Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire de Master

Thème

Sur la construction d'une extension autoadjointe d'un opérateur symétrique

MAKHELOUF SOUMIA

Soutenu le /05/2015

Année Universitaire 2014 -2015

Table des matières

Remerciements

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire on d'écrit les extensions fermées d'un opérateur symétrique arbitraire,et en particulier ses extensions auto adjointes. Ce probléme se ramène à la déscription des extensions d'une isometrie par la transformation de Cayley.

INTRODUCTION

En mécanique quantique, les observables physiques sont associées à des opérateurs auto-adjoints. Cependant lorsque l'espace de configuration est borné, et donc par extension également lorsque l'espace de configuration n'est pas borné, des opérateurs symétriques ne sont pas nécessairement auto-adjoints. Au travers d'une identification précise de l'espace des fonctions sur lesquels ces opérateurs agissent, par exemple au travers d'un choix particulier de conditions aux bords, des extensions auto-adjointes peuvent être construites. Il existe une approche générale à ce problème basée sur la théorie des indices de déficience de von Neumann. Cependant dans un article récent ces questions sont discutées d'une manière intuitivement et physiquement plus transparente, au travers d'exemples sur un intervalle fini.

Dans ce mémoire on s'intéresse aux extensions fermés d'un opérateur symétrique et en particulier les extensions auto adjointes.

Ce mémoire est divisé en deux chapitres.

Dans le premier, on rappellera les notions et définition de base sur les opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert, une étude détaillée sur les propriétés des opérateurs fermés, fermables, symétriques et on remarque tout d'abord que :

-Tout opérateur fermé est fermable mais l'invers est faux.

-Les opérateurs auto-adojoints sont une classe d'opérateur de symétrique étant un opérateur T de domaine D vérifiant $\forall\ x, y \in D\,(T)\ \ \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle\,.$

-si T symérique, T est fermable.

Dans le deuxième chapitre quant à lui il est consacré au problème de construction d'une extension d'un opérateur symétrique, ce problème est équivalent au problème de l'extension d'un opérateur isométrique qui est sa transformation de CAYLEY, et on sait que cette extension est auto-adjointe si les indices de défaut $\aleph_{\lambda},\ \aleph_{\overline{\lambda}}$ de l'opérateur symétrique T sont égaux.

On termine par la bibliographie.

Chapitre 1

Opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert

1.1 Définitions des opérateurs non bornés

Définition 1.1.1 *Un opérateur linéaire T défini de H dans H est dit borné si et seulement si :*

$$\exists c \succ 0;\ \|Tx\| \leq c\,\|x\|\,,\ \forall x \in H$$

Définition 1.1.2 *Soit un espace de Hilbert et T un opérateur dans H c'est à dire une application linéaire défini sur un espace vectoriel $D\ (T) \subset H$ et dont l'mage $R\,(T)$ est contenue dans H. Dans la suite, on suppose que $D\ (T)$ est dense dans H, alors T est un opérateur non borné avec une domaine de définition est dense.*

Exemple 1.1.1 *On considère dans $L^2\,(\mathbb{R})$ l'opérateur T qui défini par l'équation*

$$Tf = -i\frac{df}{dx},$$

tel que

$$D\,(T) = \left\{f \in L^2\,(\mathbb{R})\,/Tf \in L^2\,(\mathbb{R})\right\}$$

Montrons que l'opérateur T n'est pas borné :

Soit

$$f_n\,(x) = \begin{cases} \sin nx\ si\ \ [0, 2\pi]\,, \\ 0\ ailleurs. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|f_n(x)\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\ dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 nx\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{1-\cos 2nx\}\ dx = \pi, \end{aligned}$$

donc $\|f_n(x)\|_2 = \sqrt{\pi}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Alors on a

$$f_n'(x) = \begin{cases} n\cos nx \ si\ \ ]0, 2\pi[\,, \\ n'est\ pas\ défini\ si\ x \in \{0, 2\pi\}\,, \\ 0\ ailleurs. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \|Tf_n\|_2^2 &= \left\|-if_n'(x)\right\|_2^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} -if_n'(x)\ dx = \int_0^{2\pi} n^2\cos^2 nx\ dx = n^2\pi = n^2\|f_n\|_2^2\,, \end{aligned}$$

donc $\|Tf_n\|_2 = n\|f_n\|_2$ *,ce qui montre que* T *n'est pas borné.*

Définition 1.1.3 *Un opérateur* $T \in L(H)$ *est appelé isométrie si pour tout* $x \in H$

$$\|Tx\| = \|x\|\,,$$

ou bien $\forall\ x,\ y \in H\ \ \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle\,.$

Définition 1.1.4 *Un opérateur* $T \in L(H)$ *est dite unitaire si* T *est une isométrie surjective*
.

Définition 1.1.5 *Le noyau* $N(T)$ *d'un opérateur* T *dans* H *est défini par :*

$$N\ (T) = \{x \in D(T)\ \ tel\ que : Tx = 0\}\,.$$

Définition 1.1.6 *Le graphe* $G(T)$ *d'un opérateur* T *dans* H *est un sous-espace de* $H \times H$ *défini par :*

$$G(T) = \{(x,\ Tx)\ /\ x \in D(T)\}\,.$$

Définition 1.1.7 *Deux opérateurs T et S sont dits égaux, et on note $T = S$, si $D(T) = D(S)$ et $Tx = Sx$ (i.e.) $G(T) = G(S)$.*

L'opérateur S est une extension de l'opérateur T si $D(T) \subset D(S)$ et $Tx = Sx$, $\forall\ x \in D(T)$ (i.e.) $G(T) \subset G(S)$, et on écrit : $T \subset S$.

Opérations algébriques :

– La somme

$(S+T)(x) = Sx + Tx$ avec

$$D(S+T) = D(S) \cap D(T).$$

– Le produit :

$(S.T)(x) = S(T(x))$avec

$$D(S.T) = \{x \in D(T) \text{ tel que} : T(x) \in D(S)\}.$$

– Les lois usuelles d'associativité

$$(R+S)+T = R+(S+T),\ (RS)T = R(ST)$$

– Les lois de distributivité :

$$(R+S)T = RT + ST,\ T(R+S) \supset TR + TS.$$

Car il se peut que$(R+S)x \in D(T)$ même si Rx ou Sx n'est pas dans$D(T)$.

–Multiplication par scalaire :

Si $\alpha = 0$ Alors $D(\alpha T) = H$ et $\alpha T = 0$.

Si $\alpha \neq 0$ Alors $D(\alpha T) = D(T)$ et $(\alpha T)x = \alpha(Tx)$ pour $x \in D(T)$.

1.2 Opérateurs fermés

Définition 1.2.1

1. *Un opérateur T définit dans un espace de Hilbert H est dit fermé si, et seulement si, son graphe $G(T)$ est un sous-espace fermé de $H \times H$, c'est à dire : $G(T) = \overline{G(T)}$.*
2. *L'opérateur T est dit fermable si $\overline{G(T)}$ représente le graphe d'un opérateur.*

Remarque 1.2.1 *Si T est un opérateur fermable, alors il existe d'aprés 2.de la définition 1.2.1 un opérateur $\overline{T}$ tel que $G\left(\overline{T}\right) = \overline{G(T)}$, ce dernier est unique et il est évident que $\overline{T}$ est fermé. Comme $G(T) \subset \overline{G(T)} = G\left(\overline{T}\right)$, on voit que $\overline{T}$ est une extension de T, c'est même la plus petite extension de T qu'on appelle "fermeture de T"*

Proposition 1.2.1 *1. On dit que T est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de $D(T)$ convergente vers x telle que la suite des images $(Tx_n)_n$ converge vers y dans H, alors*

$$x \in D(T) \text{ et } y = Tx.$$

2. Un opérateur T est fermable, si pour chaque suite : $(x_n)_n \subset D(T)$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0,$$

et la suite des images $(Tx_n)_n$ soit convergente, alors

$$\lim_{n \to +\infty} Tx_n = 0.$$

Proposition 1.2.2 *Si l'opérateur T est fermé, alors tout opérateur $(T - \lambda I)$ est fermé pour $\lambda \in \mathbb{C}$. De plus, si l'opérateur T est fermé et T^{-1} existe, alors T^{-1} est fermé .*

Preuve. $(T - \lambda I)$ fermé (évident).

Supposons que T^{-1} existe, alors

$$G(T^{-1}) = \left\{ \left(g,\ T^{-1}(g)\right) \text{ tel que} : g \in D(T^{-1}) \right\},$$

or

$$g \in D(T^{-1}) = R(T),$$

alors

$$\exists! f \in D(T) : T(f) = g,$$

d'où

$$G(T^{-1}) = \{(Tf,\ f) / f \in D(T)\}.$$

Comme T est fermé,alors il découle que $G(T^{-1})$ l'est aussi. □

1.3 Adjoint d'un opérateur non-borné.

Définition 1.3.1 *Soit T un opérateur linéaire défini sur $D(T)$ tel que $\overline{D(T)} = H$. On définit l'opérateur adjoint $T^* : H \to H$ comme suit, on pose*

$$D(T^*) = \{g \in H \ / \ \exists \ h \in H : \ \langle Tf, \ g \rangle = \langle f, \ h \rangle \ , \ \forall f \in D(T)\} \, .$$

Comme $\langle Tf, \ 0 \rangle = 0 = \langle f, \ 0 \rangle$, alors $0 \in D(T^*)$ et $D(T^*) \neq \emptyset$.De plus h est déterminé d'une manière unique, en effet si l'on suppose

$$\langle Tf, \ f \rangle = \langle f, \ h_1 \rangle = \langle f, \ h_2 \rangle \, , \ h_1 \ et \ h_2 \in H$$

alors

$$\langle f, \ h_1 - h_2 \rangle = 0, \ \forall f \in D(T)$$

c'est à dire

$$(h_1 - h_2) \perp \overline{D(T)} = H \Rightarrow (h_1 - h_2) \in \{0\} = H^{\perp}$$

ce qui implique que

$$h_1 = h_2.$$

La relation $T^*g = h$ définit ainsi un opérateur comme suit

$$\langle Tf, \ g \rangle = \langle f, T^*g \rangle \, , \ \forall f \in D(T), \ \forall g \in D(T^*).$$

On appelle T^* l'opérateur adjoint de T.

Théorème 1.3.1 *Soient S et T deux opérateurs non bornés densément définits. Alors :*

1. *si TS est densement défini alors on a $S^*T^* \subset (TS)^*$;*
2. *si S est borné alors $S^*T^* = (TS)^*$ .1. TS et S^*T^* sont formables.*

Preuve. Soient $f \in D(S^*T^*)$ et $g \in D(TS)$. Alors,

$$f \in D(T^*), T^*f \in D(S^*), \ g \in D(S) \ et \ Sg \in D(T)$$

Donc d'aprés la définition de l'adjoint d'un opérateur on a

$$\langle S^*T^*f, \ g \rangle = \langle T^*f, \ Sg \rangle = \langle f, \ TSg \rangle$$

2. On a d'aprés 1. $S^*T^* \subset (TS)^*$, alors il reste a montrer que

$$S^*T^* \supset (TS)^*$$

Soit $f \in D((TS)^*)$. Comme S est borné, pour tout $g \in D(TS) = D(S)$,

On a,

$$\langle (TS)^* f,\ g \rangle = \langle f,\ TSg \rangle = \langle T^* f\ Sg \rangle$$

D'aprés la définition de l'adjoint d'un opérateur on a,

$$T^* f \in D(S^*) \quad \text{(i.e.)} \quad f \in D(S^*T^*)$$

□

Théorème 1.3.2 *Soint S et T deux opérateurs de H_1 dans H_2*

1. *Si T est densement défini, alors on a $(aT)^* = \overline{a}T^*, \overline{a}$ étant le conjugué de $a \in \mathbb{C}^*$.*
2. *Si $T + S$ est densement défini, alors $T^* + S^* \subset (T+S)^*$*
3. *Si S est borné et T dense dans H, alors on a $T^* + S^* = (T+S)^*$*

Preuve. 1-Evident

2-Soit $f \in D(T^* + S^*) = D(T^*) \cap D(S^*)$, alors pour tout $f \in D(T^* + S^*)$ et pour tout $g \in D(T+S) = D(T) \cap D(S)$ on a d'aprés la définition de l'adjoint d'un opérateur :

$$\begin{aligned} \langle (T^* + S^*) f,\ g \rangle &= \langle T^* f,\ g \rangle + \langle S^* f,\ g \rangle \\ &= \langle f,\ Tg \rangle + \langle f,\ Sg \rangle \\ &= \langle f,\ (T+S) g \rangle \end{aligned}$$

i.e. $f \in D((T+S)^*)$ donc $T^* + S^* \subset (T+S)^*$

3-On a d'aprés 2.du théoreme 1.3.2 $T^* + S^* \subset (T+S)^*$, alors il reste a montrer que

$$D((T+S)^*) \subset D(T^* + S^*) = D(T^*)$$

Soit $f \in D((T+S)^*)$,alors pour tout $g \in D((T+S)) = D(T)$ on a

$$\langle [(T+S)^* - S^*] f, g \rangle = \langle f, (T+S) g \rangle - \langle f, Sg \rangle = \langle f, Tg \rangle$$

donc $f \in D(T^*)$ □

Définition 1.3.2 *On dit qu'un opérateur T a domaine dense est auto-adjoint si $T^* = T$, (i.e.): $D(T) = D(T^*)$ et $Tx = T^*x$, $\forall x \in D(T)$.*

Proposition 1.3.1 *Soient T, S deux opérateur auto-adjoints tels que $T \subset S$,alors $T = S$.*

Preuve. Il suffit de montrer que $S \subset T$, or $T \subset S \Rightarrow S = S^* \subset T^* = T$. □

Corollaire 1.3.1 *T est un opérateur linéaire tel que : $\overline{D(T)} = H$ et T^{-1} existe tel que $\overline{D(T^{-1})} = H$. Alors,*

$$\left(T^{-1}\right)^* = (T^*)^{-1}$$

Preuve. $D(T)$ dense dans H. Alors : T^* existe et $D(T^{-1})$ dense dans H. Alors : $(T^{-1})^*$ existe ; montrons que : $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. Pour $f \in D(T)$ et $g \in D((T^{-1}))^*$.
Alors :

$$\langle f,\ g\rangle = \langle T^{-1}Tf,\ g\rangle = \left\langle Tf,\ (T^{-1})^* g\right\rangle.$$

Cette équation montre que :

$$(T^{-1})^* g \in D(T^*) \text{ et } T^*(T^{-1})^* g = g.$$

Pour $f \in D(T^{-1})$ et $h \in D(T^*)$. Alors :

$$\langle f,\ h\rangle = \langle TT^{-1}f,\ h\rangle = \langle T^{-1}f,\ T^*h\rangle.$$

Cette équation montre que :

$$T^*h \in D\left((T^{-1})^*\right) \text{ et } (T^{-1})^* T^*h = h.$$

Donc : $(T^{-1})^* = (T^*)$.

□

Théorème 1.3.3 *Pour chaque opérateur T à domaine $D(T)$ dense dans H, le complèment orthogonal de l'image est le noyau de l'adjoint (i.e.) :*

$$R(T)^\perp = N(T^*) \quad \text{et} \quad \overline{R(T)} = N(T^*)^\perp$$

Et de plus : si $R(T)$ est fermé alors,

$$R(T) = N(T^*)^\perp$$

(i.e.) L'équation $Tx = f$ admet une solution x si et seulement si, $f \in N(T^*)^\perp$.

Preuve. Soit $z \in R(T)^{\perp}$, alors

$$\langle z,\ Tu\rangle = 0 \forall u \in D(T)$$

Et on a,

$$\langle Tu,\ z\rangle = \langle u, T^{*}z\ \rangle = 0 \forall u \in D(T)$$

D'où,

$$T^{*}z = 0 \ \text{ c'est à dire } z \in N(T^{*}).$$

Soit $z \in N(T^{*})$. Alors $T^{*}z = 0$ et,

$$\langle u, T^{*}z\ \rangle = 0 \forall u \in D(T)$$

Et on a

$$\langle u, T^{*}z\ \rangle = \langle Tu,\ z\rangle = 0 \forall u \in D(T)$$

Ce qui implique que

$$z \in R(T)^{\perp}$$

Si $R(T)$ est fermé : $R(T) = R(T)^{\perp\perp} = N(T^{*})^{\perp}$. □

Graphes et opérateur symétrique

Si H est un espace de Hilbert, alors $H \times H$ peut être muni d'une structure d'espace de Hilbert en définissant le produit scalaire suivant, pour $(a,\ b)\,,\ (c,\ d) \in H \times H$ par :

$$\langle (a,\ b)\,,\ (c,\ d)\rangle_{1} = \langle a,\ c\ \rangle + \langle b,\ d\rangle$$

En particulier la norme dans $H \times H$ donné par :

$$\|(a,\ b)\|_{1}^{2} = \|a\|^{2} + \|b\|^{2}$$

A patir de ce dernier, on définit le produit scalaire suivant sur $D(T)$ comme suit, pour tout $f, g \in D(T)$:

$$\begin{cases} \langle f,\ g\rangle_{D(T)} = \langle (f,\ T(f))\,,\ (g,\ T(g))\rangle_{1} = \langle f,\ g\rangle + \langle Tf,\ Tg\rangle \\ \|f\|_{D(T)}^{2} = \|f\|^{2} + \|Tf\|^{2} \end{cases}$$

On définit $J\,(a,\ b) = (-b,\ a)$ tel que $a,\ b \in H$

Alors J est un opérateur unitaire sur $H \times H$ et ;

$$J^2\,(a,\ b) = J.J\,(a,\ b) = J\,(-b,\ a) = -\,(a,\ b)$$

Donc $J^2 = -I$

Si M est un sous-espace quel quonque de $H \times H$. Alors $J^2 M = M$.

Théorème 1.3.4 *T est fermé si est seulement si $\left(D(T)\ ,\ \langle , \rangle_{D(T)}\ \right)$ est un espace de Hilbert.*

Preuve. $D(T)$ étant préhilbertien, il suffit de montrer qu'il est complet ($D(T)$ est un sous espace muni d'un produit scalaire).

Supposons que T soit fermé et soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy suivant $\left(D(T)\ ,\ \langle , \rangle_{D(T)}\ \right)$. Alors comme $\forall n,\ m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|f_m - f_n\|^2_{D(T)} &= \|f_m - f_n\|^2 + \|T\,(f_m - f_n)\|^2 \\ &= \|f_m - f_n\|^2 + \|Tf_m - Tf_n\|^2 \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

On déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy dans H qui est Hilbertien, donc convergentes. D 'où il existe $f,\ g \in H$:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f \qquad et \lim_{n\to+\infty} Tf_n = g$$

et comme T fermé, on déduit que $f \in D(T)$ et $g = Tf$

Enfin,

$$\|f_n - f\|_{D(T)} = \sqrt{\|f_n - f\|^2 + \|Tf_n - g\|^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\left(D(T)\ ,\ \langle , \rangle_{D(T)}\ \right)$

Supposons à présent que $\left(D(T)\ ,\ \langle , \rangle_{D(T)}\ \right)$ soit complet et soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $D(T)$ vérifiants

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f \qquad et \qquad \lim_{n\to+\infty} Tf_n = g$$

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans H.

De (1.3.1), on déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi de Cauchy dans $\left(D(T)\ ,\ \langle,\rangle_{D(T)}\right)$ qui est complet et alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente suivant $\left(D(T)\ ,\ \langle,\rangle_{D(T)}\right)$.D'où,

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_{D(T)} &= \sqrt{\|f_n - f\|^2 + \|Tf_n - Tf\|^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &\Rightarrow \|f_n - f\|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad et \quad \|Tf_n - Tf\|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

C'est à dire,

$$\|f_n - f\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ \ et\, \|Tf_n - Tf\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Et

$$\begin{aligned}\underset{n\to+\infty}{lim} f_n &= f \ \ ,\ \underset{n\to+\infty}{lim} Tf_n = Tf = g \\ &\Rightarrow f \in D(T)\end{aligned}$$

T est fermé. □

Théorème 1.3.5 *Tout opérateur borné est fermable. Un opérateur borné T est fermé si est seulement si $D(T)$ est fermé. Si T est borné alors $D\left(\overline{T}\right) = \overline{D(T)}$; $\overline{T}$ est une extension (d'opérateur borné) de T sur $\overline{D(T)}$.*

Preuve. 1-On veut montrer que T est fermable. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $D(T)$ telle que $f_n \to 0$ et $Tf_n \to g$. Il faut et il suffit de montrer que $g = 0$.
Or,

$$\|Tf_n\| \leq \|T\| \, \|f_n\|$$

d'où,

$$\begin{aligned}\underset{n\to+\infty}{lim} \|Tf_n\| &= \left\|\underset{n\to+\infty}{lim} Tf_n\right\| \leq \underset{n\to+\infty}{lim} \|T\| \, \|f_n\| = \|T\| \left\|\underset{n\to+\infty}{lim} f_n\right\| = 0 \\ &\Rightarrow \underset{n\to+\infty}{lim} \|Tf_n\| = 0 \\ &\Rightarrow \underset{n\to+\infty}{lim} Tf_n = 0 = g \ \ \text{(unicité de la limite)}\end{aligned}$$

2- On a,

$$\begin{aligned}\|f\|^2_{D(T)} &= \|f\|^2 + \|Tf\|^2 \leq \left(1 + \|T\|^2\right) \|f\|^2 \\ &\Rightarrow \|f\|_{D(T)} \leq \sqrt{\left(+ \|T\|^2\right)} \, \|f\|\end{aligned}$$

D'autre part, il est évident que

$$\|f\| \leq \|f\|_{D(T)}$$

D'où

$$\|f\| \leq \|f\|_{D(T)} \leq \left(1+\|T\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|$$

Il est évident que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\left(D(T)\ ,\ \langle,\rangle_{D(T)}\right)$ si est seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $(D(T)\ ,\ \langle,\rangle)$ c'est à dire,

$$(D(T)\ ,\ \langle,\rangle\ ) \quad \text{complet} \Leftrightarrow \left(D(T)\ ,\ \langle,\rangle_{D(T)}\right) \quad \text{complet}$$

Mais alors,

$$\begin{aligned} D(T) \text{ fermé dans } H \quad & \Leftrightarrow (D(T)\ ,\ \langle,\rangle\ ) \text{ Hilbert (complet)} \\ & \Leftrightarrow \left(D(T)\ ,\ \langle,\rangle_{D(T)}\right) \text{ (complet)} \\ & \Leftrightarrow T \text{ fermé (Théoreme précédent)} \end{aligned}$$

3-On a déjà vu que $D\left(\overline{T}\right) = \overline{D\left(T\right)}$ et que $\overline{T}$ est une extension de T .

Il reste à vérifier que $\overline{T}$ est borné .

Soit $f \in D\left(\overline{T}\right) = \overline{D\left(T\right)}$. Alors par définition $\lim\limits_{n\to+\infty} Tf_n = f$ où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $D\left(T\right)$. Or par la définition de $\overline{T}$

$\overline{T}\ f = \lim\limits_{n\to+\infty} Tf_n$, et comme T est borné, il vient que :

$$\left\|\overline{T}\ f\right\| = \left\|\lim_{n\to+\infty} Tf_n\right\| = \lim_{n\to+\infty} \|Tf_n\| \leq \lim_{n\to+\infty} \|T\|\,\|f_n\| = \|T\| \left\|\lim_{n\to+\infty} f_n\right\| = \|T\|\,\|f\|$$

c'est à dire

$$\exists\ c \succ 0 : \left\|\overline{T}\ f\right\| \leq c\,\|f\|$$

donc $\overline{T}$ est borné. □

Théorème 1.3.6 *Un opérateur T est fermable si est seulement s'il admet une extension fermé.*

Preuve. Supposons que T est fermable, alors $T \subset \overline{T}, \overline{T}$ est la plus petite extension fermé de T. Supposons à présent que S soit une extension fermé de T . Alors $G\left(T\right) \subset G\left(S\right) \Rightarrow \overline{G\left(T\right)} \subset \overline{G\left(S\right)} = G\left(S\right)$.

$G\left(S\right)$ qui est le graphe d'un opérateur. Or, tout sous-espace d'un graphe d'opérateur est lui même un graphe d'opérateur. D'où $\overline{G\left(T\right)}$ est un graphe et T est fermable. □

Théorème 1.3.7 *Si T est un opérateur à domaine dense dans H, alors :*

$$G(T^*) = [JG(T)]^\perp$$

Le supplémentaire orthogonal de $JG(T)$ dans $H \times H$. (Si $G(T^*)$ est connu, il est de même pour $D(T^*)$ et T^*).

Preuve. On a,

$$\begin{aligned} (y,\ z) \in G(T^*) &\iff [y \in D(T^*) \text{ et } T^*y = z\ ] \\ &\iff\ [\langle x, T^*y\ \rangle = \langle x,\ z\rangle] \\ &\iff \langle Tx,\ y\rangle = \langle x,\ z\rangle \text{ pour tout } x \in D(T) \\ &\iff [\langle J\{x,\ Tx\},\ \{y,\ z\}\rangle = 0] \\ &\iff (y,\ z) \in [JG(T)]^\perp \end{aligned}$$

□

Théorème 1.3.8 *Si T est un opérateur à domaine dense dans H, Alors T est un opérateur fermé. En particulier les opérateurs auto-adjoints sont fermés.*

Preuve. Pour tout $M \subset H \times H$, $M^\perp$ est fermé et d'aprés le théorème précédent ;

$$G(T^*) = [JG(T)]^\perp$$

Donc $D(T^*)$ est fermé dans $H \times H$ et T^* est un opérateur fermé. □

Théorème 1.3.9 *Si T est un opérateur fermé à domaine dense dans H, alors :*

$$H \times H = JG(T) \oplus G(T^*).$$

Preuve. On sait que si M est un sous espace fermé de H ; alors ;

$$H = M \oplus M^\perp$$

Appliquons ce théorème pour $M = J(G(T))$. T est fermé, alors $G(T)$ est fermé, et puisque J est unitaire alors $J(G(A))$ est aussi fermé et on a ;

$$G(T^*) = [[JG(T)]^\perp$$

Donc,

$$H \times H = J(G(T)) \oplus [J(G(T))]^\perp = J(G(T)) \oplus G(T^*).$$

□

Théorème 1.3.10 *Si T un opérateur à domaine dense dans H, alors : $D(T^*)$ est dense dans H et $T^{**} = T$.*

Preuve. Puisque J est unitaire et $J^2 = -I$,on a,

$$\begin{aligned}(x, Tx \in) \, G(T) \quad &\Leftrightarrow (x, T^*y) = (Tx, y) \text{ pour tout } y \in D(T^*) \\ &\Leftrightarrow \langle \{-T^*y, \ y\}, \{x, \ Tx \ \} \rangle = 0 \ \text{ pour tout } y \in D(T^*). \\ &\Leftrightarrow \{x, Tx\} \in [JG(T^*)]^\perp \end{aligned}$$

On peut écrire,

$$H \times H = JG(T) \oplus G(T^*)$$

Donc

$$[JG(T^*)]^\perp = G(T).$$

Montrons que :$D(T^*)$ est dense dans H :

Soit $z \perp D(T^*)$. Alors ;

$$\langle y, \ z \rangle = 0 \text{ pour tout } y \in D(T^*).$$

Donc,

$$\langle 0, \ -T^*y \rangle + \langle z, \ y \rangle = 0 \text{ pour tout } y \in D(T^*).$$

Et,

$$\langle (0, \ z) \, , (-T^*y, \ y) \rangle = 0 \text{ pour tout } y \in D(T^*)$$

.

D'où,

$$(0, \ z) \in \ [JG(T^*)]^\perp = G(T)$$

ce qui implique que,

$$z = T(0)$$

$D(T^*)$ est dense dans H et T^{**} est défini.

Pour S un opérateur fermé à domaine dense,

$$H \times H = J(G(S)) \oplus G(S^*)$$

pour $S = T^*$ on aura ;

$$H \times H = J(G(T^*)) \oplus G(T^{**})$$

Donc ; $G(T^{**}) = [JG(T^*)]^\perp = G(T)$ de sorte que $T^{**} = T$. $\square$

Définition 1.3.3 *Un opérateur T à domaine dense est dit symétrique si $T^* \subset T$, i.e. :*

$$D(T) \subset D(T^*) \quad et \quad Tx = T^*x; \forall x \in D(T)$$

Autrement dit,

$$\forall x \in D(T), \forall y \in D(T) \;\; \langle Tx; y \rangle = \langle x; Ty \rangle .$$

Exemple 1.3.1 *On considère l'opérateur T qui défini par l'équation :*
$Tf = if'$ tel que : $H = C_0[0,1]$ et $D(T) = \{f \in C_0[0,1] : f(0) = f(1) = 0\}$.
Montrons que l'opérateur T est symétrique c'est à dire montrons que

$$\forall \; f, g \in D(T) : \langle Tf, g \rangle = \langle f, Tg \rangle$$

on a

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &= \int_0^1 Tf\;(x)\overline{g(x)}dx \\ &= \int_0^1 if'\overline{g(x)}dx \end{aligned}$$

Une intégration par partie donne :

$$\begin{aligned} \langle Tf, g \rangle &= i\left\{\overline{g(1)}f(1) - \overline{g(0)}f(0)\right\} - i\int_0^1 f(x)\overline{g'(x)}dx \\ &= \int_0^1 f(x)\left\{\overline{ig'(x)}\right\}dx \\ &= \langle f, Tg \rangle . \end{aligned}$$

Donc, T est un opérateur symétrique.

Théorème 1.3.11 *Soit T un opérateur défini sur H dans H , si T est symétrique alors :*

1. *Le produit scalaire $\langle Tf,\; f \rangle \in \mathbb{R}$ pour toute $f \in D(T)$.*

2. *Les valeurs propres d'un opérateur symétrique T sont réelles.*

3. *Les vecteurs propres f_1, f_2 associés à deux valeurs propres différentes λ_1, λ_2 d'un opérateur symétrique T, sont orthogonaux.*

Preuve. 1. pour $f \in D(T)$:$\langle Tf,\ f\rangle = \langle f, Tf\rangle = \overline{\langle Tf, f\rangle}$ donc,

$$\langle Tf,\ f\rangle \in \mathbb{R}$$

pour tout $f \in D(T)$

2. Soit λ une valeur propre de T alors $Tf = \lambda f\ \ (f \neq 0)$ et donc

$$\lambda \langle f, f\rangle = \langle \lambda f, f\rangle = \langle Tf, f\rangle = \langle f, Tf\rangle = \langle f, \lambda f\rangle = \overline{\lambda} \langle f, f\rangle$$

$\lambda = \overline{\lambda}$ ce qui implique : $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Soient $Tf_1 = \lambda_1 f_{\ 1}$ et $Tf_2 = \lambda_2 f_{\ 2}$ tels que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors :

$$\lambda_1 \langle f_1, f_2\rangle = \langle \lambda_1 f_1, f_2\rangle = \langle Tf_1, f_2\rangle\ = \langle f_1, Tf_2\rangle = \langle f_1, \lambda_2 f_2\rangle = \lambda_2 \langle f_1, f_2\rangle$$

Donc ;

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(f_1, f_2) = 0$$

Et ;

$$(f_1, f_2) = 0.$$

□

Propriétiés 1.3.1 *1. Un opérateur symétrique T est toujours fermable puisque $D(T) \subset D(T^*)$est dense .*

2. *Si T est un opérateur symétrique alors T^*et T^{**} sont deux extensions fermées de T avec $T \subset T^{**} \subset T^*$.*

3. *Si T est un opérateur symétrique fermé alors $T = T^{**} \subset T$.*

4. *Si T est un opérateur auto-adjoint alors $T = T^{**} = T^*$.*

Théorème 1.3.12 *Tout opérateur symétrique T est fermable, de plus $\overline{T}$ est aussi symétrique.*

Preuve. Comme $T \subset T^*$ et T^* est fermé. Alors T est fermable et $\overline{T}$ existe. On montre que $\overline{T}$ est symétrique.

Soient $f, g \in D(\overline{T})$, Alors ils existent deux suites $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ de $D(T)$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f \; ; \; \lim_{n\to+\infty} g_n = g$$

et

$$\overline{T}\ f = \lim_{n\to+\infty} Tf_n,\ \overline{T}\ g = \lim_{n\to+\infty} Tg_n.$$

Alors,

$$\left\langle \overline{T}\ f,\ g \right\rangle = \left\langle \lim_{n\to+\infty} Tf_n,\ \lim_{n\to+\infty} g_n \right\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle Tf_n, g_n \rangle = \lim_{n\to+\infty} T \langle f_n,\ Tg_n \rangle$$

$$= \left\langle \lim_{n\to+\infty} f_n,\ \lim_{n\to+\infty} Tg_n \right\rangle = \left\langle f,\ \overline{T}\ g \right\rangle$$

$\square$

Remarque 1.3.1 *C'est pourquoi, on peut souvent supposer que T est un opérateur symétrique fermé.*

1.4 Spectre et résolvante

Définition 1.4.1 ***(valeur propre)*** *Un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est appelé une valeur propre de l'opérateur linéaire T s'il existe un vecteur $f \neq 0$ tel que $Tf = \lambda f$ est appelé le sous-espace propre de l'opérateur T associé à λ.*

Définition 1.4.2 *Soint $T \subset L(H)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on appelle spectre de l'opérateur T l'ensemble :*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (T - \lambda I) \text{ n'est pas inversible}\}$$

Exemple 1.4.1 *Soient I_H l'identité sur H et $\mu \in \mathbb{C}$, alors*

$$\begin{aligned} \sigma(\mu I) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\mu I - \lambda I)\, I \text{ n'est pas inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\mu - \lambda)\, I \text{ n'est pas inversible}\} \\ &= \{\mu\} \end{aligned}$$

Remarque 1.4.1 *$(\mu - \lambda) I$ n'est pas inversible$\Longleftrightarrow \lambda = \mu$*

Lemme 1.4.1 *Si λ est une valeur propre de T alors $\lambda \in \sigma(T)$*

Preuve. Comme λ est une valeur propre de$T$ alors $\exists\ x \neq 0_H$ tel que$Tx = \lambda x$ d'où

$$\exists\ x \neq 0 : (T - \lambda I)x = 0$$

Donc $\ker(T - \lambda I\ ) \neq \{0_H\}$, c'est à dire que $(T - \lambda I)$ n'est pas injectif et donc pas bijectif. □

Définition 1.4.3 (résolvante) *Soit T un opérateur à domaine dense dans H. L'opérateur $\Re_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$qui dépend du paramètre est appelé la résolvante de l'opérateur T, elle est définie pour tout λ pour lequel $(T - \lambda I)^{-1}$ existe et borné et son domaine est $R\,(T - \lambda I)$ dense dans H.*

Théorème 1.4.1 *Pour chaque deux points réguliers λet μ de l'opérateur T ,on a :*

$$\Re_\mu - \Re_\lambda = (\mu - \lambda)\Re_\mu\Re_\lambda$$

Cette équation est appelée la "relation de Hilbert".
On a :

$$\Re_\lambda h = \Re_\mu(T - \mu I)\Re_\lambda h$$

et aussi

$$\Re_\mu h = \Re_\mu(T - \lambda I)\Re_\lambda h$$

Et par soustraction on obtient :

$$\begin{aligned}
\Re_\mu h - \Re_\lambda h &= \Re_\mu(T - \lambda I)\Re_\lambda h - \Re_\mu(T - \mu I)\Re_\lambda h \\
&= \Re_\mu T\Re_\lambda h - \lambda\Re_\mu\Re_\lambda h - \Re_\mu T\Re_\lambda h + \mu\Re_\mu\Re_\lambda h \\
&= (\mu - \lambda)\,\Re_\mu\Re_\lambda h.
\end{aligned}$$

1.4.1 Spectre et résolvante d'opérateur auto-adjoint

Théorème 1.4.2 *Le nombre λ est une valeur propre de l'opérateur auto-adjoint T si et seulement si, $\overline{R\,(T - \lambda I)} \neq H$.*

Corollaire 1.4.1 *Le spectre d'un opérateur auto-adjoint $\sigma(T)$ est inclus dans l'ensemble des points réels.*

Classification des points de spectre d'un opérateur auto-adjoint

Soit T un opérateur auto-adjoint son spectre $\sigma(T)$ admet la décomposition en trois composantes disjointes :

$$\sigma(T) = \sigma_P(T) \cup \sigma_C(T) \cup \sigma_R(T).$$

Tel que ;

$$\sigma_P(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists\ x \neq o_H : Tx = \lambda x\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re_\lambda \text{ n'existe pas}\}$$

$\sigma_P(T)$ est le spectre ponctuel, (l'ensemble des valeurs propre d'ordre fini) $\sigma_C(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : D(\Re_\lambda)$ est dens le spectre continu.

$$\sigma_R(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : D(\Re_\lambda) = \overline{R(T - \lambda I)} \neq H,\ \text{borné ou pas}\ \right\}$$

$\sigma_R(T)$ est le spectre résiduel.

Chapitre 2

Extension d'un opérateur symétrique

Si B est une extension d'un opérateur symétrique T alors : $T \subset B$ et donc : $B^* \subset T^*$
mais si B est un opérateur symétrique : $B \subset B^*$ donc :
$T \subset B \subset B^* \subset T\ ^*$(i.e.) chaque extension symétrique d'un opérateur T est une restriction de l'opérateurT^*.

2.1 Espaces de défauts d'un opérateur symétrique

Définition 2.1.1 *Soit T un opérateur symétrique et $\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda \neq 0$. On note*

$$R(T - \lambda I) = R_\lambda$$

et

$$R(T - \overline{\lambda} I) = R_{\overline{\lambda}}$$

R_λ et $R_{\overline{\lambda}}$ sont deux sous-espaces de H.
$\aleph_\lambda = H \ominus R_\lambda$, $\aleph_{\overline{\lambda}} = H \ominus R_{\overline{\lambda}}$ sont les compléments orthogonaux de R_λ et $R_{\overline{\lambda}}$ sont appelé les espaces de défaut del'opérateur T.

Proposition 2.1.1 *Les espaces de défauts $\aleph_\lambda$ et $\aleph_{\overline{\lambda}}$sont les espaces de solutions de l'opérateur T^* associés aux valeurs propres $\overline{\lambda}$et λ respectivement.*

Preuve. Si $x \in \aleph_\lambda$ alors pour chaque vecteur $y \in D(T)$, on a :$\langle Ty - \lambda y; x\rangle = 0$, donc :

$$\langle Ty, x\rangle = \langle y, T^* x\rangle$$

Alors,

$$\langle y, T^{*}x\rangle = \left\langle y, \overline{\lambda}x\right\rangle$$

Et par la définition de l'opérateur T^{*}

$$x \in D\left(T^{*}\right) \;\; et \; T^{*}x = \overline{\lambda}x$$

Si, inversement, l'équation $T^{*}x = \overline{\lambda}x$ est vérifie, alors pour un $y \in D(T)$ arbitraire on a :

$$\langle y, T^{*}x\rangle = \left\langle y, \overline{\lambda}x\right\rangle$$

Alors

$$\langle Ty, x\rangle = \left\langle y, \overline{\lambda}x\right\rangle$$

Donc :

$$\langle Ty - \lambda y; x\rangle = 0 \; (i.e) \; x \in \aleph_{\lambda}$$

□

2.2 Transformation de CAYLEY

Définition 2.2.1 *Soit T un opérateur symétrique et $\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda \neq 0$. L'opérateur :*

$$V = (T - \lambda I)(T - \overline{\lambda}I)^{-1}$$

est appelé la transformation de CAYLEY de l'opérateur T.

Cette définition a un sens car : $\overline{\lambda}$ n'est pas une valeur propre de T donc :
$(T - \overline{\lambda}I)^{-1}$ existe.

Proposition 2.2.1

1. *La transformation de CAYLEY V d'un opérateur symétrique T est un opérateur isométrique avec $D(V) = R_{\overline{\lambda}}$ et $R\left(V\right) = R_{\lambda}$.*
2. *L'ensemble de $Vy - y$ tel que $y \in D(V)$ est dense dans H.*
3. *Chaque opérateur V qui vérifié la $2^{ème}$ condition est la transformation de CAYLEY d'un opérateur symétrique $T = \left(\lambda I - \overline{\lambda}V\right)\left(I - V\right)^{-1}$.*

Preuve. 1.-a-On montre que $D(V) = R_{\overline{\lambda}}$. On a

$$V = (T - \lambda I)(T - \overline{\lambda} I)^{-1}$$

pour chaque $y \in D(V)$ on a :

$$y \in R(T - \overline{\lambda} I) = R_{\overline{\lambda}}$$

Inversement, pour $y \in R_{\overline{\lambda}}$ on applique l'opérateur $(T - \overline{\lambda} I)^{-1}$, donc ;

$$\begin{aligned} x &= (T - \overline{\lambda} I)^{-1} y \in D(T - \overline{\lambda} I) = D(T - \lambda I) \\ &= \left\{ x \in H : x \in D(T) \cap D(\overline{\lambda} I) \right\} \\ &= \{ x \in H : x \in D(T) \cap H \} = D(T) \end{aligned}$$

On applique l'opérateur $(T - \lambda I)$ donc ;

$$(T - \lambda I)x = (T - \lambda I)(T - \overline{\lambda} I)^{-1} y = V y,$$

donc $y \in D(V)$ alors $R_{\overline{\lambda}} = D(V)$.

-b-On montre à présent que $R(V) = R_{\lambda}$. Soit $x \in D(T)$ posant :. $y = (T - \overline{\lambda} I)x$ donc $y \in R_{\overline{\lambda}} = D(V)$ et :

$$V y = (T - \lambda I)(T - \overline{\lambda} I)^{-1}(T - \overline{\lambda} I)x \ = (T - \lambda I)x,$$

donc :

$$R(V) = R_{\lambda}.$$

Et de plus :

$$\|V y\|^2 = \|(T - \lambda I)\, x\|^2 = \langle (T - \lambda I)x, (T - \lambda I)x \rangle$$

$$= \langle Tx, Tx \rangle - \lambda \langle x, Tx \rangle - \overline{\lambda} \langle Tx, x \rangle + |\lambda|^2 \langle x, x \rangle \,,$$

et

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= \left\| (T - \overline{\lambda} I)x \right\|^2 = \left\langle (T - \overline{\lambda} I)x, (T - \overline{\lambda} I)x \right\rangle \\ &= \langle Tx, Tx \rangle - \lambda \langle x, Tx \rangle - \overline{\lambda} \langle Tx, x \rangle + |\lambda|^2 \langle x, x \rangle \end{aligned}$$

Et on a

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle \text{ c'est à dire } \|Vy\| = \|y\|$$

donc V est un opérateur isométrique.

2. On a $y = (T - \overline{\lambda}I)x$ et $Vy = (T - \lambda I)x$ donc

$$y - Vy = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) x$$

alors : $R\left(I - V\right) = \{y - Vy \ : \ y \in D\left(V\right)\}$ coïncide avec $D(T)$ (car $y - Vy = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) x$ et $x \in D(T))$.

3. -a-Montrons que l'opérateur $(I - V)^{-1}$ existe.V est un opérateur vérifiant la $2^{ème}$ condition donc 'enslemble des élements $y - Vy$ tels que $y \in D(V)$ est dense dans H et V n'admet pas $\lambda = 1$ comme valeur propre (i.e.) $y = Vy$ seulement pour $y = 0$.

Si ce n'est pas le cas alors pour $z \in D\left(V\right)$:

$$\langle Vz - z, y\rangle = \langle Vz, y\rangle - \langle z, y\rangle = \langle Vz, Vy\rangle - \langle z, y\rangle = 0$$

donc $y \neq 0$ doit être orthogonal a $R(I-V)$ qui est d'après 2 dense dans H et cela impossible. On conclut que l'opérateur $(I - V)^{-1}$ existe.

-b- On pose

$$T = \left(\lambda I - \overline{\lambda}V\right)\left(I - V\right)^{-1}$$

Montronsque T est un opérateur symétrique dont la transformation de CAYLEY est V, posons :

$$D\left(T\right) = R\left(I - V\right)$$

pour tout $x \in D\left(T\right) : \exists y \in D\left(V\right) \ : x = y - Vy$, alors ;

$$\begin{aligned} Tx &= T\left(y - Vy\right) = \left(\lambda I - \overline{\lambda}V\right)\left(I - V\right)^{-1}\left(y - Vy\right) \\ &= \left(\lambda I - \overline{\lambda}V\right)\left(I - V\right)^{-1}\left(I - V\right)y \\ &= \left(\lambda I - \overline{\lambda}V\right)y \end{aligned}$$

De la $2^{ème}$ condition $D(T)$ dense dans H et de plus $\forall\ x_1,\ x_2 \in D(T)$:

$$\begin{aligned} \langle Tx_1, x_2\rangle &= \langle T\left(y_1 - Vy_1\right), y_2 - Vy_2\rangle \\ &= \left\langle \lambda y_1 - \overline{\lambda}Vy_1, y_2 - Vy_2\right\rangle \\ &= \left(\lambda + \overline{\lambda}\right)\langle y_1, y_2\rangle - \overline{\lambda}\langle Vy_1, y_2\rangle - \lambda\langle y_1, Vy_2\rangle \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\langle x_1, Tx_2\rangle &= \langle y_1 - Vy_1, T(y_2 - Vy_2)\rangle \\ &= \left\langle y_1 - Vy_1, \lambda y_2 - \overline{\lambda} Vy_2\right\rangle \\ &= \left(\lambda + \overline{\lambda}\right)\langle y_1, y_2\rangle - \overline{\lambda}\langle Vy_1, y_2\rangle - \lambda\langle y_1, Vy_2\rangle\end{aligned}$$

Donc

$$\langle Tx_1, x_2\rangle = \langle T(y_1 - Vy_1), y_2 - Vy_2\rangle = \langle y_1 - Vy_1, T(y_2 - Vy_2)\rangle = \langle x_1, Tx_2\rangle$$

C'est à dire que T est un opérateur symétrique.

Pour tout $x \in D(T)$: $Tx = \lambda y - \overline{\lambda} Vy$, alors

$$\left(T - \overline{\lambda} I\right)x = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right)y$$

Et

$$(T - \lambda I)x = Tx - \lambda x = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right)Vy.$$

Donc ;

$$Tx - \lambda x = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right)Vy = V\left(\lambda - \overline{\lambda}\right)y = V\left(Tx - \overline{\lambda} x\right)$$

Alors ;

$$(T - \lambda I)x = V\left(T - \overline{\lambda} I\right)x \text{ pour tout } x \in D(T)$$

ou bien,

$$(T - \lambda I) = V\left(T - \overline{\lambda} I\right)$$

Alors

$$V = (T - \lambda I)(T - \overline{\lambda} I)^{-1}$$

donc V est la transformation de CAYLEY de l'opérateur symétrique T. □

Proposition 2.2.2 *Soit T un opérateur symétrique et V sa transformation de CAYLEY. Alors T est autoadjoint si et seulement si V est unitaire.*

Preuve. T est autoadjoint si et seulement si ses indices de défaut sont nuls, autrement dit $R_{\overline{\lambda}} = R_\lambda = H$ ce qui est équivalent à $D(V) = R(V) = H$. Il en découle que V est unitaire.

□

Théorème 2.2.1 *Soit T_1, T_2 deux opérateurs symétriques et V_1, V_2respectivement leurs transformation de CAYLEY. Alors T_2 est une extension de T_1 si et seulement si V_2 est une extension de V_1.*

Remarque 2.2.1 *De ce théorème, le problème de l'extension d'un opérateur symétrique T se réduit au problème de l'extension d'un opérateur isométrique qui est sa transformation de CAYLEY.*

Théorème 2.2.2 *Un opérateur symétrique T est fermé si et seulement si sa transformation de CAYLEY V est une isométrie fermée (c'est le cas si et seulement si $R_{\overline{\lambda}}$et $R_\lambda$sont fermés).*

Preuve. On suppose que T est fermé et $\{y_n\}$ une suite définie par ;

$$y_n = \left(T - \overline{\lambda}I\right) x_n$$

tel que $x_n \in D(T)$ et $\{y_n\}$ converge vers y. Et tant que V est isométrique ; la suite $\{Vy_n\}$ définie par : $Vy_n = (T - \lambda I)\, x_n$ converge vers z. On a

$$y_n - Vy_n = Tx_n - \overline{\lambda}x_n - Tx_n + \lambda x_n$$

donc :

$$y_n - Vy_n = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) x_n$$

On obtient

$$x_n = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(y_n - Vy_n\right) \to \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(y - z\right)$$

Et on a aussi

$$Vy_n = Tx_n - \lambda x_n \Rightarrow Tx_n = Vy_n + \lambda x_n$$

Donc

$$\begin{aligned} Tx_n &= Vy_n + \frac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(y_n - Vy_n\right) = Vy_n + \frac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}} y_n - \frac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}} Vy \\ &= (1 - \frac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}})Vy_n + \frac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}} y_n = \frac{-\overline{\lambda}}{\lambda - \overline{\lambda}} Vy_n + \frac{\lambda}{\lambda - \overline{\lambda}} y_n \\ &= \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(\lambda y_n - \overline{\lambda} Vy_n\right) \end{aligned}$$

Donc

$$Tx_n = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(\lambda y_n - \overline{\lambda} V y_n\right) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(\lambda y - \overline{\lambda} z\right)$$

Et T est fermé donc

$$y - z \in D(T) et T(y - z) = \lambda y - \overline{\lambda} z.$$

Par conséquent

$$y = \left(T - \overline{\lambda} I\right) \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} (y - z) = \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left[T (y - z) - \overline{\lambda} (y - z)\right]$$

donc ;

$$y \in R_{\overline{\lambda}} = D(V)$$

Et

$$\begin{aligned} Vy &= (T - \lambda I) \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} (y - z) \\ &= \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} T (y - z) - \lambda (y - z) \\ &= \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(\lambda y - \overline{\lambda} z - \lambda y + \lambda z\right) \\ &= \frac{1}{\lambda - \overline{\lambda}} \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) z = z, \end{aligned}$$

donc ;

$$Vy = z$$

Cela montre que V est un opérateur fermé et aussi $R_{\overline{\lambda}}$ est un sous-espace fermé ; alors R_{λ} est l'image par une isométrie du sous-espace fermé $R_{\overline{\lambda}}$, donc R_{λ} et aussi fermé.
De la même facon on peut montrer que si l'opérateur V (ou$R_{\overline{\lambda}}$) est fermé , alors l'opérateur T est fermé. □

2.2.1 Domaine de définition d'un opérateur adjoint

Définition 2.2.2 *On dit que les sous-espaces* $M_1,\ M_2, ...M_n$ *sont linéairement indépendants :*
Si $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$ *pour* $x_k \in M_k$ *et* $k = \overline{1, n}$ *alors :*

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0.$$

(*) Si les sous-espaces $M_1,\ M_2, ...M_n$ *sont linéairement indépendants, il est possible de former leurs somme directe* $M_1 \oplus\ M_2 \oplus .... \oplus M_n$ *alors :*

chaque $x \in M_1 \oplus\ M_2 \oplus .... \oplus M_n$ *peut représenté d'une façon unique sous la forme :*

$$x = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

tel que $x_k \in M_k$ *et* $k = \overline{1, n}$.

(*) S'il existe une autre représentation $x = x_1^{'} + x_2^{'} + ... + x_n^{'}$ *tel que* $x_k^{'} \in M_k$ *et* $k = \overline{1, n}$, *donc :*

$$0 = (x_1 - x_1^{'}) + (x_2 - x_2^{'}) + ... + (x_n - x_n^{'})$$

avec $x_k -\ x_k^{'} \in M_k$ *et* $k = \overline{1, n}$.

Mais $M_1,\ M_2, ...M_n$ *sont linéairement indépendants alors :*

$(x_k - x_k^{'}) = 0$ *donc* $x_k = x_k^{'}$ *pour* $k = \overline{1, n}$.

Théorème 2.2.3 *Si* T *est un opérateur symétrique fermé , alors* $D(T), \aleph_{\overline{\lambda}}, \aleph_\lambda$ *sont linéairement indépendants et :*

$$D(T^*) = D(T) \oplus \aleph_{\overline{\lambda}} \oplus \aleph_\lambda.$$

Preuve. Montrons l'indépendance linéaire :

Soit $x + y + z = 0$ tel que $x \in D(T)$, $y \in \aleph_{\overline{\lambda}}$, $z \in \aleph_\lambda$.

Appliquant l'opérateur $(T^* - \overline{\lambda} I)$ on obtient ;

$$(T^* - \overline{\lambda} I)(x + y + z) = 0$$

Donc :

$$Tx + \lambda y + \overline{\lambda} z - \overline{\lambda} x - \overline{\lambda} y - \overline{\lambda} z = 0$$

Alors

$$(T - \overline{\lambda} I)x + \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) y = 0$$

Mais $(T - \overline{\lambda} I)x \in R_{\overline{\lambda}}$, et $\left(\lambda - \overline{\lambda}\right) y \in \aleph_{\overline{\lambda}}$ et on sait que $R_{\overline{\lambda}}$ et $\aleph_{\overline{\lambda}}$ sont orthogonaux donc $(T - \overline{\lambda} I)x + \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) y = 0$ est possible seulement si $(T - \overline{\lambda} I)x = 0$ et $\left(\lambda - \overline{\lambda}\right) y = 0$.

Donc $x = 0$ et $y = 0$ ($x = 0$ car λ est non-réel ne peut pas être une valeur propre de T qui est symétrique), et aussi $z = 0$ car

$$x + y + z = 0, x = 0 \text{ et } y = 0 \text{ impliquent } z = 0.$$

(*) Montrons que

$$D(T^*) = D(T) \oplus \aleph_{\overline{\lambda}} \oplus \aleph_\lambda$$

1-On a $D(T)$, $\aleph_{\overline{\lambda}}$, $\aleph_\lambda$ sont inclus dans $D(T^*)$ donc $D(T) \oplus \aleph_{\overline{\lambda}} \oplus \aleph_\lambda \subset D(T^*)$

2-Soit $u \in D(T^*)$. Montrons que u peut être représenté sous la forme

$$u = x + y + z$$

où $x \in D(T)$, $y \in \aleph_{\overline{\lambda}}, z \in R_{\overline{\lambda}}$.

Comme T fermé alors $R_{\overline{\lambda}}$ est un sous-espace fermé. Sachant que$\aleph_\lambda$ est son complément orthogonal ; on peut écrire

$$R_{\overline{\lambda}} \oplus \aleph_{\overline{\lambda}} = H$$

Chaque $\upsilon \in H$ peut alors être représenté sous la forme

$$\upsilon = \upsilon' + \upsilon'' \text{ où } \upsilon' \in R_{\overline{\lambda}} \text{ et } \upsilon'' \in \aleph_{\overline{\lambda}}$$

On essaye de représenter υ sous forme

$$\upsilon = (T^* - \overline{\lambda} I)u$$

$\upsilon' \in R_{\overline{\lambda}}$ alors ;

$$\upsilon' = (T - \overline{\lambda} I)x \quad \text{où} \quad x \in D(T).$$

Posant $\upsilon'' = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) y,\ y \in \aleph_\lambda$. On obtient

$$(T^* - \overline{\lambda} I)u = (T - \overline{\lambda} I)x + \left(\lambda - \overline{\lambda}\right) y$$

Et pour $T^* y = \lambda y,\ T^* x = Tx$

$$\begin{aligned} (T^* - \overline{\lambda} I)u &= T^* x - \overline{\lambda} x + T^* y - \overline{\lambda} y \\ &= (T^* - \overline{\lambda} I)x + (T^* - \overline{\lambda} I)y \\ &= (T^* - \overline{\lambda} I)(x + y) \end{aligned}$$

Donc

$$(T^* - \overline{\lambda} I)(u - x - y) = 0$$

On pose

$$z = u - x - y$$

alors $z \in \aleph_\lambda$ et

$$u = x + y + z$$

où $x \in D(T),\ y \in \aleph_{\overline{\lambda}},\ z \in \aleph_\lambda$ ce qui nous donne

$$T^* u = Tx + \lambda y + \overline{\lambda} z$$

□

Corollaire 2.2.1 *Un opérateur symétrique fermé est auto-adjoint si* $\aleph_\lambda = \{0\}\,,\ \aleph_{\overline{\lambda}} = \{0\}$ *dans ce cas :* $D(T) = D(T^*)$.

Formule de Neumann

On a $D(T^*) = D(T) \oplus \aleph_{\overline{\lambda}} \oplus \aleph_\lambda$, pour $\lambda = -i$ on obtient :

$$D(T^*) = D(T) \oplus \aleph_{\overline{i}} \oplus \aleph_{-i}$$

Donc chaque $x \in D(T^*)$ a la représentation unique :

$$x = x^0 + x^- + x^+ \text{ où } x^0 \in D(T), x^- \in \aleph_{\overline{i}}, x \in \aleph_{-i}$$

Montrons que ;

$$\operatorname{Im} \langle T^* x; x \rangle = \left\| x^+ \right\|^2 - \left\| x^- \right\|^2$$

Et on l'appelle : **"formule de Neumann"** .

$$\begin{aligned}
\langle T^* x, x \rangle &= \left\langle T x^0 - i x^- + i x^+, x^0 + x^- + x^+ \right\rangle \\
&= \left\langle T^* x^0, x^0 \right\rangle + \left\langle -i x^- + i x^+, x^0 \right\rangle + \left\langle T x^0, x^- + x^+ \right\rangle + \left\langle i x^- + i x^+, x^- + x^+ \right\rangle
\end{aligned}$$

Et on a :

$$\left\langle T x^0, x^- + x^+ \right\rangle = \left\langle x^0, T^* \left(x^- + x^+ \right) \right\rangle = \left\langle x^0, -i x^-, i x^+ \right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
\langle T^*x, x\rangle &= \left\langle T^*x^0, x^0\right\rangle + \left\langle -ix^- + ix^+, x^0\right\rangle + \left\langle x^0, -ix^- + ix^+\right\rangle - i\left\|x^-\right\|^2 + i\left\|x^+\right\|^2 \\
&\quad -i\left\langle x^+, x^-\right\rangle + i\left\langle x^+, x^-\right\rangle \\
&= \left\langle Tx^0, x^0\right\rangle + 2\,\mathrm{Re}\left[\left\langle x^0, -ix^-, ix^+\right\rangle + i\left\langle x^+, x^-\right\rangle\right] + i\left(\left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2\right)
\end{aligned}
$$

Donc,

$$\mathrm{Im}(T^*x; x) = \left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2$$

On décompose $D(T^*)$ en trois sous-ensembles : ε^+, ε^-, ε^0 tel que :

$\mathrm{Im}(T^*x; x) \succ 0, \ \prec 0, \ = 0$ respectivement donc : chaque $x \in D(T^*)$ est dans ε^+ ou ε^-ou ε^0.

Corollaire 2.2.2 *$D(T) \subset \varepsilon^0$, $\aleph_{\bar{i}} \subset \varepsilon^- \cup \{0\}$, $\aleph_{-i} \subset \varepsilon^+ \cup \{0\}$.*

Preuve. Pour $x \in D(T)$: $x^- = x^+ = 0$ donc :

$$\left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2 = 0$$

donc $x \in \varepsilon^0$.

Pour $x \neq 0$ et $x \in \aleph_{\bar{i}}$ donc $x^0 = x^+ = 0$ donc $x = x^-$. Alors :

$$\left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2 = \|x\|^2 \succ 0$$

donc $x \in \varepsilon^+ \cup \{0\}$. □

Proposition 2.2.3 *Si $\alpha > 0$ et $\beta \in R$ alors les espaces de défaut $\aleph_{-i}$, $\aleph_i$ des opérateurs T et $S = \alpha T + \beta I$ ont les mêmes dimensions.*

Preuve. On a : $D(T) = D(S)$. Et aussi :

$$
\begin{aligned}
\langle S^*x, x\rangle &= \langle(\alpha T + \beta I)^* x, x\rangle \\
&= \langle \alpha T^*x + \beta x, x\rangle \\
&= \alpha\langle T^*x, x\rangle + \beta\langle x, x\rangle,
\end{aligned}
$$

et

$$\beta\langle x, x\rangle = \beta\|x\|^2 \in \mathbb{R},$$

donc

$$\operatorname{Im}(S^*x;x) = \alpha\left(\left\|x^+\right\|^2 - \left\|x^-\right\|^2\right),$$

et $\alpha > 0$ donc ε^+, ε^- sont les mêmes pour les deux opérateurs T et S et $\dim \aleph_i$ et $\dim \aleph_{-i}$ est la même pour T et S. □

Théorème 2.2.4 *Pour chaque nombre complexe λ du demi-plan supérieur :*

$$\dim \aleph_{\overline{\lambda}} = \dim \aleph_{-i} \qquad et \qquad \dim \aleph_{\lambda} = \dim \aleph_i$$

Preuve. On pose : $\lambda = \sigma + i\tau$ et λ dans le demi-plan supérieur donc : $\tau > 0$, on note par $\aleph_i'$ et$\aleph_{-i}'$ les deux espaces de défaut de l'opérateur :

$$S = \tau^{-1}(T - \sigma I)$$

Pour

$$\begin{aligned}
x \quad &\in \quad \aleph_i' \Leftrightarrow x \in D(S^*) \;\; telque \;\; S^*x = -ix \\
&\Leftrightarrow \quad x \in D(S^*) \;\; telque \;\; \tau^{-1}(T^* - \sigma I)x + ix = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in D(T^*) \;\; telque \;\; \tau^{-1}(T^*x - \sigma x - i\tau x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in D(T^*) \;\; telque \;\; \tau^{-1}(T^*x - (\sigma - i\tau)x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in D(T^*) \;\; telque \;\; \tau^{-1}\left(T^* - \overline{\lambda} I\right)x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in D(T^*) \;\; telque \;\; \tau^{-1}T^*x = \overline{\lambda}x \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \aleph_\lambda.
\end{aligned}$$

Donc : $\aleph_i = \aleph_\lambda$. Et de la même façon on montre que $\aleph_{-i} = \aleph_{\overline{\lambda}}$.
Et de la proposition précédente les opérateurs T et $S = \tau^{-1}(T - \sigma I) = \tau^{-1}T - \tau^{-1}\sigma I$ où $\tau \succ 0$ et $\tau^{-1}\sigma \in \mathbb{R}$ ont :

$$\dim \aleph_i \;= \dim \aleph_i' \;= \dim \aleph_\lambda \; et \; \dim \aleph_{-i} \;= \dim \aleph_{-i}' = \dim \aleph_{\overline{\lambda}},$$

donc

$$\dim \aleph_\lambda = \dim \aleph_i \;\; et \;\; \dim \aleph_{\overline{\lambda}} = \dim \aleph_{-i}'.$$

□

Les indices de défauts On pose : $m = \dim \aleph_i$, $n = \dim \aleph_{-i}$, $m,\ n$ sont appelés les indices de défaut del'opérateur$T$.

Du théorème précédent :$m = \dim \aleph_\lambda, n = \dim \aleph_{\overline{\lambda}}$ si $Im\lambda > 0$.

Proposition 2.2.4 *Un opérateur symétrique fermé est auto-adjoint si et seulement si* $m = 0$ *et* $n = 0$.

Proposition 2.2.5 *Soit T un opérateur symétrique et V sa transformation de CAYLEY. Alors T est autoadjoint si et seulement si V est unitaire.*

Preuve. T est autoadjoint si et seulement si ses indices de défaut sont nuls, autrement dit $R_{\overline{\lambda}} = R_\lambda = H$ ce qui est équivalent à $D(V) = R(V) = H$. Il en découle que V est unitaire. □

Théorème 2.2.5 *Si T est un opérateur symétrique fermé et si S est un opérateur borné, Hermitien et défini sur toute H alors , les deux opérateurs T et $T + S$ ont les mêmes indices de défaut.*

Preuve. On a : $(T+S)^* = T^* + S$ donc :

$$D\left((T+S)^*\right) = D\left(T^*\right),$$

et pour $x \in D\left(T^*\right)$:

$$\begin{aligned} \left\langle (T+S)^* x, x \right\rangle &= \left\langle (T^* + S)\, x, x \right\rangle \\ &= \left\langle T^* x, x \right\rangle + \left\langle Sx, x \right\rangle \end{aligned}$$

et tant que $\langle Sx, x\rangle \in \mathbb{R}$ alors :

$$\operatorname{Im}\left\langle (T+S)^* x, x \right\rangle = \operatorname{Im}\left\langle T^* x, x \right\rangle.$$

Donc ε^+ des opérateurs T et $T + S$ coïncide et aussi ε^- donc de la proposition 2.2.3 : T et $T + S$ ont les même indices de défaut. □

2.2.2 Construction de l'extension d'opérateurs symétriques

Soit T un opérateur symétrique fermé et soit $\widetilde{T}$ une extension symétrique fermée de T .On note par V et $\widetilde{V}$: les transformations de CAYLEY de T et $\widetilde{T}$ respectivement :
On a : $V \subset \widetilde{V}$ alors :

$$D(V) \subset D(\widetilde{V}) \ et \ R(V) \subset R(\widetilde{V}).$$

On pose :

$$P = D(\widetilde{V}) \ominus D(V) \ et \ Q = R(\widetilde{V}) \ominus R(V),$$

donc :

$$P \perp D(V) = R_{\overline{\lambda}} \ et \ Q \perp R(V) = R_{\lambda},$$

alors : $P \subset H \ominus R_{\overline{\lambda}}$ donc $P \subset \aleph_{\overline{\lambda}}$ et $Q \subset H \ominus R_{\lambda}$ donc $Q \subset \aleph_{\lambda}$.
Définissant l'opérateur U par :

$$U : x \to Ux = \widetilde{V}x \ pour \ x \in P,$$

tant que $\widetilde{V} : D(\widetilde{V}) \to R(\widetilde{V})$ est une isométrie alors $\widetilde{V} : P \to Q$ est aussi une isométrie donc $U : P \to Q$ l'est aussi.

Inversement

On suppose un opérateur isométrique
$U : P \subset \aleph_{\overline{\lambda}} \to Q \subset \aleph_{\lambda}$ donné $(P = D(\widetilde{V}) \ominus D(V))$ donc :

$$D(\widetilde{V}) = P \oplus D(V)$$

Si on pose pour $y \in D(V)\,;\ z \in P\,;\ \widetilde{V}(y+z) = Vy + Uz$ on obtient un opérateur isométrique $\widetilde{V}$ qui représente une extension de V et par conséquent $\widetilde{V}$ est la transformation de CAYLEY d'une certaine extension symétrique fermée de l'opérateur T.

Construction de $\widetilde{T}$ (à l'aide de U)

Du théorème concernant la transformation du CAYLEY (chaque opérateur isométrique V qui vérifie la $2^{ème}$ condition, est la transformation de CAYLEY de certain opérateur symétrique),

$$\widetilde{T} = (\lambda I - \overline{\lambda}\widetilde{V})(I - \widetilde{V})^{-1} \ donc : D(\widetilde{T}) = R(I - \widetilde{V}),$$

donc pour : $y+z \in D(\widetilde{V})$: $x' \in D(\widetilde{T})$, *donc*

$$x' = (y+z) - \widetilde{V}(y+z) = y+z-(Vy+Vz)$$

tel que $\widetilde{V} = V$ sur $D(V)$, $y \in D(V)$, $z \in P$.

Posant :

$$x = y - Vy = \left(\lambda - \overline{\lambda}\right)\widetilde{x} \text{ tel que : } \widetilde{x} \in D(T),$$

donc $D(\widetilde{T})$ consiste tous les vecteurs de la forme :

$$x' = x + z - Uz \text{ tel que } x \in D(T),\ z \in P,\ Uz \in Q.$$

Et tant que : $\widetilde{T} \subset T^*$ où $z \in \aleph_{\overline{\lambda}}, Uz \in \aleph_\lambda$ donc :

$$\widetilde{T}x' = Tx + \lambda z - \overline{\lambda}Uz,$$

et de la définition de $\widetilde{T}$, ces espaces de défauts sont donnés par ;

$$\aleph'_{\overline{\lambda}} = \aleph_{\overline{\lambda}} \ominus P \text{ et } \aleph'_\lambda = \aleph_\lambda \ominus Q.$$

On a donc le théorème suivant :

Théorème 2.2.6 *chaque extension symétrique fermé $\widetilde{T}$ d'un opérateur symétrique fermé T est déterminée par certain opérateur isométrique U tel que $D(U) = P$; un sous espace fermé de $\aleph_{\overline{\lambda}}$ et $Q = R(U)$ est un sous espace fermé de $\aleph_\lambda$. Et*

$$D(\widetilde{T}) = \left\{x' : x' = x + z - Uz \text{ tel que } x \in D(T),\ z \in P\right\}$$

avec $\widetilde{T}x' = Tx + \lambda z - \overline{\lambda}Uz$

Inversement : *Pour chaque opérateur U avec ces formules détermine un extension symétrique fermé $\widetilde{T}$ de l'opérateur T, ses espaces de défauts sont :*

$$\aleph'_{\overline{\lambda}} = \aleph_{\overline{\lambda}} \ominus P \text{ et } \aleph'_\lambda = \aleph_\lambda \ominus Q.$$

Proposition 2.2.6 *Une extension $\widetilde{T}$ de T est auto-adjoint si et seulement si,*

$$\aleph'_{\overline{\lambda}} = \{0\},\ \aleph'_\lambda = \{0\}$$

(i.e.) *Si et seulement si :* $P = \aleph_{\overline{\lambda}}$ *et* $Q = \aleph_{\lambda}$.

Donc pour que l'opérateur U *existe,il est nécessaire et suffisant que* $\aleph_{\lambda}, \ \aleph_{\overline{\lambda}}$ *aient la même dimension.*(i.e.) *si et seulement si :*

$$P = \aleph_{\overline{\lambda}} \ et \ Q = \aleph_{\lambda}$$

Donc pour que l'opérateur U *existe, il est nécessaire et suffisant que* $\aleph_{\lambda}, \ \aleph_{\overline{\lambda}}$ *aient la même dimension.*

Théorème 2.2.7 *Une extension* $\widetilde{T}$ *est auto-adjoint si et seulement si ;*

$$D(U) = \aleph_{\overline{\lambda}} \ et \ R(U) = \aleph_{\lambda}.$$

Théorème 2.2.8 *Un opérateur* T *admet une extension auto-adjointe* $\widetilde{T}$ *si et seulement si :* $\aleph_{\overline{\lambda}}, \ \aleph_{\lambda}$ *ont la même dimension (i.e.) ces indices de défaut sont égaux.*

Cas particulier *(si* $\dim \aleph_{\overline{\lambda}} < \infty$ *et* $\dim \aleph_{\lambda} < \infty$ *)*

Pour qu.une extension auto-adjointe existe : $\dim \aleph_{\overline{\lambda}} = \dim \aleph_{\lambda} = n$

$\{e_1, \ e_2, ..., e_n\}$ *est une base orthonormée dans* $\aleph_{\overline{\lambda}}$,

$\left\{e_1^{'}, \ e_2^{'}, ..., e_n^{'}\right\}$ *est une base orthonormée dans* $\aleph_{\lambda}$.

Donc pour $z \in \aleph_{\overline{\lambda}}$ *:* $z = \xi e_1 + \xi e_2 + ... + \xi e_n$, *et chaque opérateur isométrique :* $U : \aleph_{\overline{\lambda}} \rightarrow \aleph_{\lambda}$ *est donné par :*

$$Uz = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (U_{jk}\xi_k)\, e_j^{'}$$

Où $U = [U_{jk}]$ *est une matrice unitaire alors* $D(\widetilde{T})$ *est l'ensemble des* $x^{'}$ *tel que :* $x^{'} = x + z - Uz$ *et :*

$$x^{'} = x + \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (U_{jk}\xi_k)\, e_j^{'} \ x \in D(T)$$

$$\widetilde{T}x^{'} = Tx + \lambda \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k - \overline{\lambda} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (U_{jk}\xi_k)\, e_j^{'}$$

Proposition 2.2.7 *Un opérateur symétrique fermé* T *est maximal si et seulement si un des deux espaces de défaut égale* $\{0\}$ (i.e) *si et seulement si ses indices de défaut sont* $(0, n)$ *ou* $(n, 0)$.

Proposition 2.2.8 *Une extension* $\widetilde{T}$ *est maximale si et seulement si une ou les deux relations sont vérifés :* $P = \aleph_{\overline{\lambda}}$ *et* $Q = \aleph_{\lambda}$.

Proposition 2.2.9 *Si* $\dim \aleph_{\overline{\lambda}} < \infty$ *et* $\dim \aleph_{\lambda} < \infty$ *et* $\dim \aleph_{\lambda} = \dim \aleph_{\overline{\lambda}}$, *alors chaque extension maximale est auto-adjointe.*

CONCLUSION

Bibliographie

[1] Akhiezer N. I. and Glazman I. M. : Theory of linear operators in Hilbert space, vols 1 and 2, New York, Frederik Ungar 1961 and 1963.

[2] Joachim Weidmann :linear operators in Hilbert spaces, Springer-Verlag, New York Inc, (1980).

[3] ettebghor, S.Marchesseau : Résolution d'Équations aux Dérivées Partielles Non Linéaires et Couplées, Ecole des Mines de Nancy,(2006-2007).

[4] C. Daveau : Méthodes d'Approximation des Équations aux Dérivées Partielles. Cours de Master 2 de l'Université de Cergy-Pontoise.

[5] B.Helffer : Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles, Université Paris-Sud, Version de Janvier - Mai, (2007).

[6] R. Herbin : Analyse Numérique des EDP. Cours de Master de mathématiques de l'Université Aix Marseille 1.

[7] Pierre.Puiseux,. : Calcul Scientifique2 : Différences Finies pour Équations aux Dérivées Partielles, Université de Pau et des Pays de l'Adour, Janvier (2010).

[8] A. Taik,. : Cours : Equations aux Dérivées Partielles-Méthodes des Différences Finies, Département de Mathématiques, FST-Mohammedia, (2008).