Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique
Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Cycle LMD

Spécialité : Analyse Harmonique et EDP

Thème

Sur les propriétés des opérateurs positifs

Présenté par :

BENHADJA ZAHIA

Soutenu le 26 /05/2015

Les membres de jury

Mr	**Belarbi**	**Président**	**MCA**	**U. Mostghanem**
Mme	**Ould Ali**	**Examinateur**	**MCA**	**U. Mostghanem**
Mme	**Bendahmane**	**Encadreur**	**MAA**	**U. Mostghanem**

Année Universitaire 2014 -2015

Table des matières

Remerciements

En préambule à ce mémoire, j'adresse ces quelques mots pour remercier notre grand Dieu tout puissant pour exprimer ma reconnaissance envers sa grand générosité. Dieu m'a donné la volonté, le courage, la santé et la confiance durant mes années d'études.
Je remercie madame **Bendahmane. H**, qui, en tant que mon encadreur, elle était toujours à l'écoute tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour son aide et le temps qu'elle a bien voulu me consacrer.

Mes plus sincères remerciements à monsieur **Belarbi** d'avoir bien voulu présider mon jury et madame **Oueld Ali** d'avoir accepter de faire partie de ce jury.
Je voudrais remercier aussi les employeurs de l'université de Mostaganam et de Chlef ; en particulier je remercier madame **Bechaoui**, qui a toujours été une source de motivation et d'encouragement.
Je tiens aussi à remercier ma petite famille surtout mes chere parents et mon frère **MAHFOUD**. mes ami(es) et tous ceux qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de mon mémoire.

Dédicace

Au début, je dédie ce modeste travail à ma chère ma grand-mère **Maghnia** qui nous a quittés avant de féliciter mon travail, a la source de tendresse, en signe d'amoure et gratitude ma mère **Halima**, à qui ma facilite de chemin de ma vie et qui m'aidée et encouragé à terminer mes études mon père **Abd El Kader,** à mon grand frère **Mahfoud** sans lequel , je ne saurais pu progresser et arriver à l'achèvement de ce travail .

A' tous mes frères **:Yassine**, **Hamza**, **Hamid** et son épouse **Fouzia**, à mes sœurs :**Ouda** , **Naima**, Fatima et son marie **Khalifa**,à **Souad,** à les anges de nos maison les enfants :**Zine El Dine, Noure El dine** et **Mohamed Amine.**

A' toute la famille Benhadja, à tous mes amies de lycée jusqua à l'université, e à tous les étudiants de master filière **A**nalyse **H**armonique , **A**nalyse **F**onctionelle et **M**odilisation **C**ontrôle **O**ptimisation Promotion (2014-2015) avec qui nous avons en plaisir de travailler et dont la participation à considérablement contribué à l'élaboration de notre travail de recherche.

RÉSUMÉ

On s'intéresse dans ce mémoire à démontrer quelques propriétés des opérateurs positifs nottament que tout operateur borné positif possède un opérateur racine et que tout opérateur borné a une décomposition dite "polaire" analogue à la décomposition polaire des nombres complexes.

INTRODUCTION

On sait qu'en dimension finie, une matrice positive réelle symétrique ou complexe hermitienne est toujours diagonalisable par une matrice orthogonale dans le premier cas ou unitaire dans le second, et elle possède des valeurs propres positives dont les vecteurs propres associés sont deux à deux orthogonaux. Ceci permet de montrer entre autre que pour une telle matrice A, il existe une unique matrice symétrique positive dont le carré soit justement A. Ces dernières sont associées à des applications linéaires dites "positive". Il est naturel s'essayer d'étendre ce concept aux opérateurs bornés agissants dans un espace de Hilbert de dimension infinie et même au cas des opérateurs non bornés

C'est pourquoi, on s'intéresse dans ce mémoire à définir puis à donner quelques propriétés des opérateurs positifs bornés dont, l'existance de la racine carrée d'un opérateur positif ainsi que la décomposition polaire d'un opérateur qui n'est possible que grâce à ce type d'opérateurs.

Ce travail est divisé en deux chapitres ;

Le premier chapitre est consacré l'introduction des différentes notions et définitions de bases sur les opérateurs dans un espace de Hilbert, nous nous intéresserons en particulier à définir les opérateurs adjoints et autoadjoints.

Dans le second chapitre, on commence par donner quelques définitions et exemples surs les opérateurs positifs, ainsi on démontre que le produit de deux opérateurs qui sont commutant est un opérateur positif. et on montre que le spectre d'un opérateur positif est non négatif c'est-à-dire pour tout opérateur $A \in B(H)$ positif : $\sigma(A) \subset [0, +\infty[$, puis on montre l'existence de la racine carrée d'un opérateur positif.

Finalement on démontre que tout opérateur positif borné possède une décomposition dite "polaire", cette décomposition affirme que pour un opérateur $A \in B(H)$, qu'il existe une isométrie partielle U pour laquelle A s'écrit sous la forme $A = U|A|$ où $|A|$ est l'opérateur racine carrée de l'opérateur positif A^*A .

Chapitre 1

Rappel

1.1 Espace de Hilbert

1.1.1 Produit Scalaire

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel complexe. On appelle produit scalaire sur E toute application sesquilinéaire hermitienne, définie positive de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ que l'on note par $\langle .,. \rangle$.*
De même pour un espace vectoriel réel, on appelle produit scalaire sur E toute application bilinéaire symétriquee, définie positive de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ que l'on note aussi par $\langle .,. \rangle$.

– Tout produit scalaire induit une norme sur E par la relation

$$\|u\|_E = \sqrt{\langle u, u \rangle_E},\ \forall u \in E. \tag{1.1.1}$$

1.1.2 Suite de Cauchy

Définition 1.1.2 *Soient E un $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|u\|_E$ et $(X_n)_{n\in N}$ une suite de vecteurs dans E. La suite $(X_n)_{n\in N}$ est dite de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ N_0 \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \forall\ n,\ m \geq N_0 : \|X_n - X_m\|_E < \varepsilon. \tag{1.1.2}$$

1.1.3 Suite convergente

Définition 1.1.3 *On dit que la suite $(X_n)_{n\in N}$ est convergente vers $X \in E$ si,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N_0 \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \forall\ n \in \mathbb{N}\ n \geq N_0 : \|X_n - X\|_E < \varepsilon. \tag{1.1.3}$$

1.1.4 Espace complet

Définition 1.1.4 *Soit E un espace vectoriel normé ; on dit que E est complet si pour toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in N} \subset E$ est convergente dans E.*

1.1.5 Espace préhilbertien

Définition 1.1.5 *On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

Définition 1.1.6 *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme induite par le produit scalaire.*

1.1.6 Orthogonalité

Définition 1.1.7 *Soit H un espace de Hilbert, on dit que deux élèments x et y de H sont orthogonoux, et on écrit $x \perp y$, si*

$$\langle x, y\rangle = 0. \tag{1.1.4}$$

Plus géneralement, on dit que deux sous espace H_1 et H_2 de H sont orthogonoux, et on écrit $H_1 \perp H_2$, si

$$\forall x \in H_1, \forall y \in H_2 \;\; \langle x, y\rangle = 0. \tag{1.1.5}$$

1.2 Opérateurs dans un espace de Hilbert

Définition 1.2.1 *Soit H et H' deux espaces de Hilbert. Un opérateur A de H dans H' est une application linéaire $A : D(A) \subset H \longrightarrow H'$ telle que :*

- $D(A)$ est l'ensemble des vecteurs $x \in H$ pour lesquels il existe une image $y \in H'$.
- On appelle $G(A)$ graphe de l'opérateur A le sous -espace de $H \times H'$ défini par :

$$G(A) = \{(x, Ax) \text{ tel que } x \in D(A)\}. \tag{1.2.1}$$

- On appelle $\ker(A)$ noyau de l'opérateur A le sous-espace de H défini par :

$$\ker(A) = \{x \in D(A) \text{ tel que } Ax = 0\}. \tag{1.2.2}$$

– On appelle $\text{Im}(A)$ image de l'opérateur A le sous-espace de H' défini par :

$$\text{Im}(A) = \{y \in H' : y = Ax,\ x \in D(A)\}. \tag{1.2.3}$$

– On note par $L(H, H')$ l'espace vectoriel des opérateurs de H dans H'. Si $H = H'$, on pose $L(H) = L(H, H)$.

1.2.1 Inverse d'un opérateur

Soient H, H' deux espaces de Hilbert et $A \in L(H, H')$.

Définition 1.2.2 *On dit que A est inversible s'il existe $B \in L(H', H)$ tel que*

$$AB = Id_{H'} \text{ et } BA = Id_H$$

où Id_H (respectivement $Id_{H'}$) est l'opérateur identité de H (respectivement H').
Un tel opérateur B (lorsqu'il existe) est unique, on l'appelle opérateur inverse de A ou simplement inverse de A et on le note $B = A^{-1}$.

1.2.2 Spectre d'un opérateur

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $A \in L(E)$.

Définition 1.2.3 (Spectre d'un opérateur) *Le spectre d'un opérateur A est le sous-ensemble défini par*

$$\sigma p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda Id) \text{ n'est pas inversible}\}. \tag{1.2.4}$$

L'ensemble complémentaire est appelé l'ensemble résolvante.

Définition 1.2.4 (valeur propre d'un opérateur) *On appelle valeur propre de A tout scalaire $\lambda \in \Bbbk$ tel que $(A - \lambda Id)$ n'est pas injectif.*

1.3 Les opérateurs bornés

Définition 1.3.1 *Soient H et H' deux espaces de Hilbert, un opérateur A de H dans H' est dit borné si et seulement si*

$$\sup \|Ax\|_{H'} < +\infty. \tag{1.3.1}$$

L'ensemble des opérateurs bornés de H dans H' est noté $B(H, H')$. Si $H = H'$, on pose $B(H) = B(H, H)$.

Théorème 1.3.1 *Si H est un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert, $A \in B(H)$ et*

$$\langle Ax, x\rangle = 0,\ \forall x \in H. \tag{1.3.2}$$

Alors

$$A = 0. \tag{1.3.3}$$

Preuve. *Ona*

$$\langle A(x+y), x+y\rangle = 0,\ \forall x,\ y \in H,$$

alors

$$\begin{aligned}\langle A(x+y), x+y\rangle &= \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle \\ &= \langle A(x), y\rangle + \langle A(y), x\rangle = 0.\end{aligned}$$

De même

$$\langle A(x+iy), x+iy\rangle = -i\langle A(x), y\rangle + i\langle A(y), x\rangle = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned}\langle A(x), y\rangle + \langle A(y), x\rangle + i(-i\langle A(x), y\rangle + i\langle A(y), x\rangle) &= 2\langle Ax, y\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \langle Ax, y\rangle = 0\ \forall x, y \in H.\end{aligned}$$

En particulier pour $y = Ax$

$$\begin{aligned}\langle Ax, Ax\rangle &= \|Ax\|^2 = 0 \\ &\Longrightarrow Ax = 0, \forall x \in H.\end{aligned}$$

Donc

$$A = 0.$$

□

Remarque 1.3.1 *Si H est un Hilbert sur $\mathbb{R}$, alors le théorème précédent n'est pas toujours vérifié.*

Exemple 1.3.1 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a ; $\langle Ax, x \rangle = 0$ *mais :*$A \neq 0$.

Théorème 1.3.2 *Si A est auto-adjoint sur $\mathbb{R}$-Hilbert, alors :*

$$\langle Ax, x \rangle = 0 \ , \forall x \in H \Longrightarrow A = 0. \tag{1.3.4}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \langle A(x+y), x+y \rangle &= \langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle = \langle Ax, y \rangle + \langle x, Ay \rangle \quad \text{symétrie} \qquad (1.3.5) \\ &= \langle Ax, y \rangle + \langle Ax, y \rangle = 2 \langle Ax, y \rangle = 0 \ A \text{ auto-adjoint} \end{aligned}$$

pour $y = Ax$, on conclut de la même manière que ce théorème est aussi vrai si H est $\mathbb{R}$-hilbertien.

Corollaire 1.3.1 *Si A, $B \in B(H)$ et $\forall x \in H : \langle Ax, x \rangle = \langle Bx, x \rangle$. Alors $A = B$.*

Preuve. On Applique le théorème précédent à l'opérateur $A - B$. □

Lemme 1.3.1 *Soient E, F deux $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels normés et $\varphi : E \times F \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *φ est continue.*

ii) *φ est continue en $(0,0)$.*

iii) $\sup \{ |\varphi(x,y)| : (x,y) \in E \times F, \|x\| \leq 1; \|y\| \leq 1 \} < +\infty$.

iv) *Il existe une constante $c \geq 0$ telle que*

$$|\varphi(x,y)| \leq c \|x\| \|y\| \ \ \forall (x,y) \in E \times F. \tag{1.3.6}$$

Preuve. i)$\Longrightarrow$ii) évident.

ii)$\Longrightarrow$iii) On suppose que (ii) est vérifiée alors que (iii) ne l'est pas pour aboutir a une contradiction . Supposons donc qu'il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E; (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ vérifiants

$$\|x_n\| \leq 1, \|y_n\| \leq 1; \forall n \in \mathbb{N},$$

avec

$$|\varphi(x_n, y_n)| \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} \infty .$$

On peut alors dire que

$$|\varphi(x_n, y_n)| \geq n^2 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

On pose $v_n = \frac{1}{n} x_n$ et $w_n = \frac{1}{n} y_n$. On a ;

$$\|v_n\| = \left\| \frac{1}{n} x_n \right\| \leq \frac{1}{n} \|x_n\| \leq \frac{1}{n}.$$

Et de même

$$\|w_n\| \leq \frac{1}{n},$$

d'où

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|(v_n, w_n)\| \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

c'est à dire ;

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|(v_n, w_n)\| = 0.$$

Et

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (v_n, w_n) = 0.$$

D'aprés (ii)

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \varphi(v_n, w_n) = 0.$$

D'autre part,

$$|\varphi(v_n, w_n)| = \left| \frac{1}{n^2} \varphi(x_n, y_n) \right| = \frac{1}{n^2} |\varphi(x_n, y_n)| \geq \frac{1}{n^2} n^2 \geq 1.$$

Contradiction.

iii)$\Longrightarrow$iv) On suppose que (iii) est vérifiée et on pose

$$M = \sup \{ |\varphi(x, y)| : (x, y) \in E \times F ; \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \} < +\infty$$

On montre que

$$|\varphi(x, y)| \leq M \|x\| . \|y\| , \forall (x, y) \in E \times F$$

Soient $(x, y) \in E \times F$. Si $x = 0_E$ alors

$$|\varphi(x, y)| = |\varphi(0, y)| = M.0. \|y\| = M \|x\| . \|y\| \text{ vérifiée}$$

De même pour $y = 0_F$.

On suppose que $(x, y) \neq (0_E, 0_F)$ et l'on considère

$$v = \frac{1}{\|x\|}x, \;\; w = \frac{1}{\|y\|}y$$

on a alors,

$$|\varphi(x, y)| = |\varphi(\|x\| v, \|y\| w)| = \|x\| . \|y\| . |\varphi(v, w)|$$

mais comme

$$\|v\| = \|w\| = 1,$$

alors d'après (iii) ;

$$\sup |\varphi(v, w)| = M < +\infty$$

d'où

$$|\varphi(v, w)| \leq M < +\infty$$

et

$$\begin{aligned} |\varphi(x, y)| &= \|x\| \|y\| |\varphi(v, w)| \\ &\leq M \|x\| \|y\| . \end{aligned}$$

iv)$\Longrightarrow$i) On suppose que (iv) est vérifiée et on montre que φ est continue, c'est à dire ,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) \;;\forall (x_0, y_0) \in E \times F$$

pour cela on utilise la propriété suivante ,

$$[\varphi \text{ est continue en } (x_0, y_0)] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} \forall ((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset E \times F : \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(x_n, y_n) = \varphi(x_0, y_0) \end{array} \right].$$

Soient donc, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_o$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y_o$. On a,

$$\begin{aligned} |\varphi(x_n, y_n) - \varphi(x_0, y_0)| &= |\varphi(x_n, y_n) - \varphi(x_n, y_0) + \varphi(x_n, y_0) - \varphi(x_0, y_0)| \\ &\leq |\varphi(x_n, y_n) - \varphi(x_n, y_0)| + |\varphi(x_n, y_0) - \varphi(x_0, y_0)| \\ &\leq |\varphi(x_n, y_n - y_0)| + |\varphi(x_n - x_0, y_0)| \\ &\leq c \|x_n\| \|y_n - y_0\| + c \|x_n - x_0\| \|y_0\| . \end{aligned}$$

Comme$\|y_n - y_0\| \to 0$ et$\|x_n - x_0\| \to 0$ pour $n \longrightarrow +\infty$, alors ;

$$\lim_{n \to +\infty} |\varphi(x_n, y_n) - \varphi(x_0, y_0)| = 0$$

d'où,

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi(x_n, y_n) = \varphi(x_0, y_0).$$

□

Théorème 1.3.3 (de la représentation de Riez) *[6] Si $A : H \to \mathbb{C}$ est une forme linéaire bornée (ou continue). Alors il existe un unique $g \in H$ tel que $\forall f \in H$ on a,*

$$A(f) = \langle f, g \rangle, \tag{1.3.7}$$

de plus,

$$\|A\| = \|g\|_H. \tag{1.3.8}$$

Théorème 1.3.4 *Soient H et H' deux $\mathbb{C}$-espaces de Hilbert et $\varphi : H \times H' \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire. On a l'équivalence des deux propriétés suivantes :*
(i) : φ est continue.
(ii) : Il existe $S \in B\left(H', H\right)$ tel que

$$\varphi(x_1, x_2) = \langle x_1, Sx_2 \rangle_H ; \forall (x_1, x_2) \in H \times H'. \tag{1.3.9}$$

L'opérateur S est unique et vérifie

$$\|S\| = \|\varphi\|. \tag{1.3.10}$$

Preuve. $i) \Longrightarrow ii)$ On suppose que φ est continu. D'après le lemme (1.3.1)

$$|\varphi(x, y)| \leq \|\varphi\| \|x\| \|y\| ; (c = \|\varphi\|) \, \forall (x, y) \in H \times H'.$$

Pour $y \in H'$, on considère la forme linéaire suivante,

$$\begin{aligned} \varphi_y \quad &: \quad H \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \quad &\longrightarrow \quad \varphi_y(x) = \varphi(x, y) \end{aligned}$$

(φ_y est clairement linéaire)

$$\forall x \in H : \left|\varphi_y(x)\right| = |\varphi(x, y)| \leq \|\varphi\| \|x\| \|y\|.$$

D'où, φ_y est continue et

$$\left\|\varphi_y\right\| \leq \|\varphi\| \|y\| .$$

D'après le théorème (1.3.3), il existe un unique élément $\widetilde{y} \in H$ tel que

$$\varphi_y(x) = \langle x, \widetilde{y} \rangle_H$$

et on a,

$$\|\widetilde{y}\|_H = \left\|\varphi_y\right\| .$$

On déduit alors que

$$\|\widetilde{y}\|_H = \left\|\varphi_y\right\| \leq \|\varphi\| \|y\|_{H'}$$

On définit à présent l'opérateur suivant

$$\begin{array}{ccc} S & : & H^{'} \longrightarrow H \\ y & \longrightarrow & S\left(y\right) = \widetilde{y} \end{array}$$

S est bien défini par la représentation de Riez (pour $y \in H^{'}$: $\widetilde{y}$ existe et est unique) de plus pour $y_1, y_2 \in H^{'}$:

$$S(y_1 + y_2) = \widetilde{y_{1+}y_2} \text{ et } S(y_1) + S\left(y_2\right) = \widetilde{y_1} + \widetilde{y_2}.$$

Mais,

$$\begin{aligned} \langle x, \widetilde{y_1} + \widetilde{y_2} \rangle_{H_1} &= \langle x, \widetilde{y_1} \rangle_{H_1} + \langle x, \widetilde{y_2} \rangle_{H'} = \varphi_{y_1}(x) + \varphi_{y_2}(x) \\ &= \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2) = \varphi(x, y_1 + y_2) \\ &= \varphi_{y_1 + y_2}(x) \\ &= \left\langle x, \widetilde{y_1 + y_2} \right\rangle ; \forall x \in H_1, \end{aligned}$$

d'où

$$\widetilde{y_1} + \widetilde{y_2} = \widetilde{y_1 + y_2} \text{ et } S\left(y_1 + y_2\right) = S(y_1) + S(y_2),$$

de même pour $y \in H_2$ et $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$S\left(\alpha y\right) = \widetilde{\alpha y} \text{ et } \alpha S\left(y\right) = \alpha \widetilde{y}$$

mais,

$$\begin{aligned}\langle x, \alpha\widetilde{y}\rangle_H &= \overline{\alpha}\,\langle x, \widetilde{y}\rangle_H = \overline{\alpha}\varphi_y(x) = \overline{\alpha}\varphi(x,y) \\ &= \varphi(x,\alpha y) = \varphi_{\alpha y}(x) = \langle x, \widetilde{\alpha y}\rangle_H\end{aligned}$$

Alors

$$\alpha\widetilde{y} = \widetilde{\alpha y} \text{ et } S(\alpha y) = \alpha S(y)$$

S est linéaire et

$$\|S\,(y)\|_H = \|\widetilde{y}\|_H = \|\varphi y\|_H \leq \|\varphi\|\,\|y\|_{H'}$$

on déduit que

$$\|S\| \leq \|\varphi\|\,,$$

et que S est borné et donc continu.

Enfin, S est unique par la définition de $\widetilde{y}$. De plus,

$$|\varphi\,(x,y)| = |\langle x, S\,(y)\rangle_H| \leq \|x\|_H\,\|S\,(y)\|_H \leq \|S\|\,\|x\|_H\,\|y\|_{H'} \text{ (d'après le lemme (1.3.1))}\,,$$

$$\|\varphi\| \leq \|S\|$$

Conclusion

$$\|\varphi\| = \|S\|\,.$$

ii)$\Longrightarrow$i).On suppose que φ vérifie(ii) et on montre qu'elle est continue. On a ,

$$\varphi\,(x_1,x_2) = \langle x_1, Sx_2\rangle_H \;\;\forall\,(x_1,x_2) \in H \times H^{'}$$

Alors ;

$$|\varphi\,(x_1,x_2)| = |\langle x_1, Sx_2\rangle_H| \leq \|S\|\,\|x_1\|_H\,\|x_2\|_{H'}$$

On déduit alors la continuité du lemme $(1.3.1)$. □

Remarque 1.3.2 *On définit la forme suivante*

$$\begin{aligned}\psi \quad &: \quad H^{'} \times H \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x_2,x_1) \quad &\Longrightarrow \quad \psi\,(x_2,x_1) = \overline{\varphi\,(x_1,x_2)}.\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\|\psi\| = \|\varphi\| \tag{1.3.11}$$

et que ψ *est clairement continue. On peut alors appliquer le théorème* (1.3.4) *et il existe* $A \in B\left(H, H^{'}\right)$ *tel que*

$$\psi\left(x_2, x_1\right) = \left\langle x_2, Ax_1\right\rangle_{H'} ; \forall \left(x_2, x_1\right) \in H^{'} \times H. \tag{1.3.12}$$

D'où,

$$\varphi\left(x_1, x_2\right) = \overline{\psi\left(x_2, x_1\right)} = \overline{\left\langle x_2, Ax_1\right\rangle}_{H'} = \left\langle Ax_1, x_2\right\rangle_{H'} . \tag{1.3.13}$$

On peut affirmer que (ii) est équivalente à la propriété suivante :

1. *iii) Il existe* $A \in B\left(H, H^{'}\right)$ *tel que*

$$\varphi\left(x_1, x_2\right) = \left\langle Ax_1, x_2\right\rangle_{H'} \tag{1.3.14}$$

Avec,

$$\|A\| = \|\psi\| = \|\varphi\| \tag{1.3.15}$$

Enfin, on peut conclure que

$$\left\langle Ax_1, x_2\right\rangle_{H'} = \left\langle x_1, Sx_2\right\rangle_H \tag{1.3.16}$$

Avec $\|S\| = \|A\|$.

1.3.1 Adjoint d'un opérateur linéaire continu

Définition 1.3.2 *Soit* H *un espace de Hilbert et* $A \in L(H)$, *l'unique opérateur* $A^* \in L(H)$ *tel que pour tout* $x, y \in H$

$$\langle A(x), y\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle \tag{1.3.17}$$

est appelé adjoint de A.

Corollaire 1.3.2 *Soit* $A \in B\left(H\right)$. *Alors,*

$$\|A\| = \|A^*\| . \tag{1.3.18}$$

Preuve. On considère la forme sesquilinéaire suivante ;

$$\begin{array}{rl} \varphi : H \times H \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \left(x_1, x_2\right) \longmapsto & \varphi\left(x_1, x_2\right) = \left\langle Ax_1, x_2\right\rangle_H \end{array}$$

Il découle immédiatement de la remarque 1.3.2 et de l'unicité de l'adjoint que $S = A^*$. D'où la conclusion. $\square$

Propriétés des opérateurs adjoint :

Proposition 1.3.1 *Soit H un espace de Hilbert. Alors*

1. $\forall A \in B(H) : (A^*)^* = A$. Si A est inversible alors A^* l'est aussi et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
2. $(AS)^* = S^*A^*$.
3. $(A+S)^* = A^* + S^*$.

Proposition 1.3.2 *Pour tout $A \in L(H)$,on a les relations*

$$Ker(A)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(A^*)} \text{ et } Ker(A^*)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(A)}. \tag{1.3.19}$$

Preuve. Soit

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Im}(A^*)^{\perp} &\Longleftrightarrow \langle y, A^*x\rangle = 0, \forall x \in H \\ &\Longleftrightarrow \langle Ay, x\rangle = 0, \forall x \in H \\ &\Longleftrightarrow Ay = 0 \\ &\Longleftrightarrow y \in Ker(A) \end{aligned}$$

Soit Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(A^*)^{\perp} &= Ker(A) \\ &\Longrightarrow Ker(A)^{\perp} = \left(\mathrm{Im}(A^*)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(A^*)}. \end{aligned}$$

La deuxième relation s'obtient de la première en remplaçant A par A^* et en remarquant que $A^{**} = A$. □

Exemple 1.3.2 *Dans $L^2(\mathbb{R})$ on définit l'opérateur A par*

$$\begin{aligned} A &: L^2 \longrightarrow L^2 \\ f &\longrightarrow Af = \varphi f \text{ où } \varphi \text{ est une fonction bornée sur } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Soint $f, g \in L^2$ alors :

$$\begin{aligned} \langle Af, g\rangle &= \int_{\mathbb{R}} (Af)(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)f(x)\overline{g(x)}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\overline{\varphi(x)}g)(x)}dx \\ &= \langle f, \overline{\varphi}g\rangle, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} A^* \quad &: \quad L^2 \to L^2 \\ g \quad &\to \quad A^* g = \overline{\varphi} g. \end{aligned}$$

1.3.2 Opérateur auto-adjoint

Définition 1.3.3 *un opérateur lineaire borné A dans H $(A \in B(H))$ est dit autoadjoint si et seulement si $A = A^*$. Autrement dit*

$$\forall (x, y) \in H^2 : \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle. \tag{1.3.20}$$

– On note $B(H)_{aa}$ l'ensemble des opérateur bornée autoadjoint c'est-à-dire

$$B(H)_{aa} = \{A \in B(H) : A = A^*\}. \tag{1.3.21}$$

1.3.3 Propriétés des opérateurs auto-adjoint

On vas citer quelques propriétés sans preuve

– A auto-adjoint et inversible $\Longrightarrow A^{-1}$ auto-adjoint.

– Si $A,\ B$ sont auto-adjoint alors pour tous $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R} : (\alpha A + \beta B)$ et AB sont auto-adjoint.

– A auto-adjoint $\Longrightarrow A^n$ auto-adjoint por tous $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 1.3.3 (i) *$Id_H = Id$ est un opérateur auto-adjoint.*

(ii) *si φ est une fonction réelle alors φ est auto-adjoint.*

Chapitre 2

Opérateurs positifs

2.1 Définitions

Définition 2.1.1 *Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H dans lui même, on dit que A est positif et l'on note $A \geq 0$, si A est auto-adjoint et pour tout $\varphi \in H$,*

$$\langle A\varphi, \varphi \rangle \geq 0. \tag{2.1.1}$$

Remarque 2.1.1 *Si A est un opérateur est défini sur un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert, alors la condition $\langle A\varphi, \varphi \rangle \geq 0$ implique automatiquement que A est auto-adjoint puisque dans ce cas, A est auto-adjoint si, et seulement si $\langle A\varphi, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$.*

Exemple 2.1.1 *Soit A un opérateur définit sur l'espace de Hilbert de dimension finie (ou espace Euclidien) $\mathbb{R}^n$ par :*

$$\begin{array}{rccc} A : & \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & Ax = (2x_1, x_2, 2x_3, ..., x_n) \end{array}$$

Il est claire que A est linéaire et auto-Adjoint.

A est positif car pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle &= \langle (2x_1, x_2, 2x_3, ..., x_{n-1}, x_n), (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \rangle \\ &= \langle 2x_1, x_1 \rangle + \langle x_2, x_2 \rangle + \langle 2x_3, x_3 \rangle + ... + \langle 2x_{n-1}, x_{n-1} \rangle + \langle x_n, x_n \rangle \\ &= 2\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + 2\|x_3\|^2 + ... + 2\|x_{n-1}\|^2 + \|x_n\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Exemple 2.1.2 *Soit l'opérateur A définit sur l'espace de Hilbert $L^2[0,1]$*

$$\begin{array}{rcccc} A & : & L^2[0,1] & \to & L^2[0,1] \\ & & f & \mapsto & Af \end{array}$$

où

$$(Af)(x) = xf(x), \forall x \in [0,1] \tag{2.1.2}$$

On a

$$\langle Af, f\rangle = \int_0^1 (Af)(x) f(x)dx = \langle f, Af\rangle . \tag{2.1.3}$$

D'où A est auto-adjoint.

Enfin,

$$\langle Af, f\rangle = \int_0^1 (Af)(x) f(x) dx = \int_0^1 xf(x) f(x) dx = \int_0^1 xf^2(x) dx \geq 0. \tag{2.1.4}$$

2.2 Propriétés des opérateurs positifs

Proposition 2.2.1 *Soient A_1 et A_2 deux opérateurs linéaires positifs définis sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, toute combinaison linéaire $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ à coefficient réels positifs $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ est un opérateur positif.*

Preuve. En effet, pour tout $\varphi \in H$, on a

$$\langle (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)\varphi,\ \varphi\rangle = \alpha_1\langle A_1\varphi,\ \varphi\rangle + \alpha_2\langle A_2\varphi,\ \varphi\rangle \geq 0.$$

□

Théorème 2.2.1 *Si A est un opérateur positif inversible, alors son inverse A^{-1}est positif.*

Preuve. Si $y \in D(A^{-1})$, alors $y = Ax$ pour tous $x \in H$. Et alors

$$\left\langle A^{-1}y, y\right\rangle = \left\langle A^{-1}Ax,\ x\right\rangle = \langle x,\ Ax\rangle = \langle A^*x,\ x\rangle = \langle Ax,\ x\rangle \geq 0.$$

□

Théorème 2.2.2 (Téorème de Cauchy Schwartz généralisé) *Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, pour tout $\varphi, \psi \in H$, on a la relation suivante*

$$|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2 \leq \langle A\varphi, \varphi\rangle \langle A\psi, \psi\rangle . \tag{2.2.1}$$

Preuve. En effet, pour tout $\varphi, \psi \in H$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\langle A(\varphi - \lambda\psi), \varphi - \lambda\psi\rangle \geq 0. \tag{2.2.2}$$

de plus, il vient

$$\langle A(\varphi - \lambda\psi), \varphi - \lambda\psi\rangle = \langle A\varphi, \varphi\rangle - \overline{\lambda}\langle A\varphi, \psi\rangle - \lambda\langle A\psi, \varphi\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle A\psi, \psi\rangle. \tag{2.2.3}$$

D'où, sachant que A est auto-adjoint, on écrit

$$\langle A(\varphi - \lambda\psi), \varphi - \lambda\psi\rangle = \langle A\varphi, \varphi\rangle - \overline{\lambda}\langle A\varphi, \psi\rangle - \lambda\langle \psi, A\varphi\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle A\psi, \psi\rangle, \tag{2.2.4}$$

ou encore

$$\langle A(\varphi - \lambda\psi), \varphi - \lambda\psi\rangle = \langle A\varphi, \varphi\rangle - \overline{\lambda}\langle A\varphi, \psi\rangle - \lambda\overline{\langle A\varphi, \psi\rangle} + \lambda\overline{\lambda}\langle A\psi, \psi\rangle. \tag{2.2.5}$$

prenons $\lambda = \frac{\langle A\varphi, \psi\rangle}{\langle A\psi, \psi\rangle}$, on obtient

$$\langle A\varphi, \varphi\rangle - \frac{|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2}{\langle A\psi, \psi\rangle} - \frac{|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2}{\langle A\psi, \psi\rangle} + \frac{|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2}{(\langle A\psi, \psi\rangle)^2}\langle A\psi, \psi\rangle \geq 0 \tag{2.2.6}$$

ou encore

$$\langle A\varphi, \varphi\rangle - \frac{|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2}{\langle A\psi, \psi\rangle} \geq 0. \tag{2.2.7}$$

D'où, le résultat voulu

$$|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2 \leq \langle A\varphi, \varphi\rangle\langle A\psi, \psi\rangle. \tag{2.2.8}$$

$\square$

2.2.1 Comparaison des opérateurs

Définition 2.2.1 *Soient Aet B deux opérateurs linéaires définis sur un espace de Hilbert H dans lui même, on dit que $A \geq B$ si la différence $A - B$ est un opérateur positif. Autrement dit, pour tout $\varphi \in H$, on a*

$$\langle (A-B)\varphi,\varphi\rangle \geq 0. \tag{2.2.9}$$

Proposition 2.2.2 *Soit $B(H)_{aa}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; pour tous $A, B \in B(H)_{aa}$, on définit la relation suivant*

$$A \geq B \Longleftrightarrow A - B \geq 0 \Longleftrightarrow \langle Ax, x\rangle \geq \langle Bx, x\rangle . \tag{2.2.10}$$

Alors la relation $(\geq)$ est une relation d'ordre partiel sur $B(H)_{aa}$

Preuve. On a $(\geq)$est une relation d'ordre partiel si et seulement si elle est reflixive, transitive et anti symétrique.

1 : $(\geq)$ est réflixive car $A \geq A$.

2 : $(\geq)$ est transitive : pour tous A, Bet $C \in B(H)_{aa}$ on a, si

$$A \geq B \text{ et } B \geq C \overset{?}{\Longrightarrow} A \geq C.$$

On a

$$A \geq B \Longleftrightarrow \langle Ax,\ x\rangle \geq \langle Bx,\ x\rangle \Longleftrightarrow \langle (A-B)\,x,\ x\rangle \geq 0, \tag{2.2.11}$$

et

$$B \geq C \Longleftrightarrow \langle Bx,\ x\rangle \geq \langle Cx,\ x\rangle \Longleftrightarrow \langle (B-C)\,x,\ x\rangle \geq 0. \tag{2.2.12}$$

De l'addition de (2.2.11)et (2.2.12), on trouve :

$$\begin{aligned} \langle (A-B)\,x, x\rangle + \langle (B-C)\,x, x\rangle &\geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \langle (A-C)\,x, x\rangle \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \langle Ax, x\rangle \geq \langle Cx, x\rangle . \end{aligned}$$

Donc

$$A \geq C.$$

3 : $(\geq)$ est antisémetrique, il faut montrer que pour tous $A,\ B \in B(H)_{aa}$,

$$[A \geq B \text{ et } B \geq A] \Longrightarrow A = B.$$

Soient A, $B \in B(H)_{aa}$ tels que $A \geq B$ et $B \geq A$;

$$\forall x \in H : \langle (A - B)\, x, x \rangle \geq 0 \text{ et } \langle (B - A)\, x, x \rangle \geq 0$$

on a

$$\langle (B - A)\, x, x \rangle \geq 0$$

c'est-à-dire,

$$\langle (A - B)\, x, x \rangle \leq 0$$

On déduit que

$$\langle (A - B)\, x, x \rangle = 0.$$

Donc

$$A = B.$$

□

Lemme 2.2.1 *Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, les opérateurs AA^* et A^*A sont des opérateurs positifs.*

Preuve. En effet, il suffit de voir que pour tout $\varphi \in H$, on a ;

$$\langle (A^*A)\varphi,\ \varphi \rangle = \langle A\varphi,\ A\varphi \rangle = \|A\varphi\|^2 \geq 0.$$

de même ;

$$\langle (AA^*)\varphi,\ \varphi \rangle = \langle A^*\varphi,\ A^*\varphi \rangle = \|A^*\varphi\|^2 \geq 0.$$

□

Corollaire 2.2.1 *Soit A un opérateur linéaire auto-adjoint défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, l'opérateur carré A^2 est un opérateur positif.*

Théorème 2.2.3 *Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, l'opérateur puissance A^n est un opérateur positif pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve. En effet, il est connu que si A est auto-adjoint alors A^n est auto-adjoint avec $n \in \mathbb{N}$. D'où pour tout $\varphi \in H$ et pour tout exposant pair $n = 2m$, on a

$$\langle A^n\varphi,\ \varphi\rangle = \langle A^m A^m\varphi,\ \varphi\rangle = \langle A^m\varphi,\ (A^m)^*\varphi\rangle = \langle A^m\varphi,\ A^m\varphi\rangle = \|A^m\varphi\|^2 \geq 0.$$

En outre, si l'exposant est impaire $n = 2m+1$, on a

$$\langle A^n\varphi,\ \varphi\rangle = \langle A^m A A^m\varphi,\ \varphi\rangle = \langle A(A^m\varphi),\ A^m\varphi\rangle = \langle A\psi,\ \psi\rangle \geq 0, \text{ avec } \psi = A^m\varphi.$$

□

Proposition 2.2.3 *Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, toute combinaison linéaire*

$$P(A) = \alpha_0 A^n + \alpha_1 A^{n-1} + ... + \alpha_n Id, \tag{2.2.13}$$

des puissances A^n à coefficients réels positives $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \geq 0$ est un opérateur positif.

Preuve. En effet, en vertu du théorème (2.2.3) et de la proposition (2.2.3), on a $P(A)$ est un opérateur positif. □

2.2.2 Produit de deux opérateurs positifs

Le produit de deux opérateurs positifs n'est pas nécessairement positif. En effet

On considère dans R^2 muni du produit scalaire canonique les opérateurs dans les matrices associées

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A et B sont positives, mais AB ne l'est pas. En effet

$$\langle ABx, x\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1^2 + x_1 x_2, \tag{2.2.14}$$

il suffit de prendre $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$.

Et on peut vérifier que BA n'est pas positif.

Théorème 2.2.4 *Le produit de deux opérateurs positifs commutants est un opérateur positif.*

Pour démontrer ce théorème on aura besoin des lemmes suivant :

Lemme 2.2.2 *Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même de norme $\|A\| \leq 1$ alors, l'opérateur $B = Id - A$ est un opérateur positif de norme $\|B\| \leq 1$.*

Preuve. En effet, pour tout φ, $\psi \in H$, on a

$$\begin{aligned}
\langle B\varphi, \varphi\rangle &= \langle (I-A)\varphi, \varphi\rangle \\
&= \langle \varphi, \varphi\rangle - \langle A\varphi, \varphi\rangle \\
&\geq \|\varphi\|^2 - \|A\varphi\|\|\varphi\| \\
&\geq \|\varphi\|^2 - \|A\|\|\varphi\|^2 \\
&= (1 - \|A\|)\|\varphi\|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

De plus, en vertu du théorème(2.2.2), on écrit

$$\begin{aligned}
|\langle B\varphi, \psi\rangle|^2 &\leq \langle B\varphi, \varphi\rangle\langle B\psi, \psi\rangle \\
&= (\langle \varphi, \varphi\rangle - \langle A\varphi, \varphi\rangle)(\langle \psi, \psi\rangle - \langle A\psi, \psi\rangle) \\
&\leq (\langle \varphi, \varphi\rangle\langle \psi, \psi\rangle) \\
&= \|\varphi\|^2\|\psi\|^2
\end{aligned}$$

Prenons le cas particulier ou $\psi = B\varphi$, on obtient

$$|\langle B\varphi, \psi\rangle|^2 = \|B\varphi\|^4 \leq \|\varphi\|^2\|B\varphi\|^2,$$

ce qui donne aprés simplification

$$\|B\varphi\| \leq \|\varphi\|,$$

ou encore

$$\|B\| \leq 1.$$

□

Lemme 2.2.3 *Soit A un opérateur positif définit sur un espace de Hilbert H dans lui même. pour touts suite des opérateurs définier par*

$$A_1 = \frac{A}{\|A\|},\ A_2 = A_1 - A_1^2,\ \ldots..,\ A_{n+1} = A_n - A_n^2;\ n \in \mathbb{N}^*$$

alors on a

$$0 \leq A_n \leq Id. \tag{2.2.15}$$

Preuve. On définit la suite d'opérateurs suivant :

$$A_1 = \frac{A}{\|A\|},\ A_2 = A_1 - A_1^2,\ .....,\ A_{n+1} = A_n - A_n^2;\ n \in \mathbb{N}^*$$

Les opérateurs A_i, $i = 1, 2, ...$sont auto-adjoint et commutant car tous sont de forme polynômiale en A. On montre par récurrence que $0 \leq A_n \leq Id$.

Pour $n = 1$

$$A_1 = \frac{1}{\|A\|} A \geq 0\ et\ \ \|A_1\| = \left\| \frac{1}{\|A\|} A \right\| = \frac{\|A\|}{\|A\|} = 1.$$

Alors, d'après le lemme (2.2.2), $Id - A_1$ est un opérateur positif (avec $\|Id - A_1\| \leq 1$). Donc

$$Id - A_1 \geq 0 \Longrightarrow A_1 \leq Id.$$

On suppose à présent que pour tous $k \in \mathbb{N}^*,\ k \leq n$

$$0 \leq A_k \leq Id,$$

et on montre que

$$0 \leq A_{n+1} \leq Id.$$

On a

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n - A_n^2 = A_n \left(Id - A_n\right) \left[A_n + \left(Id - A_n\right)\right] \\ &= A_n^2 \left(Id - A_n\right) + A_n \left(Id - A_n\right)^2 . \end{aligned}$$

Or

$$\begin{cases} \left\langle A_n^2 \left(Id - A_n\right) x, x\right\rangle = \left\langle A_n \left(Id - A_n\right) x, A_n x\right\rangle = \left\langle \left(Id - A_n\right) A_n x, A_n x\right\rangle \geq 0 \\ \left\langle A_n \left(Id - A_n\right)^2 x, x\right\rangle = \left\langle \left(Id - A_n\right) A_n \left(Id - A_n\right) x, x\right\rangle = \left\langle A_n \left(Id - A_n\right) x, \left(Id - A_n\right) x\right\rangle \geq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow A_n^2 \left(Id - A_n\right) \geq 0 \text{ et } A_n \left(Id - A_n\right)^2 \geq 0$$

On suite,

$$Id - A_{n+1} = Id - \left(A_n - A_n^2\right) = \left(Id - A_n\right) + A_n^2 \geq 0.$$

Donc

$$0 \leq A_{n+1} \leq Id.$$

$\square$

Preuve. [Théorème (2.2.3)] Soient $A,\ B$ deux opérateurs positifs vérifiants

$$AB = BA.$$

On veut montrer qu' AB est positif. Il est évident que AB est auto-adjoint comme produit de deux opérateurs auto-adjoints. Il reste à montrer que pour tous $x \in H$:

$$\langle ABx, x\rangle \geq 0.$$

Maintenant, on a

$$\begin{aligned}
A_1 &= A_1^2 - A_1^2 + A_1 \\
&= A_1^2 + A_2 = A_1^2 + A_2 - A_2^2 + A_2^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3 \\
&= .... = \sum_{k=1}^{n} A_k^2 + A_{n+1}. \\
&\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} A_k^2 = A_1 - A_{n+1} \leq A_1
\end{aligned}$$

Car

$$A_1 - (A_1 - A_{n+1}) = A_{n+1} \geq 0.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \langle A_k x,\ A_k x\rangle &= \sum_{k=1}^{n} \langle A_k^2 x,\ x\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^{n} A_k^2 x,\ x \right\rangle \leq \langle A_1 x,\ x\rangle \\
&\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \|A_k x\|^2 \leq \langle A_1 x,\ x\rangle \ \text{convergent,}
\end{aligned}$$

d'où

$$\|A_n x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

Alors

$$\left(\sum_{k=1}^{n} A_k^2\right) x = A_1 x - A_{n+1} x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A_1 x$$

où bien,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_n^2\right) x = A_1 x.$$

D'autre part, Puisque B commute avec A alors on montre (facilement) par récurrence que B commute avec A_n, $(n = 1, 2, ...)$.
Pour $n = 1$

$$BA_1 = B\frac{A}{\|A\|} = \frac{1}{\|A\|}BA = A_1B$$

On suppose que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*; k \leq n \ : \ A_kB = BA_k$$

et on montre que

$$A_{n+1}B = BA_{n+1}$$

On a,

$$\begin{aligned} BA_{n+1} &= B\left(A_n - A_n^2\right) = BA_n - BA_n^2 \\ &= A_nB - A_n^2 = \left(A_n - A_n^2\right)B \\ &= A_{n+1}B \end{aligned}$$

D'où, $\forall x \in H$

$$\begin{aligned} \langle ABx, x\rangle &= \left\langle \|A\|\left(\frac{A}{\|A\|}\right)Bx, x\right\rangle \\ &= \|A\|\langle A_1Bx, x\rangle \\ &= \|A\|\langle BA_1x, x\rangle \\ &= \|A\|\left\langle B\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2\right)x, x\right\rangle \\ &= \|A\|\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} BA_n^2x, x\right\rangle \\ &= \|A\|\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle BA_n^2x, x\right\rangle \\ &= \|A\|\sum_{n=1}^{\infty}\langle A_nBA_nx, x\rangle = \|A\|\sum_{n=1}^{\infty}\langle BA_nx, A_nx\rangle \geq 0. \end{aligned}$$

□

2.2.3 Spectre d'un opérateur positif

On commence par démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.2.4 *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert et $A \in B(H_1, H_2)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

i)A est inversible.

ii) $\exists \alpha > 0 : A^*A \geq \alpha Id_{H_1}$ et $AA^* \geq \alpha Id_{H_2}$.

Preuve. **i)$\Longrightarrow$ii)**Supposons que A soit inversible, alors A^* l'est aussi et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. On pose

$$\alpha = \left\|A^{-1}\right\|^{-2} = \frac{1}{\|A^{-1}\|^2}.$$

Alors, d'après le corollaire(1.3.2)

$$\left\|(A^*)^{-1}\right\| = \left\|A^{-1}\right\|,$$

ceci implique que

$$\alpha = \left\|(A^*)^{-1}\right\|^{-2} = \frac{1}{\left\|(A^*)^{-1}\right\|^2}.$$

Soit à présent $x \in H_1$. Alors

$$\|x\| = \left\|\left(A^{-1}\right)(Ax)\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|Ax\|$$

[A inversible et borné $\Longrightarrow A^{-1}$ borné]

$$\Longrightarrow \|Ax\|_{H_2} \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} \|x\|_{H_1}.$$

Alors,

$$\langle A^*Ax,\ x\rangle_{H_1} = \langle Ax,\ Ax\rangle_{H_2} = \|Ax\|^2 \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|^2} \|x\|^2 = \alpha \|x\|_{H_1}^2,$$

c'est-à-dire

$$\langle A^*Ax,\ x\rangle_{H_1} - \langle x,\ x\rangle_{H_1} \geq 0$$

où

$$\langle (A^*A - Id_{H_1})\, x,\ x\rangle_{H_1} \geq 0, \forall x \in H.$$

Donc

$$A^*A \geq \alpha Id_{H_1}$$

et

$$(A^*A - \alpha Id_{H_1}) \text{ est positif.}$$

On montre que $(AA^* - \alpha Id_{H_2})$ est positif de la même manière.

ii)$\Longrightarrow$i) On supose que $\exists \alpha > 0$ telle que $A^*A \geq \alpha Id_{H_1}$ et $AA^* \geq \alpha Id_{H_2}$ et on montre que A est bijectif (inversible).

Comme $AA^* \geq \alpha Id_{H_2}$, Alors :

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_{H_2}^2 &= \langle Ax,\ Ax\rangle_{H_2} = \langle A^*Ax,\ x\rangle_{H_1} \\
&\geq \langle \alpha x,\ x\rangle_{H_1} \, \forall x \in H_1 \\
&\geq \alpha \|x\|_1 .
\end{aligned}$$

Alors

$$\|Ax\|_{H_2} \geq \sqrt{\alpha} \|x\|_1 .$$

D'où :

Injectivité : *Soit* $x \in \ker A$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow Ax = 0_{H_2} \\
&\Longrightarrow \|Ax\|_{H_2} = 0 \geq \sqrt{\alpha} \|x\|_1 \\
&\Longrightarrow \|x\|_{H_1} = 0 \\
&\Longrightarrow x = 0_{H_1}
\end{aligned}$$

$$\ker A = \{0_{H_1}\} \text{ et donc } A \text{ est injectif.}$$

Surjectivité : On montre que

$$\operatorname{Im} A = H_2$$

Pour cela on commence par montrer que $\operatorname{Im} A = \overline{\operatorname{Im} A}$.

Soit $y \in \overline{\operatorname{Im} A}$. $\exists \left(Ax_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{Im} A \ : \lim\limits_{n\longrightarrow 0} Ax_n = y$.

La suite $\left(Ax_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy et,

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : [n, m > n_0 \Longrightarrow \|Ax_m - Ax_n\|_{H_2} = \|A(x_m - x_n)\|_{H_2} < \varepsilon]$$

et alors

$$\sqrt{\alpha} \|x_m - x_n\|_{H_1} \leq \|A(x_m - x_n)\|_{H_2} < \varepsilon \Longrightarrow \|x_m - x_n\|_{H_1} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha}}.$$

$\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans H_1, elle est donc convergente,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x;\ x \in H_1$$

et alors

$$y = \lim_{n \to \infty} Ax_n = A\left(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n\right) = Ax \in \operatorname{Im} A.$$

D'où,

$$\operatorname{Im} A = \overline{\operatorname{Im} A} = (\ker A^*)^{\perp}$$

De même,

$$AA^* \geq \alpha Id_{H_2} \Longrightarrow \|A^* x\|_{H_1} \geq \sqrt{\alpha} \|x\|_{H_2}, \ \forall x \in H_2$$

d'où A^* est aussi injectif et

$$\ker A^* = \{0_{H_2}\}.$$

On trouve alors

$$\operatorname{Im} A = (\ker A^*)^{\perp} = (\{0_{H_2}\})^{\perp} = H_2.$$

Enfin, A est surjectif et donc bijectif aussi. $\square$

Remarque 2.2.1 *Ona*

$$(A \text{ est inversible}) \Longleftrightarrow (A^* A \in B(H_1) \text{ et } AA^* \in B(H_2) \text{ sont inversibles}) \tag{2.2.16}$$

Preuve. $(\Longrightarrow)$Si A est inversible, alors A^*l'est aussi, d'où A^*A et AA^* le sont

$(\Longleftarrow)$Si A^*A et AA^* sont invertibles, alors on posant $X = (A^*A)^{-1}$ et $Y = (AA^*)^{-1}$. On voit que

$$\begin{cases} (XA^*) A = X(A^*A) = Id_{H_1} \\ A(A^*Y) = (AA^*Y) = Id_{H_2} \end{cases} \Longrightarrow A \text{ est inversible.}$$

D'où l'inversibilité de A^*. $\square$

Théorème 2.2.5 (i)*Le spectre d'un opérateur $A \in B(H)$ auto-adjoint est réel c'est-à-dire*

$$\sigma(A) \subset \mathbb{R}. \tag{2.2.17}$$

(ii)*Le spectre d'un opérateur $A \in B(H)$ positif est non négatif c'est-a-dire*

$$\sigma(A) \subset [0, +\infty[\,. \tag{2.2.18}$$

Preuve. **i) :**Il suffit de montrer que $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$. $(A - \lambda Id_H)$ est un opérateur inversible. Soit $\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a + ib$, $(a,\, b) \in \mathbb{R} * \mathbb{R}^*$. On pose

$$X = A - \lambda Id_H$$

Alors

$$\begin{aligned} X^*X &= (A - \lambda Id_H)^* (A - \lambda Id_H) = \left(A^* - \overline{\lambda} Id_H\right)(A - \lambda Id_H) = \left(A - \overline{\lambda} Id_H\right)(A - \lambda Id_H) \\ &= AA - \overline{\lambda} A - \lambda A + \overline{\lambda}\lambda Id_H \\ &= A^2 - 2\left(\operatorname{Re}\lambda\right) A + |\lambda|^2 Id_H = b^2 Id_H + (A - aId_H)^2 . \end{aligned}$$

De même

$$XX^* = A^2 - 2\left(\operatorname{Re}\lambda\right) A + |\lambda|^2 Id_H = b^2 Id_H + (A - aId_H)^2$$

On déduit que

$$\begin{cases} X^*X - b^2 Id_H = (A - aId_H)^2 \geq 0 \\ XX^* - b^2 Id_H = (A - aId_H)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(A - aId_H)^2 = (A - aId_H)^* (A - aId_H)$$

est toujours positif.

Enfin ,

$$\begin{aligned} X^*X &\geq aId_H \text{ et } XX^* \geq aId_H \\ &\Longrightarrow X = A - \lambda Id_H \end{aligned}$$

est inversible.

ii) : On suppose à présent que A est positif, il suffit de montrer dans la démonstration précédente que

$$X = A - \lambda Id_H = A - aId_H \text{ avec } \lambda = a < 0.$$

est inversible. On suppose que $a < 0$. Alors, de ce qui précède $(\lambda = a)$. on a

$$XX^* = X^*X = A^2 - 2aA + a^2 Id_H,$$

et donc

$$X^*X - a^2 Id_H = X^*X - a^2 Id_H = A^2 - 2aA \geq 0.$$

Alors

$$XX^* \geq a^2 Id_H \ et \ X^*X \geq a^2 Id_H \text{ avec } a \neq 0.$$

D'où d'aprés le lemme(2.2.4)

$$XX^* = X^*X$$

sont inversibles et

$$X = A - aId_H$$

avec $a < 0$ l'est aussi. □

2.3 Opérateur racine carrée

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer que tout comme les nombres réels non négatifs, chaque opérateur positif A possède un opérateur (positif) R vérifiant $A = R^2$, puis que tout opérateur borné a une décomposition dite "polaire" analogue à la décomposition polaire des nombres complexes. Dans tout ce qui suit, H est un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert

Théorème 2.3.1 *Soit A_n une suite croissante d'opérateurs linéaires auto-adjoints définis sur un espace de Hilbert H dans lui même, si les normes $\|A_n\|$sont bornées pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors, il existe un opérateur linéaire continu A tel que pour tout $\varphi \in H$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} A_n\varphi = A\varphi.$$

Autrement dit, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier M tel que $A_n \leq M$. Alors, on a

$$\lim_{n\to\infty} A_n\varphi = A\varphi.$$

De plus

$$\|A\| \leq M.$$

Preuve. Soient $\varphi \in H$ et $n, m \in \mathbb{N} : n \geq m$. Alors $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante dans le sens où l'opérateur$(A_n - A_m)$ est positif, c'est à dire

$$\langle (A_n - A_m)\varphi, \varphi\rangle = \langle A_n\varphi - A_m\varphi, \varphi\rangle = \langle A_n\varphi, \varphi\rangle - \langle A_m\varphi, \varphi\rangle \geq 0 \tag{2.3.1}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}|\langle A_n\varphi,\varphi\rangle| &\leq \|A_n\varphi\|\|\varphi\| \\ &\leq \|A_n\|\|\varphi\|^2 \\ &\leq M\|\varphi\|^2 \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

car

$$\|A_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$$

La suite $\langle A_n\varphi,\varphi\rangle$ est une suite numérique croissante d'aprés(2.3.1) et bornée d'aprés(2.3.2) donc elle est convergente donc de Cauchy. D 'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : |\langle A_n\varphi,\varphi\rangle - \langle A_m\varphi,\varphi\rangle| \leq \varepsilon.$$

D'autre part, d'aprés le théoréme (2.2.2), on a

$$\begin{aligned}|\langle A_n\varphi - A_m\varphi,\psi\rangle|^2 &= |\langle (A_n - A_m)\varphi,\psi\rangle|^2 \\ &\leq \underbrace{\langle (A_n - A_m)\varphi,\varphi\rangle}_{(positif)}\underbrace{\langle (A_n - A_m)\psi,\psi\rangle}_{(positif)} \\ &\leq |\langle (A_n - A_m)\varphi,\varphi\rangle|\,|\langle (A_n - A_m)\psi,\psi\rangle|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\langle (A_n - A_m)\psi,\psi\rangle| &\leq \|(A_n - A_m)\psi\|\|\psi\| \\ &= \|A_n\psi - A_m\psi\|\|\psi\| \\ &\leq (\|A_n\psi\| + \|A_m\psi\|)\,\|\psi\| \\ &\leq (\|A_n\psi\|\|\psi\| + \|A_m\psi\|\|\psi\|)\,\|\psi\| \\ &= (\|A_n\psi\| + \|A_m\psi\|)\,\|\psi\|^2 \\ &\leq (M + M)\,\|\psi\|^2 = 2M\|\psi\|^2\end{aligned}$$

Alors, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \langle (A_n - A_m)\varphi,\varphi\rangle = |\langle A_n\varphi,\varphi\rangle - \langle A_m\varphi,\varphi\rangle| \leq \varepsilon$$

D'où

$$\begin{aligned}|\langle A_n\varphi - A_m\varphi,\psi\rangle|^2 &\leq |\langle (A_n - A_m)\varphi,\varphi\rangle|\,|\langle (A_n - A_m)\psi,\psi\rangle| \\ &\leq 2M\|\psi\|^2\varepsilon\end{aligned}$$

Prenons la cas particulier ou $\psi = A_n\varphi - A_m\varphi$, on obtient

$$|\langle A_n\varphi - A_m\varphi, \psi\rangle|^2 = \|A_n\varphi - A_m\varphi\|^4 \leq 2M\|A_n\varphi - A_m\varphi\|^2\varepsilon,$$

ce qui donne après simplification

$$\|A_n\varphi - A_m\varphi\|^2 \leq 2M\varepsilon = \varepsilon'$$

la suite $(A_n)_{n\mathbb{N}}$ est alors de Cauchy dans l'espace de Hilbert H. Elle est convergent vers un opérateur A. C'est à dire

$$\lim_{n\to\infty} A_n\varphi = A\varphi.$$

On montre que l'opérateur A est linéaire continu. $\forall\lambda, \upsilon \in \mathbb{k}, \forall\varphi, \psi \in H$

$$\begin{aligned} A(\lambda\varphi + \upsilon\psi) &= \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda\varphi_n + \upsilon\psi_n) \\ &= \lambda \lim_{n\rightharpoonup+\infty} A_n\varphi_n + \upsilon \lim_{n\rightharpoonup+\infty} A_n\psi_n \\ &= \lambda A\varphi + \upsilon A\psi \end{aligned}$$

et

$$\forall\lambda \in \mathbb{N} : \|A_n\varphi\| \leq \|A_n\|\|\varphi\| \leq M\|\varphi\|,$$

par passage à la limite des deux membres, il vient

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|A_n\varphi\| = \| \lim_{n\longrightarrow\infty} A_n\varphi\| = \|A\varphi\| \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} M\|\varphi\| = M\|\varphi\|,$$

ou encore

$$\|A\| \leq M.$$

□

Lemme 2.3.1 *Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui méme de norme $\|A\| \leq 1$ alors, la suite récurrente d'éléments U_n définie par*

$$U_1 = 0,\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(Id - A + U_n^2) = \frac{1}{2}\left(B + U_n^2\right),\ \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}, \tag{2.3.3}$$

converge vers un opérateur linéaire continu U de norme $\|U\| \leq 1$, ou encore

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} U_n\varphi = U\varphi \ \textit{tel que } \|U\| \leq 1. \tag{2.3.4}$$

Preuve. On montre que la suiteU_n vérifie les conditions du théorème(2.3.1),

1) :U_n est bornées par récurrence pour $n = 1$

$$U_2 = U_{1+1} = \frac{1}{2}(Id - A + U_1^2) = \frac{1}{2}(Id - A) = \frac{1}{2}B$$

Alors

$$\begin{cases} \|U_1\| = 0 \leq 1 \\ \|U_2\| = \|\frac{1}{2}B\| = \frac{1}{2}\|B\| \leq \frac{1}{2} \leq 1 \end{cases},$$

on suppose $\|U_k\| \leq 1$, pour $k \in \mathbb{N}^* : k \leq n$ et on montre que$\|U_{k+1}\| \leq 1$. on a

$$\begin{aligned} \|U_{n+1}\| &= \frac{1}{2}\|B + U_n^2\| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|B\| + \|U_n^2\|\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|B\| + \|U_n\|^2\right) \\ &\leq \frac{1}{2}(1+1) = 1 \end{aligned}$$

2) :U_n est croissante : on montre que $U_{n+1} - U_n$ est un opérateur positif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence, pour $n = 1$

$$U_2 - U_1 = \frac{1}{2}B - 0 = \frac{1}{2}B \; positif \;\; (\text{lemme} \,(\, 2.2.2)) \,.$$

On supose pour $k \in \mathbb{N}^* : k \leq n - 1$ on a $U_{k+1} - U_k$ positif et on montre que $U_{n+1} - U_n$ l'est aussi

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{1}{2}\left(B + U_n^2\right) - \frac{1}{2}\left(B + U_{n-1}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(U_n^2 - U_{n-1}^2\right), \end{aligned}$$

comme la suite de polynômes d'opérateurs positifs en B à coefficients positifs $U_n = P(B)$. D'où, on démontre par récurrence que la suite U_n est croissante, ou encore l'opérateur $U_{n+1} - U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, supposons que l'on a $U_n - U_{n-1} \geq 0$ alors, on a

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{1}{2}\left(B + U_n^2\right) - \frac{1}{2}\left(B + U_{n-1}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(U_n^2 - U_{n-1}^2\right). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\left(U_n - U_{n-1}\right)\left(U_n + U_{n-1}\right) = U_n^2 - U_{n-1}U_n + U_nU_{n-1} - U_{n-1}^2$$

on montre que $U_{n-1}U_n = U_nU_{n-1}$ on a

$$\begin{aligned} U_nU_{n-1} &= \frac{1}{2}\left(B+U_{n-1}^2\right)U_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}\left(BU_{n-1}+U_{n-1}^3\right) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} U_{n-1} &= \frac{1}{2}\left(B+U_{n-2}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(B+\frac{1}{2}\left(B+U_{n-3}^2\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(B+\left(\frac{1}{4}B^2+\frac{1}{4}U_{n-3}^4+\frac{1}{2}BU_{n-3}^2\right) \\ &= (B+\frac{1}{4}B^2+\frac{1}{4}U_{n-3}^4+\frac{1}{2}BU_{n-3}^2) \\ &= . \\ & \quad . \\ & \quad . \\ &= P(B) \text{ positif} \end{aligned}$$

ou P est un polynôme à coéficients positifs. Alors

$$BU_{n-1} = BP(B) = P(B)B = U_{n-1}B$$

D'où

$$U_nU_{n-1} = \frac{1}{2}\left(BU_{n-1}+U_{n-1}^3\right) = \frac{1}{2}\left(U_{n-1}B+U_{n-1}^3\right) = U_{n-1}\frac{1}{2}\left(B+U_{n-1}^2\right) = U_{n-1}U_n.$$

Enfin

$$\left(U_n-U_{n-1}\right)\left(U_n+U_{n-1}\right) = U_n^2-U_{n-1}^2$$

On déduit que

$$U_{n+1}-U_n = \frac{1}{2}\left(U_n^2-U_{n-1}^2\right) = \frac{1}{2}(U_n+U_{n-1})\left(U_n-U_{n-1}\right) \geq 0.$$

Finalement U_n est convergent d'après le le théorème (2.3.1) ; il existe un opérateur linéaire U (positif) tel que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} U_n\varphi = U\varphi \text{ avec } \|U\| \leq 1.$$

□

Lemme 2.3.2 *Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même de norme $\|A\| \leq 1$ alors, tout opérateur linéaire borné D qui commute avec A commute avec la suite des opérateurs*

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}(Id - A + U_n^2), \ U_1 = 0, \tag{2.3.5}$$

et il commute avec l'opérateur U limite de la suite

$$\lim U_n\varphi = U\varphi. \tag{2.3.6}$$

Autrement dit

$$AD = DA \text{ implique } U_nD = DU_n \text{ et } UD = DU \text{ avec } U\varphi = \lim U_n\varphi.$$

Preuve. Soit D un opérateur linéaire borné, commutant avec A alors cet opérateur commute aussi avec

$$B = Id - A,$$

c'est à dire

$$AD = DA \text{ implique } BD = DB.$$

de plus , il est aisé de vérifier par recurrence que l'opérateur D commute avec les opérateurs

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}(B + U_n^2),$$

supposons que l'on a $DU_n = U_nD$ alors, on écrit

$$\begin{aligned}
DU_{n+1} &= \frac{1}{2}D(B + U_n^2) \\
&= \frac{1}{2}(DB + DU_n^2) = \frac{1}{2}(BD + DU_nU_n) \\
&= \frac{1}{2}(BD + U_nDU_n) = \frac{1}{2}(BD + U_n^2D) \\
&= \frac{1}{2}(B + U_n^2)D \\
&= U_{n+1}D
\end{aligned}$$

D'où, pou tout $\varphi \in H$, on a

$$\begin{aligned}
DU\varphi &= D(\lim U_n\varphi) \\
&= \lim DU_n\varphi = \lim U_nD\varphi \\
&= UD\varphi.
\end{aligned}$$

□

2.3.1 Racine carrée d'un opérateur positif

Définition 2.3.1 *Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, l'opérateur positif R est dit racine carrée de l'opérateur A si, on a la relation*

$$A = R^2 \text{ ou encore } R = \sqrt{A}. \tag{2.3.7}$$

Théorème 2.3.2 *Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, l'opérateur A admet une racine carrée positive unique $R = \sqrt{A}$. De plus, l'opérateur R commute avec tout opérateur commutant avec l'opérateur A. Autrement dit, pour tout opérateur linéaire borné D tel que $AD = DA$, on a*

$$RD = DR \text{ ou encore } \sqrt{A}D = D\sqrt{A}. \tag{2.3.8}$$

Preuve. 1)Existence :

En effet, on peut admettre que la norme$\|A\| \leq 1$. Il est claire que l'opérateur A commute avec les éléments de la suite U_n telle que

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}(Id - A + U_n^2),\ U_1 = 0.$$

Prenons $D = U_n$, compte tenu du lemme (2.3.2), l'opérateur U_n commute avec l'opérateur limite $U\varphi = \lim U_n\varphi$ pour tout $\varphi \in H$, c'est à dire $U_nU = UU_n$ avec $\|U_n\| \leq 1$ et $\|U\| \leq 1$. D'où, il vient

$$\begin{aligned} \|U_n^2\varphi - U^2\varphi\| &= \|(U_n + U)(U_n - U)\varphi\| \\ &\leq \|U_n + U\|\|U_n\varphi - U\varphi\| \\ &\leq 2\|U_n\varphi - U\varphi\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Autrement dit, la suite $U_n^2\varphi$ converge vers $U^2\varphi$, c'est à dire $\lim U_n^2\varphi = U^2\varphi$ et par conséquent, il est aisé de trouver la limite de la suite récurrente U_{n+1}. D'où, pour tout $\varphi \in H$,on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} U_{n+1}\varphi = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{2}(Id - A + U_n^2)\varphi,$$

Donc, il vient

$$U\varphi = \frac{1}{2}(Id - A + U^2)\varphi,$$

Ou encore

$$(Id - 2U + U^2)\varphi = (Id - U)^2 = A\varphi.$$

Prenons l'opérateur $R = Id - U$ ce dernier est un opérateur linéaire positif racine carrée de l'opérateur A, car on a ;

$$R^2 = (Id - U)^2 = A,$$

ou encore

$$R = (Id - U) = \sqrt{A}.$$

D'où, l'existence de l'opérateur racine carrée $\sqrt{A}$.

2) Unicité

Soient $R_1, R_2 \geq 0$ tels que

$$R_1^2 = R_2^2 = A.$$

Alors

$$R_1 A = R_1^3 = AR_1 \text{ et } R_2 A = R_2^3 = AR_2.$$

D'où

$$R_1^2 - R_2^2 = 0 \Longrightarrow \left(R_1^2 - R_2^2\right)(R_1 - R_2) = (R_1 - R_2) R_1 (R_1 - R_2) + (R_1 - R_2) R_2 (R_1 - R_2) = 0$$

or

$$\begin{cases} \langle (R_1 - R_2) R_1 (R_1 - R_2) x, x\rangle = \langle R_1 (R_1 - R_2) x, (R_1 - R_2) x\rangle \geq 0. \\ \langle (R_1 - R_2) R_2 (R_1 - R_2) x, x\rangle = \langle R_2 (R_1 - R_2) x, (R_1 - R_2) x\rangle \geq 0. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} (R_1 - R_2) R_1 (R_1 - R_2) &= (R_1 - R_2) R_2 (R_1 - R_2) = 0 \\ &\Longrightarrow (R_1 - R_2) R_1 (R_1 - R_2) - (R_1 - R_2) R_2 (R_1 - R_2) = 0 \\ &\Longrightarrow (R_1 - R_2)^3 = 0 \end{aligned}$$

En particulier,

$$\left\|(R_1 - R_2)(R_1 - R_2)^3\right\| = \left\|(R_1 - R_2)^4\right\| = \left\|(R_1 - R_2)^2\right\|^2 = \|(R_1 - R_2)\|^4$$

(car si A est auto-adjoint, alors $\|A^2\| = \|A\|^2$)

Enfin

$$\|(R_1 - R_2)\| = 0,$$

et donc

$$R_1 = R_2.$$

□

Corollaire 2.3.1 *Soit $A \geq 0$ et inversible, alors :$R = \sqrt{A}$ est inversible.*

Preuve. Soit A un opérateur positif et inversible alors

$$\left(A^{-1}R\right)R = A^{-1}R^2 = A^{-1}A = Id$$

et

$$R\left(A^{-1}R\right) = \left(RA^{-1}\right)R = \left(RA^{-1}\right)ARA^{-1} = R^2A^{-1} = Id$$

car

$$AR = RA$$

c'est-à-dire

$$R = ARA^{-1}$$

donc R est inversible d'inverse $A^{-1}R$. □

Exemple 2.3.1 *Soit A l'opérateur défini par :*

$$\begin{array}{cccc} Af & : & L^2[0,1] & \rightarrow & L^2[0,1] \\ & & x & \Longrightarrow & Af(x) = xf(x) \end{array}$$

On a A est positif d'aprés(2.1.2)*. Donc il existe R tels que :$R^2 = A$. On remarque que*

$$\begin{array}{cccc} R & : & L^2[0,1] & \rightarrow & L^2[0,1] \\ & & f & \Longrightarrow & Rf(x) = \sqrt{x}f(x) \end{array}$$

et que

$$R^2 = A.$$

Mais puisque la racine carrée unique, alors

$$\sqrt{A} = R.$$

2.3.2 Isométrie et isométrie partielle

Définition 2.3.2 *Un opérateur $U \in L(H)$ est appelé isométrie si pour tout*

$$x \in H : \|Ux\| = \|x\|.$$

Remarque 2.3.1 *Il est évident qu'une isométrie est injective.*

Définition 2.3.3 *Un opérateur $U \in L(H)$ est dite Unitaire si U est une isométrie dont* $\operatorname{Im} U = H$.

Définition 2.3.4 *Un opérateur $U \in L(H)$ est appelé "isométrie partielle" si*

$$\|Ux\| = \|x\|, \forall x \in \ker(U)^{\perp}.$$

Dans ce cas, $H = \ker(U) \oplus \ker(U)^{\perp}$.

Définition 2.3.5 *Pour tout $A \in B(H)$, on note*

$$|A| = \sqrt{A^* A}.$$

On a alors

$$|A|^2 = A^* A.$$

2.3.3 Décomposition polaire

Théorème 2.3.3 *Pour tout $A \in B(H)$ il existe une isométrie partielle U telle que*

$$A = U|A|.$$

En autre ;U est unique si on impose la condition

$$\ker(U) = \ker(A).$$

Preuve. **1)Existence :** On a pour tout $x \in H$:

$$\||A|x\|^2 = \langle |A|x, |A|x \rangle = \left\langle |A|^2 x, x \right\rangle = \langle A^* Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2$$

$$\Longrightarrow \quad \||A|x\| = \|Ax\|, \forall x \in H \qquad (2.3.9)$$

D'où,

$$x \in \ker(|A|) \Longleftrightarrow |A|\,x = 0 \Longleftrightarrow \||A|\,x\| = \|Ax\| = 0 \Longleftrightarrow Ax = 0 \Longleftrightarrow x \in \ker(A)$$

Alors

$$\ker(|A|) = \ker(A).$$

On définit à présent l'application suivante,

$$\begin{array}{rcccc} \widetilde{V} & : & \mathrm{Im}(|A|) & \to & \mathrm{Im}(A) \\ & & |A|\,x & \longmapsto & \widetilde{V}(|A|\,x) = Ax \end{array}$$

Vérifions que $\widetilde{V}$ est bien défini. Soient $x_1,\, x_2 \in H$; alors $|A|\,x_1, |A|\,x_2 \in \mathrm{Im}(|A|)$ et ;

$$\begin{aligned} |A|\,x_1 = |A|\,x_2 &\Longrightarrow |A|\,(x_1 - x_2) = 0 \\ &\Longrightarrow (x_1 - x_2) \in \ker(|A|) = \ker(A) \\ &\Longrightarrow A(x_1 - x_2) = 0 \\ &\Longrightarrow Ax_1 = Ax_2 \\ &\Longrightarrow \widetilde{V}(|A|\,x_1) = \widetilde{V}(|A|\,x_2) \end{aligned}$$

De plus $\left\|\widetilde{V}(|A|\,x)\right\| = \|Ax\| = \||A|\,x\|, \forall x \in H\ (\mathrm{Im}(|A|))$. Donc, $\widetilde{V}$ est une isométrie. On prolonge par continuité $\widetilde{V}$ à

$$V \ :\ \overline{\mathrm{Im}(|A|)} \ \to\ \overline{\mathrm{Im}(A)}$$

Pour cela, et sachant que pour tout $y \in \overline{\mathrm{Im}(|A|)}$; il existe une suite $(|A|\,x_n)_n$ de $\mathrm{Im}(|A|)$ telle que $y = \lim\limits_{n\to\infty} |A|\,x_n$. On pose,

$$Vy = \lim_{n\to\infty} \widetilde{V}(|A|\,x_n)$$

Alors ;

$$Vy = V\left(\lim_{n\to\infty} |A|\,x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{V}(|A|\,x_n) = \lim_{n\to\infty} Ax_n$$

Il est évident grâce à (2.3.9) que comme $(|A|\,x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans H alors $(Ax_n)_n$ l'est aussi et que $Vy \in \overline{\mathrm{Im}\,A}$. De plus, V est aussi une isométrie. En effet, soit $y \in \overline{\mathrm{Im}(|A|)}$. En gardant les mêmes notations ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \|Vy\| &= \left\|\lim_{n\to\infty} Ax_n\right\| = \lim_{n\to\infty} \|Ax_n\| = \lim_{n\to\infty} \||A|\,x_n\| \\ &= \left\|\lim_{n\to\infty} |A|\,x_n\right\| = \|y\|. \end{aligned}$$

De plus, comme $|A|$ est auto-adjoint, il découle que $\overline{\text{Im}\,(|A|)} = \ker\,(|A|)^{\perp}$.On définit l'application,

$$U(x) = \begin{cases} V(x) & si\ x \in \overline{\text{Im}\,(|A|)} = \ker\,(|A|)^{\perp} \\ 0 & si\ x \in \ker\,(|A|) \end{cases}$$

Comme

$$\ker\,(|A|) = \ker\,(A) = \ker\,(U)\,.$$

Alors U est définie sur $H = \ker\,(U) \oplus \ker\,(U)^{\perp}$ par,

$$U(x) = \begin{cases} V(x) & si\ x \in \ker\,(U)^{\perp} \\ 0 & si\ x \in \ker\,(U) \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} U\,|A|\,(x) &= V\,|A|\,(x) = Ax, \forall x \in H \\ &\Longrightarrow U\,|A| = A. \end{aligned}$$

Enfin, U est une isométrie partielle définie sur H par construction.

2)Unicité : Si $U_1 = U_2$ sont deux isométries partielles vérifiant la propriété énoncée, c'est à dire

$$U_1\,|A| = U_2\,|A|\ ;$$

alors $U_1\,|A|\,x = U_2\,|A|\,x$ permet de conclure que $U_1 = U_2$ sur $\text{Im}\,(|A|)$

Il est évident que l'on a aussi $U_1 = U_2$ en passant à $\overline{\text{Im}\,(|A|)}$ et $\ker\,(|A|)$.

On déduit que

$$U_1 = U_2.$$

□

CONCLUSION

La classe d'opérateurs introduite dans ce mémoire permet entre autres d'étudier une autre classe d'opérateurs appelés "opérateurs normaux", on peut tout aussi bien définir les opérateurs symétriques positifs ou enfin les semi-groupes d'opérateurs positifs puis effectuer l'étude spéctrale pour ce type de semi-groupes

Bibliographie

[1] **A. Benali**, «*Sur les opérateurs normaux non-bornés*». mémoire de magistère (2011). www.univ-oran.dz/theses/document/TH3466.pdf.

[2] **L. Debnath, P Mikusinski,** « *Introduction to Hibert spaces with Applications». * Academic Press INC (1990).

[3] **L. Kantrovitch, D.Akilov,** « Analyse Fonctionnelle Tome1, Tome2. Editions Mir» Moscou (1981).

[4] **M. Reed, B. Simon,** « methods of modern mathematical physics volumeI : Functional analysis *». Academic Press INC (1980).*

[5] **W. Rudin,** « *Fonctional Analysis».* McGraw-Hill, New York (1973).

[6] https ://www.rose-hulman.edu/~bryan/.../riesz.pdfTrad.

[7] mostefanadir.com/Operators%20Theory_files/Operateurs%20Positifs.pdf

[8] www.math.ksu.edu/~nagy/real-an/2-07-op-th.pdf.

[9] Math.univ-lyon1.fr/~chalenda/m2g-chap4.pdf