Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Cycle LMD

Spécialité : Analyse Harmonique et EDP

Thème

Équation de Réaction-Diffusion et Application

Présenté par

KHADER Fouzia

Soutenu le 26/05/2015

Les membres de jury

Mr	Ouldali.M	Président	M.C.A	U. Mostghanem
Mr	Bahri.S.M	Examinatrice	M.C.A	U. Mostghanem
Mme	Bensikaddour	Encadreur	M.A.A	U. Mostghanem

Année Universitaire 2014 -2015

Table des matières

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude à mon encadreur Madame BENSIKADDOUR d'avoir accepté de diriger ce mémoire, aussi pour ses précieux conseils, ses idées et ses orientations.

C'est pour moi un grand honneur d'avoir Mr M.Ouldali et Mr M. Bahri membres du jury.

Je remercie également tous les enseignants des départements de mathématiques d'universités de Mostaganem et de Chlef qui ont participé à ma formation pendant tout le cycle universitaire.

Je tiens aussi à remercier ma famille, et mes amis pour leurs soutiens et encouragements.

RÉSUMÉ

On s'intérèsse dans ce mémoire à étudier l'équation de réaction-diffusion et ses propriétés dans les deux cas homogène et non homogène.

INTRODUCTION

Les équations aux dérivées partielles en dimension finie qui seront notées en abrégé EDP dans la suite fournissent des modèles mathématiques dans divers domaines d'applications tels que la mécanique quantique, la synthèse d'image, la prévision météorologique, la démographie, et les finances.

Elles ont été probablement formulées pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du $17^{ème}$ siècle (Newton, Leibniz...). Ensuite "le catalogue" des EDP s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique. On cite quelques noms à titre d'exemples celui d'Euler, puis ceux de Navier et Stokes, en mécanique des fluides, ceux de Fourier pour l'équation de la chaleur, de Maxwell pour celles de l'electromagnétisme, de Schrödinger et Heisenberg pour les équations de la mécanique quantique, et bien sûr de Einstein pour les EDP de la théorie de la relativité.

De la modélisation mathématique de plusieurs phénomènes dans la nature ou dans d'autres domaines dans la pratique proviennent certains systèmes d'équations, appelées équations de réaction-diffusion. Ces équations traduisent l'interaction entre plusieurs composantes ou masses d'une même espèce ou d'une même population.

Ces systémes d'équations sont de la forme :

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = f(u), \ t > 0 \\ \quad u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

où Δ est le Laplacien, D constante positive appelé coefficient de diffusion, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue appelée terme réactif et u_0 la donnée initiale.

Dans la nature, l'équation de la chaleur est l'un des systèmes et phénomènes physiques les plus intéressant qui sont les plus complexes à étudier, et pour cela on passe à la résolution analytique qui nous ramène à des solutions exactes.

Ce mémoire se compose de trois chapitres dont le contenu est comme suit :

Le chapitre 1 consiste à rappeler des généralités sur les équations aux dérivées partielles donc on a besoin des définitions, propriétés des équations aux dérivées partielles ainsi que les opérateurs différentiels.

Le chapitre 2 est réservé à la résolution analytique de l'équation de réaction-diffusion homogène et finalement dans le dernier chapitre on résout l'équation de cinétique chimique.

Chapitre 1

Généralités sur les équations aux dérivées partielles

On introduit tout d'abord quelques opérateurs différentiels qui interviennent dans les équations aux dérivées partielles.

1.1 Les opérateurs différentiels

Dans tout ce qui suit, on considère Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.1.1 ***"Le gradient"*** *Soit $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Le gradient de u noté par $\bigtriangledown u$ ou $\overrightarrow{\text{grad}}\ u$ est donné par:*

$$\bigtriangledown u(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{x_N}(x) \end{pmatrix}.$$

Définition 1.1.2 ***"La divergence"*** *Soient N et p deux entiers positifs non nuls, F une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^p)$*

$$\begin{cases} F: & \Omega & \rightarrow & \mathbb{R}^p \\ & (x_1, x_2, ..., x_N) & \mapsto & (F_1(x_1, x_2, ..., x_N), F_2(x_1, x_2, ..., x_N), ..., F_p(x_1, x_2, ..., x_N)) \end{cases}$$

telle que pour tout $1 \leq i \leq p$, les fonctions F_i sont définies de Ω dans $\mathbb{R}$. Si $p = N$ la matrice Jacobienne de F au point $(x_1, x_2, ..., x_N)$ est donnée par

$$[JF(x)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{x_1}(x) & . & . & . & \frac{\partial F_1}{x_N}(x) \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ . & & & . & . \\ \frac{\partial F_N}{x_1}(x) & . & . & . & \frac{\partial F_N}{x_N}(x) \end{bmatrix}$$

On définit la divergence de F par :

$$\nabla F(x) := div(F(x)) := tr\left[JF(x)\right] = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{x_i}(x).$$

où $tr\left[JF(x)\right]$ est la trace de la matrice Jacobienne de la fonction F.

Définition 1.1.3 ***"Le Laplacien"*** *Soit u une fonction de classe $C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$, on définit le Laplacien de u par :*

$$\Delta u(x) := \operatorname{div}(\nabla u(x)) = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}(x) + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_{_N}}^2}(x).$$

1.2 Définitions et propriétés des équations aux dérivées partielles

Dans cette section on introduit des définitions fondamentales sur les équations aux dérivées partielles (EDP).

Définition 1.2.1 *Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et suffisamment régulière pour que les expressions qui suivent aient un sens. Une equations aux dérivées partielles (E.D.P) pour la fonction u est une relation entre u, les variables $x_1, ..., x_d$ et un nombre fini de dérivées partielles de u,*

$$F(x_1, ..., x_d, u, D_1u, D_2u, ..., D_du, D_1D_1u, D_1D_2u, ..., D^\alpha u, ...) = f\left(x_1, ..., x_d\right), \quad (1.2.1)$$

où D_i pour tout $1 \leq i \leq d$ est la différentielle par rapport à la variable x_i, D^α, $\alpha = (\alpha_1, ...\alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ est la différentielle d'ordre α et f est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$

Définition 1.2.2 ***"Ordre d'une équation aux dérivées partielles"*** *On appelle ordre d'une équation aux dérivées partielles le plus grand ordre de dérivation qui apparaît dans l'équation.*

Exemple 1.2.1 *L'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

est d'ordre 2.

Définition 1.2.3 ***"Les EDP's linéaires, quasi-linéaires, non linéaires"***

1. *On dit qu'une EDP est linéaire si elle ne fait intervenir que des combinaisons linéaires des dérivées partielles de la varaible dépendante.*
2. *On dit qu'une EDP est quasi-linéaire si elle est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé. Ainsi l'EDP*
$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = c$$
est quasi-linéaire si a, b, c *sont des fonctions réelles de* x, y *et* u, *elle serait linéaire si* a, b, c *ne dépendaient que de* x, y *et elle est à coefficients constants si* a, b, c *sont constants. De même l'EDP*
$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = d$$
est quasi-linéaire si a, b, c *et* d *sont des fonctions réelles de* $x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial u}{\partial y}$.
3. *En dehors des critères cités ci-dessus l'EDP est non linéaire.*

Exemple 1.2.2 ***1-*** *EDP linéaire à coefficients constants :*

$$u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + u_x - u = 0.$$

2- *EDP linéaire à coefficients variables*

$$\sin(xy)u_{xx} + 3x^2 u_{xy} + u_{yy} + u_x - u = 0.$$

3- *EDP non linéaire*

$$u_{xx} + 3u_{xy} + (u_x)^2 - \ e^x u - y = 0.$$

Définition 1.2.4 ***"Les EDP's linéaires homogènes"*** *On considère l'EDP* $(1.2.1)$, *si* $f = 0$ *alors, l'équation* $(1.2.1)$ *est dite homogène.*

1.3 Classifications des équations aux dérivées partielles linéaires

On considère une EDP linéaire du second ordre à deux variables

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

On lui associe son polynôme caractéristique en α et β

$$p(\alpha, \beta) = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + D\alpha + E\beta + F$$

Les propriétés de p déterminent la nature de l'EDP selon le discriminant $B^2 - AC$, l'EDP est dite :

1- Hyperbolique si $B^2 - AC > 0$.

2- Parabolique si $B^2 - AC = 0$.

3- Elliptique si $B^2 - AC < 0$.

1.4 Solution d'une équation aux dérivées partielles

1.4.1 Différents types de solutions

Même si les notions de solution forte et de solution faible sont fondamentales dans l'étude des équations aux dérivées partielles d'évolution, il est difficile d'en donner une définition générale, c'est -à -dire indépendante du problème particulier considéré. Une possibilité consiste à classer les solutions en fortes et faibles suivant qu'elles dépendent ou non continûment de la donnée initiale.

1.4.2 Propriétés de la solution d'une EDP

i) Si $u_1$et u_2 sont deux solutions d'une équation aux dérivées partielles lineaire homogène, alors pour α_1 et α_2 des réels quelconques, $\alpha_1.u_1+ \alpha_2.u_2$ est aussi solution.

ii) Si u_h est solution de l'équation linéaire homogène et u_p est solution de l'équation linéaire non homogène, alors $u_h + u_p$ est solution de l'équation complète.

Définition 1.4.1 ***"Problème bien posé"*** *Soit une EDP valide dans Ω, muni de conditions aux frontières. Le problème est bien posé si :*

1. *Il existe une solution de l'edp satisfaisant les conditions aux frontières (existence).*
2. *La solution doit être unique (unicité).*
3. *La solution doit être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées (stabilité).*

1.5 Exemples d'équations aux dérivées partielles

1.5.1 La physique

Sans rentrer dans les détails et en négligeant les constantes, on cite quelques équations aux dérivées partielles usuelles de la physique

$$\begin{array}{ll} \Delta u = 0 & \textit{équation de Laplace}, \\ \Delta u - f = 0 & \textit{équation de Poisson}, \\ u_t - \Delta u = 0 & \textit{équation de la chaleur}, \ diffusion\ homog\grave{e}ne, \\ u_{tt} - \Delta u = 0 & \textit{équation des ondes}, \\ i\Psi_t + \Delta\Psi = v\Psi & \textit{équation de Schrödinger}. \end{array}$$

1.5.2 Biologie et dyamique des populations

Dans les modèles en biologie ou en dynamique des populations on s'intéresse à la concentration d'une substance chimique ou à la densité d'une population (particules, cellules) et son évolution au cours du temps. Les inconnues u et v est en général des fonctions de $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$.

• Les équations de FITZHUGH-NAGUMO

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(u) - v \\ v_t = \delta v_{tt} + \alpha u - \beta v \end{cases} \tag{1.5.1}$$

pour δ, α, β dans $\mathbb{R}^+$ et f une fonction donnée. Ces équations sont utiliseés pur modéliser la transmission d'impulsion nerveuses le long d'axones ou des reactions chimiques cycliques du type BELOUSOV-ZHABOTINSKY

• L'équation de VON FOERSTER

$$\begin{cases} u_a + u_t &= -d(a)u, & a > 0,\ t > 0, \\ u(a,0) &= f(a), & \\ u(0,t) &= \int_0^{+\infty} n(a)u(a,t)da, & t > 0. \end{cases}$$

où $u(a,t)$ est la densité de population d'âge a à l'instant t, $n(a)$ est le taux de naissances, $d(a)$ le taux de décès et $f(a)$ la distribution initiale de la population.

Chapitre 2

L'équation de réaction diffusion

2.1 Représentation

Une équation de réaction-diffusion comprend un terme de réaction et un terme de la diffusion c'est-à-dire la forme typique est comme suit :

$$u_t = D\Delta u + f(u)$$

$u = u(x,t)$ est la densité de population ou concentration de la substance, au position $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ au temps t (Ω est un ensemble ouvert).
Δ est l'opérateur de Laplace. Ainsi, le premier terme du coté droite décrit la "diffusion", D est le coéfficient de diffusion.
Le deuxième terme, $f(u)$ est une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ décrit un processure d'un changement réel, veut dire elle représente n'importe quel changement dans le phénomène étudier (naissance, mort, réaction chimique ...).
Avant d'entamer dans notre chapitre nous avons besoin de quelque définitions.

Définition 2.1.1 ***"le flux"*** *un vecteur qui pointe dans la direction générale du mouvement de particule à travers un certain élément de surface de la zone a, pendant un intervalle de temps, noté J.*

Définition 2.1.2 ***"La première loi de Fick"*** *La première loi de Fick décrit la liaison entre la première dérivée de la concentration de la substance u et le flux l'orsqu'en supposant* *la conservation de la masse. En une dimension, la loi est :*

$$J = -D\frac{\partial u}{\partial x}$$

En deux ou plusieurs dimensions on doit utiliser ∇, donc la loi s'écrit :

$$J = -D\nabla u.$$

On considère une collection de particules effectu une marche aléatoire dans une dimension d'échelle de longueur Δx et l'échelle de temps Δt. Soit $N(x,t)$ le nombre de particules en position x au temps t. Lors d'une étape de temps donné, la moitié des particules serait déplacé vers la gauche et l'autre moitié déplace vers la droite. Depuit la moitié des particules au point x déplace à droite et la moitié des prticules au point $x + \Delta x$ déplace à gauche, le mouvement net vers la droite :

$$-\frac{1}{2}\left[N(x+\Delta x,t) - N(x,t)\right]$$

Le flux J, est ce mouvement net de particules à travers un certain élément de surface de la zone a, normal à la marche aléatoire pendant un intervalle de temps Δt, on peut donc écrire :

$$J = -\frac{1}{2}\left[\frac{N(x+\Delta x,t)}{a\Delta t} - \frac{N(x,t)}{a\Delta t}\right]$$

On multiple le haut et le bas de la partie droite par $(\Delta x)^2$, on obtient :

$$J = -\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}\left[\frac{N(x+\Delta x,t)}{a(\Delta x)^2} - \frac{N(x,t)}{a(\Delta x)^2}\right]$$

On note que la concentration est définie comme particules par unité de volume, et par conséquent

$$u(x,t) = \frac{N(x,t)}{a\Delta x}$$

De plus, $\frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}$ est la définition de la constante de diffusion à une dimension D. Ainsi notre expréssion se simplifie à

$$J = -D\left[\frac{u(x+\Delta x,t)}{\Delta x} - \frac{u(x,t)}{\Delta x}\right]$$

Dans la limite où Δx est infinitésimal, le côté droite est une dérivée de l'espace :

$$J = -D\frac{\partial u}{\partial x}$$

2.2 L'approche classique à la diffusion

L'approche classique à la diffusion est par conservation de masse et la loi de Fick.

Là on commence avec $u(x,t) \in \mathbb{R}^3$ à l'intérieur d'un récipient. Il y a un flux a dénoté par $J(x,t) \in \mathbb{R}^3$.

On choisit un volume Ω de l'épreuve avec limite Γ. Si aucune"réaction" ont lieu, alors le seul facteur qui influence le changement de densité dans Ω peut être un flux à travers Γ, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u(x,t)dv = -\int_{\Gamma} J(x,t)ds, \tag{2.2.1}$$

où le dv représente l'intégrale du volume ($\mathbb{R}^3$) et ds représente l'intégration de surface($\mathbb{R}^2$). Le théorème de flux-divergence affirme l'égalité entre l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume dans $\mathbb{R}^3$et le flux de ce champ à travers la frontière du volume c'est-à-dire :

$$\int_{\Gamma} J(x,t)ds = \int_{\Omega} \operatorname{div} J(x,t)dv,$$

donc (2.2.1) reformulé à

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u(x,t)dv = -\int_{\Omega} \operatorname{div} J(x,t)dv,$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u(x,t)dv + \int_{\Omega} \operatorname{div} J(x,t)dv = 0$$

finalement, on a

$$\int_{\Omega} (\frac{d}{dt}u(x,t) + \operatorname{div} J(x,t))dv = 0.$$

Depuis que cette équation est satisfaite pour tous les volumes Ω de l'épreuve, alors

$$\frac{d}{dt}u + \operatorname{div} J = 0, \tag{2.2.2}$$

en appliquant la première loi de Fick dans (2.2.2), on obtient

$$\frac{d}{dt}u - \nabla(D\nabla u) = 0$$

on suppose que le coefficient D ne depend pas de x, alors

$$\frac{d}{dt}u - D\nabla^2 u = 0$$

c'est la dexième loi de Fick, et comme on a $u(x,t) \in \mathbb{R}^3$alors on utilise le Laplacien $\Delta = \nabla^2$, qui géneralise la dexième dérivée, on obtient donc l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u$$

(aussi appelée équation de chaleur)

2.3 Principe du maximum (faible)

Comme un exemple simple, on considère une équation de diffusion de $1D$

Proposition 2.3.1 ***"Principe du maximum faible pour l'équation de diffusion"*** *Soit $u(x,t)$ satisfait l'équation de diffusion définit dans un rectangle espace-temps $R = \{0 \leq x \leq l,\ 0 \leq t \leq T\}$ alors la valeur maximale de $u(x,t)$ est supposé soit sur la ligne initiale soit sur les lignes de la limites ($x = 0$ ou $x = l$).*

Remarque 2.3.1 *Une fonction continue défnie sur un ensemble fermé borné est borné et atteint son maximum sur cet ensemble.*

Preuve de la proposition (2.3.1)

De l'analyse on sait que pour un maximum dans l'intérieur de la région de définition, les premières dérivées doivent disparaître, et les deuxièmes dérivées doivent satisfaire

$$u_{xx} \leq 0 \textit{ au maximum.}$$

Dans le cas où $u_{xx} \neq 0$ au maximum, on a

$$u_{xx} < 0 \textit{ et } u_t = 0$$

mais on a

$$u_t = Du_{xx} \textit{ contradiction,}$$

alors

$$u_{xx} = 0 \textit{ est possible.}$$

Donc on suppose M le maximum de $u(x,t)$ sur les trois limites :

$$t = 0,\ x = 0\ et\ x = l$$

On va montrer que $u(x,t) \leq M$ sur tout le rectangle R. Pour cela on prend $\varepsilon > 0$ et $v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x^2$, et on montre que $v(x,t) \leq M + \varepsilon^2 l$ dans R.
On a

$$v(x,t) \leq M + \varepsilon l^2\ pour\ t = 0,\ x = 0\ et\ x = l\ (evident),$$

aussi on a

$$\begin{aligned} v_t - Dv_{tt} &= u_t - D(u + \varepsilon x^2)_{xx}, \\ &= u_t - Du_{xx} - 2\varepsilon D, \\ &= -2\varepsilon D < 0, \end{aligned}$$

d'où

$$v_t < Dv_{xx}(inégalité\ de\ diffusion). \tag{2.3.1}$$

Maintenant on suppose que v atteint son maximum au point (x_0, t_0) dans l'intérieur du rectangle R (n'est pas sur les frontières), c'est-à-dire $0 < x_0 < l\ et\ 0 < t_0 < T$.
De l'analyse on sait que

$$v_t = 0\ et\ v_{xx} \leq 0\ au\ point\ (x_0, t_0)$$

ce qui est contradiction avec (2.3.1). Donc il n'ya aucun maximum possible dans l'intérieur de R.
En suite, on suppose que $\exists\, M = v(x_0, t_0)$ telque $v(x,t) \leq M$ sur les limites $t_0 = T,\ 0 < x_0 < l$.
Encore

$$v_{xx}(x_0, t_0) \leq 0$$

comme

$$v(x_0, t_0) > v(x_0, t_0 - \delta),\ \forall \delta > 0$$

alors on a

$$v_t(x_0, t_0) = \lim_{\delta \to 0} \frac{v(x_0, t_0) - v(x_0, t_0 - \delta)}{\delta} \geq 0,\ contradiction\ avec\ (2.3.1).$$

On a le maximum forcement existe et comme R est borné alors le maximum est sur les bords ou la ligne initiale de R et $v(x,t) \leq M + \varepsilon^2 l$ est valide pour R.
Comme $v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon x^2$, alors

$$u(x,t) + \varepsilon x^2 \ \leq M + \varepsilon l^2$$

d'où

$$\begin{aligned} u(x,t) &\leq M + \varepsilon l^2 \ - \varepsilon x^2 \\ &\leq M + \varepsilon (l^2 \ - x^2) \end{aligned}$$

cette inégalité est valide pour tout $\varepsilon > 0$, donc on obtient

$$u(x,t) \leq M \ pour \ tout \ (x,t) \in \mathbb{R}$$

2.4 L'unicité de la solution

Un point important est vérifier l'unicité des solutions pour un problème donné. En cas de l'équation de diffusion, une condition initiale et des conditions aux limites (pour les limites finies) doivent être prescrites.
Ici, on considère le probème de Dirichlet pour l'équation de diffusion

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} & = & f(x,t), \quad pour\ 0 < x < l\ et\ t > 0 \\ u(x,0) & = & \Phi(x), \\ u(0,t) & = & g(t), \\ u(l,t) & = & h(t). \end{cases} \tag{2.4.1}$$

Proposition 2.4.1 ***"Unicité de la solution"*** *Le système (2.4.1) admet une seule solution.*

Preuve

Pour la preuve, on ulilise ce qu'on appelle "la méthode intégrante d'énergie", et on suppose qu'il ya deux solutions $u_1(x,t)$ et $u_2(x,t)$.
Soit $w = u_1 - u_2$. Daprés la définition, w satisfait :

$$\begin{aligned} w_t - Dw_{xx} &= 0, \ pour\ 0 < x < l\ et\ t > 0 \\ w(x,0) &= 0\ (condition\ initiale) \\ w(0,t) &= 0\ et\ w(l,t) = 0 \text{ (conditions aux limites)}, \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} 0 &= 0.w \\ &= (w_t - Dw_{xx})w \\ &= (\frac{1}{2}w^2)_t + (-Dw_x w)_x + D{w_x}^2 \end{aligned}$$

on passe à l'intégrale on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^l ((\frac{1}{2}w^2(x,t))_t + (-Dw_x(x,t)w(x,t))_x + D{w_x}^2(x,t))dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l (w^2(x,t))_t dx - D\int_0^l (w_x(x,t)w(x,t))_x dx + D\int_0^l {w_x}^2(x,t)dx \\ &= \int_0^l \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}w^2(x,t))dx - D\left[w_x(x,t)w(x,t)\right]_0^l + \int_0^l D{w_x}^2(x,t)dx \end{aligned}$$

$[w_x(x,t)w(x,t)]_0^l = 0$ *(en raison de condition initiale), et* $\frac{d}{dt}$ peut être sorti de l'intégrale, donc on a

$$0 = \frac{d}{dt}\int_0^l \frac{1}{2}w^2(x,t)dx + \int_0^l D{w_x}^2(x,t)dx$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\int_0^l \frac{1}{2}w^2(x,t)dx = -D\int_0^l {w_x}^2(x,t)dx \leq 0,$$

cela signifie que 'intégrale $\int_0^l w^2 dx$ est strictement décroissante (en t), c'est-à-dire dans chaque cas on a

$$0 \leq \int_0^l (w(x,t))^2 dx \leq \int_0^l (w(x,0))^2 dx = 0,$$

il suit que $\int_0^l (w(x,t))^2 dx = 0$, alors $w(x,t) = 0$

donc

$$u_1 = u_2 \ pour\ tout\ t \geq 0$$

2.5 Solution fondamental de l'équation de diffusion homogène

Dans cette section, on choisit l'équation de diffusion homogène de $1D$ définie sur l'axe réel c'est-à-dire $-\infty < x < +\infty$ *et* $t > 0$.

Evidement, on a besoin seulement d'une condition initiale, aucune conditions aux bords, donc on considère l'équation

$$u_t = Du_{xx} \; pour \; -\infty < x < +\infty \; et \; t > 0 \tag{2.5.1}$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) = \Phi(x) \tag{2.5.2}$$

dans la première étape, on résout le probème pour une fonction $\Phi(x)$ une fonction continue qui s'annule sur le bord et dans la dexième étape on dérive la solution générale. Pour ce but on a besoin des propositions suivantes :

Proposition 2.5.1 *La translation $u(x-y,t)$ de chaque solution $u(x,t)$ de (2.5.1) est aussi une solution.*

Preuve

Soit $v(x,t) = u(x-y,t)$ alors,

$$v_t = \frac{\partial(t)}{\partial t} u_t = u_t, \; v_x = \frac{\partial(x)}{\partial x} u_x, \; v_{xx} = u_{xx} \; ,$$

on a donc

$$v_t = Dv_{xx} \iff u_t = Du_{xx},$$

d'où u satisfait l'équation de diffusion (2.5.1).

Proposition 2.5.2 *Chaque dérivée $(u_x, u_t, u_{xx}, ...)$ d'une solution u est aussi une solution de l'équation (2.5.1) .*

Preuve On va montrer que u_x est une solution.

On a

$$u_t = Du_{xx}$$

on dérive par rapport à x, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial x}(\; u_t = Du_{xx})$$

qui est équivalent à

$$\frac{\partial}{\partial x} \; u_t = \frac{\partial}{\partial x}(Du_{xx})$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial x}) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\partial u}{\partial x})$$

donc u satisfait l'équation de diffusion (2.5.1).

Proposition 2.5.3 *Chaque dilatation $u(\sqrt{a}x, at)$, $a > 0$ d'une solution u est aussi une solution de l'équation (2.5.1).*

Preuve Soit $v(x,t) = u(\sqrt{a}x, at)$ alors,

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{\partial(at)}{\partial t}u_t(\sqrt{a}x, at) = au_t(\sqrt{a}x, at), \\ v_x(\sqrt{a}x, at) &= \frac{\partial(\sqrt{a}x)}{\partial x}u_x(\sqrt{a}x, at) = \sqrt{a}u_x, v_{xx} = \sqrt{a}\sqrt{a}u_{xx} = au_{xx} \ , \end{aligned}$$

on a donc

$$v_t = Dv_{xx} \iff u_t = Du_{xx},$$

alors, la dilatation $u(\sqrt{a}x, at)$ est aussi une solution de (2.5.1).

Proposition 2.5.4 *Chaque combinaison linéaire des solutions de* (2.5.1) *est aussi une solution de* (2.5.1).

Preuve

Soient $u(x,t)$, $u'(x,t)$ deux solutions de (2.5.1) et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.On va montrer que $\alpha u + \beta u'$est une solution.

Soit $v(x,t) = \alpha u(x,t)$ *et* $v'(x,t) = \beta u'(x,t)$, alors

$$v_t = \alpha u_t,\ v_x = \alpha u_x,\ v_{xx} = \alpha u_{xx}$$

$$v'_t = \beta u'_t,\ v'_x = \beta u'_x,\ v'_{xx} = \beta u'_{xx}$$

et comme la somme de deux solutions est une solution alors, $v+v^{'}$ est une solution c'est-à-dire elle satisfait l'équation (2.5.1)

$$(v + v')_t = D(v + v')_{xx}$$

qui est équivalente à :

$$v_t + v'_t = D(v_{xx} + v'_{xx})$$

donc on a

$$\alpha u + \beta u' = D(\alpha u_{xx} + \beta u'_{xx})$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha u + \beta u') = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha u + \beta u')$$

Donc $\alpha u + \beta u'$est une solution de (2.5.1).

Proposition 2.5.5 *Chaque intégrant d'une solution de* (2.5.1) *est aussi une solution. Soit* $S(x,t)$ *une solution de l'équation* (2.5.1), *alors aussi* $S(x-y,t)$ *une solution et*

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,t)g(y)dy.$$

soit solution pour chaque fonction $g(y)$ *si l'intégrale converge.*

Preuve Soit $S(x,t)$ une solution, d'après la proposition (2.5.1) $S(x-y,t)$ est aussi une solution. Soit

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,t)g(y)dy$$

et on pose que l'intégrale converge, alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}(\int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,t)g(y)dy) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial S}{\partial t}(x-y,t)g(y)dy \\
&= -D\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x-y,t)g(y)dy \\
&= -D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,t)g(y)dy \\
&= -D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

donc v satisfait l'équation de diffusion.

On cherche une solution particulière (notée $Q(x,t)$) de l'équation (2.5.1) satisfait la condition initiale particulière donnée par

$$Q(x,0) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x > 0 \\ 0 \text{ pour } x < 0 \end{cases} \tag{2.5.3}$$

Remarque 2.5.1 *Cette condition ne varie pas sous dilatation.*

Q est déterminé en trois étapes.

Etape 1 : Selon la proposition (2.5.3) on sait que l'équation (2.5.1) et la condition initiale (2.5.3) ne changent pas sous les dilatations

$$\begin{cases} X = \sqrt{a}x \\ T = at \end{cases}$$

donc $Q(x,t)$ ne change pas dans le cas où

$$\frac{X}{\sqrt{T}} = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

Donc on cherche $Q(x,t)$ qui est de la forme

$$Q(x,t) = G(p) \ pour \ p = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}, \tag{2.5.4}$$

La fonction G doit être encore déterminée.

Etape 2 : On utilise les équations(2.5.1) *et* (2.5.4) et on formule une EDO pour G.

$$Q_t = \frac{dG}{dp}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{x}{2t\sqrt{4Dt}}G'(p),$$
$$Q_x = \frac{dG}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4Dt}}G'(p),$$
$$Q_{xx} = \frac{dQ_x}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{4Dt}G''(p),$$

ainsi

$$0 = Q_t - DQ_{xx} = -\frac{x}{2t\sqrt{4Dt}}G'(p) - \frac{1}{4Dt}G''(p)$$

d'où

$$\frac{1}{2t}(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}G'(p) + \frac{1}{2}G''(p)) = 0, \tag{2.5.5}$$

ce qui implique

$$\frac{1}{2}G''(p) + pG'(p) = 0,$$

enfin, on a l'EDO

$$G''(p) + 2pG'(p) = 0.$$

Maintenant on résout cette EDO

$$\frac{G''}{G'} = -2p. \tag{2.5.6}$$

Par une intégration des deux membres de (2.5.6), on obtient

$$\ln G' = -p^2 + c',\ (c' \in \mathbb{R})$$

donc

$$G'(p) = c_1 e^{-p^2},\ (c_1 \in \mathbb{R})\,. \tag{2.5.7}$$

Pour chercher l'expression de G,on intégre l'équation (2.5.7) de $-\infty$ à $\frac{x}{\sqrt{4Dt}}$ pour $t > 0$, ce qui donne

$$G(p) = \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} G'(p)dp = c_1 \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} e^{-p^2} dp + c_2, (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Etape 3 : On prend les limites de l'intégrale de $-\infty$ *à* $\frac{x}{\sqrt{4Dt}}$, on a donc

$$Q(x,t) = G'(p) = c_1 \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} e^{-p^2} dp + c_2\ ,\ pour\ t > 0$$

maintenant on cherche les constantes c_1 et c_2, pour cela on prend la condition initiale (2.5.3) et on exprime $Q(x,t)$ comme limite l'orsque $t \to 0$, alors on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} Q(x,t) &= \lim_{t\to 0} c_1 \textstyle\int_0^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} e^{-p^2} dp + c_2, \quad Pour\ x > 0 \\ &= c_1 \textstyle\int_0^{+\infty} e^{-p^2} dp + c_2 \\ &= \tfrac{\sqrt{\pi}}{2} c_1 + c_2 \\ &= 1 \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} Q(x,t) &= \lim_{t\to 0} c_1 \textstyle\int_0^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} e^{-p^2} dp + c_2, \quad Pour\ x < 0 \\ &= -c_1 \textstyle\int_0^{+\infty} e^{-p^2} dp + c_2 \\ &= -\tfrac{\sqrt{\pi}}{2} c_1 + c_2 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

En additionant (2.5.8) et (2.5.9) on trouve $c_2 = \frac{1}{2}$, et la soustraction de (2.5.8) et (2.5.9) donne $c_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, on a alors

$$Q(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} e^{-p^2} dp\ pour\ t > 0.$$

Soit $S = \frac{\partial Q}{\partial x}$, d'après la proposition (2.5.2) S est aussi une solution de (2.5.1). Pour une fonction $\Phi(x)$ arbitraire (différentiable) avec $\Phi(x) = 0$ pour $|y|$ assez grand, on définit

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,t)\Phi(y)dy\ pour\ t > 0. \tag{2.5.10}$$

Selon la proposition (2.5.5), u est aussi une solution de (2.5.1)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial Q}{\partial x}(x-y,t)\Phi(y)dy \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial Q}{\partial y}(x-y,t)\Phi(y)dy \end{aligned} \tag{2.5.11}$$

une intégration par partie de (2.5.11) donne

$$\begin{aligned} u(x,t) &= [Q(x-y,t)\Phi(y)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x-y,t)\Phi^{'}(y)dy \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x-y,t)\Phi^{'}(y)dy. \end{aligned}$$

On vérifie la condition initiale

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x-y,0)\Phi^{'}(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0.\Phi^{'}(y)dy + \int_{0}^{+\infty} \Phi^{'}(y)dy \\ &= \int_{0}^{+\infty} \Phi^{'}(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^{'}(y)dy \\ &= \Phi(x). \end{aligned}$$

En effet (2.5.10) correspond à la solution u où

$$S = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt} \ pour \ t > 0$$

c'est-à-dire

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2/4Dt}\Phi(y)dy \tag{2.5.12}$$

S est appelée "la solution fondamental" ou "fonction de Green".

2.6 Solution de l'équation de diffusion non homogène

Dans cette section on choisit l'équation de diffusion non homogène définie sur l'axe réel,

$$\left\{ \begin{array}{c} u_t - Du_{xx} = f(x,t) \ pour \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0 \ et \ f \ continue \\ u(x,0) = \Phi(x), \ x \in \mathbb{R} \end{array} \right. , \tag{2.6.1}$$

telque $\Phi(x)$ est la distribution initiale. On cherche à résoudre le problème de diffusion en incluant un terme source $f(x,t)$.

La solution du problème (2.6.1) est définie par :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,t)\Phi(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,t-s)f(y,s)dyds \tag{2.6.2}$$

Preuve

Par linéarité, on peut composer le problème (2.6.1) en deux problèmes :

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0, \; x \in \mathbb{R} \; et \; t > 0 \\ u(x,0) = \Phi(x), \; x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.6.3}$$

et

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = f(x,t), \; x \in \mathbb{R} \; et \; t > 0 \; et \; f \; continue \\ u(x,0) = 0, \; x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.6.4}$$

On définit la solution du problème (2.6.3) par

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,t)\Phi(y)dy.$$

Pour le prblème (2.6.4), on remplace le terme source par une condition initiale. Soit $v(x,t)$ la solution de l'équation de diffusion.

$$\begin{cases} v_t - Dv_{xx} = 0, \; x \in \mathbb{R} \; et \; t > 0 \\ v(x,t=s) = f(x,t=s), \; x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

et $v(x,t=s)$ la solution du problème (2.6.4).

$$v(x,t=s) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,t-s)f(y,s)dy.$$

Proposition 2.6.1 ***"Principe de Duhamel"*** *([1]) La fonction u définie par $u(x,t) = \int_0^t v(x,t,s)ds$ est solution du problème* (2.6.4).

En appliquant la proposition (2.6.1), on obtient donc la solution du problème initial (2.6.1)

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,t)\Phi(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,t-s)f(y,s)dyds.$$

Pour vérifier la condition initiale, on fait tendre $t \to 0$ dans (2.6.2), alors

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} u(x,t) &= \lim_{t\to 0}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,t)\Phi(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,t-s)f(y,s)dyds\right] \\
&= \lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,t)\Phi(y)dy + \int_0^0 \int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,-s)f(y,s)dyds \\
&= \lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,t)\Phi(y)dy \\
&= \Phi(x),
\end{aligned}$$

car $\int_{-\infty}^{+\infty} S(x-y,t)\Phi(y)dy$ est une solution de l'équation de diffusion homogène et par conséquent, (2.6.2) est la solution de(2.6.1).

2.7 Temps de diffusion

Théorème 2.7.1 *Soit u une soution de l'équation de diffusion de $1D$*

$$u_t = Du_{xx}$$

on suppose que $c = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx$ est indépendant de t (ce qui correspond à une constante"population"), et u est "petit à l'infini" qui signifie que

$$\lim_{x\to\infty} xu(x,t) = 0 \ et \ \lim_{x\to\infty} x^2\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0.$$

Soit $\sigma^2(t) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2u(x,t)dx$, alors,

$$\sigma^2(t) = 2Dt + \alpha, (\alpha \in \mathbb{R}\ ) \ pour \ tout \ t.$$

Dans le cas particulier d'une population initiale (c'est-à-dire pour $t=0$) qui est concenté au voisinage de $x=0$, on trouve

$$\sigma^2(t) \simeq 2Dt.$$

Remarque 2.7.1 *$\sigma^2(t)$ est aussi appelé le"second moment"(il est fini selon les hypothèses).*

Preuve

On utilise le fait que u est solution de l'équation de diffusion et on dérive $\sigma^2(t)$ par rapport à t on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{c}{D}\frac{d\sigma^2(t)}{dt} &= \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 u(x,t)dx \\
&= \frac{1}{D}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{\partial}{\partial t}u(x,t)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx
\end{aligned}$$

Par une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{c}{D}\frac{d\sigma^2(t)}{dt} &= \left[x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} 2x\frac{\partial u}{\partial x}dx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} 2x\frac{\partial u}{\partial x}dx
\end{aligned}$$

On intègre encore une autre fois par partie, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{c}{D}\frac{d\sigma^2(t)}{dt} &= [-2xu]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} 2u dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx \\
&= 2c.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d\sigma^2(t)}{dt} = 2D,$$

d'où

$$\sigma^2(t) = 2Dt + \alpha,\ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Dans le cas particulier d'une population initiale (c'est-à-dire pour $t = 0$) qui est concenté au voisinage de $x = 0$, par exemple, de telle sorte que $u(x,0) = 0$ pour tout $|x| > \varepsilon$., on a :

$$\sigma^2(0) = \alpha,$$

d'une part et d'autre part on a

$$\begin{aligned}
\sigma^2(0) &= \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 u(x,0)dx \\
&= \frac{1}{c}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x^2 u(x,0)dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc par identification, on a

$$\sigma^2(t) \simeq 2Dt.$$

Chapitre 3

Exemple d'application

Dans ce chapitre on s'intéresse à présenter quelques processus en chimie décrits par l'équation de réaction-diffusion.

3.1 Problème "l'équation de cinétique chimique"

On considère la réaction chimique

$$A \rightarrow B.$$

Ici, A et B sont les concentrations de deux éspèces chimiques. Le taux de réaction, c'est-à-dire de la consommation de A ou de la productions de B

$$\frac{dA}{dt} = -KA, \frac{dB}{dt} = KA.$$

C'est la loi d'action de masse. Le coefficient K est donné par la loi d'Arrhenius

$$K(T) = k_0 e^{-E/RT},$$

où k_0 est une constante, E est l'énergie d'activation, R est la constante de gaz, T est la température.

L'évolution de la température est donnée par l'équation

$$\frac{dT}{dt} = qK(T)A,$$

q est la production de chaleur.

Les distributions de la température et de la concentration en espace sont décrites par les équations de réaction-diffusion :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + qK(T)A \tag{3.1.1}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = d_A\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - K(T)A \tag{3.1.2}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = d_B\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + K(T)A \tag{3.1.3}$$

Ici, k est le coefficient de diffusion de la chaleur, $d_A$et d_B sont les coefficients de diffusion de masse.

Ce système d'équations doit être completée par les conditions initiales :

$$T(x,0) = T_0(x),\ A(x,0) = A_0(x),\ B(x,0) = B_0(x), \tag{3.1.4}$$

où $T_0(x)$ et $A_0(x)$ et $B_0(x)$ sont des fonctions données.

3.2 Résolution du problème (3.1)

Si on suppose que $d_A = d_B = d$ et on utilise la notation $C = A + B$, alors la somme des équations (3.1.2) et (3.1.3) donne

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 2d\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \tag{3.2.1}$$

La condition initiale est la suivante : $C(x,0) = A(x,0) + B(x,0)$. Si elle ne depend pas de x, c'est-à-dire $C(x,0) = C_0$ où C_0 est une constante, alors en appliquant la solution de l'équation de réaction -diffusion homogène (2.5.12)

$$C(x,t) = \frac{C_0}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2/4Dt}dy,$$

avec $D = 2d$, en faisant le changement de variable

$$z = \frac{x-y}{2\sqrt{Dt}},\ dz = -\frac{1}{2\sqrt{Dt}}dy.$$

on trouve

$$C(x,t) = -\frac{2\sqrt{Dt}C_0}{2\sqrt{\pi Dt}}\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-z^2}dz,$$

d'où

$$\begin{aligned} C(x,t) &= \frac{C_0\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} \\ &= C_0. \end{aligned}$$

Donc la solution de l'équation (3.2.1) est $C(x,t) \equiv C_0$ pour tout x et t. Alors,

$$A(x,t) = C_0 - B(x,t).$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a présenté les équations de réaction-diffusion qui font l'objet de plusieurs recherches de la physique mathématiques, la biologie et en particulier la chimie.

On a traiter un exemple où les équations de réaction-diffusion couplent des équations cinétiques de réaction chimique qui expriment l'évolution des concentrations des espèces chimiques et des équations de diffusion décrivant des phénomènes de transport.

Bibliographie

[1] S.Benzoni-Gavage : Calcul Différentiel et Équations Différentielles, Dunod, Paris, (2010).

[2] J. Crank : The Mathematics of Diffusion, Oxford, University Press (1980)

[3] B.Helffer : Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles, Université Paris-Sud, Version de Janvier - Mai, (2007).

[4] G.Koepler : Équations Aux Dérivées, Partielles, univ-Paris5.fr, (2001).

[5] C. Kuttler : Reaction-Diffusion Equations with Applications, Sommersemester 2011.

[6] A.Munnier : Espaces de Sobolev et Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles, Institut Élie Cartan, (2007-2008).

[7] V.Volpert : Dynamique des Systèmes non Linéaires, Ecole Centrale de Lyon, (2011-2012).