

Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique



Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Cycle LMD

Spécialité : Analyse Harmonique et EDP

Thème

Sur les surfaces plates dans l'espace euclidien

Présenté par

TEGUIG HOURIA

Soutenu le 26 /05/2015

Les membres de jury

Mr	Bahri.S.M	Président	M.C.A	U. Mostghanem
Mme	Bendahmane.H	Examinatrice	M.A.A	U. Mostghanem
Mr	Belarbi.L	Encadreur	M.C.B	U. Mostghanem

Année Universitaire 2014 -2015

Table des matières

Remerciments	i
Résumé	ii
Introduction	iii
1 Courbes	2
1.1 Courbes dans \mathbb{R}^n ; généralité	2
1.2 Paramétrisation par la longueur d'arc	4
1.3 Courbure des courbes du plan	5
1.4 Exemples	7
2 Surfaces	8
2.1 Nappes paramétrées	8
2.2 Nappes géométriques	9
2.3 Exemple	9
2.4 Nappes réglées	10
2.5 Nappes de révolution	11
2.6 Formes fondamentales	14
2.6.1 Surfaces régulières.	14
2.6.2 Première forme fondamentale	16
2.6.3 Deuxième forme fondamentale	19

2.7	Trièdre de Darboux et Ribaucour	20
2.7.1	Indicatrice de Dupin	23
2.8	Lignes de courbure	25
2.9	Ligne asymptotiques	25
2.10	L'application de Weingarten	26
3	Surfaces de courbure de Gauss nulle	32
	Conclusion	38
	Bibliographie	38

Remerciements

Ce mémoire a été assimilé sous l'égide de département des Mathématiques de l'université de Mostaganem. Je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur, monsieur L. BALARBI, d'avoir guidé et encouragé durant ce travail.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement chacun des membres du jury d'avoir accepté de faire partie de jury. Je profite de cette occasion pour remercier tous mes enseignants. Mes remerciements vont aussi à toute ma famille pour son soutien, une pensée très particulière pour mes parents qui m'ont poussé ce à pour suivre mes études en me procurant une aide multiforme est inestimable.

Veillez trouver en pleine face mes vifs remerciements et ma profonde reconnaissance à tous ce qui a participé de près ou de loin à mon cursus scolaire et qui m'ont appris l'amour de la connaissance, le goût et le plaisir de la recherche.

RÉSUMÉ

On s'intéresse dans ce mémoire à classer les surfaces plats où bien les surfaces de courbure gaussienne nulle qui a en même temps des points plats et des points non plats en proposant trois théorèmes sur les surfaces de courbures gaussienne 0 et on le prouvé ; et on a refait les calculs de W. S. Massey [5].

Mon mémoire est réparti en trois chapitres ; le premier chapitre est consacré sur les définitions des courbes dans \mathbb{R}^n , une courbe paramétriser par la longueur d'arc, courbure d'une courbe plane, et nous donnons quelques exemple.

Dans le deuxième chapitre on donne des définitions de surfaces dans \mathbb{R}^3 , surfaces réglées dans \mathbb{R}^3 , surfaces de révolutions dans \mathbb{R}^3 , première et deuxième formes fondamentales, trièdre de Darboux-Ribaucour, indicatrice de Dupin, ligne de courbure, ligne asymptotique, l'application de Weingarten.

Dans le dernier chapitre on a refait les calculs de W. S. Massey sur les surfaces de courbure de Gauss nulle.

INTRODUCTION

Les monographies sur la géométrie différentielle classique des surfaces en 3 dimensions ont souvent montré un théorème sur le fait qu'une surface à courbure gaussienne 0 est une surface développable. Plus précisément, les deux propriétés suivantes sont prouvées :

1. Si chaque point d'une surface de "courbure gaussienne 0" est un point plat (c'est à dire un point où tous les coefficients de la second forme fondamentale sont nuls) alors la surface est un morceau d'un plan.
2. Si aucun point sur une surface de "courbure gaussienne 0" est un point plat, alors par tout point passe une ligne asymptotique unique et le plan tangent est constant le long de cette ligne.

Apparemment, tous ces monographies négligent complètement le cas d'une surface de courbure nulle qui a en même temps des points plats et des points non plats. Cela semble assez étrange compte tenu du fait que de nombreux exemples évident illustrent ce cas. Peut-être que la plus part des auteurs de la géométrie différentiels classiques ont estimé que ce cas était trop compliqué et les possibilités étaient trop nombreuses pour obtenir des résultats intéressants. La citation suivante de la note d'un article (voir [9]), écrit par le professeur A.Wintner, illustre cette attitude :

" Certaines difficultés inhérentes à la définition d'Euler d'une surface développable sont connues depuis la thèse de Lebesgue (1902). Mais il n'est pas nécessaire d'aller à ces extrêmes comme le voulait Lebesgue (continues mais pas des paramétrisations bijectives) afin de montrer que la théorie des surfaces développables n'est pas aussi simple qu'il y paraît à partir des textes de la géométrie différentielle. Parce que est il vrai que si [la courbure de Gauss] $\kappa \equiv 0$ sur une surface Σ de classe C^2 implique qu'un voisinage de chaque point de Σ peut être réglée de manière à être une surface développable au sens d'Euler aussi ? Je ne peux ni prouver ni croire à cela, pas même sous l'hypothèse que Σ soit de classe C^∞ , A contre-exemple, avec Σ de classe C^∞ , serait le premier de ces cas dans la géométrie différentielle

des surfaces à exiger la pleine force d'analyticité (de fonction théorique) plutôt que juste le caractère C^∞ ".

C'est le but de ce mémoire pour montrer que des résultats intéressants et significatifs peuvent être obtenus sur des surfaces de courbure 0 dans le cas où il existe en même temps des points plats et points non plats. Il est assez étrange, dans cette situation, que le résultat le plus frappant et le plus facile à introduire de manière globale :

Courbes

Les courbes et les surfaces interviennent naturellement dans divers domaines. À titre d'exemple, la modélisation de voitures dans un logiciel de CAO (Conception Assistée par Ordinateur) comme CATIA se fait avec des surfaces. De même, la trajectoire d'un objet, le tracé d'une route et bien d'autres exemples encore se modélisent par des courbes. Dans ce mémoire, on va présenter quelques notions de base qui concernent les courbes et les surfaces qui sont dites paramétrées. Une courbe paramétrée est une application $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (avec I un intervalle de \mathbb{R}) et une surface paramétrée est une application $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Ainsi, pour étudier les courbes et les surfaces paramétrées, on utilise des fonctions d'une et de deux variables.

1.1 Courbes dans \mathbb{R}^n ; généralité

Intuitivement, une courbe dans l'espace de dimension n est un objet qui peut être décrit par un point qui évolue au cours du temps. Autrement dit, il suffit d'un paramètre pour le décrire, le temps. Le fait de décrire une courbe par un paramètre qui évolue revient à considérer une application $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Quand le paramètre t parcourt l'intervalle I , le point $\gamma(t)$ parcourt la courbe. Une telle application γ est une courbe paramétrée.

Définition 1.1.1 [1] Soit $I =]a, b[$ [un intervalle ouvert de \mathbb{R} (fini, semi-infini ou infini) et $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur I . On écrit

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)).$$

L'application γ est dite différentiable (de classe C^p , $p \geq 1$) si et seulement si toutes les fonctions γ_j ($j = 1, \dots, n$) sont différentiables (de classe C^p).

Définition 1.1.2 [1] On appelle courbe (paramétrée) de \mathbb{R}^n la donnée d'une application différentiable $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$. L'image de γ , notée C , s'appelle la courbe géométrique associée. On dit que l'application γ définit une paramétrisation de la courbe géométrique. La courbe est qualifiée de régulière si γ est une immersion, c'est à dire si $\gamma'(t) \neq 0$ en tout point t de I . On peut aussi dire que γ définit une paramétrisation régulière de C . Un point $\gamma'(t_0) = 0$ est appelé un point singulier de la courbe C .

Définition 1.1.3 [1] Soit $\gamma(t_0)$ ($t_0 \in I$) un point de C tel que $\gamma'(t_0) \neq 0$. La tangente au point $\gamma(t_0)$ à la courbe C est la droite affine passant par le point $\gamma(t_0)$ et de direction le vecteur $\gamma'(t_0)$. Le vecteur $\gamma'(t_0)$ s'appelle le vecteur vitesse. Un arc fermé d'une courbe C est l'image d'un intervalle fermé $[a, b] \subset I$ par $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

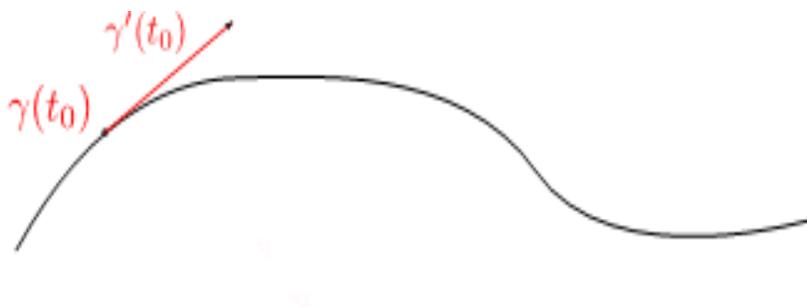


Figure 1 : Tangente à une courbe paramétrée.

Exemple 1.1.1 L'application $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t, t^2)$ a pour courbe géométrique associée C la parabole d'équation $y = x^2$. Cette paramétrisation est régulière.

Longueur d'un arc de courbe

Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe et $A = \gamma([a, b])$ un arc fermé de la courbe C .

Définition 1.1.4 [1] La longueur de l'arc A est

$$l = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

On peut montrer que la longueur ainsi définie est la limite des longueurs de lignes polygonales inscrites dans l'arc lorsque le maximum de la longueur de chaque segment de la ligne polygonale tend vers zéro.

Lemme 1.1.1 *La longueur de l'arc A est indépendante de la paramétrisation de cet arc.*

Preuve. On note $\alpha : I = [c, d] \rightarrow [a, b] = J$ un changement (admissible) de la paramétrisation et $\psi : \gamma \circ \alpha$ la nouvelle paramétrisation. La longueur de l'arc de courbe A calculée avec la nouvelle paramétrisation est :

$$\int_c^d \|\psi'(u)\| du = \int_c^d \|\gamma'(\alpha(u))\| |\alpha'(u)| du.$$

Posons $t = \alpha(u)$; d'après la formule de changement de variable dans les intégrales, on obtient :

$$\int_c^d \|\psi'(u)\| du = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Qui est la longueur de l'arc A calculée avec la paramétrisation initiale. □

1.2 Paramétrisation par la longueur d'arc

Définition 1.2.1 *Une paramétrisation $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ d'une courbe géométrique est dite normale (ou paramétrisé par la longueur d'arc ou par l'abscisse curviligne) si pour tout $[t_1, t_2] \subset I$ la longueur de la courbe géométrique entre les points $\gamma(t_1)$ et $\gamma(t_2)$ est exactement $t_2 - t_1$*

$$l(\gamma|[t_1, t_2]) = t_2 - t_1.$$

Définition 1.2.2 *On fixe un point $c \in [a, b]$. La longueur d'arc s comptée à partir du point $\gamma(c)$ est la fonction*

$$s : t \mapsto \int_c^t \|\gamma'(u)\| du.$$

On suppose que γ définit une paramétrisation régulière. La fonction s définit un changement (admissible) de paramétrisation puisque $s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$. La nouvelle paramétrisation obtenue ainsi s'appelle la paramétrisation par la longueur d'arc ou paramétrisation normale.

Proposition 1.2.1 *Soit $\psi : s \mapsto \psi(s) = \gamma \circ s^{-1}(s)$ la paramétrisation par la longueur d'arc. Le vecteur $\psi'(s)$ est unitaire.*

Preuve. On a :

$$\|\psi'(s)\| = \left\| \gamma'(s^{-1}(s)) \frac{1}{\|\gamma'(s^{-1}(s))\|} \right\| = 1$$

□

Proposition 1.2.2 Soit $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1 . Alors on a

$$\text{La paramétrisation } \gamma \text{ est normale} \Leftrightarrow \forall s \in I \quad \|\gamma'(s)\| = 1.$$

Preuve. Si la paramétrisation est normale, alors l'abscisse curviligne à partir du point t_0 de γ vérifie pour tout

$$t \in I : s_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du = t - t_0.$$

En dérivant, cela donne pour tout $t \in I : s'_{t_0}(t) = \|\gamma'(t)\| = 1$. Réciproquement, si pour tout $s \in I$ on a $\|\gamma'(s)\| = 1$, alors pour tout $[t_1, t_2] \subset I$:

$$l(\gamma|[t_1, t_2]) = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(s)\| ds = t_2 - t_1.$$

□

1.3 Courbure des courbes du plan

En mathématiques, la courbure est vaguement en de plusieurs concepts apparentés dans régions différentes de la géométrie. Intuitivement, la courbure est le montant par lequel un objet géométrique dévie d'être plat, ou tout droit dans le cas d'une ligne, mais cela est défini dans les chemins différents selon le contexte.

Quelle est l'allure locale d'une courbe paramétrée $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ régulière de classe C^2 ? On peut supposer, sans restriction, que cette courbe est paramétrée par l'abscisse curviligne.

Pour connaître la forme, on va effectuer un développement limité de γ à l'ordre 2 en s_0

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + (s - s_0)\gamma'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}\gamma''(s_0) + o((s - s_0)^2).$$

On sait que le vecteur $\overrightarrow{T(s)} = \gamma'(s)$ est tangent à la courbe en $\gamma(s_0)$. Si $\gamma''(s_0) \neq 0$, le développement limité nous indique qu'à l'ordre deux, la courbe est "attirée" dans la direction $\gamma''(s_0)$. Autrement dit, le vecteur $\gamma''(s_0)$ donne des informations sur la forme de la courbe au voisinage de $\gamma(s_0)$. Intuitivement, on voit aussi que plus $\|\gamma''(s_0)\|$ est grand, plus la courbe est courbée. Effectivement, cette norme va nous permettre de définir la courbure (Figure 2).



Figure 2 : Dérivée première et seconde d'une courbe paramétrée par abscisse curviligne.

Proposition 1.3.1 Si $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une courbe paramétrée régulière de classe C^2 , alors $\gamma''(s)$ est un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{N}(s)$. En particulier, il existe une application continue

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que

$$\forall s \in I, \gamma''(s) = \overrightarrow{T}'(s) = \kappa(s)\overrightarrow{N}(s).$$

Preuve. Pour tout $s \in I$, on a $\overrightarrow{T}(s) \cdot \overrightarrow{T}(s) = \|\overrightarrow{T}(s)\|^2 = 1$. En dérivant, cela donne

$$\overrightarrow{T}'(s) \cdot \overrightarrow{T}(s) = 0.$$

On pose alors $k(s) = \gamma''(s) \cdot \overrightarrow{N}(s)$. On est maintenant en mesure de définir la courbure d'une courbe paramétrée par abscisse curviligne. \square

Proposition 1.3.2 La courbure en un point est égale (au signe près) à l'inverse du rayon du cercle osculateur.

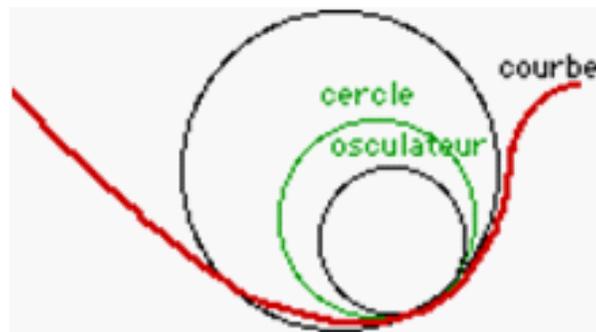


Figure 3 : Le cercle osculateur à une courbe.

Remarque 1.3.1 *le rayon de courbure en un point est le rayon du cercle osculateur en ce point.*

Centre de courbure

Cauchy a défini le centre de courbure c comme le point d'intersection de deux normales infiniment proches à la courbe, et le rayon de courbure comme la distance du point à c , et la courbure elle-même comme l'inverse du rayon de courbure.

1.4 Exemples

1. Prenons la paramétrisation $\gamma(\theta) = (R\cos\frac{\theta}{R}, R\sin\frac{\theta}{R})$, avec $\theta \in [0, 2\pi]$. On remarque que cette paramétrisation est normale car pour tout θ on a $\|\gamma'(\theta)\| = 1$. La courbure au point $\gamma(\theta)$ vaut :

$$k(\theta) = \|\gamma''(\theta)\| = \left(-\frac{1}{R}\cos\frac{\theta}{R}, -\frac{1}{R}\sin\frac{\theta}{R} \right) = \frac{1}{R}.$$

La courbure d'un cercle de rayon R est donc constante et vaut R .

2. La spirale logarithmique $\gamma : t \mapsto (a \exp(bt) \cos t, a \exp(bt) \sin t)$

La courbure est donnée par

$$c[\gamma](t) = \frac{1}{a \exp(bt) \sqrt{1 + b^2}}$$

Surfaces

Une surface est le lieu décrit par une courbe se déplaçant dans l'espace. Ce chapitre est une introduction aux propriétés locales des surfaces de l'espace de dimension 3. Avant d'en venir à des définitions qui sont nécessairement un peu lourdes, je donne quelques exemples simples d'objets dont je suis sûre que tous les lecteurs ont envie de les appeler des surfaces : surfaces de révolution, surfaces réglées, etc. J'en viens ensuite aux définitions et aux propriétés affines, plan tangent. La dernière partie est consacrée aux propriétés métriques des surfaces d'un espace euclidien, en particulier à la courbure de Gauss.

2.1 Nappes paramétrées

Définition 2.1.1 [2]

1. On appelle *domaine de \mathbb{R}^2* tout ouvert connexe $U \subset \mathbb{R}^2$.
2. On appelle *surface paramétrée* un couple (U, X) constitué
 - a d'un domaine U de \mathbb{R}^2 ,
 - b d'une application X continue de U dans E .

$X(U)$ se nomme le support de la surface paramétrée : c'est l'image géométrique dans E de la surface paramétrée.

Si la fonction X est de classe C^P sur U , la surface paramétrée (U, X) est de classe C^P .

Définition 2.1.2 Une *nappe paramétrée* est une application $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ où U est un ouvert de \mathbb{R}^2 dont la différentielle est, en tout point de U , une application linéaire injective.

Un sous ensemble Σ de \mathbb{R}^3 est une surface régulière si, pour tout point p de Σ , on peut trouver un ouvert U de \mathbb{R}^2 et une application différentiable $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que

1. En tout point de U , la différentielle de X est une application linéaire injective de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 .
2. Il existe un voisinage ouvert V de P dans \mathbb{R}^3 tel que $X : U \rightarrow V \cap \Sigma$ est un homéomorphisme.
3. La paire (U, X) définit une carte locale de Σ au voisinage de P .

Corollaire 2.1.1 *Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable ; l'ensemble $\Sigma = \{(x, y, F(x, y))\}$ est une surface régulière.*

2.2 Nappes géométriques

Définition 2.2.1 *Une nappe géométrique Σ définie par un paramétrage $X : U \rightarrow E$ est dite régulière si la différentielle de X en chaque point de U est de rang 2.*

2.3 Exemple

Considérons le cône de révolution paramétré par l'application :

$$X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, z) \mapsto (kz \cos \theta, kz \sin \theta, z).$$

On s'attend, si la définition est bonne, à ce que la nappe soit régulière, sauf au sommet du cône. Et en effet, la matrice de la différentielle est

$$dX_{(\theta, z)} = \begin{pmatrix} -kz \sin \theta & k \cos \theta \\ kz \cos \theta & k \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est de rang 2 tant que la première vectrice colonne n'est pas nul, c'est-à-dire pour $z \neq 0$. Le point $(0, 0, 0)$, le sommet du cône, est un point singulier.

Remarque 2.3.1 *Comme on vient de le voir sur cet exemple, pour que X soit de rang 2 au point (u, v) de U , il faut et il suffit que les deux vecteurs*

$$\frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \text{ et } \frac{\partial X}{\partial v}(u, v)$$

Soient indépendants.

2.4 Nappes réglées

Une surface est dite réglée si elle est une réunion de droites ou de segments de droites, ces droites sont appelées les génératrices. Le plan, le cylindre et le cône sont les exemples les plus simples de surfaces réglées.

Pour paramétrer une surface réglée, on se donne une courbe $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ transverse aux génératrices et un champ de vecteurs $\omega(u)$ le long de α , ce champ indique la direction des génératrices. La surface est alors paramétrée par

$$X(u, v) = \alpha(u) + v\omega(u)$$

où $(u, v) \in \Omega := I \times \mathbb{R}$.

On a alors

$$b_1 = \frac{\partial X}{\partial u} = \alpha'(u) + v\omega'(u), \quad b_2 = \frac{\partial X}{\partial v} = \omega(u).$$

D'où

$$\begin{cases} g_{11} = \|\alpha'\|^2 + 2\langle \alpha', \omega' \rangle v + v^2 \|\omega'\|^2 \\ g_{12} = \langle \alpha', \omega \rangle + v \langle \omega', \omega \rangle \\ g_{22} = \|\omega\|^2. \end{cases}$$

Donc, la métrique induit d'une surface réglée est donnée par

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Définition 2.4.1 *On dira qu'une surface réglée est développable si ses plans tangents ne varient pas le long d'une même règle (les règles sont à la fois géodésiques et lignes asymptotiques).*

Définition 2.4.2 *Une surface est réglée si elle admet la paramétrisation $X(u, v) = \beta(u) + v\delta(u)$ où β et δ définissent les paramétrisations de deux courbes appelées respectivement la directrice et la génératrice. On suppose naturellement v tel que $\beta'(u) + v\delta'(u)$ et $\delta(u)$ ne sont pas colinéaires.*

- Une surface réglée dont toutes les génératrices sont parallèles est appelée cylindre; elle est invariante par toute translation de vecteur porté par une génératrice.
- Une surface réglée dont toutes les génératrices sont issues d'un point p est appelée sommet de cône p ; elle est invariante par toute homothétie de centre p et de rapport positif.

Exemple 2.4.1 *Le parabolôïde hyperbolique est une surface réglée : il peut être engendré par une droite glissant sur deux droites données non coplanaires tout en restant parallèle à un plan donné.*

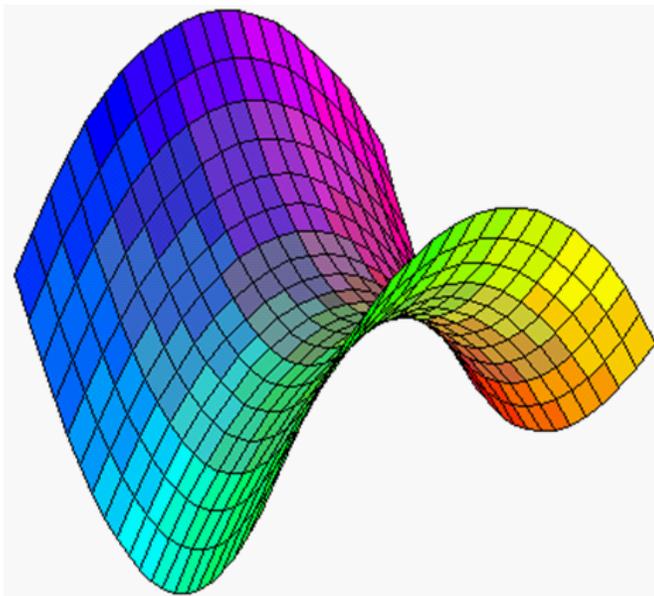


Figure 4 : parabolôïde hyperbolique dont l'équation générale cartésienne est de la forme $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

2.5 Nappes de révolution

On considère une courbe plane C et on le fait tourner autour d'une droite D du plan qui la contient. La droite D est appelée l'axe de révolution.

Dans un espace euclidien E de dimension 3, on se donne une droite D et un arc paramétré $M = (I, f)$ dans un plan P contenant D . La famille $(M_v)_{v \in [0, 2\pi]}$ des arcs déduits de M par rotations d'axe D et d'angles v engendre une surface de révolution Σ d'axe D et de méridienne M .

Supposons que, dans un repère orthonormé $\{o, i, k\}$ du plan P avec $o \in D$ et k un vecteur unitaire de D , la méridienne soit le graphe de la fonction $u \mapsto g(u)$ de classe C^1 sur un intervalle I . Alors, dans un repère orthonormé $\{o, i, j, k\}$ de E , complété du précédent, les équations paramétriques de la surface Σ de révolution d'axe D et de méridienne M sont :

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = g(u),$$

quand (u, v) parcourt $I \times [0, 2\pi[$.

Un vecteur normal au point (u, v) est, par un calcul facile,

$$N = -u \left(g'(u) \cos v \, i + g'(u) \sin v \, j - k \right).$$

Et l'on voit que, pour que le point (u, v) soit régulier, il faut, et il suffit que $u \neq 0$, donc que le point n'appartienne pas à l'axe D . on va étudier géométriquement le plan tangent en un point X de Σ . (La méridienne étant de classe C^1)

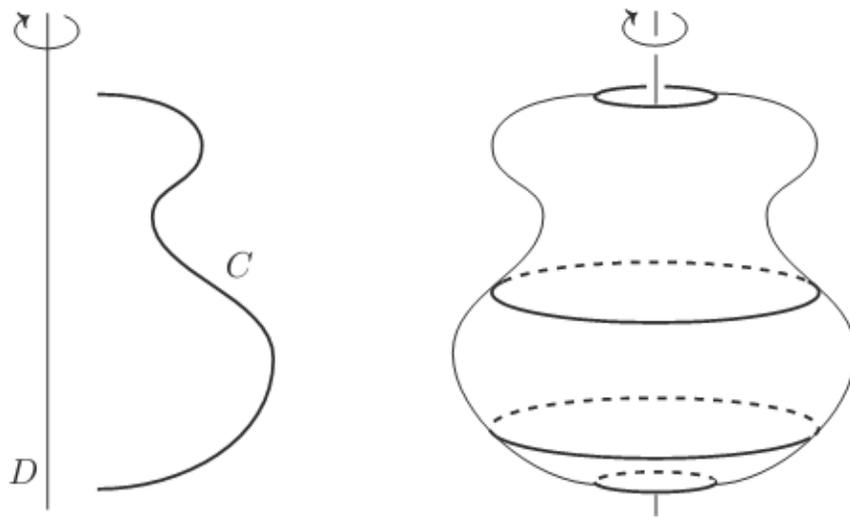


Figure 5 : Une surface de révolution.

Plans tangents à une surface de révolution

En un point régulier m d'une surface de révolution Σ d'axe D , le plan tangent P_m existe. Supposons $m \notin D$. Le plan tangent P_m contient la tangente au parallèle C_m du point m , laquelle est orthogonale au plan méridien de m , puisqu'elle est orthogonale à l'axe D et au rayon du point m .

Propriété En tout point régulier m d'une surface de révolution, le plan tangent est orthogonal au plan méridien de m .

Propriété En un point régulier m d'une surface de révolution Σ d'axe D , si la tangente en m à la méridienne du point m coupe D obliquement en un point s , elle engendre, quand m parcourt un parallèle C de Σ , le cône circonscrit à Σ , de sommet s , la courbe de contact étant C . Si cette tangente est parallèle à D , elle engendre le cylindre circonscrit à Σ , parallèlement à D , la courbe de contact étant C .

La normale N_m en m à Σ est orthogonale à P_m , donc elle est incluse dans le plan méridien du point m , et coïncide par conséquent avec la normale en m à la méridienne M passant par m . Si elle coupe l'axe D en un point q , ce point reste fixe quand m parcourt le parallèle C .

Propriété En tout point régulier m d'une surface de révolution, la normale en m à la méridienne coïncide avec la normale à la surface. Quand m décrit un parallèle, cette normale reste parallèle à l'axe D en un point fixe.

Exemples de surfaces de révolution sphère, tore, cône de révolution, cylindre de révolution, hyperboloïde de révolution.

1. **Tore :** Un tore est obtenu par la rotation d'un cercle situé dans un plan contenant l'axe (D). Le centre du cercle ne doit pas passer par l'axe (Si le centre du cercle est sur l'axe on obtient une sphère). Le cercle peut couper l'axe.

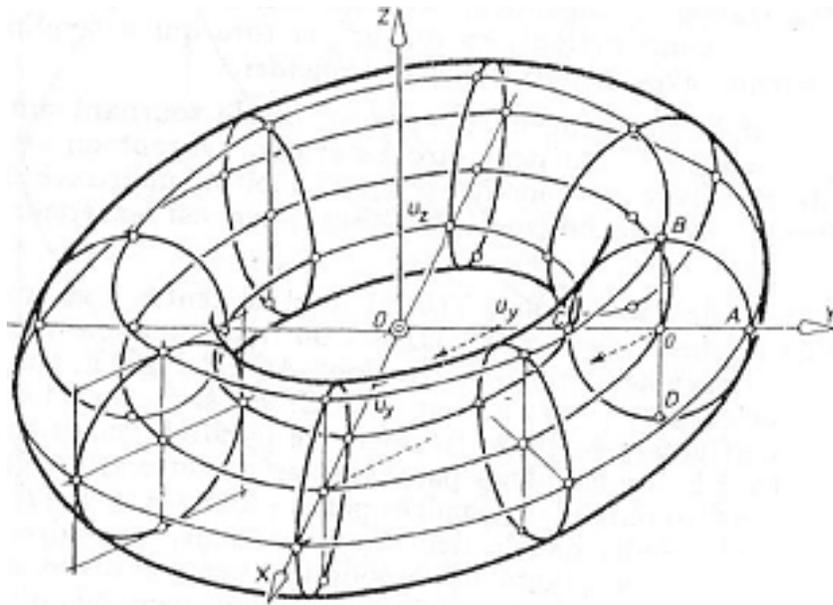


Figure 6 : le tore de révolution

2. L'hyperboloïde de révolution à une nappe

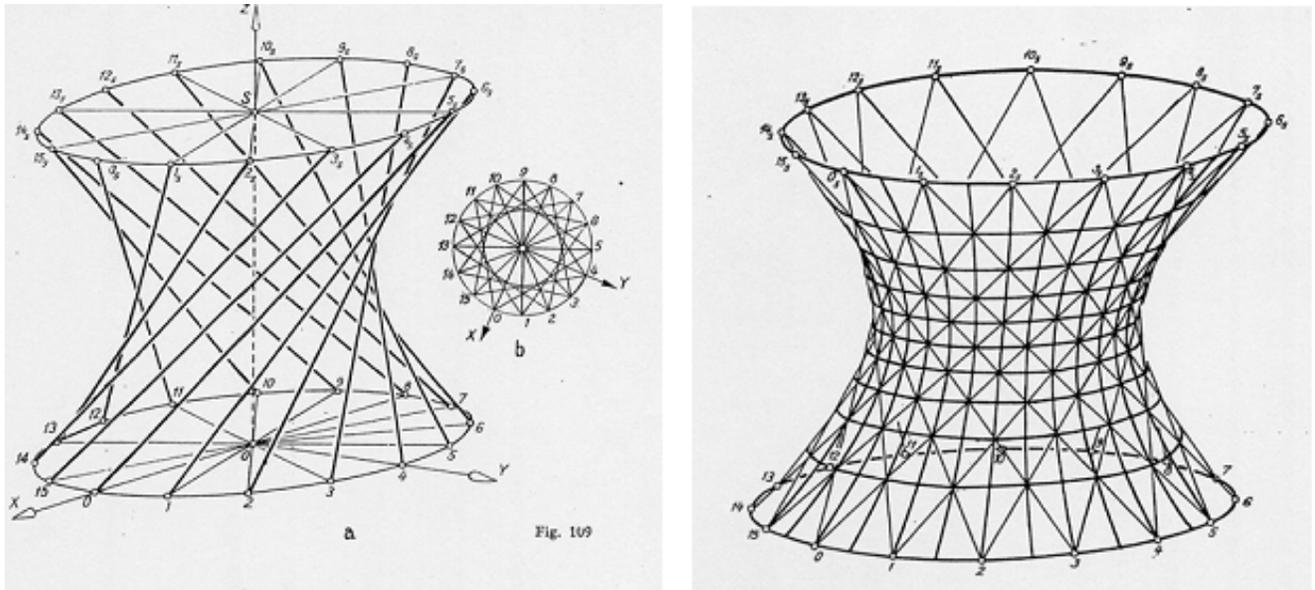


Figure 7 : Hyperboloïde de révolution.

Hyperboloïde de révolution : Représentation de 16 génératrices obtenues par rotation autour de l'axe $D = Oz$ (à gauche), représentation des méridiens hyperboliques, du deuxième système de génératrices et des cercles (à droite).

2.6 Formes fondamentales

2.6.1 Surfaces régulières.

Définition 2.6.1 [2] On dira que le point (u, v) de la surface paramétrée (U, X) ($U \subset \mathbb{R}^2$) est régulier, si, en ce point,

$$\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \neq 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Définition 2.6.2 Une surface Σ , de représentation paramétrée (U, X) , est dite régulière, si

elle est de classe C^1 et si tout point m de Σ est régulier.

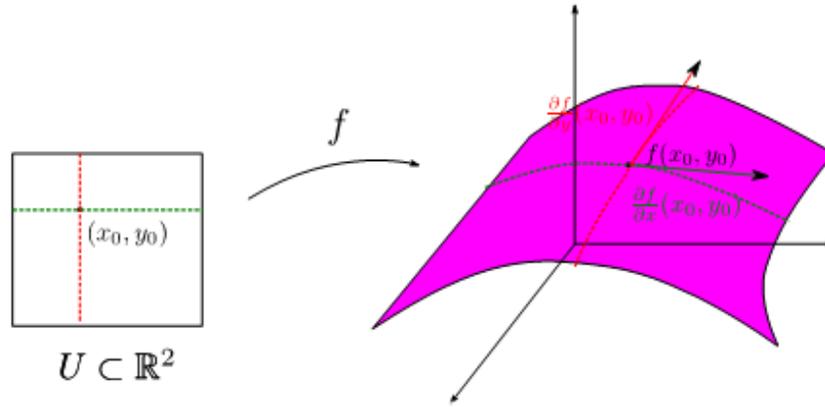


Figure 8 : Dérivées partielles de la paramétrisation.

Définition 2.6.3 Soit p un point régulier d'une surface Σ . On dit qu'un vecteur fixe v d'origine p est tangent à Σ s'il existe une courbe paramétrée

$$\gamma : I \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3.$$

De classe C^1 , telle que

1. $\gamma(t_0) = p$ pour un certain $t_0 \in I$;
2. $\gamma(t) \in \Sigma$ pour tout $t \in I$;
3. $\dot{\gamma}(t_0) = v$.

Corollaire 2.6.1 L'ensemble des vecteurs tangents à Σ en un point régulier p est un espace vectoriel de dimension 2 avec p comme origine. On l'appelle le plan tangent et on le note $T_p\Sigma$.

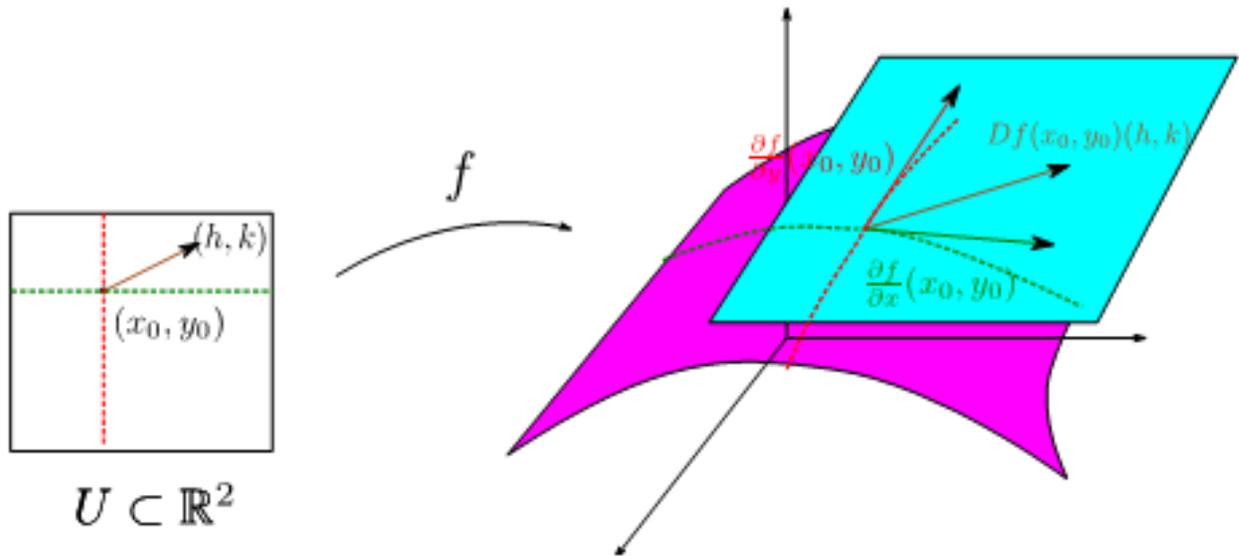


Figure 9 : Espace tangent d'une surface paramétrée régulière.

Remarque 2.6.1 $T_p\Sigma$ est par définition un ensemble de vecteurs d'origine p , on appelé parfois le plan vectoriel tangent à Σ en p . Mais on peut aussi voir le plan tangent comme un ensemble de points, il se note alors $A_p\Sigma$ défini par

$$A_p\Sigma = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{pq} \in T_p\Sigma\} = p + T_p\Sigma,$$

on appelle $A_p\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ le plan affine tangent en p à Σ . Si la surface est définie par l'équation $f(x, y, z) = 0$, alors on a

$$A_p\Sigma = \left\{ q \in \mathbb{R}^3 \mid \left\langle \vec{\nabla} f(p), q - p \right\rangle = 0 \right\}$$

2.6.2 Première forme fondamentale

En tout point X de la surface Σ et pour tout arc régulier (I, g) tracé sur Σ et passant par X , la tangente est définie par

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{dv}{dt} \quad (2.6.1)$$

et l'arc s de (I, g) est donné par le carré scalaire $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dX}{dt}\right)^2$,

Soit

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

Où l'on a posé

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2, \\ F &= \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}, \\ G &= \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2, \end{aligned}$$

Définition 2.6.4 [2] On appelle première forme fondamentale au point (u, v) de Σ , la forme quadratique à deux variables (du, dv) suivante

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Elle permet le calcul de l'arc s pour tout arc régulier (I, g) tracé sur Σ .

Remarque 2.6.2 Nous savons que, pour tout couple de vecteurs x, y de E , on a

$$\|x \wedge y\|^2 + |xy|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2.$$

C'est l'identité de Lagrange.

Appliquons cette relation pour le calcul de la norme du vecteur normal N

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\|^2 + \left| \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} \right|^2 = \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \right\|^2 \left\| \frac{\partial X}{\partial v} \right\|^2,$$

On obtient ainsi

$$\|N\|^2 = EG - F^2.$$

Cas particulier

Si la surface Σ a une représentation paramétrée cartésienne

$$z = g(x, y).$$

Alors, en utilisant les notations de Monge,

$$p = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial g}{\partial y},$$

On obtient

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2$$

et la première forme fondamentale est dans ce cas

$$ds^2 = (1 + p^2) dx^2 + 2pqdx dy + (1 + q^2) dy^2.$$

L'utilité de la première forme fondamentale

A partir des éléments de la première forme fondamentale, on peut calculer la longueur d'un arc tracé sur une surface ainsi que l'aire d'un morceau de cette dernière.

Longueur d'arc

Soit $X = X(u(t), v(t))$, $a \leq t \leq b$, un arc régulier sur une surface paramétrée par $X = X(u, v)$.

Sa longueur est donnée par

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \left| \frac{dX}{dt} \right| dt = \int_a^b \left(\frac{dX}{dt} \cdot \frac{dX}{dt} \right)^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \left[\left(\frac{dX}{du} \frac{du}{dt} + \frac{dX}{dv} \frac{dv}{dt} \right) \cdot \left(\frac{dX}{du} \frac{du}{dt} + \frac{dX}{dv} \frac{dv}{dt} \right) \right]^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \left[\left(X_u \frac{du}{dt} + X_v \frac{dv}{dt} \right) \cdot \left(X_u \frac{du}{dt} + X_v \frac{dv}{dt} \right) \right]^{1/2} dt \\ &= \int_a^b \left[E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt} \right) \left(\frac{dv}{dt} \right) + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt. \end{aligned}$$

De plus si β est l'angle formé par X_u et X_v alors

$$\cos \beta = \frac{X_u \cdot X_v}{|X_u| |X_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

L'aire d'une surface

On définit l'aire A d'une région R sur une surface Σ représentée par $X = X(u, v)$ par l'intégrale double

$$A = \int \int_W \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

Où E , F , G sont les éléments de la première forme fondamentale associée à la surface Σ et W est l'ensemble de points du plan (u, v) dont l'image est R .

2.6.3 Deuxième forme fondamentale

Soit Σ une surface régulière de classe C^2 de représentation paramétrée (U, X) . En tout point X de Σ et pour tout arc régulier (I, g) de classe C^2 tracé sur Σ et passant par m , calculons, en dérivant (2.6.1),

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \frac{\partial X}{\partial u} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{d^2 v}{dt^2}. \quad (2.6.2)$$

Multiplions scalairement par le vecteur normal N en m à Σ . Il reste

$$N \cdot \frac{d^2 X}{dt^2} = \left(N \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \right) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2 \left(N \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \right) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \left(N \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right) \left(\frac{dv}{dt} \right)^2.$$

Posons alors (produits mixtes)

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{\|N\|} \left(N \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \right) = \frac{1}{\|N\|} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \mid \frac{\partial X}{\partial u} \mid \frac{\partial X}{\partial v} \right), \\ m &= \frac{1}{\|N\|} \left(N \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \right) = \frac{1}{\|N\|} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \mid \frac{\partial X}{\partial u} \mid \frac{\partial X}{\partial v} \right), \\ n &= \frac{1}{\|N\|} \left(N \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right) = \frac{1}{\|N\|} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \mid \frac{\partial X}{\partial u} \mid \frac{\partial X}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Comme Σ est de classe C^2 ; l , m , n sont des fonctions numériques continues des deux variables u , v , dans le domaine de définition U de f . On obtient ainsi

$$\frac{N}{\|N\|} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = l \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2m \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + n \left(\frac{dv}{dt} \right)^2.$$

Définition 2.6.5 [2] *On appelle seconde forme fondamentale au point (u, v) de Σ , la forme quadratique à deux variables (du, dv) suivante*

$$II(du, dv) = ldu^2 + 2mdudv + ndv^2.$$

En chaque point X de Σ , on a

$$N \cdot dX = 0.$$

Par conséquent,

$$N \cdot d^2 X + dN \cdot dX = 0.$$

On peut donc calculer la seconde forme fondamentale directement à partir de N par

$$II(du, dv) = -\frac{1}{\|N\|} dN \cdot dX.$$

Par exemple, si la surface Σ a une représentation paramétrée cartésienne $z = g(x, y)$, on utilisera les notations de Monge

$$r = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}.$$

On remarque que

$$N = \frac{\partial X}{\partial x} \wedge \frac{\partial X}{\partial y}$$

A pour coordonnées $(-p, -q, 1)$ et que

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = r dx + s dy, \\ dq &= \frac{\partial q}{\partial x} dx + \frac{\partial q}{\partial y} dy = s dx + t dy. \end{aligned}$$

Alors dN a pour coordonnées $(-dp, -dq, 0)$ et $dX(dx, dy, dz)$, d'où

$$-dN \cdot dX = dp dx + dq dy = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2.$$

La seconde forme fondamentale est dans ce cas

$$II(dx, dy) = \frac{r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Définition 2.6.6 Une surface dans \mathbb{R}^3 est dite plate si, et seulement si, les coefficients de la deuxième forme fondamentale sont nuls (i.e : $l = m = n = 0$).

2.7 Trièdre de Darboux et Ribaucour

Soit Σ une surface régulière de classe C^2 , de représentation paramétrée (U, X) . Considérons un point \mathbf{m} de Σ (figure 10), le plan tangent Π en \mathbf{m} et un arc régulier Γ de classe C^2 , tracé sur Σ et passant par \mathbf{m} .

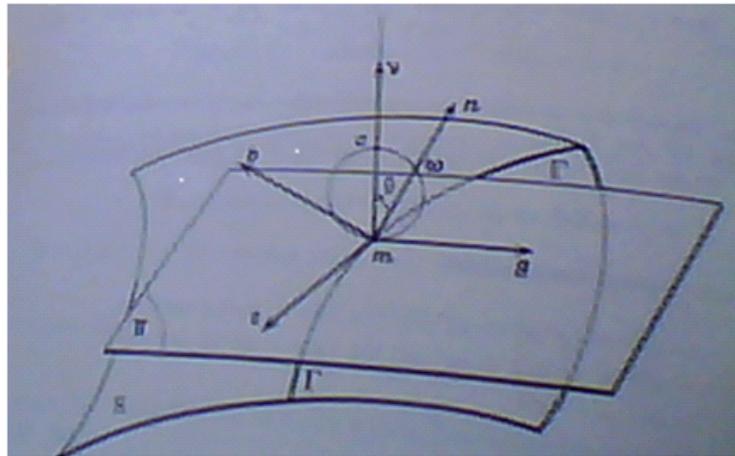


Figure 10

On désignera par $(\mathbf{t}, N, \mathbf{b})$ le repère de frenet en \mathbf{m} à Γ . Soit v le vecteur **unitaire** normal à Σ en \mathbf{m} défini par

$$v = \frac{N}{\|N\|} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial v}.$$

Le repère orthonormé direct $\{\mathbf{t}, \mathbf{g}, \mathbf{v}\}$ se nomme **trièdre de Darboux-Ribaucour** en \mathbf{m} à Γ . Il se déduit du trièdre de frenet par rotation d'angle $\theta = (N, v)$ autour de \mathbf{t} . Prenons, pour l'arc Γ , la représentation normale (le paramètre est l'arc s). Alors, si r est le rayon de courbure de Γ en \mathbf{m} , la première formule de frenet donne

$$\frac{d^2 \mathbf{m}}{ds^2} = \frac{N}{r}.$$

En multipliant scalairement par v et en utilisant les relations

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Et

$$\frac{N}{\|N\|} \frac{d^2 \mathbf{m}}{dt^2} = l \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2m \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + n \left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

On obtient

$$v \frac{d^2 \mathbf{m}}{ds^2} = \frac{v \cdot N}{r} = \frac{\cos \theta}{r} = \frac{l du^2 + 2m dudv + n dv^2}{E du^2 + 2F dudv + G dv^2}. \quad (2.7.1)$$

On va déduire de cette relation l'étude locale en \mathbf{m} de la surface Σ .

Cercle de Meusnier

- a) Tous les arcs réguliers de classe C^2 , tracés sur Σ , tangents en \mathbf{m} et admettant en \mathbf{m} le même plan osculateur $\mathbf{m} + \mathbf{P}_{tn}$ possèdent en \mathbf{m} le même rayon de courbure r . En particulier, la section plane de Σ par ce plan admet en \mathbf{m} le même rayon de courbure r que Γ . On peut donc se borner à étudier les sections planes de Σ passant par \mathbf{m} .
- b) La relation (2.7.1) montre que $\frac{\cos\theta}{r}$ ne dépend que du rapport $\frac{du}{dv}$, c'est-à-dire de la tangente en \mathbf{m} . En particulier, étudions la **section normale** : section de Σ par le plan normal $\mathbf{m} + \mathbf{P}_{tv}$ contenant cette tangente. Ce plan est orienté par le vecteur \mathbf{g} . On sait que le rayon de courbure ρ de la section normale est un nombre relatif dont on peut définir le signe en imposant à la demi-normale positive \mathbf{n} , de cette section en \mathbf{m} , de coïncider avec \mathbf{v} . Dans ces conditions, on a $\cos\theta = 1$ pour la section normale. La courbure $\frac{1}{\rho}$ de cette section se nomme **courbure normale** en \mathbf{m} à Σ selon la direction (du, dv) . Elle est donnée par

$$\frac{1}{\rho} = \frac{l du^2 + 2m du dv + n dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \quad (2.7.2)$$

Le centre c de courbure de la section est défini par

$$\overrightarrow{\mathbf{m}c} = \rho \mathbf{v}.$$

Pour toute autre section plane Γ contenant la tangente $\mathbf{m} + D_t$, et telle que

$$(N, \mathbf{v}) = \theta,$$

Le rayon de courbure r est alors

$$r = \rho \cos\theta.$$

C'est le théorème de Meusnier : le centre de courbure ω de Γ en \mathbf{m} est sur le cercle de diamètre $\overrightarrow{\mathbf{m}c}$ dans le plan $\mathbf{m} + P_{gv}$. On le nomme **cercle de Meusnier**.

Théorème 2.7.1 (Meusnier) *On fixe un point $\mathbf{m} \in \Sigma$ et un vecteur tangent $T \in T_{\mathbf{m}}\Sigma$. Alors, le lieu des centres de courbure en \mathbf{m} des courbes passant par \mathbf{m} , tangentes à T , est le cercle de diamètre $\mathbf{m}c$, dans le plan (N, v) , où c est le centre de courbure de la section normale. Ce cercle est appelée cercle de Meusnier.*

2.7.1 Indicatrice de Dupin

L'indicatrice de Dupin précise la nature locale (au voisinage d'un point) d'une surface $z = f(x, y)$: parabolique, hyperbolique ou elliptique.

D'après ce qui précède, l'étude locale de Σ au point \mathbf{m} est maintenant ramenée à celle des sections normales (contenant v). Dans le plan tangent Π en \mathbf{m} , on prend le repère $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$ défini par

$$\mathbf{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u}, \quad \mathbf{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial v}.$$

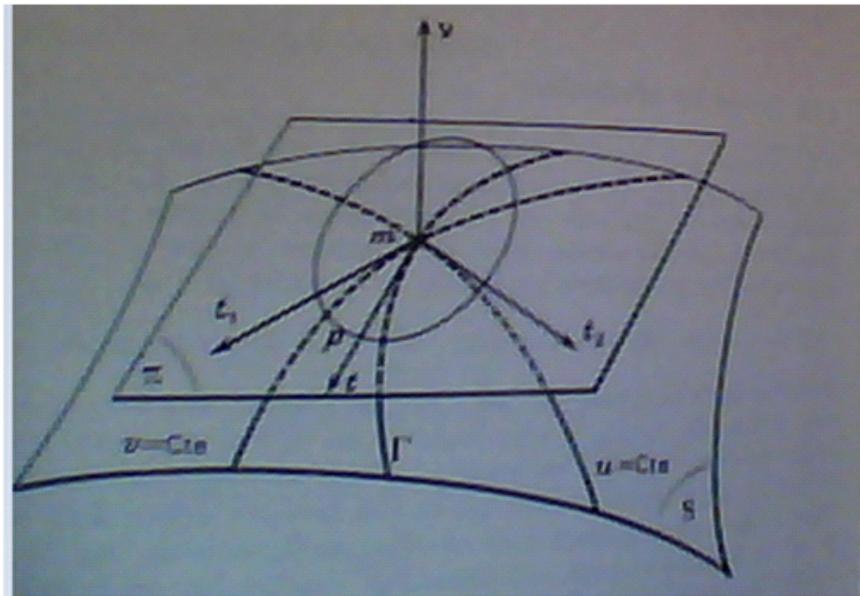


Figure 11

\mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 sont respectivement des vecteurs unitaires tangents aux arcs $v = \text{constante}$ et $u = \text{constante}$ de Σ passant par \mathbf{m} (Figure 11). On repère la section normale Γ étudiée par sa tangente définie par \mathbf{t} . Sur Γ , on a

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{m}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial v} \frac{dv}{ds} = \sqrt{E} \frac{du}{ds} \mathbf{t}_1 + \sqrt{G} \frac{dv}{ds} \mathbf{t}_2.$$

Soit ρ le rayon de courbure normal, pour la section normale dans la direction \mathbf{t} (rayon de courbure de Γ) et on définit dans le plan tangent Π le point \mathbf{p} par

$$\overrightarrow{m\mathbf{p}} = \sqrt{\varepsilon \rho} \mathbf{t},$$

Avec $\varepsilon = \pm 1$ de façon que $\varepsilon \rho > 0$. Si l'on désigne par α et β les coordonnées de $\overrightarrow{m\mathbf{p}}$ dans $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$

$$\overrightarrow{\mathbf{m}\mathbf{p}} = \alpha \mathbf{t}_1 + \beta \mathbf{t}_2,$$

On a

$$\alpha = \sqrt{\varepsilon \rho E} \frac{du}{ds}, \quad \beta = \sqrt{\varepsilon \rho G} \frac{dv}{ds}.$$

La relation (2.7.2) donne

$$\frac{1}{\rho} = l \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2m \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + n \left(\frac{dv}{ds} \right)^2,$$

Et, en éliminant $\frac{du}{ds}$ et $\frac{dv}{ds}$, on obtient

$$\frac{l}{E} \alpha^2 + 2 \frac{m}{\sqrt{EG}} \alpha \beta + \frac{n}{G} \beta^2 = \varepsilon.$$

C'est l'équation de deux coniques de centre \mathbf{m} que l'on nomme coniques indicatrices. Le lieu de \mathbf{p} dans le plan tangent Π est l'ensemble des points réels appartenant aux coniques indicatrices. Ce lieu se nomme indicatrices de Dupin. On va préciser cette indicatrices.

Le genre des coniques indicatrices se détermine selon la réalité des directions asymptotiques (communes aux deux coniques) c'est à dire selon le signe du discriminant $m^2 - ln$.

- a) $m^2 - ln < 0$. Les directions asymptotiques sont imaginaires ; les deux coniques indicatrices sont du genre ellipse. Une seule est réelle (pour un signe bien déterminé de $\varepsilon : \varepsilon l > 0$). Cette ellipse réelle est l'indicatrice de Dupin.
- b) $m^2 - ln > 0$. Les directions asymptotiques sont réelles. Les deux coniques indicatrices sont des hyperboles et sont toutes deux réelles. (Elles ont même centre \mathbf{m} , mêmes asymptotes et mêmes distance focale. L'axe transverse de l'une est non transverse pour l'autre). Cet ensemble de deux hyperboles conjuguées constitue dans ce cas l'indicatrice de Dupin.
- c) $m^2 - ln = 0$. Les directions asymptotiques sont confondues. Les indicatrices sont du genre parabole et, comme elles ont un centre \mathbf{m} , elles se décomposent chacune en deux droites parallèles. Une seule de ces indicatrices est réelle (elle correspond à ε tel que $\varepsilon l > 0$). L'indicatrices de Dupin est constituée de deux droites parallèles réelles. On dit que la surface Σ possède un point \mathbf{m} **parabolique**.

2.8 Lignes de courbure

2.9 Ligne asymptotiques

Plan osculateur

Théorème 2.9.1 *Soit un arc régulier (I, f) avec $f \in C^2(I, E)$. En tout point $t \in I$ ou f' et f'' ne sont pas colinéaires, ces deux vecteurs définissent un plan qui est indépendant de la représentation paramétrique admissible choisie. Ce plan se nomme plan osculateur à l'arc au point $m = f(t)$.*

1. On appelle normale en un point à un arc régulier de classe C^2 toute droite orthogonale en ce point à la tangente.
2. On appelle normale principale en un point d'un arc régulier de classe C^2 , la normale en ce point incluse dans le plan osculateur.

Courbure d'une surface

Soit Σ une surface de classe ≥ 2 et $X(u, v)$ une carte paramétrée contenant le point $P = X(u_0, v_0)$. Soit T le plan tangent à la surface Σ au point P et N la normale unitaire à T au point P . Considérons la courbe C sur cette carte donnée par $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ et le vecteur de la courbure de C

$$k = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} / \frac{dX}{dt}.$$

Lignes de courbure

Définition 2.9.1 (Lignes de courbure) *lignes le long desquelles les normales à la surface engendrent une surface développable. En tout point passent 2 lignes de courbure orthogonales dont les tangentes sont conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes aux lignes asymptotiques.*

Définition 2.9.2 (ligne de courbure) [2] *On appelle Lignes de courbure d'une surface Σ régulière de classe C^2 tout arc tracé sur Σ , tangent en chacun de ses points à une direction principale de l'indicatrice de Dupin relative à ce point.*

Définition 2.9.3 *Les lignes de courbures où courbes principales sont les courbes toujours tangentes aux directions principales. Par exemple sur une surface de révolution les lignes de courbures sont les méridiens et les parallèles.*

L'équation différentielle des lignes de courbure est donnée par

$$\begin{vmatrix} ldu + mdv & mdu + ndv \\ Edu + Fdv & Fdu + Gdv \end{vmatrix} = 0.$$

Lignes asymptotiques

Définition 2.9.4 [2] *On appelle ligne asymptotique d'une surface régulière Σ de classe C^2 tout arc tracé sur Σ tangent en chacun de ces points à une asymptote de l'indicatrice de Dupin relative à ce point.*

L'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$ldu^2 + 2mdudv + ndv^2 = 0.$$

Définition 2.9.5 (Lignes asymptotiques) *lignes qui admettent en tout point un plan osculateur qui est le plan tangent à la surface.*

Propriété Tout arc régulière de classe C^2 tracé sur Σ est une ligne asymptotique si, et seulement si, en tout point de Γ , le plan osculateur est tangent à Σ .

Théorème 2.9.2 [2] *Toute surface régulière Σ de classe C^3 dont tout point est un ombilic est un morceau de sphère ou un morceau de plan.*

2.10 L'application de Weingarten

L'opérateur de Weingarten est un opérateur associée par une matrice W sur le plan tangent $T_p\Sigma$ de la surface Σ au point p . Et cette matrice est définie par

$$\begin{aligned} W &= - \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} lG - mF & -lF + mE \\ mG - nF & mF + nE \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le déterminant de cette matrice c'est la courbure de Gauss

Courbure de Gauss

On définit la courbure de Gauss d'une surface Σ de classe C^p ($p \geq 2$), notée K par

$$K = \frac{l.n - m^2}{EG - F^2}.$$

La courbure gaussienne, dite aussi courbure totale

$$K = K_1 K_2.$$

C'est le produit des courbures principales. La notion de courbure totale permet de décrire le comportement local de la surface en un point m en fonction du signe de K .

Une surface peut contenir des points hyperboliques, paraboliques ou elliptiques. Par exemple le tore.

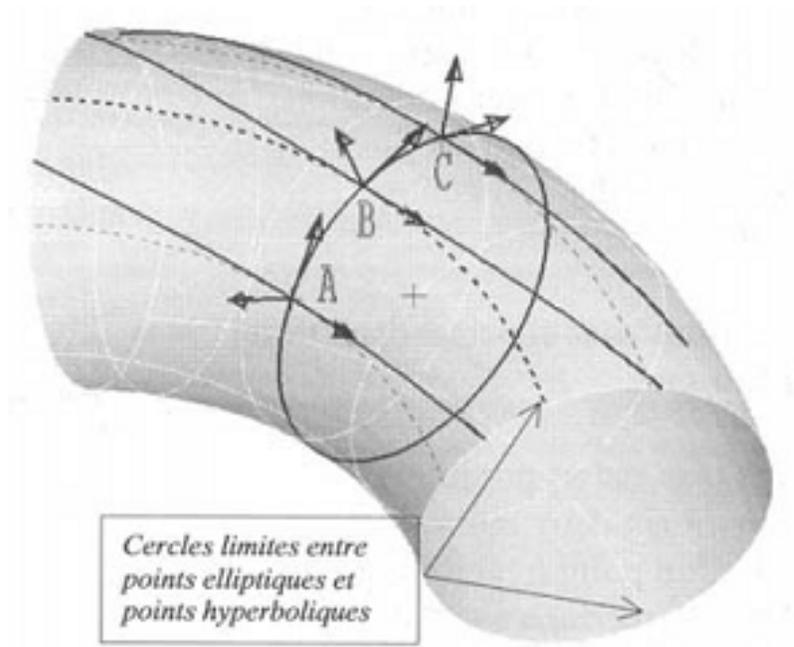


Figure 12 : Nature des courbures sur un tore : A : point hyperbolique, B : point parabolique, C : point elliptique

La notion de courbure totale permet une classification des surfaces pour lesquelles en tout point de la surface à une courbure totale de signe positif, négatif ou nul

Surface à courbure totale négative elles peuvent être réglées ou non mais jamais développables.

Exemples

Surfaces réglées cylindroïdes, conoïdes, PH (paraboloïde hyperbolique), HR (hyperboloïde de révolution).

Surfaces non réglées surfaces de révolution à méridien concave, surfaces minimales sur contour fermé qui ont de plus une courbure moyenne nulle.

Surfaces à courbure totale nulle L'une des courbures principales au moins est nulle ; elles sont réglées et développables (tous cônes et cylindres).

Surfaces à courbure totale positive Elles sont à double courbure de même sens : Sphères, ellipsoïdes, surfaces de révolution à méridien convexe. Elles ne peuvent être ni réglées ni développables. Certaines surfaces peuvent être d'un type hybride et changer de signe pour leur courbure totale suivant les zones. Par exemple, surfaces de révolution dont le méridien possède un point d'inflexion.

Et la trace de cette matrice c'est la courbure moyenne.

La courbure moyenne

Soit K_1 et K_2 les courbures principales de la surface Σ , on appelle courbure moyenne de Σ

$$H = \frac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2}(K_1 + K_2).$$

Exemples

1. La courbure de Gauss et la courbure moyenne d'une nappe de révolution

Une surface de révolution est paramétrée par

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

On a

$$\begin{cases} X_u = (f_u \cos v, f_u \sin v, g_u), \\ X_v = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0), \\ X_{uv} = (-f_u \sin v, f_u \cos v, 0), \\ X_{uu} = (f_{uu} \cos v, f_{uu} \sin v, g_{uu}), \\ X_{vv} = (-f(u) \cos v, -f(u) \sin v, 0), \end{cases}$$

Les coefficients du premier forme fondamentale sont donnés par

$$\begin{cases} E = X_u \cdot X_u = f_u^2 + g_u^2 \\ F = X_u \cdot X_v = 0 \\ G = X_v \cdot X_v = (f(u))^2 \\ EG - F^2 = (f(u))^2 (f_u^2 + g_u^2) \end{cases}$$

La première forme fondamentale

$$\begin{aligned} I(du, dv) &= E(du)^2 + 2Fdu dv + G(dv)^2 \\ &= (f_u^2 + g_u^2)(du)^2 + (f(u))^2(dv)^2. \end{aligned}$$

On calcule le vecteur normal unitaire

$$\mathbf{N} = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|} = \frac{1}{\sqrt{g_u^2 + f_u^2}} (-g_u \cos v, -g_u \sin v, f_u).$$

Avec

$$\begin{aligned} X_u \wedge X_v &= \begin{vmatrix} e_1 & f_u \cos v & -f(u) \sin v \\ e_2 & f_u \sin v & f(u) \cos v \\ e_3 & g_u & 0 \end{vmatrix} = (-g_u f(u) \cos v, -g_u f(u) \sin v, f_u f(u)), \\ |X_u \wedge X_v| &= f(u) \sqrt{g_u^2 + f_u^2}, \end{aligned}$$

Les coefficients de la deuxième forme fondamentale sont donnés par

$$\begin{cases} l = X_{uu} \cdot \mathbf{N} = \frac{-f_{uu}g_u + g_{uu}f_u}{\sqrt{g_u^2 + f_u^2}}, \\ m = X_{uv} \cdot \mathbf{N} = 0, \\ n = X_{vv} \cdot \mathbf{N} = \frac{f(u)g_u}{\sqrt{g_u^2 + f_u^2}}, \end{cases}$$

La deuxième forme fondamentale

$$\begin{aligned} II(du, dv) &= l(du)^2 + 2mdu dv + n(dv)^2 \\ &= \frac{-f_{uu}g_u + g_{uu}f_u}{\sqrt{g_u^2 + f_u^2}}(du)^2 + \frac{f(u)g_u}{\sqrt{g_u^2 + f_u^2}}(dv)^2, \end{aligned}$$

La courbure de Gauss est donnée par

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = \frac{f(u)g_u(-f_{uu}g_u + g_{uu}f_u)}{f(u)^2(f_u^2 + g_u^2)^2}.$$

Et la courbure moyenne

$$H = \frac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)} = \frac{(f_u^2 + g_u^2)g_u + f(u)(-f_{uu}g_u + g_{uu}f_u)}{2f(u)(f_u^2 + g_u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. **La courbure de Gauss et la courbure moyenne d'une nappe réglée** Une surface réglée est paramétrée par

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(u)).$$

On a

$$\begin{aligned} X_u &= (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, g'(u)) \\ X_{uu} &= (-f(v) \cos u, -f(v) \sin u, g''(u)) \\ X_v &= (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, 0) \\ X_{vv} &= (f''(v) \cos u, f''(v) \sin u, 0) \\ X_{vu} &= (-f'(v) \sin u, f'(v) \cos u, 0) \end{aligned}$$

Les coefficients de la première forme fondamentale sont donnés par

$$\begin{aligned} E &= X_u X_u = (f(v))^2 + (g'(u))^2 \\ F &= X_u X_v = 0 \\ G &= X_v X_v = (f'(v))^2 \end{aligned}$$

La première forme fondamentale est donnée par

$$\begin{aligned} I(du, dv) &= E(du)^2 + 2F dudv + G(dv)^2 \\ &= ((f(v))^2 + (g'(u))^2)(du)^2 + (f'(v))^2 (dv)^2 \end{aligned}$$

Le vecteur normal unitaire est donnée par :

$$\mathbf{N} = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|} = \frac{1}{\sqrt{(g'(u))^2 + (f(v))^2}} (-g'(u) \sin u, g'(u) \cos u, -f(v))$$

Tel que

$$X_u \wedge X_v = \begin{vmatrix} e_1 & -f(v) \sin u & f'(v) \cos u \\ e_2 & f(v) \cos u & f'(v) \sin u \\ e_3 & g'(u) & 0 \end{vmatrix} = (-g'(u)f'(v) \sin u, g'(u)f'(v) \cos u, -f(v)f'(v)),$$

Et

$$|X_u \wedge X_v| = f'(v) \sqrt{(g'(u))^2 + (f(v))^2}.$$

Les coefficients de la deuxième forme fondamentale sont donnés par

$$\begin{aligned} l &= X_{uu} \cdot \mathbf{N} = \frac{-f(v)g''(u)}{\sqrt{(g'(u))^2 + (f(v))^2}} \\ m &= X_{uv} \cdot \mathbf{N} = \frac{f'(v)g'(u)}{\sqrt{(g'(u))^2 + (f(v))^2}} \\ n &= X_{vv} \cdot \mathbf{N} = 0 \end{aligned}$$

La deuxième forme fondamentale

$$\begin{aligned} II(du, dv) &= l(du)^2 + 2mdudv + n(dv)^2 \\ &= \frac{-f(v)g''(u)}{\sqrt{(g'(u))^2 + (f(v))^2}}(du)^2 + 2\frac{f'(v)g'(u)}{\sqrt{(g'(u))^2 + (f(v))^2}}dudv \end{aligned}$$

La courbure moyenne est donnée par

$$\begin{aligned} H &= \frac{En + Gl - 2Fm}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{-f(v)g''(u)}{2(g'(u)^2 + f(v)^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

La courbure de Gauss est donnée par

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = \frac{-(g'(u))^2}{((g'(u))^2 + (f(v))^2)^2}.$$

Surfaces de courbure de Gauss nulle

Théorème 3.0.1 [5] *Une surface complète de courbure de Gauss 0 dans l'espace euclidien de dimension 3 est un cylindre ou bien un plan.*

On signifie par "Cylindre" la surface engendré par l'ensemble des lignes parallèles à l'axe des z au moyen d'une courbe dans le plan xy . Puisque la surface est complète, la courbe doit être fermée ou de longueur infinie. Ce théorème a été annoncé par A.V.Pogorelov [7] sans preuve en 1956, sous des hypothèses très générales. Hartman et Nirenberg [6] a prouvé ce théorème pour les hypersurfaces de dimension n et de classe C^2 dans l'espace euclidien de dimension $n+1$. On donne par la suite une preuve élémentaire dans l'esprit de la géométrie différentielle classique pour les surfaces de classe C^4 .

Sans l'hypothèse de complétude, la preuve du théorème est très compliquée. Soit Σ la surface de courbure gaussienne 0 de dimension 3 (Σ n'est pas nécessairement complète). Soit A l'ensemble de tous les points plats de Σ (i.e : $l = m = n = 0$) et $U = \Sigma - A$ (i.e : $l.n - m^2 = 0, (l, m, n) \neq (0, 0, 0)$) l'ensemble des points non plats. Il est clair que A est l'ensemble de tous les points où la courbure moyenne s'annule, par conséquent, c'est une partie fermée de Σ et U est un ouvert de Σ . La théorie classique ne dit rien sur A et U , et la relation qu'ils entretiennent entre eux, etc.

Rappelons que pour chaque point de U , selon la théorie classique, il passe une ligne asymptotique unique, ces lignes n'existent pas dans A .

Théorème 3.0.2 [5] *Les lignes asymptotiques dans $U = \Sigma - A$ sont "maximales" dans la mesure ou elles se prolongent à l'infini ou au bord de Σ dans toute direction.*

De toute évidence, cela impose des restrictions à U , puisqu'il est simplement recouvert par cette famille de lignes asymptotiques dont chacune est considérée comme maximale.

Pour la déclaration du théorème suivant, soit ∂U désignent la frontière de U dans la topologie de Σ .

Théorème 3.0.3 [5] *par chacun des points de ∂U , est traversé par une ligne droite sur Σ et cette ligne droite est intuitivement contenu sur ∂U . Ainsi, ∂U est l'union des lignes droites.*

Il convient d'ajouter que le plan tangent à Σ est constant le long de chaque composant de ∂U . (Pour le prouver, noter que $\partial U \subset A$, où la deuxième forme fondamentale disparaît identiquement à chaque point de ∂U . Il serait préférable par conséquent d'utiliser les équations de Weingarten).

dans ce qui va suivre on a essayer de donner une preuve du théorème 3.0.2 et 3.0.3 pour les surfaces de classe C^4 . La démonstration du théorème 3.0.2 est donnée en premier qui ne dépend que de la simple observation $1/H$: l'inverse de la courbure moyenne, qui est une fonction linéaire paramétré par la longueur d'arc pour toute courbe asymptotique de U . puis suivre les théorèmes 3.0.1 et 3.0.3 par des arguments assez facile.

Rétrospectivement, il semble étonnant que ce théorème sur les surfaces de courbure gaussienne 0 n'ait pas été utilisé avant, vu son point de vue légèrement différent. Le théorème 3.0.1 décrit les immersions isométriques possible d'une variété riemannienne complet de deux dimension de courbure 0 dans l'espace euclidienne de 3 dimension. Le problème analogue pour les surfaces complètes de courbure négative constante a été résolu par Hilbert en 1901 avec son fameux théorème sur l'impossibilité de plonger le plan hyperbolique dans un espace de 3 dimension, tandis que H. Liebmann en 1899 a résolu ce problème pour les surfaces de courbure positive constante (sphères). Il est clair que ces théorèmes de Liebmann et Hilbert sont plus profonds que le théorème 3.0.1 ci-dessus, et n'est pas plausible géométriquement. (voir [5])

Dans ce mémoire, on utilise les notations des livres de Struik (voir [8]). les trois théorèmes seront traités exclusivement avec des surfaces de classe C^4 , et la courbure de Gauss 0 dans l'espace euclidienne de 3 dimensions. Nous tenons à souligner que les hypothèses ne seront pas répétées.

Deux lemme de base Les deux lemmes de base énoncés ci-dessous sont préoccupés par le comportement de l'ouvert U de la surface Σ ; les deux sont de nature locale. Le premier est plus facile à démontrer que le deuxième. La déclaration et la preuve sont incluses par souci d'exhaustivité. Le second est le lemme clé qui affirme que $1/H$ est une fonction linéaire paramétrée par la longueur d'arc d'une courbe asymptotique.

Lemme 3.0.1 *Tout les courbes asymptotiques dans U sont un segment d'une géodésique.*

Lemme 3.0.2 *Dans toute les courbes asymptotiques fixes en U , la courbure moyenne H vérifié l'équation différentielle suivante*

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{H}\right) = 0.$$

Ici, les dérivés sont pris par rapport à l'abscisse curviligne de la courbe asymptotique.

Preuve. D'un point $p \in U$, on peut choisir un système de coordonnées locales (u, v) dans un voisinage suffisamment petit de p en U de telle sorte que les courbes asymptotiques et leurs trajectoires orthogonales sont les courbes v et u respectivement. Avec ce système de coordonnées, la paramétrisation est comme suit :

$$\begin{aligned} X &: I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto X(u, v) = \alpha(u) + \beta(v). \end{aligned}$$

tel que $X_u = \alpha'(u)$; $X_v = \beta'(v)$.

Donc les coefficients de la première forme fondamentale est donnée par $E = X_u \cdot X_u = (\alpha'(u))^2$; $G = X_v \cdot X_v = (\beta'(v))^2$; $F = X_u \cdot X_v = \alpha'(u) \cdot \beta'(v) = 0$.

D'autre part, le vecteur normal N est défini par N

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}.$$

tel que $X_u \wedge X_v = \alpha'(u) \wedge \beta'(v)$ et $\|X_u \wedge X_v\| = EG - F^2 = (\alpha'(u))^2 (\beta'(v))^2$.

Alors,

$$N = \frac{1}{(\alpha'(u))^2 (\beta'(v))^2} (\alpha'(u) \wedge \beta'(v)) \neq 0.$$

Donc les coefficients de la deuxième forme fondamentale est donnée par

$l = X_{uu} \cdot N \neq 0$; $m = X_{uv} \cdot N = 0$; $X_{vv} \cdot N = 0$.

Donc, la première et la deuxième formes fondamentale deviennent (Dans la notation de Stuiik [8])

$$I = Edu^2 + Gdv^2,$$

$$II = ldu^2, \quad l \neq 0,$$

i. e : $F = m = n = 0$. Les équations de Mainardi-Codazzi deviennent alors :

$$\begin{cases} l_v = \frac{1}{2}E_v \left(\frac{l}{E} + \frac{n}{G} \right) \\ n_u = \frac{1}{2}G_u \left(\frac{l}{E} + \frac{n}{G} \right) \end{cases} \implies \begin{cases} l_v = \frac{lE_v}{2E} \\ 0 = \frac{lG_u}{2E} \end{cases} \quad (3.0.1)$$

(Voir Struik[8], p.113). D'après la deuxième formule de ces équations, on conclut que $G_u = 0$, par conséquent G est une fonction de v seul. Si l'on suppose en outre que le paramètre v mesure la longueur d'arc de l'une des courbes $u = \text{constante}$, alors il est facile de déduire que $G = 1$. De ce fait, la première forme fondamentale devient :

$$I = Edu^2 + dv^2.$$

C'est à dire que v mesure la longueur d'arc de toutes les courbes $u = \text{constante}$. La courbure de Gauss est donnée par

$$K = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial^2 \sqrt{E}}{\partial v^2}$$

(Voir Struik[8], p. 113, l'équation (3 - 7)), donc

$$\frac{\partial^2 \sqrt{E}}{\partial v^2} = 0 \quad (3.0.2)$$

Ensuite, on applique l'équation (1 - 10) p.130 de Struik [8] pour calculer la courbure géodésique k_g des courbes $u = \text{constante}$, le résultat est que $k_g = 0$, donc les courbes $u = \text{constante}$ sont des géodésiques. Sur ce point se termine la démonstration du premier lemme. La partie qui suit sera consacrée, quant à elle, à la démonstration du deuxième lemme.

Il résulte de l'équation (3.0.2) que

$$\sqrt{E} = c_1(u) \cdot v + c_2(u). \quad (3.0.3)$$

Où $c_1(u)$ et $c_2(u)$ sont des fonctions de u . La première équation de (3.0.1) donne

$$l = c_3(u) \cdot \sqrt{E} \quad (3.0.4)$$

Dans ce système de coordonnées,

$$H = \frac{l}{2E}.$$

L'équation (7 – 2) page 83 de ([8]). On obtient

$$\begin{aligned} H &= \frac{c_3(u)\sqrt{E}}{2E} = \frac{c_3(u)}{2\sqrt{E}} \\ &= \frac{c_3(u)}{2[c_1(u)v + c_2(u)]}. \end{aligned} \quad (3.0.5)$$

Maintenant, si on se focalise sur une courbe asymptotique $u = u_0$ et rappelons que v mesure la longueur d'arc de cette courbe asymptotique, la preuve du lemme (3.0.2) suit aisément par différenciation de formule (3.0.5). \square

Preuve. D'après le lemme (3.0.2), étant donnée que la courbure moyenne H d'une courbe asymptotique dans U

$$H = \frac{1}{as + b}. \quad (3.0.6)$$

Ou a et b sont des constantes et s désigne l'abscisse curviligne mesurée d'un Point p_0 fixe sur l'asymptotique. Supposons maintenant qu'une certaine courbe asymptotique C n'est pas maximale, c'est à dire que c'est un segment approprié seulement d'un certain géodésique L et pas la totalité de la géodésique. Cela signifie que la géodésique L réunit l'ensemble A . Soit P un point sur L qui est un point de bord du A et U . Alors $H(p) = 0$, donc :

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \left(\frac{1}{as + b} \right) = 0,$$

s_0 représente la distance entre p et p_0 le long de L . Mais cela est impossible, donc C doit être l'ensemble de la géodésique L . \square

Preuve. Dans le cas ou la surface est complète, toutes les géodésiques, et chaque courbe asymptotique, peuvent être prolongées infiniment loin dans les deux directions. Puisque la courbure moyenne reste finie sur l'ensemble Σ , il faut trouver un $a = 0$ dans la formule (3.0.6), i. e : la courbure moyenne H est constante au long de chaque géodésique. Ensuite, une surface complète de courbure gaussienne 0 admet le plan euclidien comme un espace de couverture universelle. C'est pourquoi une telle surface Σ est obtenue par une immersion isométrique du plan euclidien dans l'espace euclidien de dimension 3. En outre, toute géodésique sur Σ est l'image d'une ligne droite dans le plan. Alors, n'importe quelle courbe asymptotique sur

Σ est une géodésique, sans possibilité que deux courbes asymptotiques puissent se croiser. Il s'en suit que les courbes asymptotiques, sont toutes les images de lignes parallèles dans le plan. On choisit un système de coordonnées rectangulaires (u, v) dans le plan euclidien de telle sorte que les lignes $u = \text{constante}$ (parallèle à l'axe des v) incluent toutes les lignes paramétrées sur les courbes asymptotiques. Étant donné que le système de coordonnées est rectangulaire, alors la première forme fondamentale de Σ avec ce paramétrage devient

$$ds^2 = du^2 + dv^2, \quad (3.0.7)$$

L'argument utilisé pour prouver les deux lemmes montre que la seconde forme fondamentale peut être écrite comme suit

$$II = ldu^2. \quad (3.0.8)$$

Alors

$$H = \frac{1}{2}l$$

H est constant le long de toute les courbes asymptotiques, on voit que l est une fonction d'un seul paramètre u . Maintenant, en utilisant la partie unicité du théorème classique de Gauss-Bonnet (voir Struik, [8], p. 124), on voit que toute surface dont les première et seconde formes fondamentales sont données par (3.0.7) et (3.0.8) avec l fonction de u seul, est congruent au cylindre généré par des lignes parallèles à l'axe des z à travers un courbe dans le plan xy . Dans ce cas, le paramètre u est la longueur d'arc d'une courbe donnée et la fonction $l(u)$ représente sa courbure. \square

Preuve. 3.0.3 Soit $p \in \partial U$ un point quelconque du bord de l'ensemble U , et soit $\{p_n\}$ une suite infinie de points dans U tel que $p_n \rightarrow p$ quand $n \rightarrow \infty$. Pour chaque point p_n , $C(P_n)$ désigne la ligne asymptotique unique à travers p_n . Nous affirmons que quand $n \rightarrow \infty$, les lignes $C(P_n)$ approchent d'une ligne de démarcation que nous noterons $C(P)$. Pour prouver cette affirmation, on va tracer une ligne L a travers p tel que L croise $C(P_n)$ pour tout n suffisamment grand et à faire θ_n désigne l'angle entre les lignes L et $C(P_n)$. Il est facile de voir à partir de la géométrie de situation que $\{\theta_n\}$ est une suite de Cauchy parce qu'aucune des deux des lignes $C(P_n)$ ne peut croiser sur Σ . donc $\lim \theta_n$ existe quand $n \rightarrow \infty$, et cela détermine la direction de la ligne $C(P)$ par l'intermédiaire p . Un raisonnement analogue montre que $C(P)$ est indépendant du choix de la séquence $\{p_n\}$, donc $C(P)$ est déterminée

de façon unique. Ensuite, nous affirmons que tous les points de $C(P)$ sur Σ sont un point de bord de U . Tout d'abord, si q est un point quelconque de $C(P)$, alors il est possible de choisir un entier n , un point $q_n \in C(P_n)$ de telle sorte que $q_n \rightarrow q$ quand $n \rightarrow \infty$. Alors, q appartient à la fermeture de U . Pour compléter la preuve de cette affirmation, il suffit de montrer que q n'appartient pas à U . Si, au contraire, q appartenait à U , alors, il en résulte que $C(P)$ était la ligne asymptotique unique à travers q , donc $p \in U$ constitue une contradiction avec l'hypothèse de départ que nous avons posée ($p \in \partial U$). Ceci termine la démonstration du théorème *III*. □

Bibliographie

- [1] C Doss-Bachelet. J.P Françoise. C Piquet. Géométrie différentielle avec 80 figures. Ellipses édition marketing S. A, 2011.
- [2] A. Doneddu : Géométrie différentielle. Intégrales multiples, tome 6, (1978) .
- [3] P. Hartman and A. Winter, The fundamental equations of differential geo-metry, Amer. Jour. Math., 72(1950), 757-774.
- [4] M. Troyanov, Cours de géométrie. presses polytechniques et universitaires romandes, (2013)
- [5] W. S. Massey ; surfaces of Gaussian curvature zero in euclidean 3-space, Tohoka Math. J. 14(1962), 1, 73-79.
- [6] P.Hartman and L. Nirenberg, On spherical image maps whose Jacobians do not change signs. Amer. Jour. Math., 81(1959), 901-920.
- [7] A. V. Pogorelov, Extensions of the theorem of Gauss on spherical representation to the case of surfaces of bounded extrinsic curvature, Dokl, Akad, Nauk, SSSR(N.S), 111(1956), 945-947 (Russian).
- [8] D. J. Struik ; Lectures on classical differential geometry. Addison-Wesley Press, 1950.
- [9] A. Winter, On Frenet's equations, Amer. Jour. Math., 78(1956), 349-356.