Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire de fin d'étude

pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Analyse Harmonique et EDP

Thème

Stabilité de la fermeture de l'image d'un opérateur non borné

Présenté par

ELAAEIEIDA Wardiya

Soutenu le 26/05/2015

Les membres de jury

Mme	**OULDALI**	**Président**	**MAA**	**U. MOSTAGANEM**
Mr	**BELARBI**	**Examinateur**	**MAA**	**U. MOSTAGANEM**
Mr	**OULDALI**	**Encadreur**	**MCA**	**U. MOSTAGANEM.**

Année Universitaire 2014 -2015

Table des matières

Remerciments i

Résumé ii

Introduction 1

1 Rappels et notations 2

1.1 Espace de Hilbert 2

1.2 Opérateur borné et opérateur non borné 3

1.3 Projéction orthogonale 4

1.4 Opérateur fermé 4

2 Topologies sur les opérateurs fermés 6

2.1 Opérateurs associés à un opérateur fermé 6

2.2 Ecartement des sous-ensembles fermés 7

2.3 Ecartement des opérateurs fermés 13

2.4 Fermeture de l'image d'un opérateur non borné 17

3 Stabilité de la fermetur de l'image d'un opérateur fermé 19

3.1 Stabilité par passage à la limite 19

3.2 Stabilité de la somme 22

3.3 Stabilité du produit 23

Conclusion **24**

Bibliographie **26**

Remerciements

Je remercie tout d'abord mes enseignants, qui grâce à eux j'ai pu achever mon cycle universitaire durant ces années d'études. De ce fait je tiens à exprimer toute ma gratitude à mon encadreur pour avoir proposé et dirigé ce thème avec une grande disponibilité et j'ai une remerciment spéciale pour **M. BELHAMITI Omar**. Mes remerciments s'adressent également aux membres de jury qui ont accepté d'examiner cet humble travail. Sans oublier ma famille et mes amis pour tout leurs soutien et encouragement.

RÉSUMÉ

Si A est un opérateur non borné dans un espace de Hilbert il un important de savoire la fermeture de l'image de A. Si on veut obtenir la stabilité des solutions de l'equation $y = Ax$. Dans ce mémoire, on va donner certaines caractérisations de la fermuteure de l'image des opérateurs non bornés et on donne les conditions suffisantes pour les quelles la fermeture de l'image est invariant sous l'addition, la composition et les limites.

INTRODUCTION

Le sujet presenté dans ce memoire étudie la stabilité de la fermeteur des images des opérateurs fermés ($C(H)$) par rapport aux opérateurs usuelles : la somme, le produit et la limite au sens des normes d'une suite d'opérateurs à image fermé. On rappelle que la fermeture de l'image d'un opérateur est directement liée à la résolution de l'equation $y = Ax$ pour A un opérateur fermé de H dans H.

La manuscrit presenté est divisé en trois chapitres .

- Le premier chapitre est un rappel des différentes notions mathématiques dont on a besoin : espace de Hilbert, projection orthogonale, opérateur non borné, opérateur fermé .
- Le deuxième chapitre est consacré aux differente stricture topologique de l'espace des opérateurs fermés ($C(H)$).
- Le dernier chapitre nous donne les théorèmes obtenus pour la stabilité des images fermés par rapport à l'addition, le produit et le passage à la limite d'une suite d'opérateurs à images fermés.

Chapitre 1

Rappels et notations

1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1 *"**Espace pré-hilbertien**" Est un espace vectoriel E muni d'une application bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ notée $\langle x,y \rangle$ telle que :*

1. $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle} \forall x,\, y \in E,$
2. $\langle x,y \rangle = \langle x,y \rangle + \langle z,y \rangle \, \forall x,\, y \in E,$
3. $\langle \alpha x,y \rangle = \alpha \, \langle x,y \rangle \, \forall x,\, y \in E \; \forall \alpha \in \mathbb{C},$
4. $\langle x,y \rangle \geq 0 \qquad \forall x \in E,$
5. $\langle x,x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

Définition 1.1.2 *"**Espace de Hilbert**" Est un espace pré-hilbertien complet.*

Définition 1.1.3 *"**Suite de cauchy** " On dit que (x_n) est un suite de cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists N,\, \forall n,\, m > N,\, \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.1.4 *"**Suite converge**" On dit que (x_n) converge vers $x \in E$ si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N},\, n > n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.1.5 *"**Espace complet**" Espace vectoreil normé complet est un espace dans lequel toute suite de cauchy converge.*

1.2 Opérateur borné et opérateur non borné

Soient E et F deux espaces de Hilbert.

Définition 1.2.1 $\mathcal{L}(E,F)$ *L'ensemble des opérateurs linéaires de E dans F.*

Définition 1.2.2 *Un opérateur linéaire A défini de H dans H est dit borné si et seulement si :*

$$\exists c > 0,\ \|Ax\| \leq c\,\|x\|\,,\ \forall x \in H$$

On note par $B(H)$ l'ensemble des opérateurs bornés sur H et muni de la norme définie par :

$$\|A\| = \sup_{x\in H,\ x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

est un espace de Banach.

Définition 1.2.3 *Un operateur linéaire A non borné dans un espace de Hilbert H est défini par :*

a) *Son domaine d'aplication $D(A)$, est un sous -espace vectoriel de H ; (où $D(A)$ désigne le domaine de définition de A).*

b) *L'application $u \in D(A) \to Au \in H$. On supposera de plus que $D(A)$ est dense dans H $\{$tout élément de H est limite d'une suit d'éléments de $D(A)\}$.*

Définition 1.2.4 *Soient E et F deux espaces de Hilbert. et $A \in \mathcal{L}(E,F)$. l'eunique application linéaire $A^* \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tous $x \in E$, $y \in F$ on ait*

$$\langle A(x),y\rangle = \langle x,A^*(y)\rangle \tag{1.2.1}$$

est appelée adjoint de A.

1. Un opérateur A est dit auto-adjoint si $D(A) = D(A^*)$ et $Au = A^*u$, $\forall u \in D(A)$
2. Un opérateur A est dit normal si : $D(A) = D(A^*)$ et si $A^*Au = AA^*u$ pour tout $u \in D(A)$ avec $Au \in D(A)$.

Définition 1.2.5 *Soit A un opérateur linéaire défini sur $D(A) \subset H$ dans H où $D(A)$ désigne le domaine de définition de A.*

On appelle noyau de A l'ensemble $N(A) = \{u \in D(A) \ ; \ \ Au = 0\}$ et $R(A) = \{Au\,; \, u \in D(A)\}$ est image de A

Définition 1.2.6 *Soient X, Y, Z trois sous-espaces de H et A, B deux opérateurs défini par :*

$$\begin{aligned} A &: X \to Y, \\ B &: Y \to Z, \end{aligned}$$

on appelle produit de A par B l'opérateur

$$\begin{array}{rcl} AB: \ X & \to & Z \\ x & \mapsto & (AB)(x) = A[Bx] \end{array}$$

1.3 Projéction orthogonale

Définition 1.3.1 *Soit H un espace de Hilbert complexe, une projection orthogonal sur H est un opérateur $P \in B(H)$ telle que*

$$P = P^* = P^2$$

1.4 Opérateur fermé

Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T : D(T) \subset E \to F$ une application,

Définition 1.4.1 *Le graphe de T est le sous espace vectoriel de $E \times F$ noté $G(T)$ définie par :*

$$G(T) = \{(x,Tx)\,;\, x \in D(T)\}$$

Définition 1.4.2 *On dit que l'opérateur $T : D(T) \subset E \to F$ est fermé si sellement si $G(T)$ est fermé dans $E \times F$.*

Remarque 1.4.1 *Pour montrer qu'un opérateur soit fermé , on pocéde de la maniére suivant On considere une suite $(x_n) \in D(\mathbb{R})$ tel que :*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \\ \lim\limits_{n\to+\infty} Tx_n = y \end{cases}$$

Et on montre que $x \in D(T)$ et $y = Tx$.

Théorème 1.4.1 ***" graphe fermé"*** *Soit E et F deux espace de Banach et soit*

$$T : E \to F$$

Une application linéaire fermé alors T est continue.

Définition 1.4.3 *On appelle conorme d'un opérateur $A \in C(H)$ le nombre :*

$$\gamma(A) = \inf\{\|Ax\| \; ; x \in C(A), \; \|x\| = 1\} \tag{1.4.1}$$

Où $C(A) = D(A) \cap N(A)^{\perp}$.

Définition 1.4.4 *Soit $A \in C(H)$, alors il existe un unique opérateur $A^{+} \in C(H)$ défini sur H de domaine $D(A^{+}) = R(A) + R(A)^{\perp}$ telle que :*

1. $AA^{+}y = P_{\overline{R(A)}}y, \; \forall y \in D(A^{+})$
2. $AA^{+}x = P_{N(A)^{\perp}}x, \; \forall x \in D(A)$
3. $N(A^{+}) = R(A)^{\perp}$.

Cet opérateur est appelé l'inverse de Moore-Penrose de A.

Définition 1.4.5 *On dit qu'un opérateure $A \in C(H)$ posséde la propriété Hyers-Ulam Stabilité s'il existe une constante $K > 0$ telle qu'on ait :*

$$(\forall \varepsilon > 0, \forall x \in H, \; \|Ax\| \leq \varepsilon), \exists x_0 \in H \text{ telle que : } Ax_0 = 0 \text{ et } \|x - x_0\| \leq K\varepsilon. \tag{1.4.2}$$

On appelle K_A le minimum des constantes K réalisant la propriété de Hyers-Ulam Stabilité de A.

Chapitre 2

Topologies sur les opérateurs fermés

Dans ce chapitre, on présente l'espace $C(H)$ des opérateurs fermés à domaine dense sur un espace de Hilbert H. Nous définissons sur cet espace des structures topologiques qui nous seront trés utiles pour la suit. On associé aussi à tout opérateur $A \in C(H)$ des opérateurs bornés R_A et S_A qui caractériseront d'une maniére nouvelle la fermeture de l'image de A.

2.1 Opérateurs associés à un opérateur fermé

Dans cette partie on associerée à tout opérateur $A \in C(H)$, des opérateurs bornés R_A et S_A sur H. Ce lien on permette par la suit de caractériser d'une façon nouvelle la fermeture de l'image de A à l'aide de ces opérateurs bornés.
Soit $A \in C(H)$, alors l'opérateur $(I + A^*A)^{-1}$ est bijectif, auto-adjoint et positif de domaine dense dans H. On définit alors les opérateurs $R_A = (I + A^*A)^{-1}$ et $S_A = \sqrt{R_A}$.

Proposition 2.1.1 *[5]* $\forall\ A \in C(H)$, *on a :*

1. *Si* $u \in D(A)$, $R_{A^*}Au = AR_Au$.
2. $(AR_A)^* = A^*R_{A^*}$.
3. $\|R_Au\|^2 + \|AR_Au\|^2 = \langle u,R_Au\rangle$, $\forall u \in H$.
4. $\|AR_Au\|^2 + \|(I - R_A)u\|^2 = \|u\|^2 - \langle u,R_Au\rangle$, $\forall u \in H$.

   D'ou R_A *et* AR_A *sont bornés sur* H *et on a :* $\|R_A\| \leq 1$, $\|AR_A\| \leq \frac{1}{2}$.
5. $N(AR_A) = N(A)$.

6. *Si* $u \in D(A)$, $S_{A^*}Au = AS_Au$.
7. $(AS_A)^* = A^*S_{A^*}$.
8. $\|S_Au\|^2 + \|AS_Au\|^2 = \|u\|^2$, $\forall u \in H$.

   D'ou, S_A *et* AS_A *sont bornés dans* H *et on a :* $\|S_A\| \leq 1$, $\|AS_A\| \leq 1$.
9. $R(S_A) = D(A)$.
10. $N(AS_A) = N(A)$.

2.2 Ecartement des sous-ensembles fermés

Soint M et N deux sous-espaces fermés de H, on définit δ, g et ε comme suit :

$$\begin{aligned} \delta(M,N) &= \|(1-P_N)P_M\| \qquad (2.2.1) \\ g(M,N) &= \|P_M - P_N\| \\ \varepsilon(M,N) &= \delta(\widehat{M},N) \text{ Où } \widehat{M} = M \ominus (M \cap N^{\perp}) \end{aligned}$$

Proposition 2.2.1 *g est une métrique sur l'ensemble des sous-espaces fermés de H.*

Preuve :

1. $g(M,N) \geq 0$.
2. $g(M,N) = g(N,M)$.
3. $g(M,N) = 0 \Longleftrightarrow M = N$.

   Les proprietées sont évidentes, il suffit de montrer 4.
4. $g(M,N) \leq g(M,D) + g(D,N)$ /D est un sous espace de H.

$$\begin{aligned} g(M,N) &= \|P_M - P_N\| \\ &= \|P_M + P_D - P_D - P_N\| \\ &\leq \|P_M - P_D\| + \|P_D - P_N\| \\ &= g(M,D) + g(D,N). \end{aligned}$$

On énonce maintenant quelques propriétés caractérisant δ, g et ε

Proposition 2.2.2 *1.* $\delta(M,N) = \delta(N^\perp,M^\perp)$ *;*

2. $\delta(M,N) < 1 \Longrightarrow M \cap N^\perp = \{0\} \Longrightarrow \varepsilon(M,N) = \delta(M,N)$*.*

3. $g(M,N) = \max(\delta(M,N),\delta(N,M))$*.*

4. $\varepsilon(M,N) = \varepsilon(N,M) = \varepsilon(M^\perp,N^\perp)$*.*

5. $\varepsilon(M,N) \leq \delta(M,N) \leq g(M,N)$*.*

6. $M \cap N^\perp = M^\perp \cap N = \{0\} \Longrightarrow \varepsilon(M,N) = \delta(M,N) = \delta(N,M) = g(M,N)$*.*

7. $g(M,N) < 1 \Leftrightarrow M + N^\perp = M^\perp \cap N = \{0\}$*.*

8. $\varepsilon = \varepsilon(M,N) < 1 \Leftrightarrow M + N^\perp$ *est fermé dans* $H \Leftrightarrow M^\perp + N$ *est fermé dans* H*.*

9. $\delta(M,N) = 0 \Longleftrightarrow M \subset N$*.*

Preuve

1. On a :

$$\begin{aligned}\delta(M,N) &= \|(1-P_N)P_M\| = \|P_{N^\perp}(1-P_{M^\perp})\| \\ &= \|\,(1-P_{M^\perp})P_{N^\perp}\| = \delta(N^\perp,M^\perp)\end{aligned}$$

2. $(\Longrightarrow)$ Supposons que $M \cap N^\perp \neq \{0\}$, il existe alors : $u \neq 0\,;\ \| u \| = 1 : u \in M \cap N^\perp$
D'ou $P_N P_M u = 0$, il s'ensuit :

$$\| (1-P_N)P_M u \| = \| (P_M u - P_N P_M u \| = \| P_M u \| = \| u \|$$

Ce qui contredit l'hypothése $\delta(M,N) < 1$.

$(\Rightarrow)$ On a : $\varepsilon(M,N) = \delta(\widehat{M},N)$ où $\widehat{M} = M \ominus (M \cap N^\perp)$ donc d'aprés l'hypothése $\widehat{M} = M$ et

$$\varepsilon(M,N) = \|(1-P_N)P_{\widehat{M}} \| = \| (1-P_N)P_M \| = \delta(M,N)$$

3. On a :

$$\begin{aligned}\delta(M,N) &= \| (1-P_N)P_M \| = \| (P_M - P_N)P_M \| \\ &\leq \| P_M - P_N \| = g(M,N).\end{aligned}$$

De même $\delta(N,M) \leq g(M,N)$ et par conséquent :

$$\max(\delta(M,N),\delta(N,M)) \leq g(M,N).$$

Inversement, si $u \in H$, on a :

$$\begin{aligned}
\| \quad & (P_M - P_N)u \|^2 = \| (1-P_N)P_M u - P_N(1-P_M u) \|^2 \\
= \quad & \| (1-P_N)P_M u \|^2 + \| P_N(1-P_M)u\|^2 \\
\leq \quad & \max(\delta^2(M,N),\delta^2(N,M)) \left[\|P_M u \|^2 + \| (1-P_M)u\|^2\right] \\
\leq \quad & [\max(\delta(M,N),\delta(N,M))]^2 \| u \|^2
\end{aligned}$$

D'où le résultat voulu.

4. Il est clair que :

$$\delta(M,N) = \| P_M - P_N P_M \| \leq \|P_M - P_N \| = g(M,N).$$

De même pour $\delta(N,M) \leq g(M,N)$. D'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists\ u_n \in D(A)\,;\, \| u_n \| = 1$$

et :

$$\| (P_M - P_N)u_n \|^2 \geq g^2(M,N) - \frac{1}{n}$$

Or, $1 = \| u_n \|^2 = \| P_M u_n \|^2 + \| (1-P_N)u_n \|^2$et on a :

$$\| (P_M - P_N)u_n \|^2 = \| (P_M - P_N)P_M u_n \|^2 + \| P_N(1-P_M)u_n \|^2 + \| P_N(1-P_M)\|^2$$

Comme $g(N,M) = g(M^\perp,N^\perp)$ (propriété 3 et 1) alors,

$$\begin{aligned}
\| \quad & P_N(1-P_M)u_n \|^2 \leq \delta^2(M^\perp,N^\perp) \| (1-P_M)u_n \|^2 \\
\leq \quad & g^2(M^\perp,N^\perp) \| (1-P_M)u_n \|^2 \\
\leq \quad & \left[\| (1-P_N)P_M u_n \|^2 + \| P_N(1-P_M)u_n \|^2 + \frac{1}{n}\right] \| (1-P_M)u_n \|^2
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\left[\| P_N(1-P_M)u_n \|^2 + \| (1-P_N)P_M u_n \|^2\right] \quad & \| \quad P_M u_n \|^2 \\
\leq \quad & \| (1-P_N)P_M u_n \|^2 + \frac{1}{n} \| (1-P_M)u_n \|^2
\end{aligned}$$

d'ou

$$g^2(M,N) \parallel P_M u_n \parallel^2 \leq \parallel (1-P_N)P_M u_n \parallel^2 + \frac{1}{n}$$

En échangeant les rôles de M et N , on a aussi.

$$g^2(M,N) \parallel P_N u_n \parallel^2 \leq \parallel (1-P_M)P_N u_n \parallel^2 + \frac{1}{n}$$

Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, on ait $\parallel P_M u_n \parallel > \varepsilon$. Alors de l'inégalité précédente on déduit qu'il existe $w_n \in M$, $\parallel w_n \parallel = 1$;

$$g^2(M,N) - \frac{1}{n} \leq \parallel P_M w_n - P_N w_n \parallel^2$$

D'où

$$g^2(M,N) - \frac{1}{n} \leq \delta(M,N)$$

Ce qui implique que

$$g(M,N) \leq \delta(M,N)$$

5. Comme $\widehat{M} \subset M$ alors d'aprés la propriété 4) on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon(M,N) &= \delta(\widehat{M},N) = \parallel (1-P_N)P_{\widehat{M}} \parallel \\ &\leq \parallel (1-P_N)P_M \parallel = \delta(M,N) \leq g(M,N). \end{aligned}$$

6. Comme

$$M \cap N^\perp = M^\perp \cap N = \{0\},$$

Alors

$$\widehat{M} = M \text{ et } \widehat{N} = N,$$

On retrouve directement le résultat escompté en utilisant les propriétés (3) et (4)

7. On a :

$$g(M,N) = \max(\delta(M,N),\delta(N,M)) < 1 \Longrightarrow \delta(M,N) < 1$$

En utilisant la propriété (2), on a aussi $M \cap N^\perp = \{0\}$, de même pour $M^\perp \cap N = \{0\}$.

8. $a) \Rightarrow b)$ Soit $\{u_n\}$ une suite d'élément de $M + N^\perp$ convergente vers u. On peut écrire : $u_n = x_n + y_n + t_n$ avec :

$$x_n \in M \ominus (M \cap N^\perp),\ y_n \in N^\perp \ominus (M \cap N^\perp),\ t_n \in M \cap N^\perp.$$

On remarquera que x_n, y_n, et t_n sont déterminés de maniére unique .

On a :

$$\begin{aligned} \| u_n \|^2 &= \| x_n + y_n \|^2 + \| t_n \|^2 \\ &= \| x_n \|^2 + \| y_n \|^2 + \| t_n \|^2 + 2|\operatorname{Re}\langle x_n, y_n\rangle| \end{aligned}$$

D'ou

$$\| x_n \|^2 + \| y_n \|^2 + \| t_n \|^2 \leq \| u_n \|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x_n, y_n\rangle$$

Donc

$$\begin{aligned} \|x_n \|^2 + \|y_n\|^2 + \| t_n\|^2 & \\ &\leq \| u_n \|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x_n, y_n\rangle \\ &= \| u_n\|^2 + 2|\langle P_M x_n, (1-P_N) y_n\rangle| \\ &\leq \| u_n \|^2 + 2\varepsilon \|x_n\| \|y_n \| . \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \| t_n \|^2 &\leq \| u_n \|^2 \\ \| x_n \|^2 &\leq (1-\varepsilon^2)^{-1} \| u_n \|^2 \end{aligned}$$

Comme$\{u_n\}$ est une suit de Cauchy dans H, on en déduit que $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ et $\{t_n\}$ le sont aussi et on a :

$$\begin{aligned} x_n &\to x \in M \ominus (M \cap N^{\perp}) \\ y_n &\to y \in N^{\perp} \ominus (M \cap N^{\perp}) \\ t_n &\to t \in M \cap N^{\perp} \end{aligned}$$

D'où : $u_n \to u = x + y + t \in M + N^{\perp}$, ce qui montre bine que $M + N^{\perp}$ est fermé .

$b) \Rightarrow c)$ Soit $u \in M + N^{\perp}$. comme on peut écrire u sous la forme $u = x + y + t$, alors on pose $x = Ru$, $y = Su$, et $t = Tu$. Si $z \in H$, $z = w + u$, $w \in M^{\perp} + N$. On pose alors, $w = Qz$, $x = Rz$, $y = Sz$ et $t = Tz$, Où Q et T sont évidemment des projections orthogonales et on remarque aussi que $R^2 = R$, $S^2 = S$. Par définition, on a bien $I - Q - T = R + S$. Il reste donc seulement à montrer (en utilisant le théoréme du graphe fermé) que R et S sont continus. Montrons le pour R par exemple. Soit

$\{z_n\}$ une suit dans H telle que $z_n \to z$ et $Rz_n \to x$. Alors, $z_n = w_n + u_n$, $w_n \to w$, $u_n \to u \in M + N^{\perp}$ est fermé et si $u_n = x_n + y_n + t_n$, $t_n \to t$, $x_n = Rz_n \to x$. Donc $y_n \to y \in N^{\perp} \ominus (N^{\perp} \cap M)$. Finalement $z = w + x + y + t$ et $Rz = x$.

$c) \Rightarrow a)$ Si $\widetilde{N} = N^{\perp} \ominus (N^{\perp} \cap M) = \{0\}$, on voit que $\varepsilon(M,N) = 0$.Si $\widetilde{N} \neq 0$, posons $R_N = R_{\widetilde{N}}$. Evidemment $\| R_N \| \leq \| R\|$ et une projection de $\widetilde{N}$ sur $\widetilde{M} = M \ominus (M \cap N^{\perp})$. En effet $u \in \widetilde{N}$, $R_N u = 0 \Longrightarrow Ru = 0$, $Tu = 0$, $Qu = 0$. Donc $u = Su \in N^{\perp} \Rightarrow u \in N^{\perp} \cap N$ d'uo $u = 0$, ce qui montre que R_N est injectif et que $\| R_N \| \neq 0$. Soit maintenant $v \in \widetilde{M}$. Alors $v = v_1 + v_2$, avec $v_1 = P_{\widetilde{N}}$ et $v_2 (I - P_{\widetilde{N}})v$ et comme $\widetilde{N}^{\perp} = N^{\perp} + (N + M^{\perp})$ et $v = R_v = R_{V_1} + R_{v_2}$, on a : $v = R_N v_1$ car $R_{v_2} = 0$ puisque $(S + T + Q)v_2 = v_2$ ce qui montre que R_N est surjectif et par conséquent bijectif. Or :

$$\| v\|^2 = \| v_1 \|^2 + \| v_2 \|^2 = \| R_N^{-1} v \|^2 + \| (I - P_{\widetilde{N}})v \|^2$$

D'ou

$$\| (I - P_N) P_{\widetilde{M}} v \|^2 = \| v \|^2 - \| R_N^{-1} v \|^2$$

Car

$$(I - P_{\widetilde{N}}) P_{\widetilde{M}} v = (I - P_N) P_{\widetilde{M}} v$$

Et comme

$$\| v \|^2 = \| R_N R_N^{-1} v \|^2 \leq \| R_N \|^2 \| R_N^{-1} v \|^2$$

On trouve

$$\| (I - P_N) P_{\widetilde{M}} v \|^2 \leq \|v \|^2 - \frac{\| v \|^2}{\| R_N \|^2}$$

D'où :

$$\varepsilon^2 \leq 1 - \frac{1}{\| R_N\|} < 1$$

Ce qui établit a).

9. Soit $x \in M$ et si $\delta(M, N) = 0$:

$$\begin{aligned}
\delta(M,N) &= \|(I - P_N)P_M\| = 0 \\
&\Rightarrow (I - P_N(x))P_M(x) = 0 \\
&\Rightarrow P_M(x) - P_N P_M(x) = 0 \\
&\Rightarrow x = P_N(x) \\
&\Rightarrow x \in N \\
&\Rightarrow M \subset N.
\end{aligned}$$

2.3 Ecartement des opérateurs fermés

Dans cette section nous présentons une extension de la définition de la métrique g sur $C(H)$ et nous y définissons aussi d'autres équivalences utiles dans la pratique.

Définition 2.3.1 *Soient A, $B \in C(H)$, on pose :*

$$g(A,B) = \|P_{G(A)} - P_{G(B)}\| \tag{2.3.1}$$

Où $G(A)$ et $G(B)$ sont respectivement le graphe de A et B.

$$p(A,B) = \{\|R_A - R_B\|^2 + \|R_{A^*} - R_{B^*}\|^2 + \|AR_A - BR_B\|^2 + \|A^*R_{A^*} - B^*R_{B^*}\|^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.3.2}$$

$$d(A,B) = \|F_A - F_B\| \tag{2.3.3}$$

Où :

$$F_B = \begin{pmatrix} R_B - P_{N(B)} & B^*R_{B^*} \\ BR_B & 1 - R_{B^*} \end{pmatrix} \tag{2.3.4}$$

Proposition 2.3.1 *Pour tout opérateur $A \in C(H)$, on a :*

$$P_{G(A)} = \begin{pmatrix} R_A & A^*R_{A^*} \\ AR_A & 1 - R_{A^*} \end{pmatrix} \tag{2.3.5}$$

Preuve : Soit $v \in D(A^*)$. Posons $\widehat{u} = (u,v) \in H \oplus H$, alors :

$$P_{G(A)}\widehat{u} \in G(A) \Rightarrow P_{G(A)}\widehat{u} = (x,Ax),\ x \in D(A)$$

Comme $(G(A))^{\perp} = V(G(A^*))$ avec V l'isométrie définie par :

$$\begin{array}{rccc} V: & H \oplus H & \rightarrow & H \oplus H \\ & (u,v) & \mapsto & (-v,u) \end{array}$$

Alors tout $\widehat{u} \in H \oplus H = G(A) \oplus V(G(A^*))$ se décompose d'une manique comme suit :

$$\widehat{u} \in (u,v) = (x,Ax) + (-A^*y,y)\,;\, y \in D(A^*),\, x \in D(A)$$

C'est à dire x et y sont solutions du systéme :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x - A^*y \\ v = Ax + y \end{array} \right.$$

On prend $x = R_A u + R_A A^* v = R_A u + A^* R_{A^*} v$

Vu que $AA^* R_{A^*} v = (I - R_{A^*})v$, alors

$$\begin{aligned} P_{G(A)}\widehat{u} &= (x,\, Ax) = (R_A u + A^* R_{A^*} v,\, AR_A u + AA^* R_{A^*} v) \\ &= \begin{pmatrix} R_A & A^* R_{A^*} \\ AR_A & 1 - R_{A^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\ \forall v \in D(A^*) \end{aligned}$$

On a donc le résultat pour tout $v \in D(A^*)$ et en passant à la fermeture on obtient le résultat voulu.

Proposition 2.3.2 *g, p et d sont des métrique équivalentes sur $C(H)$. En effet :*

$$g(A,B) \leq \sqrt{2}p(A,B) \leq 2\sqrt{2}g(A,B) \tag{2.3.6}$$

$$g(A,B) \leq d(A,B) \leq 2g(A,B) \tag{2.3.7}$$

De plus,

$$g(A,B) = g(A^*,B^*) \tag{2.3.8}$$

Preuve : Comme $G(A) = G(B) \Leftrightarrow A = B$ et d'aprés la remarque 2.2.1, en prenant

$$M = G(A),\ N = G(B),$$

On déduit que g est une métrique sur $C(H)$.

Pour montrer que p et d sont des métriques, nous remarquons que :

$$R_{A^*} = R_{B^*} \Rightarrow S_{A^*} = S_{B^*} \Rightarrow D(A^*) = D(B^*)$$

Et

$$A^*R_{A^*} = B^*R_{B^*} \Rightarrow A^*S_{A^*} = B^*S_{B^*} \Rightarrow A^* = B^*,\ \forall v \in D(A^*)$$

D'ou

$$\begin{aligned} p(A,B) &= 0 \Longleftrightarrow A = B \\ d(A,B) &= 0 \Longleftrightarrow A = B \end{aligned}$$

Pour les inégalités triangulaires, elles découlent des relations (2.3.6) et (2.3.7). Démontrons donc la relation (2.3.6) , on a :

$$\begin{aligned} [g(A,B)]^2 &= \|P_{G(A)} - P_{G(B)}\|^2 \\ &= \left\| \begin{matrix} R_A - R_B & A^*R_{A^*} - B^*R_{B^*} \\ AR_A - BR_B & R_{B^*} - R_{A^*} \end{matrix} \right\|^2 \\ &\leq 2\left[\|R_A - R_B\|^2 + \|R_{A^*} - R_{B^*}\|^2 + \|A^*R_{A^*} - B^*R_{B^*}\|^2 + \|AR_A - BR_B\|^2\right] \\ &\leq 2\,[p(A,B)]^2 \end{aligned}$$

D'ou

$$g(A,B) \leq \sqrt{2}p(A,B)$$

Comme $(AR_A)^* = A^*R_{A^*}$, alors :

$$\|A^*R_{A^*} - B^*R_{B^*}\| = \|AR_A - BR_B\|$$

D'ou pour $\widehat{u} = (u,0)$ et $\widehat{v} = (v,0)$, on a :

$$\begin{aligned} [g(A,B)]^2\,\|v\|^2 &\geq \left\|(P_{G(A)} - P_{G(B)}\widehat{v}\right\|^2 \\ &= \|(A^*R_{A^*} - B^*R_{B^*})v\|^2 + \|(R_{A^*} - R_{B^*})v\|^2 \end{aligned}$$

$$[g(A,B)]^2\,\|u\|^2 \geq \left\|(P_{G(A)} - P_{G(B)})\widehat{u}\right\|^2 = \|(R_A - R_B)u\|^2 + \|(AR_A - BR_B)u\|^2$$

Ce qui inplique que $p(A,B) \leq 2g(A,B)$.

Finalement

$$g(A,B) \leq \sqrt{2}p(A,B) \leq 2\sqrt{2}g(A,B)$$

La relation (2.3.7) est démontrée de la méme maniére.

D'autre part : Pour la relation (2.3.8) , on a

$$P_{G(A^*)} - P_{G(B^*)} = \begin{pmatrix} R_{A^*} - R_{B^*} & AR_A - BR_B \\ A^*R_{A^*} & R_B - RA \end{pmatrix}$$

D'où $\left\|P_{G(A)} - P_{G(B)}\right\| = \left\|P_{G(A^*)} - P_{G(B^*)}\right\| \Rightarrow g(A,B) = g(A^*,B^*)$ Nous établissons maintenant des relations fondamentales entre la métrique g définie sur les sous-espaces fermés et son extension sur $C(H)$.

Proposition 2.3.3 *$\forall A,\ B \in C(H)$, tel que $R(A)$ est fermé on a :*

$$\delta(N(B),N(A)) \leq (1+\gamma^{-2}(A))^{\frac{1}{2}}\delta(B,A) \tag{2.3.9}$$

preuve : Soit $\delta(N(B),N(A)) = \theta$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $v = v(\varepsilon) \in N(B)$ telle que $\|v\| = 1$ et

$$\left\|(1 - P_{N(A)})v\right\| \geq \theta - \varepsilon.$$

Soit maintenant $v_1 = P_{N(A)}v$, $v_2 = v - v_1$. Alors $R_Av_1 = v_1$, $AR_Av_1 = 0$ et $R_Av_2 \in N(A)^{\perp}$. De la propriété 3) proposition(2.1.1), on a :

$$\begin{aligned} (1+\gamma^2(A)) \left\|R_Av_2\right\|^2 &\leq \left\|R_Av_2\right\|^2 + \left\|AR_Av_2\right\|^2 \\ &= \langle v_2,R_Av_2\rangle \leq \|v_2\| \, \|R_Av_2\| \end{aligned}$$

D'ou,

$$\|R_Av_2\| \leq \frac{1}{1+\gamma^2(A)} \|v_2\|$$

utilisons encore une fois la propriété (3) ,on obtinet :

$$\begin{aligned} (\delta(B,A))^2 &\geq \left\|(1 - P_{G(B)}(v,0)\right\|^2 \\ &\geq \left\|(v,0) - (v_1 + R_Av_2,AR_Av_2)\right\|^2 \\ &\geq \left\|v_2 - R_Av_2\right\|^2 + \left\|AR_Av_2\right\|^2 \\ &\geq \left\|v_2\right\|^2 - \langle v_2,R_Av_2\rangle \\ &\geq \left\|v_2\right\|^2 - \frac{1}{1+\gamma^2(A)} \left\|v_2\right\|^2 = \frac{\gamma^2(A)}{1+\gamma^2(A)} \left\|v_2\right\|^2 \end{aligned}$$

D'ou , $\delta(B,A) \geq (1+\gamma^{-2}(A))^{-\frac{1}{2}}(\theta-\varepsilon)$ et puisque ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la proposition est démontrée.

Proposition 2.3.4 *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* A, $B \in C(H)$ *telles que* $\min(\gamma(A),\gamma(B)) > \varepsilon$, *alors,*

$$g(N(A),N(B)) \leq \left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} g(A,B) \tag{2.3.10}$$

$$g(N(A^*),N(B^*)) \leq \left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} g(A,B) \tag{2.3.11}$$

Preuve : En vertu de la propsition 2.3.3, on a :

$$\delta(N(A),N(B)) \leq \left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} \delta(A,B)$$

Et

$$\delta(N(A^*),N(B^*)) \leq \left(1+\frac{1}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}} \delta(A^*,B^*)$$

De la propriété 3) de la proposition 2.2.2 et de l'équation (2.3.8) ,on déduit le résultat.

2.4 Fermeture de l'image d'un opérateur non borné

On présente dans ce section tout les caractérisations qualitative de l'image d'un opérateure non borné $A \in C(H)$. En fait on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que $R(A)$ soit fermé.

Théorème 2.4.1 $\forall A \in C(H)$, *alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $R(A)$ *est fermé.*
2. $R(A^*)$ *est fermé.*
3. $A_0 = A_{\backslash C(A)}$ *a un inverse borné.*
4. $R(A)$ *est fermé*$\Leftrightarrow \|Ax\| \geq m\,\|x\|$, *pour tout* $x \in C(A)$ *avec* $m > 0$.
5. $\gamma(A) > 0$.
6. A^+ *est borné.*
7. $\gamma(A) = \gamma(A^*)$.
8. $R(A^*A)$ *est fermé.*
9. $R(AA^*)$ *est fermé.*
10. $R(AR_A)$ *est fermé.*

11. $R(A^* R_{A^*})$ *est fermé.*

12. A *a la propriété Hyers-Ulam stabilité.*

13. A_0 *a la propriété Hyers-Ulam stabilité.*

14. $H = N(A^*) \oplus R(A)$.

15. $R(AS_A)$ *est fermé.*

16. $R(A^* S_{A^*})$ *est fermé.*

Chapitre 3

Stabilité de la fermetur de l'image d'un opérateur fermé

Ce chapitre est consacré à létude de la stabilité de la fermeture de l'image d'un opérateur $A \in C(H)$ par les opérations algébriques. Nous remarquons qu'en vertu des propriétés (1) et (2) du théoréme 2.4.1 que le passage à l'adjoint conserve la propriété de la fermeture, de même d'une façon naturelle pour le produit par un scalaire, c'est à dire $R(\lambda A)$ est fermé si et seulement si $R(A)$ est fermé .

Etudions en premier lieu dans quel cas a-t-on stabilité de la fermeture de l'image par passage à la limite. Cette stabilité sera ensuite étudiée pour les opérations d'addition et de composition des opérateurs non-bornés.

3.1 Stabilité par passage à la limite

On établit dans cette partie que la limite au sens de la métrique du gap g d'une suite d'opérateurs $(A_n) \in C(H)$ à images fermées qui converge vers $A \in C(H)$ nous donne un opérateur à image fermée dans H.

Théorème 3.1.1 *Soit $(A_n) \in C(H)$ une suite d'opérateurs qui converge vers un opérateur A de $C(H)$ au sens de la métrique g et soit $\varepsilon > 0$ independant de n, telle que $\gamma(A_n) > \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\gamma(A) \geq \varepsilon$ (ce qui équivaut à $R(A)$ fermé dans H).*

Pour celà, Il suffit de trouver une topologie sur $C(H)$ telle que la restriction de la fonction $\gamma : C(H) \to \mathbb{R}$ définie par $\gamma : A \to \gamma(A)$ à l'espace $C_\varepsilon(H) = \{B \in C(H) : \gamma(B) \geq \varepsilon\}$ soit continue.

En effet, pour $B \in C(H)$ on pose :

$$F_B = \begin{pmatrix} R_B - P_{N(B)} & B^* R_{B^*} \\ BR_B & 1 - R_{B^*} \end{pmatrix} \tag{3.1.1}$$

En vertu de la proposition 2.1.1, il apparait facilement que F_B est un projecteur orthogonal sur $B(H \oplus H)$ et que $d(B_1,B_2) = \|F_{B_1} - F_{B_2}\|$ est une métrique sur $C(H)$ vérifiant pour B_1, $B_2 \in C(H)$:

$$d(B_1,B_2) \leq g(B_1,B_2) + g(N(B_1),N(B_2)) \tag{3.1.2}$$

$$g(B_1,B_2) \leq d(B_1,B_2) + g(N(B_1),N(B_2)) \tag{3.1.3}$$

Lemme 3.1.1 *Soient B_1, $B_2 \in C(H)$, alors :*

$$|\gamma(B_1) - \gamma(B_2)| \leq \sqrt{(1+\gamma^2(B_1))(1+\gamma^2(B_2))}d(B_1,B_2) \tag{3.1.4}$$

Comme d est symétrique, il est suffitsant de montrer que :

$$\gamma(B_2) \leq \sqrt{(1+\gamma^2(B_1))(1+\gamma^2(B_2))}d(B_1,B_2) + \gamma(B_1)$$

Preuve : Soit $u \in C(B_1) = D(B_1) \cap N(B_1)^{\perp}$, alors $F_{B_1}(u,B_1u) = (u,B_1u)$.

En posant $(v,B_2v) = F_{B_2}(u,B_1u)$. Donc, $v \in C(B_2) = D(B_2) \cap N(B_2)^{\perp}$. On suppse que $\gamma(B_2) > 0$ (pour le cas où $\gamma(B_2) = 0$ l'inégalité est évidente), alors :

$$\begin{aligned} \gamma(B_2)\|u\| &\leq \gamma(B_2)\|u-v\| + \gamma(B_2)\|v\| \qquad (3.1.5) \\ &\leq \gamma(B_2)\|u-v\| + \|B_1u - B_2v\| + \|B_1u\| \\ &\leq \sqrt{(1+\gamma^2(B_2))}\sqrt{\|u-v\|^2 + \|B_1u - B_2v\|^2} + \|B_1u\| \\ &= \sqrt{(1+\gamma^2(B_2))}\sqrt{F_{B_1}(u,B_1u) - F_{B_2}(u,B_1u)} + \|B_1u\| \\ &\leq d(B_1,B_2)\sqrt{(1+\gamma^2(B_2))}\sqrt{\|u\|^2 + \|B_1u\|^2} + \|B_1u\| \end{aligned}$$

Comme l'estimation est vraie pour tout $u \in C(B_1)$, on obtient le résultat volou.

Lemme 3.1.2 *Soit $(A_n)_n \in C(H)$ une suit convergente vers un élément A de $C(H)$ au sens de la métrique g, et $\varepsilon > 0$ (independant de n), telle que $\gamma(A_n) > \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite $(N(A_n))_n$ converge vers $N(A)$ au sens de la métréque g . Précisement on a :*

$$g(N(A_n),N(A)) \leq (1+\frac{1}{\varepsilon^2})^{\frac{1}{2}} g(A_n,A) \tag{3.1.6}$$

Preuve : De la Proposition 2.3.4 , on a :

$$g(N(A_n),N(A_m) \leq (1+\frac{1}{\varepsilon^2})^{\frac{1}{2}} g(A_n,A_m) \tag{3.1.7}$$

Il s'ensuit que la suite $(N(A_n))_n$ est une suit de Cauchy dans l'espace métrique de tous les sou-espaces fermés de H par rapport à la métrique induite par g. On déduit que la suit $(N(A_n))_n$ converge vers un sous-espace fermé Λ de H. Prenons $m \to +\infty$ dans la fermule 3.1.7, on trouve :

$$g(N(A_n),\Lambda) \leq (1+\frac{1}{\varepsilon^2})^{\frac{1}{2}} g(A_n,A)$$

Vérifions que $\Lambda = N(A)$. On remarque que :

$$\delta(N(A),\Lambda) \leq \delta(N(A),N(A_n)) + g(N(A_n),\Lambda)$$

Puisque les deux membres $\delta(N(A),N(A_n))$ et $g(N(A_n),\Lambda)$ tendend vers zero quand n tend vers $+\infty$, on conclut que $\delta(N(A),\Lambda) = 0$ ou bien $N(A) \subseteq \Lambda$.

Supposons maintenant qu'il existe un vecteur normalisé $u \in \Lambda$ tel que u soit orthogonal à $N(A)$. Alors

$$\begin{aligned} \|AR_A u\| &\leq \left\|AR_A(1-P_{N(A_n)}u\right\| + \left\|(AR_A - A_n R_{A_n})P_{N(A_n)}u\right\| \\ &\leq \|AR_A\|\,\delta(N(A_n),\Lambda) + p(A,A_n) \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Comme les termes de droite de la formule (3.1.8) tendent vers zero quand n tend vers $+\infty$, on déduit que $AR_A u = 0$ et alors $u \in N(AR_A) = N(A)$ (voir la propriéte 5 de la proposition 2.1.1), d'ou $u = 0$ d'ou la contradiction. Maintenanant on sait que u existe et on a $\delta(\Lambda,N(A)) < 1$ et d'aprés la propriété (2) de la proposition 2.2.2 , $\delta(\Lambda,N(A)) = 0$ c'est à dire. $\Lambda = N(A)$.

Maintenant demontrir le théoréme 3.1.1 :

Preuve : (du théoréme 3.1.1)

Des lemmes 3.1.1 et 3.1.2 et de l'estimation 3.1.5 , on déduit que la fonction γ est continue sur $C_\varepsilon(H)$ muni de la topoloqie induite par la métrique d. Alors $g(N(A_n),N(A)) \to 0$ et puisque $g(A_n,A) \to 0$, on déduit de la formule 3.1.2 que $d(A_n,A) \to 0$. Finallement, on a $\varepsilon \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \gamma(A_n) \leq \gamma(A)$.

3.2 Stabilité de la somme

Nous donnons dans cette partie des condition suffisantes pour la fermeture de l'image de la somme de deux opérateurs fermées. Nous remaquons que le théoréme 3.2.4 généralise le résultat obtenu par Moslehiane et Sadeghi [4]pour le cas où B est un opérateur borné et $R(A+B) = R(A) + R(B)$.

Théorème 3.2.1 *Soient $A,B \in C(H)$ avec $R(A)$ et $R(B)$ fermés dans H. Si $R(A)+R(B) = R(A+B)$ et*

$$\varepsilon\left(R(A),R(B)^{\perp}\right) < 1 \text{ ou } \varepsilon\left(R(A)^{\perp},R(B)\right) < 1 \tag{3.2.1}$$

Alors $A+B$ a une image fermée dans H.

Preuve : Le théoréme est une conséquence directe de 8) de la proposition 2.2.2.

On a :

$$\begin{aligned} \varepsilon\left(R(A),R(B)^{\perp}\right) &< 1 \Rightarrow \left(R(A) + (R(B)^{\perp})^{\perp}\right) \text{ est fermé} \\ \text{et comme } R(A)+R(B) &= R(A+B) \text{ alors } R(A+B) \text{ est fermé.} \end{aligned}$$

On sait qu'en général la condition $R(A) + R(B) = R(A + B)$ n'est pas réalisée, donc on énnonce des résultats dans le cas fréquent $R(A) + R(B) \subsetneq R(A+B)$,

Avant celà, nous rappellons un théoréme de Fillmore-Williams pour le cas des opérateurs positifs.

Théorème 3.2.2 *[2] Soient A et B deux opérateurs positifs sur H à images fermées $R(A)$ et $R(B)$ dans H. Alors $A+B$ a une image fermée si et seulement si $R(A)+R(B)$ est fermé dans H.*

Donnons maintenant un théoréme plus général :

Théorème 3.2.3 *Soint A, $B \in C(H)$, B a une image fermée et $N(B) = \{0\}$. Alors si*

$$p(A,B) < \frac{\gamma(B)}{\sqrt{(1+\gamma^2(A))(1+\gamma^2(B))}} \tag{3.2.2}$$

$R(A+B)$ est fermée dans H.

Preuve : Le théoréme découle directement du lemme suivant

Lemme 3.2.1 *Soient A, $B \in C(H)$ telle que B a image fermée et $N(B) = \{0\}$. Alors si*

$$p(A,B) < \frac{\gamma(B)}{\sqrt{(1+\gamma^2(B)}} \tag{3.2.3}$$

On a :

$$|\gamma(B) - \gamma(A)| \leq \sqrt{(1+\gamma^2(A))(1+\gamma^2(B))}p(A,B) \tag{3.2.4}$$

Théorème 3.2.4 *Soit $A \in C(H)$ a image fermée dans H et $B \in B(H)$.*

1. *Si$\|B\| < \gamma(A)$ et $C(A+B) \subseteq C(A) \cap C(B)$ alors $R(A+B)$ est fermée dans H.*
2. *Si$\|A^+B\| < 1$ et $R(B) \subseteq R(A)$ alors $R(A+B)$ est fermée dans H.*

Preuve

1. Puisque $R(A)$ est fermée dans H, on a :

$$\|Ax\| \geq \gamma(A)\|x\|, \forall x \in C(A)$$

En utilisant le fait que $C(A+B) \subseteq c(A) \cap C(B)$ et que B est un opérateur borné, on obtient pour tout $x \in C(A+B)$,

$$\begin{aligned} \|(A+B)x\| &\geq \|Ax\| - \|Bx\| \\ &\geq (\gamma(A) - \|B\|)\|x\| \end{aligned}$$

Comme $(\gamma(A) - \|B\|) > 0$, on déduit alors que $\gamma(A+B) > 0$, ce qui implique que $R(A+B)$ est fermée dans H et celà d'apré le théoréme 2.4.1

2. Puisque $AA^+ = P_{R(A)}$ est le projecteur orthogonal sur $R(A)$, on a $AA^+B = P_{R(A)}\ B = B$ si et seulement si $R(B) \subseteq R(A)$: Il s'ensuit que $A+B = A+AA^+B = A(I+A^+B)$, d'ou $R(A+B) \subseteq R(A)$. Comme $\|A^+B\| < 1$ alors $(I+A^+B)$ est inversible d'inverse dans H. Ce qui montre que $R(A+B) = R(A)$.

3.3 Stabilité du produit

Dans cette section, nous donnons une condition suffisante pour que le produit de deux opérateurs de $C(H)$ à images fermées soit un opérateur fermées à image fermé. En effet, on a :

Théorème 3.3.1 *Soient A,$B \in C(H)$ telle que $R(A)$ et $R(B)$ sont fermées dans H ; $N(AB) = N(B)$, $N(BA) = N(A)$, $R(B) \subset N(A)^{\perp}$et $R(A) \subset N(B)^{\perp}$. Alors si, $g(A,B^{*}) < 1$, $AB \in C(H)$, $BA \in C(H)$ et $R(AB)$, $R(BA)$ sont fermées dans H.*

Preuve : Dans [3] les auteurs ont prouvé que si $g(A,B^{*}) < 1$, alors AB et BA sont des opérateurs fermés densement définis sur H.
Comme $R(A)$ et $R(B)$ sont des sous-espaces fermée de H et en vertu du théoréme 2.4.1, alors on a $\delta(A) > 0$, $\delta(B) > 0$ et

$$\begin{aligned} \delta(A)\,\|x\| &\leq \|Ax\| \\ \delta(B)\,\|x\| &\leq \|Bx\| \end{aligned}$$

Puisque $N(AB) = N(B)$ et $R(B) \subset N(A)^{\perp}$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \delta(AB) &= \inf_{x \in C(AB)} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \\ &= \inf_{x \in D(AB) \cap N(B)^{\perp}} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \\ &\geq \delta(A) \inf_{x \in D(AB) \cap N(B)^{\perp}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ &\geq \delta(A) \inf_{x \in C(B)} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \delta(A)\delta(B) > 0 \end{aligned}$$

On déduit que $R(AB)$ est fermée dans H.
En utilisant les hypothéses $N(BA) = N(A)$ et $R(B) \subset N(A)^{\perp}$, on obtient de la même maniére que $\delta(BA) \geq \delta(B)\delta(A) > 0$ (**i.e**)

$$\begin{aligned} \delta(BA) &= \inf_{x \in C(BA)} \frac{\|BAx\|}{\|x\|} \\ &= \inf_{x \in D(BA) \cap N(A)^{\perp}} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \\ &\geq \delta(B) \inf_{x \in D(BA) \cap N(A)^{\perp}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \\ &\geq \delta(B) \inf_{x \in C(A)} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \delta(A)\delta(B) > 0 \end{aligned}$$

Donc $R(BA)$ est fermée dans H.

CONCLUSION

Dans ce memoire, on ennonce des théorèmes donnant des conditions suffisantes garantissant la stabilité des images fermées par rapport aux opérations d'additon, de multiplication et de passage à la limite d'une suite d'operateur fermé.

Bibliographie

[1] Bouldin R., The Product of Operators with Closed Range. Tohoku Math. J. (2) 25 (1973), 359-363.

[2] Filmore P, Williams J, "On Operators Range". Advances in Math. 7 (1971), 254-281.

[3] Messirdi B., Mortad M.H., Azouz A., Djellouli G., A Topological Charac-terization of the Product of two Closed Operators. Colloq. Math. Vol. 112, 2 (2008), 269-278.

[4] Moslehian M.S., Sadeghi G., Perturbation of Closed Range Operators. Turk. J. Math. 32 (2008), 1-9.

[5] M.Ould Ali : thèse de Doctorat : Essenia , 2010. Titre : "Stabilité de la fermeture de l'image des opérateurs fermés".

[6] Tosio Kato "Perturbation Theory for Lineair Operators". Springer-verlag New York (1980).