REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE MOSTAGANEM

Abdelhamid Ibn Badis

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques-Informatique

Option : Analyse fonctionnelle

Mémoire de Master intitulée

La fermeture de la somme de deux opérateurs fermés

Présentée par :

Driche Aicha

Soutenu le 26/05/2015

Devant les membres du jury :

Président : Mme Kheira Limam, M.C.B, Université de Mostaganem

Examinateur : Mr.Haoua Rabah, M.A.A, Université de Mostaganem

Encadreur : Mr.Ahmed Medeghri, Professeur, Université de Mostaganem

Année universitaire : 2014-2015

Table des matières

INTRODUCTION

L'objectif de ce mémoire est l'étude de la fermeture de la somme de deux opérateurs fermés. On résoud aussi le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \quad f'(t) + Af(t) = g(t) \ ; & \qquad t \in \,]0, \tau[\\ f(0) = 0 \end{cases} \tag{0.0.1}$$

dans l'espace à valeurs vectorielles dans E où $(-A)$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique borné sur E.

Tout ses résultats proviennent de l'article de **Nikolaos Roidos**"Preserving closedness of operators under summation" Journal of Functional Analysis 266 (2014) 6938–6953.

Nous donnons une condition suffisante pour que la somme de deux opérateurs fermés soit fermée. En particulier, nous étudions la somme de deux opérateurs sectoriels fermés dont la somme de leurs angles sectoriels est supérieure à π.

DA PRATO-GRISVARD, DORE -VENNI et NIKOLAOS-ROIDOS ont étudié le problème (0.0.1) et donné une condition suffisante pour que la somme soit fermée.

DA PRATO-GRISVARD :

Considèrent deux opérateurs sectoriels, le resultat est : la somme de deux opérateurs fermés est fermable.

DORE -VENNI :

Si les deux opérateurs sont sectoriels et BIP dans le cas des espaces UMD, le resultat est :

la somme est fermée.

NIKOLAOS-ROIDOS :

Si l'un des deux opérateurs sectoriels admet un H^{∞}-calcul et l'autre vérifie une condition similaire à la sectorialité classique (c'est le T-sectoriel qui est plus faible que la propriété BIP dans les espaces UMD), alors la somme est fermée.

Ce mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres.

Dans **le premier chapitre ;** on expose les notions principales utilisées : le H^{∞}-calcul, les espaces UMD et les opérateurs : bornés, sectoriels et les opérateurs BIP. On énonce les resultats abstraits de DA PRATO-GRISVARD, DORE -VENNI et

NIKOLAOS-ROIDOS.

Dans **le deuxième chapitre** ; on étudie la fermeture de la somme de deux opérateurs sectoriels fermés. On obtient le resultat de NIKOLAOS-ROIDOS

suivant :

Soit E un espace de Banach, A et B deux opérateurs sectoriels de résolvantes commutatives avec la somme de leurs angles sectoriels est supérieure à π.

Si un des opérateurs est $T-$sectoriel et l'autre admet un $H^{\infty}-$calcul borné, alors $A+B$ de domaine $D\left(A\right)\cap D\left(B\right)$ est fermé et $0\in\rho\left(A+B\right)$.

Ce dernier résultat généralise le résultat du même auteur cité dans le premier chapitre.

Dans **le troisième chapitre** ; on applique le resultat abstrait du deuxième chapitre au problème (0.0.1) pour obtenir la L^{P}-régularité maximale ie : A vérifie la $L^{P}-$régularité maximale si pour un p (et donc pour tout), on a pour tout $g \in L^P(0, \tau\,; E)$ la solution unique de

$$\begin{cases} f'(t) + Af(t) = g(t) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

vérifie

$$f(t) = \int_0^t e^{(x-t)A} g(x)\,dx \in W^{1,P}(0, \tau\,; E)\,.$$

Chapitre 1

Rappel et outils

Dans ce chapitre, on donne quelques notions de base utilisées pour réaliser ce travail.

1.1 Les espaces

1.1.1 L'espace H^{∞}

Définition 1.1.1 *Soit E un espace de Banach et $A \in P(\theta)$, $\theta \in]0,\pi[$. On définit $H_0^{\infty}(\theta)$*

par l'espace de toutes les fonctions holomorphes bornées

$$f : \mathbb{C} \backslash \Lambda_\theta \to \mathbb{C},$$

avec

$$\Lambda_\theta = \{z \in \mathbb{C} \colon \; |\arg z| \leq \theta\},$$

telles que :

$$|f(\lambda)| \leq c \left(\frac{|\lambda|}{1 + |\lambda|^2} \right)^{\eta},$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \Lambda_\theta$ et pour quelque $c > 0$, $\eta > 0$ dépend de f.

1.1.2 L'espace UMD

Transformation de Hilbert

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$, $p \in]1, \infty[$

$$\forall f \in L^P(\mathbb{R}) : \; Hf = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon(f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |s| < \frac{1}{\varepsilon}} \frac{f(x-s)}{s} ds.$$

Définition 1.1.2 *Soit X un espace de Banach. Si la transformation de Hilbert est continue*

de $L^P(\mathbb{R}, X)$ dans $L^P(\mathbb{R}, X)$ alors on dit que X possède la propriété UMD

(**U**nconditionality of **M**artingale **D**ifference).

Définition 1.1.3 *Un espace de Banach X est dit $\zeta-$convexe s'il existe une fonction*

$\zeta : X \times X \to \mathbb{R}$ vérifiant :

1. ζ est symétrique et biconvexe.
2. $\zeta(0, 0) > 0$.
3. $\zeta(x, y) \leq \|x + y\|$. $\forall x, y \in X$ avec $\|x\| = \|y\| = 1$.

Théorème 1.1.1 *Toute espace $\zeta-$convexe est UMD.*

Exemple 1.1.1
1. *Les espaces construit sur $L^P(\mathbb{R}, X)$ avec $1 < p < \infty$, telque X est UMD, sont des espaces UMD.*
2. *Les espaces de Hilbert sont des espaces UMD.*

Remarque 1.1.1 *Les espaes C, C^α... ne sont pas UMD.*

1.2 Les opérateurs

1.2.1 les opérateurs fermés

Soit A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$, inclus dans un espace de Banach complexe X à valeurs dans X.

Définition 1.2.1 *On dit que A est un opérateur linéaire fermé si et seulement si pour toute* suite

$$\{x_n\}_{n\in N} \subset D(A),$$

telle que

$$\begin{cases} x_n \to x \\ Ax_n \to y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in D(A) \\ Ax = y. \end{cases}$$

Définition 1.2.2 *On dit que A est un opérateur linéaire fermable si et seulement s'il admet* une extension fermée i.e pour tout suite

$$\{x_n\}_{n\in N} \subset D(A),$$

telle que la suite x_n tend vers 0 lorsque n tend vers ∞ et Ax_n tend vers y, alors $y = 0$.

1.2.2 L'opérateur sectoriel

Soit E un espace de Banach, $K \geq 1$ et $\theta \in [0, \pi[$, Soit $P_k(\theta)$ la classe des opérateurs linéaires à domaine dense dans E tel que si $A \in P_k(\theta)$ alors

$$\Lambda_\theta = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |\arg z| \leq \theta\} \cup \{0\} \subset \rho(-A) \ \ et \left\|(A+z)^{-1}\right\| \leq \frac{K}{1+|z|}, \forall z \in \Lambda_\theta.$$

Aussi, soit $P(\theta) = \bigcup\limits_k P_k(\theta)$.

Les éléments de $P(\theta)$ sont appelés opérateurs sectoriels de l'angle θ.

Si $A \in P_k(\theta)$, alors en utilisant l'argument d'extension sectoriel, on a :

$$\Omega_{k,\theta} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_\theta} \left(\left\{ z \in \mathbb{C}\colon \ |z-\lambda| \leq \frac{1+|\lambda|}{2K} \right\} \subset \rho(-A) \right) \text{ et } \left\| (A+z)^{-1} \right\| \leq \frac{2K+1}{1+|z|}, \forall z \in \Omega_{k,\theta}.$$

Pour tout $\rho \geq 0$ et $\theta \in]0, \pi[$, soit $\Gamma_{\rho,\theta}$ est la courbe orienté positive

$$\left\{ \rho e^{i\phi} \in \mathbb{C}\colon \theta \leq \phi \leq 2\pi - \theta \right\} \cup \left\{ re^{\pm i\theta} \in \mathbb{C} : r \geq \rho \right\}.$$

Si $\rho = 0$, noté $\Gamma_{\rho,\theta}$ par Γ_θ.

1.2.3 Calcul fonctionnel

Le but du calcul fonctionnel est de construire $f(T)$ quand T est un opérateur sectoriel et f est une fonction holomorphe complexe.

Pour tout $f \in H_0^\infty(\theta)$ on peut étendre des valeurs dans $\delta\Lambda_\theta$, et définir

un élément dans $L(E)$ par :

$$f(-A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} f(\lambda)(A+\lambda)^{-1} d\lambda.$$

1.2.4 L'opérateur BIP

Le puissance complexe d'un opérateur $A \in P(\theta)$ dans un espace de Banach E est définie par l'intégrale de Dunford.

Pour $\mathrm{Re}(z) < 0$ et $\rho > 0$ assez petit, on a :

$$A^z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho,\theta}} (-\lambda)^z (A+\lambda)^{-1} d\lambda.$$

les puissances imaginaires sont définies par la fermeture de :

$$\frac{\sin(i\pi t)}{i\pi t} \int_0^\infty \lambda^{it} (A+\lambda)^{-2} A \, d\lambda \quad \text{dans } D(A).$$

S'il existe quelques $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ telque :

$$A^{it} \in L(E) \quad et \quad \left\|A^{it}\right\| \leq \delta, \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon].$$

Alors

$$A^{it} \in L(E), \qquad \forall t \in \mathbb{R};$$

et il existe quelques constantes $M \geq 1$ et $\phi \geq 0$ telque :

$$\left\|A^{it}\right\| \leq Me^{\phi|t|}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, on dit que A admet une puissance imaginaire bornée (BIP : **B**ounded **I**maginary **P**owers) avec angle de puissance ϕ.

1.2.5 H^{∞}-calcul pour les opérateurs sectoriels

Définition 1.2.3 *On dit que l'opératreur A admet un $H^{\infty}-$calcul borné si :*

$$\|f(-A)\| \leq C_A \sup_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_\theta} |f(\lambda)|, \qquad \forall f \in H_0^{\infty}(\theta) \ ;$$

où $C_A > 0$ depend seulement de A.

Remarque 1.2.1 *Tout opérateur qui admet un $H^{\infty}-$calcul est un opérateur BIP.*

1.3 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires

1.3.1 Semi-groupe fortement continu

Définition 1.3.1 *Soit $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires dans X. On dit que cette* famille forme un semi-groupe fortement continu (C_0 semi-groupe) dans X si elle vérifie les propriétés suivantes

1. $G(0) = I$.
2. $\forall s,\, t \in \mathbb{R}^+ :\ G(t+s) = G(t) \cdot G(s)$.
3. $\forall x \in X \lim_{t \to 0^+} \|G(t)\, x - x\|_X = 0$

($G(t)\, x : \mathbb{R}^+ \to X$ est fortement continu en 0).

Remarque 1.3.1 *Si $t \in \mathbb{R}$, $\{G(t)\}$ est dit groupe.*

Exemple 1.3.1 *Soit $A \in L(X)$. Alors $t \to G(t) = e^{tA}$ est un groupe sur X.*

1.3.2 Semi-groupe analytique

Définition 1.3.2 *Soit $\triangle = \left\{z \in \mathbb{C}\ : \varphi_1 < \arg\ z < \varphi_2 \text{ et } \varphi_1 < 0 < \varphi_2\right\}$.*

La famille $\{T(z)\}_{z \in \triangle} \subset L(X)$ construit un semi-groupe holomorphe dans $\triangle$, si

1. $z \to T(z)$ est analytique dans Δ.
2. $T(0) = I$ et $\lim_{z \to 0} T(z)\, x = x, \quad \forall x \in X,\, z \in \triangle$.
3. $T(z_1 + z_2) = T(z_1) . T(z_2)$ pour $z_1,\, z_2 \in \triangle$.

Remarque 1.3.2 *Tout semi-groupe qui se prolonge en un semi-groupe* holomorphe dans D est dit analytique.

1.4 Somme des opérateurs

1.4.1 Approche de DAPRATO-GRISVARD

Définition 1.4.1 *On dit qu'un opérateur P vérifie l'hypotèse $(H\theta_P)$ si et seulement si*

$$\rho(P) \supset S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \pi - \theta\}$$

telque $\theta \in [0,\pi)$ et l'existence d'une fonction paire convexe

$$C_P :]-\pi + \theta,\, \pi - \theta[\to \mathbb{R}$$

telque :

$$\left\| (P+zI)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq \frac{C_P(\theta)}{|z|} \quad , \forall z \in S_\theta. \quad \arg z \neq \Phi.$$

Considérons l'équation abstraite :

$$Au + Bu = f;$$

supposons que :

(DG1) : $\exists\ R > 0$, $\exists\ \theta_A, \theta_B \in [0{,}\pi)$ telque :

1. A vérifie $(H\theta_A)$ et B vérifie $(H\theta_B)$
2. $\theta_A + \theta_B < \pi$.

(DG2) : La commutativité au sens des résolvantes :

$\forall\ \lambda \in \rho(A)$, $\forall \mu \in \rho(B)$:

$$(A+\lambda I)^{-1}(B+\mu I)^{-1} = (B+\mu I)^{-1}(A+\lambda I)^{-1}.$$

Le resultat principal de l'approche de **DAPRATO-GRISVARD** est le théorème suivant

Théorème 1.4.1 *Si $(DG1)$, $(DG2)$ sont vérifient et $f \in D_B(\theta, +\infty)$ alors il existe une*

unique solution u vérifient :

$$Au \in D_A(\theta, +\infty)\,, \; Bu \in D_B(\theta, +\infty)\,.$$

1.4.2 Approche de DORE-VENNI

Soit X un espace de Banach complexe et $A : D(A) \to X$, $B : D(B) \to X$ sont des opérateurs linéaires fermés à domaines denses dans X. considérons l'équation abstraite :

$$Au + Bu = f\,;$$

on suppose que :

(DV1) : $\mathbb{R}^- \cup \{0\} \subseteq \rho(A) \cap \rho(B)$ et il existe $M \geq 1$ telque :

$$\max\left\{ \left\| (A+t)^{-1}\,,\ (B+t)^{-1} \right\| \right\} \leq \frac{M}{1+t}, \, \forall t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\,.$$

(DV2) : Si $\lambda \in \rho(A)$, $\mu \in \rho(B)$ alors :

$$(\lambda - A)^{-1}(\mu - B)^{-1} = (\mu - B)^{-1}(\lambda - A)^{-1}.$$

(DV3) : $\forall\ s \in \mathbb{R}$. A^{is}, $B^{is} \in L(X)$. Les groupes $s \to A^{is}$, $s \to B^{is}$ sont fortement continue,

et on a :

$$\left\|A^{is}\right\| \leq Ke^{\theta_A|s|}, \quad \left\|B^{is}\right\| \leq Ke^{\theta_B|s|} \text{ avec } \theta_A + \theta_B < \pi.$$

Théorème 1.4.2 *Supposons que X est $\zeta-$convexe et que $(DV1)$, $(DV2)$, $(DV3)$ sont vérifiées alors*

$$(A+B)^{-1} \in L(X).$$

et

$$(A+B)^{-1} = \int_{\delta} \frac{A^{-z}B^{z-1}}{\sin \pi z} dz.$$

1.4.3 L'approche de NIKOLAOS ROIDOS

Le resultat principal de l'approche de **NIKOLAOS ROIDOS** est le théorème suivant :

Théorème 1.4.3 *Soit E un espace de Banach, $A \in P(\theta_A)$, $B \in P(\theta_B)$ et commutant*

aux sens des résoulvantes avec $\theta_A > \theta_B$ et $\theta_A + \theta_B > \pi$. Alors $A + B$ avec

$D(A+B) = D(A) \cap D(B)$ est fermable et l'équation suivante :

$$\overline{(A+B)}x = y, \qquad \forall y \in E$$

admet un unique solution

$$x \in \bigcap_{\theta<1} (E, D_A)_{\theta,q} \cap (E, D_B)_{\theta,q}, \qquad \forall q \in [1, \infty),$$

donnée par

$$x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\theta_B}} (A-z)^{-1}(B+z)^{-1} y \, dz.$$

Si

$$y \in \bigsqcup_{\theta>1} (E,\, D_A)_{\theta,p} \cup (E,\, D_B)_{\theta,p}\,, \qquad \forall q \in [1,\, \infty)\,,$$

alors $x \in D\,(A) \cap D\,(B)$.

De plus, Si A admet un $H^{e,\infty}_{L(E)}\,(\theta_A)\,-$calcul borné, alors $x \in D\,(A) \cap D\,(B), \quad \forall y \in E$

et $\overline{A+B} = A + B$.

1.5 Commentaire

La différence entre les trois approches :

L'approche de **DA PRATO-GRISVARD** s'applique sur un espace de Banach quelconque et utilise les opérateurs fermés. Le resultat de l'approche de **DA PRATO-GRISVARD** est :

la somme de deux opérateurs sectoriels fermés est fermable.

L'approche de **DORE-VENNI** s'applique sur les espaces UMD et utilise les opérateurs BIP. Le resultat de l'approche de DORE-VENNI est :

la somme de deux opérateurs BIP est fermée.

L'approche de **NIKOLAOS ROIDOS** s'applique sur les espaces UMD et utilise les opérateurs sectoriels et le $H^\infty-$calcul pour les opérateurs sectoriels. Le resultat de l'approche de **NIKOLAOS ROIDOS** est :

La somme de deux opérateurs sectoriels, telque l'un admet un $H^\infty-$calcul et l'autre est $T-$sectoriel,est fermée.

Chapitre 2

La fermeture de $A+B$

2.1 L'opérateur T-sectoriel et l'opérateur T^*-sectoriel

Définition 2.1.1 *Soit E un espace de Banach et $\theta \in [0,\, \pi[$, soit $T(\theta)$ un sous ensemble*

de $P(\theta)$ telque : si $A \in T(\theta)$ alors

$$\forall \phi \in [-\theta,\, \theta]\,,\ r \in \left[\frac{1}{e},\, 1\right] \text{ et } x_0,...,x_n \in E,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il existe une collection $a_0(t),...,\, a_n(t) \in \{f \in L^\infty(0,\, 2\pi) \,/\, \|f\|_\infty \leq 1\}$ dépendante de

$A,\, n,\, \phi,\, r$ et $x_0,...,\, x_n$ telque :

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} \left(I + re^{-k+i\phi}A\right)^{-1} x_k \right\|_{L^P(0,\, 2\pi\,;\, E)} \leq C_A^{p,\phi} \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, x_k \right\|_{L^P(0,\, 2\pi\,;\, E)} ;$$

avec $1 < p < \infty$, $C_A^{p,\phi} > 0$ une constante qui dépend de A, p et ϕ.

$T^*(\theta)$ est un sous-ensemble de $T(\theta)$ telque $a_0(t),...,\, a_n(t)$ sont indépendantes de $x_0,...,x_n$.

Les éléments de $T(\theta)$ et $T^*(\theta)$ sont appelés opérateur T-sectoriel et opérateur T^*-sectoriel d'angle θ respectivement.

2.2 Résultat principal :

On a le

Théorème 2.2.1 *Soit E un espace de Banach, $A \in P(\theta_A)$, $B \in P(\theta_B)$ de résolvantes*

commutatives avec

$$\theta_A + \theta_B > \pi.$$

Si un des opérateurs est $T-$sectoriel et l'autre admet un $H^\infty-$calcul borné, alors $A+B$

de domaine $D(A) \cap D(B)$ est fermé et $0 \in \rho(A+B)$.

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.1 *Soit E un espace de Banach, $A \in P(\theta)$, $\theta > 0$ et $x \in D\left(A^\phi\right)$ pour quelque*

$\phi \in (0, 1)$, alors pour tout $\theta' \in [0, \theta)$ et $\eta \in [0, \phi)$, $Z^\eta A (A+Z)^{-1} x$ est borné dans $\Lambda_{\theta'}$.

Preuve. Il existe un $y \in E$ telque :

$$x = A^{-\phi} y = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\delta+\Gamma_\theta} (-\lambda)^{-\phi} (A+\lambda)^{-1} y \, d\lambda.$$

Pour quelque $\delta > 0$ assez petit, où on utilise l'argument d'extension sectoriel,
donc pour tout $z \in \Lambda_{\theta'}$ et d'aprés le théorème de Cauhy, on a

$$\begin{aligned}
Z^\eta A (A+Z)^{-1} x &= Z^\eta A (A+Z)^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\delta+\Gamma_\theta} (-\lambda)^{-\phi} (A+\lambda)^{-1} y \, d\lambda \\
&= \frac{Z^\eta}{2\pi i} A \int\limits_{-\delta+\Gamma_\theta} (-\lambda)^{-\phi} (A+Z)^{-1} (A+\lambda)^{-1} y \, d\lambda \\
&= \frac{Z^\eta}{2\pi i} A \int\limits_{-\delta+\Gamma_\theta} (-\lambda)^{-\phi} \frac{1}{\lambda - Z} \left[(A+Z)^{-1} - (A+\lambda)^{-1} \right] y \, d\lambda
\end{aligned}$$

(D'aprés l'identité de la résolvante de Hilbert)

$$= \frac{Z^{\eta}}{2\pi i} A\left(A+Z\right)^{-1} \int\limits_{-\delta+\Gamma_{\theta}} \frac{\left(-\lambda\right)^{-\phi}}{\lambda - Z} y d\lambda - \frac{Z^{\eta}}{2\pi i} A \int\limits_{-\delta+\Gamma_{\theta}} \frac{\left(-\lambda\right)^{-\phi}}{\lambda - Z} \left(A+\lambda\right)^{-1} y \, d\lambda.$$

D'aprés le Théorème de Cauchy, on a

$$\frac{Z^{\eta}}{2\pi i} A\left(A+Z\right)^{-1} \int\limits_{-\delta+\Gamma_{\theta}} \frac{\left(-\lambda\right)^{-\phi}}{\lambda - Z} y \, d\lambda = 0\,;$$

(on a $\lambda = Z$ est un pôle simple et la fonction :

$$\lambda \rightarrow \frac{\left(-\lambda\right)^{-\phi}}{\lambda - Z} y;$$

est holomorphe sur une courbe simplement connexe et entourant un ouvert alors, d'aprés le théorème de Cauchy l'intégrale d'une fonction analytique sur un fermé $-\delta + \Gamma_{\theta}$ égal à zéro i.e

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\delta+\Gamma_{\theta}} \frac{\left(-\lambda\right)^{-\phi}}{\lambda - Z} y \, d\lambda &= 0 \\ &\Rightarrow \frac{Z^{\eta}}{2\pi i} A\left(A+Z\right)^{-1} \int\limits_{-\delta+\Gamma_{\theta}} \frac{\left(-\lambda\right)^{-\phi}}{\lambda - Z} y \, d\lambda = 0). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} Z^{\eta} A\left(A+Z\right)^{-1} x &= -\frac{Z^{\eta}}{2\pi i} A \int\limits_{-\delta+\Gamma_{\theta}} \frac{\left(-\lambda\right)^{-\phi}}{\lambda - Z} \left(A+\lambda\right)^{-1} y \, d\lambda \\ &= -\frac{Z^{\eta}}{2\pi i} \int\limits_{-\delta+\Gamma_{\theta}} \frac{\left(-\lambda\right)^{-\phi}}{\lambda - Z} \left(A+\lambda-\lambda\right)\left(A+\lambda\right)^{-1} y \, d\lambda \\ &= -\frac{Z^{\eta}}{2\pi i} \int\limits_{-\delta+\Gamma_{\theta}} \frac{\left(-\lambda\right)^{-\phi}}{\lambda - Z} y \, d\lambda + \frac{Z^{\eta}}{2\pi i} \int\limits_{-\delta+\Gamma_{\theta}} \frac{\lambda\left(-\lambda\right)^{-\phi}}{\lambda - Z} \left(A+\lambda\right)^{-1} y \, d\lambda \\ &= \frac{Z^{\eta}}{2\pi i} \int\limits_{-\delta+\Gamma_{\theta}} \frac{\lambda\left(-\lambda\right)^{-\phi}}{\lambda - Z} \left(A+\lambda\right)^{-1} y \, d\lambda. \end{aligned}$$

(Car $\int\limits_{-\delta+\Gamma_{\theta}} \frac{(-\lambda)^{-\phi}}{\lambda - Z} y \, d\lambda = 0$ d'aprés le théorème de Cauchy).

Le resultat est donné par la relation suivante :

$$Z^{\eta}A\left(A+Z\right)^{-1}x=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\delta+\Gamma_{\theta}}\frac{Z^{\eta}\lambda\left(-\lambda\right)^{-\phi}}{\lambda-Z}\left(A+\lambda\right)^{-1}y\ d\lambda;$$

En remplaçant λ par $(-\lambda)$, on obtient

$$\begin{aligned}
Z^{\eta}A\left(A+Z\right)^{-1}x &= \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{-\delta+\Gamma_{\theta}}\frac{Z^{\eta}\left(-\lambda\right)\left(\lambda\right)^{-\phi}}{\lambda+Z}\left(A-\lambda\right)^{-1}y\left(-d\lambda\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-\Gamma_{\theta}}\frac{Z^{\eta}\left(-\lambda\right)\left(\lambda\right)^{-\phi}}{-\lambda\left(1+\frac{Z}{\lambda}\right)}\left(A-\lambda\right)^{-1}yd\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-\Gamma_{\theta}}\frac{Z^{\eta}\lambda^{-\phi}}{1+\frac{Z}{\lambda}}\left(A-\lambda\right)^{-1}yd\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-\Gamma_{\theta}}\frac{\left(\frac{Z}{\lambda}\right)^{\eta}\lambda^{-(\phi-\eta)}}{1+\frac{Z}{\lambda}}\left(A-\lambda\right)^{-1}yd\lambda
\end{aligned}$$

D'où

$$Z^{\eta}A\left(A+Z\right)^{-1}x=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta-\Gamma_{\theta}}\frac{\left(\frac{Z}{\lambda}\right)^{\eta}\lambda^{-(\phi-\eta)}}{1+\frac{Z}{\lambda}}\left(A-\lambda\right)^{-1}y\ d\lambda.$$

Cette intégrale est convergente, alors

$$Z^{\eta}A\left(A+Z\right)^{-1}x$$

est borné dans $\Lambda_{\theta'}$ □

Preuve. [Preuve du théorème] Soit

$$\begin{aligned}
K &= \overline{\left(A+B\right)^{-1}}:\quad E\rightarrow\overline{D\left(A\right)\cap D\left(B\right)}=E \\
\xi &\rightarrow K\xi;
\end{aligned}$$

tel que :

$$K\xi=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\theta_B}}\left(A-Z\right)^{-1}\left(B+Z\right)^{-1}dz.$$

Il existe une condition suffisante pour la fermeture de $A+B$ c'est : si K ramène dans $D\left(A\right)$ ou $D\left(B\right)$ alors

$$A+B$$

est fermé. (voir le théorème(1.4.3) chapitre 01).

Il s'agit de montrer que :

$$\begin{aligned} \xi &\in E : K\xi \in D(A) \ \ (\text{ou } D(B)\,) \\ i.e \ \ \|AK\xi\| &< \infty \ (\text{ou } \|BK\xi\| < \infty). \end{aligned}$$

D'aprés l'argument d'extension sectoriel et le théorème de Cauchy, on peut remplaçer la courbe Γ_{θ_B} dans la définition de K par $\pm\delta + \Gamma_{\theta_{B-\varepsilon}}$ pour quelque $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ suffisament proche de zéro.

On prend $\omega \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(\omega) < 0$, $\rho > 0$ assez petit, on a

$$\begin{aligned} KA^{\omega} &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\delta+\Gamma_\theta} (A-Z)^{-1}(B+Z)^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\rho,\theta_A}} (-\lambda)^{\omega}(A+\lambda)^{-1}\ d\lambda\right) dz \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{-\delta+\Gamma_\theta}\int\limits_{\Gamma_{\rho,\theta_A}} \left((A-Z)^{-1}(A+\lambda)^{-1}\right)(B+Z)^{-1}(-\lambda)^{\omega}\ d\lambda\ dz \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{-\delta+\Gamma_\theta}\int\limits_{\Gamma_{\rho,\theta_A}} \left[(A-Z)^{-1}-(A+\lambda)^{-1}\right](Z+\lambda)^{-1}(B+Z)^{-1}(-\lambda)^{\omega}\ d\lambda\ dz \end{aligned}$$

(D'aprés l'identité de la résolvante de Hilbert).

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{-\delta+\Gamma_\theta}\int\limits_{\Gamma_{\rho,\theta_A}} (A-Z)^{-1}(B+Z)^{-1}(Z+\lambda)^{-1}(-\lambda)^{\omega}\ d\lambda\ dz \\ &\quad -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{-\delta+\Gamma_\theta}\int\limits_{\Gamma_{\rho,\theta_A}} (A+\lambda)^{-1}(B+Z)^{-1}(Z+\lambda)^{-1}(-\lambda)^{\omega}\ d\lambda\ dz \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{-\delta+\Gamma_\theta}\int\limits_{\Gamma_{\rho,\theta_A}} (A-Z)^{-1}(B+Z)^{-1}(Z+\lambda)^{-1}(-\lambda)^{\omega}\ d\lambda\ dz \\ &\quad -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\Gamma_{\rho,\theta_A}}\int\limits_{-\delta+\Gamma_\theta} (A+\lambda)^{-1}(B+Z)^{-1}(Z+\lambda)^{-1}(-\lambda)^{\omega}\ dz\ d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\Gamma\rho,\theta_A} (A-\lambda)^{-1}(B+\lambda)^{-1}\lambda^{\omega}\ d\lambda. \end{aligned}$$

implique que

$$\begin{aligned}
AKA^{\omega} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma_{\rho,\theta_A}} A\left(A-\lambda\right)^{-1}\left(B+\lambda\right)^{-1}\lambda^{\omega}\,d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma_{\rho,\theta_A}} \left(A-\lambda+\lambda\right)\left(A-\lambda\right)^{-1}\left(B+\lambda\right)^{-1}\lambda^{\omega}\,d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma_{\rho,\theta_A}} \left(B+\lambda\right)^{-1}\lambda^{\omega}\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma_{\rho,\theta_A}} \left(A-\lambda\right)^{-1}\left(B+\lambda\right)^{-1}\lambda^{1+\omega}\,d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma_{\rho,\theta_A}} \left(A-\lambda\right)^{-1}\left(B+\lambda\right)^{-1}\lambda^{1+\omega}\ \ d\lambda.
\end{aligned}$$

(Car $\frac{1}{2\pi i}\int_{-\Gamma_{\rho,\theta_A}} \left(B+\lambda\right)^{-1}\lambda^{\omega}\,d\lambda = 0$ d'aprés le théorème de Cauchy).

Comme l'intégrale $\int_{-\Gamma_{\rho,\theta_A}} \left(B+\lambda\right)^{-1}\lambda^{1+\omega}\ \ d\lambda$ est absolument convergente alors AKA^{ω} est borné.

Donc

$$KA^{\omega} \in D\left(A\right).$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
KB^{\omega} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta+\Gamma_{\theta_B-\varepsilon}} \left(A-Z\right)^{-1}\left(B+Z\right)^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\rho,\theta_B}} \left(-\lambda\right)^{\omega}\left(B+\lambda\right)^{-1}d\lambda\right)dz \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{2}\int_{\delta+\Gamma_{\theta_B-\varepsilon}}\int_{\Gamma_{\rho,\theta_B}} \left(A-Z\right)^{-1}\left[\left(B+Z\right)^{-1}\left(B+\lambda\right)^{-1}\right]\left(-\lambda\right)^{\omega}\ \ d\lambda\ dz \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{2}\int_{\delta+\Gamma_{\theta_B-\varepsilon}}\int_{\Gamma_{\rho,\theta_B}} \left(A-Z\right)^{-1}\left[\left(B+Z\right)^{-1}-\left(B+\lambda\right)^{-1}\right]\left(\lambda-Z\right)^{-1}\left(-\lambda\right)^{\omega}\ \ d\lambda\ dz
\end{aligned}$$

(D'aprés l'identité de la résolvante de Hilbert).

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\delta+\Gamma_{\theta_B-\varepsilon}} \int\limits_{\Gamma_{\rho,\theta_B}} (A-Z)^{-1}(B+Z)^{-1}(\lambda-Z)^{-1}(-\lambda)^{\omega}\ d\lambda\ dz \\
&\quad -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\delta+\Gamma_{\theta_B-\varepsilon}} \int\limits_{\Gamma_{\rho,\theta_B}} (A-Z)^{-1}(B+\lambda)^{-1}(\lambda-Z)^{-1}(-\lambda)^{\omega}\ d\lambda\ dz \\
&= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\delta+\Gamma_{\theta_B-\varepsilon}} \int\limits_{\Gamma_{\rho,\theta_B}} (A-Z)^{-1}(B+Z)^{-1}(\lambda-Z)^{-1}(-\lambda)^{\omega}\ d\lambda\ dz \\
&\quad -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\Gamma_{\rho,\theta_B}} \int\limits_{\delta+\Gamma_{\theta_B-\varepsilon}} (A-Z)^{-1}(B+\lambda)^{-1}(\lambda-Z)^{-1}(-\lambda)^{\omega}\ dz\ d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\rho,\theta_B}} (A-\lambda)^{-1}(B+\lambda)^{-1}(-\lambda)^{\omega}\ d\lambda.
\end{aligned}
$$

implique que

$$
\begin{aligned}
AKB^{\omega} &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\rho,\theta_B}} A(A-\lambda)^{-1}(B+\lambda)^{-1}(-\lambda)^{\omega}\ d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\rho,\theta_B}} (A-\lambda+\lambda)(A-\lambda)^{-1}(B+\lambda)^{-1}(-\lambda)^{\omega}\ d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\rho,\theta_B}} (B+\lambda)^{-1}(-\lambda)^{\omega}\ d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\rho,\theta_B}} (A-\lambda)^{-1}(B+\lambda)^{-1}(-\lambda)^{1+\omega}\ d\lambda \\
&= B^{\omega} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\rho,\theta_B}} (A-\lambda)^{-1}(B+\lambda)^{-1}(-\lambda)^{1+\omega}\ d\lambda.
\end{aligned}
$$

On a

$$\Gamma_{\theta_A} = \Gamma_{\rho,\theta_A};$$

pour $\rho = 0$ et

$$\Gamma_{\theta_A} = \left\{re^{\pm i\theta} \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\right\};$$

avec $r = e^k$, $\qquad k = 0, 1, ..., n-1.$

La courbe Γ_{θ_A} est décomposée en trois parties, on a :

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{Z \in \Gamma_{\theta_A} : |\lambda| \leq 1\} \quad ; \\
\Omega_2 &= \{Z \in \Gamma_{\theta_A} : 1 < |\lambda| < e^n\} \quad ; \\
\Omega_3 &= \{Z \in \Gamma_{\theta_A} : |\lambda| \geq e^n\} \quad .
\end{aligned}$$

D'aprés ça on a la subdivision suivante de l'intervalle $[1, e^n]$, telque si on pose

$$\omega = -(\theta + \phi) + it;$$

on a

$$\begin{aligned}
AKA^{-(\theta+\phi)+it} &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\Gamma_\rho} (A-\lambda)^{-1} (B+\lambda)^{-1} \lambda^{1-(\theta+\phi)+it} \, d\lambda \\
&\Rightarrow AKA^{-\theta+it} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\Gamma_\rho} A^{\phi} (A-\lambda)^{-1} (B+\lambda)^{-1} \lambda^{1-(\theta+\phi)+it} \, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\Gamma_{\rho,|\lambda|\leq 1}} A^{\phi} (A-\lambda)^{-1} (B+\lambda)^{-1} \lambda^{1-(\theta+\phi)+it} \, d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\Gamma_{\rho,1\leq|\lambda|\leq e^n}} A^{\phi} (A-\lambda)^{-1} (B+\lambda)^{-1} \lambda^{1-(\theta+\phi)+it} \, d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\Gamma_{\rho,e^n\leq|\lambda|}} A^{\phi} (A-\lambda)^{-1} (B+\lambda)^{-1} \lambda^{1-(\theta+\phi)+it} \, d\lambda.
\end{aligned}$$

L'intégrale

$$\int\limits_{-\Gamma_\rho} A^{\phi} (A-\lambda)^{-1} (B+\lambda)^{-1} \lambda^{1-(\theta+\phi)+it} \, d\lambda,$$

est absolument convergente d'aprés le lemme précédent.

De même, pour $\rho = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
AKA^{-\theta+it} &= B^{-\theta+it} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\theta_{B-\varepsilon}}} (A-\lambda)^{-1} B^{\phi} (B+\lambda)^{-1} (-\lambda)^{1-(\theta+\phi)+it} \ d\lambda \\
&= B^{-\theta+it} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\theta_{B-\varepsilon}, |\lambda| \leq 1}} (A-\lambda)^{-1} B^{\phi} (B+\lambda)^{-1} (-\lambda)^{1-(\theta+\phi)+it} \ d\lambda \\
&= B^{-\theta+it} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\theta_{B-\varepsilon}, 1 \leq |\lambda| \leq e^n}} (A-\lambda)^{-1} B^{\phi} (B+\lambda)^{-1} (-\lambda)^{1-(\theta+\phi)+it} \ d\lambda \\
&= B^{-\theta+it} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\theta_{B-\varepsilon}, e^n \leq |\lambda|}} (A-\lambda)^{-1} B^{\phi} (B+\lambda)^{-1} (-\lambda)^{1-(\theta+\phi)+it} \ d\lambda.
\end{aligned}$$

On applique B^{-it} dans :

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\theta_{B-\varepsilon}, e^n \leq |\lambda|}} (A-\lambda)^{-1} B^{\phi} (B+\lambda)^{-1} (-\lambda)^{1-(\theta+\phi)+it} \ d\lambda;$$

et on écrit la norme dans L^P, on obtient :

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{\frac{1}{P}} \left\| AKB^{-\theta} u \right\| \leq \\
& (2\pi)^{\frac{1}{P}} \left\| B^{-\theta} u \right\| \\
& + \left\| \frac{1}{2\pi i} B^{-it} \int\limits_{\Gamma_{\widetilde{\theta}_B, |\lambda| \leq 1}} (A-\lambda)^{-1} B^{\phi} (B+\lambda)^{-1} (-\lambda)^{1-(\theta+\phi)+it} u \ d\lambda \right\|_{L^P(0,2\pi;E)} \\
& + \left(\sup_{t \in (0,2\pi)} \left\| B^{-it} \right\| \right) \times \\
& \left\| - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\widetilde{\theta}_B, 1 < |\lambda| < e^n}} (A-\lambda)^{-1} B^{\phi} (B+\lambda)^{-1} (-\lambda)^{1-(\theta+\phi)+it} u \ d\lambda \right\|_{L^P(0,2\pi;E)} \\
& + \left\| \frac{1}{2\pi i} B^{-it} \int\limits_{\Gamma_{\widetilde{\theta}_B, |\lambda| \geq e^n}} (A-\lambda)^{-1} B^{\phi} (B+\lambda)^{-1} (-\lambda)^{1-(\theta+\phi)+it} u \ d\lambda \right\|_{L^P(0,2\pi;E)}.
\end{aligned}$$

Quand $n \to \infty$, il existe une constante $C_{A,B} > 0$ indépendante de θ telque :

$$\left\| AKB^{-\theta} u \right\| \leq C_{A,B} \left\| u \right\|.$$

ce qui implique que :

$$\|AKu\| \leq C_{A,B} \|u\|, \qquad \forall u \in D(A);$$

quand θ tend vers zéro.
D'ou le resultat. $\square$

Remarque 2.2.1

1. Ce théorème peut être généralisé si $p = 1$ et on remplace e^{ikt} par e^{imkt} dans la définition de $T-$sectoriel.
2. La même approche peut être utilisée pour le cas général du calcul fonctionel(voir [6]).

Théorème 2.2.2 *Soit E un espace de Banach UMD, A un opérateur sectoriel BIP dans*

E d'angle de puissance ϕ. Alors A est $T-$sectoriel d'angle θ pour tout $\theta < \pi - \phi$.

Preuve. Si A est BIP(d'angle ϕ), alors on écrit sa résolvante en fonction de sa puissance imaginaire), on a

$$(I + \lambda A)^{-1} x = \frac{1}{2\pi i} PV \int_{\mathbb{R}} (\lambda A)^{-is} \frac{\pi}{\sin\ h(\pi s)} x ds + \frac{1}{2} x, \qquad \forall x \in E;\ \rho, \lambda > 0.$$

et

$$\left(I + \rho e^{i\theta} A\right)^{-1} = (I + \rho A)^{-1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} (\rho A)^{-is} \frac{\pi \left(e^{\theta s} - 1\right)}{\sin\ h(\pi s)} ds\pi,$$

telque PV : est la valeur principale de Cauchy pour tout $p \in [1, \infty[$, $\theta \in]\phi - \pi, \pi - \phi[$, $r \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$ et $x_0, \ldots, x_N \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
On a

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{K=0}^{n} e^{ikt} \left(I + re^{-k+i\theta} A\right)^{-1} x_k \right\|_{L^P(0,2\pi\,;E)} \\
\leq\ & \left\| \sum_{K=0}^{n} e^{ikt} \left(I + re^{-k} A\right)^{-1} x_k \right\|_{L^P(0,2\pi\,;E)} \\
& + \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \sum_{K=0}^{n} e^{ikt} \left(re^{-k} A\right)^{-is} \frac{\pi \left(e^{\theta s} - 1\right)}{\sin\ h\left(\pi s\right)} x_k \ ds \right\|_{L^P(0,2\pi\,;E)} \\
\leq\ & \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \sum_{K=0}^{n} e^{ikt} \left(re^{-k} A\right)^{-is} \left(\frac{\pi}{\sin\ h\left(\pi s\right)} - \frac{X\left(s\right)}{s} \right) x_k \ ds \right\|_{L^P(0,2\pi\,;E)} \\
& + \left\| \frac{1}{2\pi i} PV \int_{\mathbb{R}} \sum_{K=0}^{n} e^{ikt} \left(re^{-k} A\right)^{-is} \frac{X\left(s\right)}{s} x_k \ ds \right\|_{L^P(0,2\pi\,;E)} \\
& + \left\| \sum_{K=0}^{n} \frac{e^{ikt}}{2} x_k \right\|_{L^P(0,2\pi\,;E)} \\
& + \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \sum_{K=0}^{n} e^{ikt} \left(re^{-k} A\right)^{-is} \frac{\pi \left(e^{\theta s} - 1\right)}{\sin\ h\left(\pi s\right)} x_k \ ds \right\|_{L^P(0,2\pi\,;E)},
\end{aligned}$$

Où $X\left(s\right)$ est la fonction caractéristique sur l'intervale $[-\pi,\ \pi]$.

On a les estimations suivants :

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \sum_{K=0}^{n} e^{ikt} \left(re^{-k} A\right)^{-is} \left(\frac{\pi}{\sin\ h\left(\pi s\right)} - \frac{X\left(s\right)}{s} \right) x_k \ ds \right\|_{L^P(0,2\pi\,;E)} \\
\leq\ & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left\| A^{is} \right\| \left| \frac{\pi}{\sin\ h\left(\pi s\right)} - \frac{X\left(s\right)}{s} \right| \left\| \sum_{K=0}^{n} e^{ik(s+t)} x_k \right\|_{L^P(0,2\pi\,;E)} ds \\
& \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} \left\| A^{is} \right\| \left| \frac{\pi}{\sin\ h\left(\pi s\right)} - \frac{X\left(s\right)}{s} \right| \left(1 + |s|\right) ds \right) \sup_{s\in\mathbb{R}} \left\| \sum_{K=0}^{n} \frac{e^{ik(s+t)}}{1+|s|} x_k \right\|_{L^P(0,2\pi\,;E)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{K=0}^{n} e^{ikt} \left(re^{-k}A\right)^{-is} \frac{\pi \left(e^{\theta s} - 1\right)}{\sin\ h\left(\pi s\right)} x_k \ ds \right\|_{L^P(0,2\pi\,;E)} \\
\leq\ & \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \left\|A^{is}\right\| \left| \frac{\pi \left(e^{\theta s} - 1\right)}{\sin\ h\left(\pi s\right)} \right| \left\| \sum_{K=0}^{n} e^{ik(s+t)} x_k \right\|_{L^P(0,2\pi\,;E)} ds \\
\leq\ & \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left\|A^{is}\right\| \left| \frac{\pi \left(e^{\theta s} - 1\right)}{\sin\ h\left(\pi s\right)} \right| \left(1 + |s|\right)\ ds \right) \sup_{s \in \mathbb{R}} \left\| \sum_{K=0}^{n} \frac{e^{ik(s+t)}}{1+|s|} x_k \right\|_{L^P(0,2\pi\,;E)}.
\end{aligned}$$

Finalement, pour cette estimation on utilise la propriété UMD de l'espace E (la bornitude de la transformation de Hilbert).

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{2\pi i} PV \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{K=0}^{n} e^{ikt} \left(re^{-k}A\right)^{-is} \frac{X\left(s\right)}{s} x_k \ ds \right\|_{L^P(0,2\pi\,;E)} \\
=\ & \left\| \frac{1}{2\pi i} PV \int\limits_{\mathbb{R}} \sum_{K=0}^{n} (-1)^k\, e^{ikt} \left(re^{-k}A\right)^{-is} \frac{X\left(s\right)}{s} x_k \ ds \right\|_{L^P(-\pi,\pi\,;E)} \\
& \left\| (rA)^{it} \left(rA\right)^{-it} \frac{1}{2\pi i} PV \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{K=0}^{n} (-1)^k \frac{e^{ikt}}{s} \left(re^{-k}A\right)^{is} x_k \ ds \right\|_{L^P(-\pi,\pi\,;E)} \\
\leq\ & \left(\sup_{t \in [-\pi,\ \pi]} \left\|A^{it}\right\| \right) \left\| \frac{1}{2\pi i} PV \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{K=0}^{n} (-1)^k \frac{e^{ik(t-s)}}{s} \left(rA\right)^{i(s-t)} x_k \ ds \right\|_{L^P(-\pi,\pi\,;E)} \\
\leq\ & C \left(\sup_{t \in [-\pi,\ \pi]} \left\|A^{it}\right\| \right)^2 \left\| \sum_{K=0}^{n} e^{ikt} x_k \right\|_{L^P(0,2\pi\,;E)}.
\end{aligned}$$

De ces inégalités, on obtient qu'il existe une constante C qui depend de A, n, ϕ, r et $x_0, ..., x_n$ telque :

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} \left(I + re^{-k+i\theta}A\right)^{-1} x_k \right\|_{L^P(0,2\pi;E)} \leq C \left\| \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} x_k \right\|_{L^P(0,2\pi;E)},$$

avec $a_k = e^{ikt} \in L^\infty\left(0, 2\pi\right)$ et $\left\|e^{ikt}\right\| = 1 \leq 1$.

D'ou A est $T-$sectoriel. □

Remarque 2.2.2 *La propriété BIP est plus forte que la $T-$sectorialité dans un espace UMD.*

Chapitre 3

L^p−régularité maximale

Soit E un espace de Banach et soit l'opérateur B défini dans $L^P(0, \tau\,; E)$ par

$$\begin{aligned} B &: \quad D(B) = \left\{ f(t) \in W^{1,P}(0, \tau\,; E) / f(0) = 0, \forall p \in]1, \infty[\,, \forall \tau > 0 \right\} \\ B &= \delta_t. \end{aligned}$$

On calcule la résolvante de B

Pour calculer la résolvante de B, il suffit de résoudre l'équation spectrale suivante

$$Bf(t) + \lambda f(t) = g(t),$$

ou bien le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} Bf(t) + \lambda f(t) = g(t) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} f'(t) + \lambda f(t) = g(t). \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$f(t) = \int_0^t e^{\lambda(x-t)} g(x)\, dx,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

$\Rightarrow$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \exists (B - \lambda I)^{-1} \Rightarrow \rho(B) = \mathbb{C} \ \Rightarrow \sigma(B) = \phi.$$

On a

$$\left\| (B + \lambda)^{-1} \right\| \leq \frac{1 - e^{-\operatorname{Re}(\lambda)\tau}}{\operatorname{Re}(\lambda)}, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Donc

$$B \in P(\phi), \quad \forall \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Si E un espace UMD alors B admet un $H^\infty-$calcul borné, pour

$$f(t) = e^{ct} h(t), \qquad c \in \mathbb{R};$$

dans (0.0.1).

On peut considère $A \in P(\theta)$ avec $\theta > \frac{\pi}{2}$ et A un générateur infinitisimal d'un

semi-groupe analytique.

Théorème 3.0.3 *Soit E un espace de Banach UMD et A un opérateur sectoriel dans*

E d'angle supérieur à $\frac{\pi}{2}$. Si pour quelque $p \in]1, \infty[$ et $\tau > 0$ finit, l'extension de A dans

$L^P(0, \tau; E)$ est $T-$sectoriel d'angle supérieur à $\frac{\pi}{2}$, alors A admet une L^P-régularité maximale.

Remarque 3.0.3 *Si A est T^*-sectoriel dans E, alors l'extension de A est T^*-sectoriel dans $L^P(0, \tau; E)$ avec*

$$(Af)(t) = Af(t).$$

Corollaire 3.0.1 *Dans un espace de Banach UMD, tout opérateur T^*-sectoriel d'angle supérieur à $\frac{\pi}{2}$ admet une L^P-régularité maximale.*

Corollaire 3.0.2 *Si E un espace de Banach UMD et A un opérateur sectoriel BIP dans E d'angle de puissance $\phi < \frac{\pi}{2}$, alors l'extension de A dans $L^P(0, \tau; E)$ admet une autre puissance imaginaire borné avec la même angle de puissance ϕ. Donc les théorèmes* (2.2.2) *et* (3.0.3) *précédent implique que A admet une L^P-régularité maximale.*

Corollaire 3.0.3 *Soit E un espace de Hilbert. Pour $p = 2$ la T^*-sectorielité équivalente à la sectorielité standard (il suffit de choisir $a_k(t) = e^{ikt}$ pour toute k).*

Dans l'espace de Hilbert, tout générateur infinitisimal d'un semi groupe analytique borné admet une L^P-régularité maximale.

Bibliographie

[1] **H.Amann,** Linear and Quasilinear parabolic problems, Springer Monogr.Math., vol.89, Birkhäuser Verlag, 1995.

[2] **M.Cowling, I. Doust, A.McIntosg, A.Yagi,** Banach space operators with a bounded H^{∞}functional calculus, Austral. Math.Soc.Lect. Ser.60 (1) (1996) 51-89.

[3] **G.Da Prato,P.Grisvard,** Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles, J. Math. Pures Appl. (9) 54 (3) (1975) 305-387.

[4] **G.Dore, A.Venni**, On the closedness of the sum of two closed operators, Math. Z. 196 (1987) 189-201.

[5] **M.Hasse**, The Functional calculus for sectorial operators, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 169, Birkhäuser, 2006.

[6] **N.Kalton, L.Weis**, The H^{∞}-calculus and sums of closed operators, Math. Ann. 321 (2) (2001) 319-345.

[7] **Nikolaos Roidos, On the inverse of the sum of two sectorial operators, J.Funct.Ann. 265 (2) (2013) 208-222.**

[8] **Nikolaos Roidos**"Preserving closedness of operators under summation" Journal of Functional Analysis 266 (2014) 6938–6953.