A^*A, AA^*, AR_A et $A^*R_{A^*}$.où $C(A) = D(A) \cap N(A)^{\perp}$
2. La positivité de la conorme de A.
3. La bornitude de l'inverse de Moore-Penrose de A.
4. La stabilité au sens de Hyers-Ulam des opérateurs A_0 et A.
5. L'aspect spectral de l'opérateur A^*A.
6. La fermeture des images de AS_A et $A^*S_{A^*}$.

Théorème 3.3.1 *Pour tout opérateur $A \in C(H)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $R(A)$ est fermé

2. $R(A^*)$ est fermé
3. $A_0 = A_{|C(A)}$ a un inverse borné
4. $\|Ax\| \geq m\|x\|$, pour tout $x \in C(A)$ avec $m > 0$
5. $\gamma(A) > 0$
6. A^+ est borné
7. $R(A^*A)$ est fermé
8. $R(AA^*)$ est fermé
9. A a la propriété Hyers-Ulam stabilité
10. A_0 a la propriété Hyers-Ulam stabilité
11. $H = N(A^*) \oplus R(A)$
12. $R(AS_A)$ est fermé
13. $R(A^*S_{A^*})$ est fermé

Preuve. (1) $\Leftrightarrow$ (5)

Supposons que $R(A)$ est fermé alors l'opérateur $\widehat{A} : D(A)_{/N(A)^{\perp}} \to R(A)$ est injectif et on a $R(A) = R\left(\widehat{A}\right)$ est fermé. donc $\widehat{A}$ admet un inverse borné.

$$\begin{aligned}
0 &< \inf\left\{\frac{\| \widehat{A}x \|}{\| [x] \|};\ [x] \in D\left(\widehat{A}\right)\right\} \\
&= \inf\left\{\frac{\| Ax \|}{d(x, N(A))};\ x \in D(A),\ x \notin N(A)\right\} \\
&= \inf\left\{\frac{\| Ax \|}{d(x, N(A))};\ x \in C(A)\right\} \\
&= \frac{1}{\| \left(\widehat{A}\right)^{-1} \|} = \gamma(A)
\end{aligned}$$

Par conséquent $R(A)$ est fermé nous donne $\gamma(A) > 0$.

Inversement, si $\gamma(A) > 0$ alors $\| A^+ \| = \frac{1}{\gamma(A)}$ est bornée et par suite $R(A)$ est fermé.

(1) $\Leftrightarrow$ (7)

Si $R(A)$ n'est pas fermé alors $\gamma(A) = 0$. D'où $\gamma(A^*A) = 0$, donc $R(A^*A)$ n'est pas fermé.

Si $\gamma(A) > 0$ alors $R(A)$ est fermé, d'où A^+ est borné, de même pour $(A^+)^* A^+$ et comme $(A^*A)^+ = A^+ (A^*)^+$ alors :

$$\gamma(A^*A) = \frac{1}{\| (A^*A)^+ \|} = \frac{1}{\| A^+ \|^2} \gamma(A)^2 > 0$$

(1) $\Leftrightarrow$ (11)

On a :

$$H = N(A^*) \oplus N(A^*)^\perp$$

et comme $N(A^*)^\perp = \overline{R(A^*)}$

d'où

$$H = N(A^*) \oplus \overline{R(A^*)}$$

et comme $R(A)$ est fermé $\Leftrightarrow$ $R(A^*)$ est fermé on a

$$H = N(A^*) \oplus R(A)$$

(1) $\Leftrightarrow$ (12)

On a d'après la propriété (8) de la proposition 2.0.2 que

$$\|AS_Av\|^2 \geq \gamma^2(A) \|S_Av\|^2 = \gamma^2(A) \left[\|v\|^2 - \|AS_Av\|^2\right] \quad \text{pour tout} \quad v \in H$$

d'où,

$$\gamma(AS_A) \geq \frac{\gamma(A)}{\sqrt{1 + \gamma^2(A)}}$$

Cette dernière formule montre que $\gamma(AS_A) > 0$ si $\gamma(A) > 0$. C'est à dire si $R(A)$ est fermé alors $R(AS_A)$ est fermé.

Inversement si $R(AS_A)$ est fermé alors $\gamma(AS_A) > 0$.D'autre part, des propriété (8), (9) et (10) de la proposition 2.0.2, on obtient que $\gamma(AS_A) \leq \gamma(A)$, d'où $\gamma(A) > 0$ ce qui veut dire que $R(A)$ est fermé.

(12) $\Leftrightarrow$ (13)

L'équivalence découle directement du fait que $(AS_A)^* = A^*S_{A^*}$, en utilisant l'équivalence entre (1) et (2) pour AS_A.

(3) $\Leftrightarrow$ (4)

Soit l'opérateur $\widehat{A} : D(A)_{/N(A)^\perp} \to R(A)$

Soit

$$\widehat{H} = \left\{ Av \in H : v \in C(A) = D(A) \cap N(A)^{\perp} \right\}$$

Comme $\widehat{A}$ est injectif alors $\widehat{A}^{-1}$ est bien défini sur $\widehat{H}$, de plus

$$\begin{aligned}
\sup_{w \in \widehat{H}/\{0\}} \frac{\| \widehat{A}^{-1} w \|}{\| [w] \|} &= \sup \left\{ \frac{\| v \|}{\| Av \|} ; v \in C(A), v \neq 0 \right\} \\
&= \left[\inf \left\{ \frac{\| Av \|}{\| v \|} ; v \in C(A), v \neq 0 \right\} \right]^{-1}
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\widehat{A}^{-1}$ est borné si seulement si A est borné inférieurement,

c'est à dire (4).

(3) $\Leftrightarrow$ (9)

Supposons que A a la propriété de stabilité au sens de Hyers-Ulam, alors $\exists\ K > 0$

$$\forall u \in D(A), \exists\ u_0 \in N(A) : \| u - u_0 \| \lneq K \ \| Au \|$$

Soit $u \in C(A)$, un élément arbitraire, alors $\exists\ u_0 \in N(A)$:

$$\| u - u_0 \| \lneq K \ \| Au \|$$

Comme $u \in (N(A))^{\perp}$ et $u_0 \in N(A)$, on a :

$$\| u - u_0 \|^2 = \| u \|^2 + \ \| u_0 \|^2 = \| u \|^2$$

D'où

$$\| u \| \leq \| u - u_0 \| \lneq K \ \| Au \|, \ \forall u \in C(A)$$

Finalement

$$\| Au \| \geq K^{-1} \| u \|, \ \forall u \in C(A)$$

Inversement, supposons que A est borné inférieurement avec $\gamma(A) > 0$ comme borne inférieure, d'où

$$\| Au \| \geq \gamma(A) \| u \|, \ \forall u \in C(A)$$

Pour $u \in D(A)$, posons $u_0 = P_{N(A)}\ u$.

Comme $u - u_0 \in C(A)$, on a :

$$\| u - u_0 \| \leq \gamma(A)^{-1} \| A(u - u_0) \| = \gamma(A)^{-1} \| Au \|$$

Ce qui établit (9).

(1) $\Leftrightarrow$ (10)

Soit $(u_n)_n$ une suite dans $D(A)$ qui converge vers un élément $w \in H$, montrons que $w = Au_0$ avec $u_0 \in D(A)$.

Comme A_0^{-1} est borné, alors

$$\| v \| \leq \| A_0^{-1} \| \| Av \|, \forall v \in C(A)$$

On a $P_{N(T)^{\perp}} u_n \in D(A)$(car $N(A) \subset D(A)$), d'où

$$\| P_{N(T)^{\perp}} u_n - P_{N(T)^{\perp}} u_m \| \leq \| A_0^{-1} \| \| AP_{N(T)^{\perp}} (u_n - u_m) \| = \| A_0^{-1} \| \| Au_n - Au_m \|$$

Donc $\left(P_{N(T)^{\perp}} u_n\right)$ est une suite de cauchy dans $\left(N(T)^{\perp}\right)$ qui est fermé, d'où elle converge vers un élément $v_0 \in \left(N(T)^{\perp}\right)$.

Comme A est un opérateur fermé, on prond $v_0 \in D(A)$ et $w = Av_0$

Inversement

Soit

$$R(A_0) = \left\{ Av \in H : v \in C(A) = D(A) \cap N(T)^{\perp} \right\}$$

Comme $R(A_0)$ est fermé dans H et A_0 étant un opérateur fermé sur $R(A_0)$, alors d'aprés le théorème du graphe fermé A_0 est un opérateur borné. $\square$

Remarque 3.3.1 *La démonstration des équivalences ((1) $\Leftrightarrow$ (6)) et ((1) $\Leftrightarrow$ (9)) de le théorème 3.3.1 est trouvé dans le théorème 3.2.1.*

3.3.1 Exemple : Application aux opérateurs de multiplication

Soient (X, μ) un espace mesuré avec μ une mesure positive σ-finie sur X , α une fonction numérique mesurable sur X et A l'opérateur de multiplication par α,défini par :

$$A\varphi = \alpha\varphi$$

A est un opérateur non borné densement défini sur $L^2(X, \mu)$ de domaine

$$D(A) = \left\{\varphi \in L^2(X, \mu) \ ; \ \alpha\varphi \in L^2(X, \mu)\right\}$$

Nous rappelons que A est borné si et seulement si α est une fonctions essentiellement bornée sur X , dans ce cas

$$\| A \| = \| \alpha \|_{L^\infty(X)} = ess \sup_{x \in X} | \alpha(x) |$$

Soient

$$E = \{ x \in X \ ; \ \alpha(x) = 0 \}$$

et

$$L = \left\{ \varphi \in L^2(X, \mu) \ ; \varphi(x) = 0 \ , \forall \ x \in E \right\}$$

Alors, $R(A) = L$.

Evidement on a $R(A) \subset L$ et L est fermé dans $L^2(X, \mu)$ .Donc , $\overline{R(A)} \subset L$.

Inversement . On pose

$$\begin{cases} F = \ \{x \in X \ ; \ \ | \alpha(x) | \neq 0\} \\ F_n = \ \left\{x \in X \ ; \ \ | \alpha(x) | \geq \frac{1}{n}\right\}, \forall \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

et on défini $f = \frac{1}{\alpha}\chi$ et $f_n = \frac{1}{\alpha}\chi_n$, où χ et χ_n sont les fonctions caractéristiques des ensembles F et F_n respectivement. Alors f et f_n sont des fonctions mesurables sur X.

Soit $\varphi \in L$. Puisque $| \ f_n | \leq n$, on a alors $f_n\varphi \in L^2(X, \mu)$ et $\alpha \ f_n\varphi \in L^2(X, \mu)$, donc $f_n\varphi \in D(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$A(f_n\varphi) = \alpha \ f_n\varphi = \varphi\chi_n \in R(A), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Comme $F_n \subset F_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\cup_{n=1}^{\infty} F_n = F$.

En utilisant le théorème de la convergence dominée de lebesgue, on obtient que $\lim_{n\to\infty} \varphi\chi_n = \varphi$ dans $L^2(X, \mu)$, c'est à dire $\varphi \in \overline{R(A)}$.

On a directement les propriétés suivantes :

a) $R(A) = R(A^*) = R(A^*A) = \overline{R(A)} = L$ où A^* et $A^*A = AA^*$ sont respectivement les opérateurs de multiplication dans $L^2(X, \mu)$ par les fonctions $\overline{\alpha}$ et $| \ \alpha \ |^2$.

b) $\gamma(A) = \gamma(A^*) \geq \inf_{x \in X \setminus E} | \alpha(x) | = \delta > 0$.

c) $A^+\varphi = \frac{1}{\alpha}\varphi$ défini sur $L^2(X, \mu)$ qui est borné.

d) Puisque AR_A , $A^*R_{A^*}$, AS_A et $A^*S_{A^*}$ sont respectivement les opérateurs de multiplication sur $L^2(X,\mu)$ par les fonctions $\frac{\alpha}{1+|\ \alpha|^2}, \frac{\overline{\alpha}}{1+|\ \alpha|^2}, \frac{\alpha}{\sqrt{1+|\ \alpha|^2}}$ et $\frac{\overline{\alpha}}{\sqrt{1+|\ \alpha|^2}}$, alors :

$R(AR_A) = R(A^*R_{A^*}) = R(AS_A) = R(A^*S_{A^*}) = \overline{R(A)} = L$

e) Si δ est strictement positif alors A a la propriété de la stabilité au sens de Hyers-Ulam avec une constante de stabilité $K_A = \frac{1}{\delta}$.

L'opérateur correspondant $A_0 = A$ défini sur $D(A)$ muni du produit scalaire induit par la norme du graphe a aussi la propriété de stabilité au sens de la stabilité de Hyers-Ulam avec une constante de stabilité $K_{A_0} = \sqrt{1+\delta^{-2}}$.

f) pour vérifier toutes les autres propriétés du théorème 3.3.1, pour l'opérateur A, il suffit de montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $R(A)$ est fermé

2. $R(A) = L$

3. $\exists\ \delta > 0$ tel que $|\ \alpha| \geq \delta$ presque partout sur X/E.

Il est clair que l'égalité $\overline{R(A)} = L$ prouve l'équivalence entre 1 et 2.

Il reste donc à montrer l'équivalence entre 2) et 3) .

Supposons que la propriété 3 a lieu, alors $|\ f| \leq \frac{1}{\delta}$ presque partout sur X.

D'où pour $\varphi \in L$, on a $f\varphi \in L^2(X,\mu)$ et

$$A(\ f\varphi) = \varphi \in R(A)$$

Par conséquent $R(A) = L$.

Inversement, supposons que la propriété 2 a lieu, on défini l'opérateur $B = A^+$ est borné puisque $R(A) = L$ est fermé. Alors, f est essentiellement bornée dans X et $\|\ B\ \| = \|\ f\ \|_{L^\infty(X)}$ .Par conséquent on a la propriété 3 en prenant $\delta = \frac{1}{\|f\|_{L^\infty(X)}}$.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la fermeture de l'image des opérateurs non bornés. on donne des caractérisations pour qu'un opérateur A appartient à $C(H)$ a une image fermée.

Bibliographie

[1] **B.I.Adi and T.Greville**, Generalized inverses, second ed., CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Math´ematiques de la SMC, 15 (NewYork : Springer-Verlag) (2003) Theory and applications MR MR1987382 (2004b :15008)

[2] **H.O.Cordes., J.P.Labrousse**, The Invariance of the Index in the Metric Space of Closed Operators. J. Math. Mech., Vol.12, No 5 (1963), 693-720.

[3] **S.Goldberg**., Unbounded Linear Operators. Mc Graw Hill, New York, 1966.

[4] **C.W.Groetsch**., Inclusions for the Moore-Penrose Inverse With Applications to Computational Methods, Contributions in Numerical Mathematics. World Sci., River Edge, NJ, (1993), 203-211.

[5] **G.Hirasawa., T.Miura**, Hyers-Ulam Stability of a Closed Operator in a Hilbert Space. Bull. korean Math. Soc. 43(2006), 107-117.

[6] **Q.Huang., M.S.Moslehian**., Relationship Between The Hyers-Ulam Stability And The Moore–Penrose Inverse. 2010 Mathematics Subject Classification. 47A55, 46A32, 39B82, 47A05, 47A30.

[7] **T .Kato**, Perturbation theory for linear operators, second ed. (Berlin :Springer-Verlag) (1976) Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132, MR MR0407617 (53 #11389)

[8] **S.H.kulkarni., M.T.Nair., G.Ramesh**., Some Properties of Unbounded Operator With Closed Range. Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci),Vol. 4, November (2008), 613-625.

[9] **M.S.Moslehian., G.Sadeghi**., Perturbation of Closed Range Operators.Turk. J. Math. 32 (2008), 1-9.

[10] **M.Ould Ali**., Stabilité de la Fermeture de L'image Des Opérateurs Fermés.Es Sinia 2010.