Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire de Master en Mathématiques

Spécialité : Analyse Harmonique et EDP

Thème

Fermeture de l'image d'un opérateur de composition

DJAKMIME Leyla

Soutenu le 26/05/2015

Année Universitaire 2014 -2015

Mr	**Belarbi**	**Prèsident**	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM.**
Mme	**Bendahmane**	**Examinatrice**	**M.A.A**	**U. MOSTAGANEM.**
Mme	**Ouldali**	**Encadreur**	**M.A.A**	**U. MOSTAGANEM.**

Table des matières

Remerciements

Nous remercions ALLAH pour la patience et le courage qu'il nous a donnés.

Nous tenons à adresser notre forte gratitude à notre encadreur madame "**Ould Ali Soumia**", ses précieux conseils et son aide durant toute la période de notre projet de Master.
Nos remerciements s'adressent aussi à l'examinatrice qui nous a fait l'honneur d'accepter de juger et d'évaluer ce modeste travail, ainsi à nos enseignants et les professeurs qui ont contribués à notre formation spécialement madame " **Ben Chaoui**" et à tous ceux qui nous ont aidé pendant la réalisation de ce travail.
Mes remerciements vont également à la faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie.

NOTATIONS

Nous utilisons les notations suivantes dans ce travail :

Soit T un opérateur de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}^{'}$telle que

- $\mathcal{H}$ L'espace de Hilbert
- $D(T)$ est l'ensemble des vecteurs $x \in \mathcal{H}$ pour lesquels il existe une image $y \in \mathcal{H}'$.
- $G(T)$ désigne le graphe de l'opérateur T : le sous -espace de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}'$défini par :

$$G(T) = \{(x, Tx) \text{ tel que } x \in D(T)\}.$$

- $\ker(T)$ désigne le noyau de l'opérateur T : le sous espace de $\mathcal{H}$ défini par :

$$\ker(T) = \{x \in D(T) \text{ tel que } Tx = 0\}.$$

- $\mathrm{Im}(T)$ désigne l'image de l'opérateur T :le sous espace de $\mathcal{H}'$ défini par :

$$\mathrm{Im}(T) = \{y \in \mathcal{H}' : y = Tx, \quad x \in D(T)\}$$

- L'ensemble des opérateurs linéaires de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$est noté $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}^{'})$.
- $\mathcal{A}$ Algèbre de Banach.
- On note $L^2(E, T, \lambda)$ par $L^2(\lambda)$.

INTRODUCTION

Dans un espace vectoriel topologique des fonctions mesurables telle que les espace L^p, la théorie des opérateurs de composition établit un contact avec la théorie ergodique, la théorie d'entropie et la mécanique classique

La toute première apparition d'une transformation de composition fût en 1871 dans, un papier de Schröeder [8] où il se pose la question de trouver une fonction f et un nombre α telle que $(f \circ T)(z) = \alpha f(z)$ pour tout z dans un domaine approprié, quelque soit la fonction T donnée. Si z varie dans un disque unité et T une fonction analytique alors une solution a été obtenue par Koenigs [4] en 1884.En 1925, les opérateurs de composition ont été employés dans la théorie de subordination de Littlewood. Au début des années 30, les opérateurs de composition ont été utilisés pour étudier des problémes en physique mathématique et la mécanique classique spécialement ceux mentionés dans les travaux de koopman .

L'étude des opérateurs de composition sur L^2 d'un cercle unité a commencé en 1968 par Nordgen dans son papier [5] ensuite en 1969. Ridge [6] travaille dans sa thése de .PH.D sur les opérateurs de composition sur les espace L^p. En 1972, Singh [7] complète sa dissertation doctorale sur les opérateurs de composition ; il continue à travailler avec d'autres chercheurs sur les opérateurs de composition sur différents espaces de fonctions tel que l'espace de Hardy ou l'espace de Bergman ou l'espace de Dirichlet .

On s'est interessé dans ce travail spécialement aux travaux de Singh [9] sur les opérateurs de composition sur l'espace de Lebesgue L^2(vu l'importance de ces espaces dans différentes branches de physique mathématique), plus particulièrement la fermeture de l'image de tels opérateurs.

Etant donnè une transformation mesurable ϕ sur un espace mesuré (E, T, λ) dans lui même, on définit la transformation linéaire bornée sur $L^2(\lambda)$ appelée opérateur de composition par $C_\phi f = f \circ \phi$ pour toute $f \in L^2(\lambda)$.

On établit dans ce mémoire un résultat (théorème, 2.2.1) nous donnant la condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel opèrateur soit à image fermé.

Le manuscrit presenté est divisé en deux parties :

Dans le premier chapitre, on rappele quelques notions de base utilisées dans ce travail.

Dans le second chapitre, on démontre le théorème caractérisant les opérateurs de composition bornés sur $L^2(\lambda)$ à image fermée.

Ensuite on donne deux consèquences à ce théorème pour des opérateurs de composition sur $l^2(\lambda)$.

On termine le chapitre par un exemple d'un opérateur de composition à image fermée.

On finit ce travail par une conclusion et une bibliographie.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons des notions et des résultats de la théorie de mesure et des opérateurs sur les espaces de Hilbert. [2]

1.1 Notion de mesure

1.1.1 Définition de la mesure

Définition 1.1.1 (Tribu ou $\sigma-$algébre) *Soient E un ensemble, T une famille de parties de E (i.e. $T \subset \mathcal{P}(E)$). La famille T est une tribu (on dit aussi une $\sigma-$algébre) sur E si T vérifie :*

1) $\varnothing \in T$, $E \in T$.

2) T est stable par union dénombrable, C'est-à-dire que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\,\in\mathbb{N}} \subset T$ on a :

$$\cup_{n\,\in\mathbb{N}} A_n \in T$$

3) T est stable par intersection dénombrable, C'est-à-dire que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\,\in\mathbb{N}} \subset T$ on a :

$$\cap_{n\,\in\mathbb{N}} A_n \in T$$

4) T est stable par passage au complémentaire, C'est-à-dire que pour tout $A \in T$ on a :

$$A^c \in T$$

Exemples de tribus sur E :

- $T = \{\varnothing, E\}$,
- $T = \mathcal{P}(E)$.

Définition 1.1.2 (Espace mesurable) *Soient E un ensemble, et T une tribu sur E. Le couple (E, T) est appelé"espace mesurable ". Les parties de E qui sont des élements de T sont dites mesurables.*

Définition 1.1.3 (Mesure) *Soit (E, T) un espace mesurable. On appelle mesure une application $\lambda : T \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$(avec $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup (+\infty)$) vérifiant :*

1. $\lambda(\varnothing) = 0$.
2. λ est $\sigma-$additive, c'est-à-dire que pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ de parties disjointes deux à deux (i.e $A_n \cap A_m = \varnothing,$ si $n \neq m$), on a :

$$\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A_n)$$

Remarque 1.1.1 *Soient (E, T) un espace mesurable et λ une mesure sur T, le triplet (E, T, λ) est appellé "espace mesuré".*

Définition 1.1.4 (Mesure $\sigma-$finie) *Soit (E, T, λ) un espace mesuré, on dit que λ est $\sigma-$finie (ou que(E, T, λ) est $\sigma-$fini) si :*

$$\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T \text{ tel que } \lambda(A_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{et} \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Exemple 1.1.1 (Mesure de borel) *Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$, telle que $\lambda([a, b]) = b - a$ pour tout $-\infty < a < b < +\infty$. Cette mesure s'appelle"mesure de borel" sur $\mathbb{R}$.*

la mesure de borel est $\sigma-$finie car :

$A_n =]-n, n[\quad n \in \mathbb{N}$

1. $\lambda(A_n) = 2n < +\infty$
2. $\cup A_n = \mathbb{R}$

1.1.2 propriétés des mesures

Soit (E, T, λ) un espace mesuré. une mesure λ vérifie les quatres propriétés suivantes :

1. Monotonie : Soit $A, B \in T$, $A \subset B$, alors
$$\lambda(A) \leq \lambda(B).$$

2. $\sigma-$additivité : Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$, alors
$$\lambda(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A_n).$$

3. Continuité croissante : Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$, telle que $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors
$$\lambda(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \to \infty} (\lambda(A_n)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\lambda(A_n)).$$

4. Continuité décroissante : Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$, telle que $A_{n+1} \subset A_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, telle que $\lambda(A_{n_0}) \lessdot \infty$, alors
$$\lambda(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{n \to \infty} (\lambda(A_n)) = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\lambda(A_n)).$$

1.1.3 Fonctions mesurables

Définition 1.1.5 (Fonction mesurable) *Soient (E, T) et $\left(F, T^{'}\right)$ deux espaces mesurables et $f : E \to F$ une application. f est dite mesurable ssi*

$$\forall\ A \in T^{'},\ f^{\ -1}(A) \in T\ \left(i.e\ f^{\ -1}\left(T^{'}\right) \subset T\right).$$

Exemple 1.1.2 *Soit (E, T) un espace mesurable quelconque, toute fonction constante (i.e. $f(x) = a$ pour tout x, a est un réel fixé) est mesurable. En effet*

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} E \in T, & si\ a \in A \\ \varnothing \in T, & si\ a \notin A \end{cases}$$

Définition 1.1.6 *Soit (E, T, λ) un espace mesuré, une partie A de E est dite négligeable pour λ s'il existe une partie $B \in T$ telle que $A \subset B$ et $\lambda(B) = 0$.*

1.2 Espace L^2

On commence par introduire l'espace $\mathcal{L}^2$ afin de définir L^2.

Définition 1.2.1 (Espace $\mathcal{L}^2$) *Soient (E, T, λ) un espace mesuré et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On appelle espace $\mathcal{L}^2$ l'ensemble des fonctions mesurables, à valeurs réelles telles que la fonction $|f|^2$ soit $\lambda-$integrable, et on note :*

$$\mathcal{L}^2(\lambda) = \left\{ f : E \longrightarrow \mathbb{k} \text{ telle que } f \text{ mesurable et } \int_E |f|^2 d\lambda < +\infty \right\}$$

Donc $f \notin L^2$ si $\int_E |f|^2 d\lambda = +\infty$ et on pose alors $\|f\|_2 = \int_E |f|^2 d\lambda = +\infty$

Cas particulier : si $(E, T, \lambda) = (\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \boldsymbol{c})$, on note :

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_n)_{\boldsymbol{n} \geq \mathbf{1}},\ \|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}$$

Définition 1.2.2 *Soit (E, T, λ) un espace mesuré, $f, g : E \longrightarrow F$ deux fonctions avec $F = \bar{\mathbb{R}}$, on dit que $f = g$ presque partout, et on note $f = g$ p.p, si l'ensemble*

$$\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$$

est négligeable.

Définition 1.2.3 (Espace L^2) *Soit (E, T, λ) un espace mesuré, on définit l'espace L^2 comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{L}^2$pour la relation d'équivalence "égalité presque partout"; donc :*

$$L^2 = \left\{ \dot{f} \diagup f \in \mathcal{L}^2 \right\}$$

où $\dot{f}$ désigne le représentant de la classe d'équivalence p.p sur $\mathcal{L}^2$.
Si $F \subset L^2$ et $f \in F$ on pose $F = \dot{f}$ et on a :

$$\|F\|_2 = \|f\|_2 = \left(\int_E |f(x)|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}$$

Une autre maniére d'exprimer cette définition consiste à dire que l'espace L^2 est le quotient de $\mathcal{L}^2$ par la relation d'équivalence "égalité presque partout", et on note $L^2 = \mathcal{L}^2 \diagup \sim$

Remarque 1.2.1 *On confond classe de fonctions de L^2 et fonctions de L^2.*

on peut donc définir $L^2(E,T,\lambda)$ de la manière suivante

Définition 1.2.4 *Si (E,T,λ) est un espace mesuré, on définit L^2 par*

$$L^2(E,T,\lambda)=\left\{f \text{ définie sur } E : \left(\int_E |f|^2 \, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\right\}$$

et on le munit de la norme $\|.\|_{L^2}$ définie par

$$\|f\|_{L^2}=\left(\int_E |f(x)|^2 \, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2.1 Propriétés de L^2

1/ l'espace L^2 muni de la norme $\|.\|_2$ est un espace de Hilbert et le produit scalaire associé à la norme est définie par

$$\langle f,g\rangle=\int_E f\overline{g} \, d\lambda$$

2/ l'espace L^2 muni de la norme $\|.\|_2$ est un espace vectoriel normé complet i.e un Banach.

1.2.2 Algèbre de Banach

Définition 1.2.5 (Algèbre) *Soient E un ensemble, $\mathcal{A}$ une famille de parties de E (i.e. $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(E)$). La famille $\mathcal{A}$ est une algèbre sur E si*

1. $\varnothing\in\mathcal{A}$, $E\in\mathcal{A}$.
2. $\mathcal{A}$ est stable par union finie, c'est-à-dire que pour tout $A,B\in A$ on a

$$A\cup B\in A.$$

3. $\mathcal{A}$ est stable par intersection finie, c'est-à-dire que pour tout $A,B\in A$ on a

$$A\cap B\in\mathcal{A}.$$

4. $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a

$$A^c \in \mathcal{A}$$

Définition 1.2.6 (Algèbre de Banach) *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\mathbb{C}$ équipée d'une norme $\|.\|$ .On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. A est un $\mathbb{C}$-espace de Banach c'est à dire un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé, complet.
2. pour tous x, y $\in \mathcal{A}$; on a

$$\| xy\| \leq \| x\| \| y\| .$$

Si de plus, il existe un élément $e \in \mathcal{A}$ telle que

$$xe = ex = x, \ (x \in \mathcal{A}) \ \text{ et } \ \|e\| = 1,$$

alors, on dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach unitaire. L'élément e s'appelle l'élément unité de l'algèbre $\mathcal{A}$.

Enfin, nous dirons qu'une algèbre $\mathcal{A}$ est commutative si $xy = yx$ pour tous $x, y \in \mathcal{A}$.

1.2.3 Espace de Hilbert

Définition 1.2.7 (produit scalaire) *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{C}$). On appelle produit scalaire sur E toute application notée $\langle .,. \rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{k}$ telle que :*

– Positivité : $\forall u, v \,\epsilon E : \langle u, v\rangle \geq 0$.

– Sesquilinéairité :$\forall u,\ v,\ w \ \epsilon \ E$: $\begin{cases} \langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \\ \langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \end{cases}$, et $\forall\ u,\ v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{k}$: $\begin{cases} \langle \alpha u, v\rangle = \alpha \langle u, v\rangle \text{ dans le cas réel} \\ \langle u, \alpha v\rangle = \overline{\alpha} \langle u, v\rangle \text{ dans le cas complexe} \end{cases}$,

– et $\forall\ u,\ v \in E$: $\begin{cases} \langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle \text{ appelée symétrie dans le cas réel} \\ \langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle} \text{ appelée hermicité dans le cas complexe} \end{cases}$,

Définition 1.2.8 (Norme) *On appelle norme sur E noté $\|.\|_E$, toute application de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que :*

– $\forall\ x \in E : \|x\|_E = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

– $\forall\ x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{C} : \|\alpha x\|_E = |\alpha| \, \|x\|_E$.

– $\forall\, x, y \in E : \ \|x+y\|_x \leq \|x\|_E + \|y\|_E$

Définition 1.2.9 (Espace préhilbertien) *On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel muni d'un produit scalaire,*

un espace préhilbertien de dimention finie est dit Euclidien dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.10 (Espace Hilbert) *Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est un espace préhilbertien complet pour la norme définie sur le produit scalaire .*

Remarque 1.2.2 *Pour tout produit scalaire sur E, on peut associer la norme :$\|.\|_E = \sqrt{\langle .,. \rangle_E}$.*

1.2.4 Les opérateurs dans un espace de Hilbert

Définition 1.2.11 (Opérateurs linéaires) *Soit $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux espaces de Hilbert. Un opérateur A de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$ est une application linéaire*

$$A : D(A) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$$

où $D(A)$ dénote le domaine de A

Définition 1.2.12 (Inverse d'un opérateur) *Soient $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ deux espaces de Hilbert et $A \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$. On dit que A est inversible s'il existe $B \in L(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ tel que*

$$AB = Id_{H'} \text{ et } BA = Id_H$$

où $Id_{\mathcal{H}}$(respectivement $Id_{\mathcal{H}'}$) est l'opérateur identité de $\mathcal{H}$ (respectivement $\mathcal{H}'$).

Un tel opérateur B (lorsqu'il existe) est unique, on l'appelle opérateur inverse de A ou simplement inverse de A et on le note $B = A^{-1}$.

Définition 1.2.13 (Opérateur borné) *Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux espaces de Hilbert, un opérateur A de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$ est dit borné si et seulement si*

$$\sup \|Ax\|_{\mathcal{H}'} < \infty.$$

L'ensemble des opérateurs bornés de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$ est noté $B(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ et par $B\left(\mathcal{H}\right)$ pour $\mathcal{H}=\mathcal{H}'$.

Définition 1.2.14 (Adjoint d'un opérateur) *Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux-espaces de Hilbert et $A\in B(\mathcal{H},\mathcal{H}')$, l'unique opérateur noté $A^*\in L(\mathcal{H}',\mathcal{H})$ tel que pour tous $x\in\mathcal{H}$, $y\in\mathcal{H}'$ on ait $\langle A(x),y\rangle=\langle x,A^*(y)\rangle$, est appelé adjoint de A.*

Définition 1.2.15 (Opérateur Auto-Adjoint) *Un opérateur lineaire borné A dans $\mathcal{H}$ ($A\in B(\mathcal{H})$) est dit auto-adjoint si et seulement si $A=A^*$. Autrement dit $\forall\,(x,y)\in\mathcal{H}^2,\langle Ax,y\rangle=\langle x,Ay\rangle$*

Définition 1.2.16 *Un opérateur $U\in L(H)$ est appelé isometrie partielle si*

$$\|Ux\|=\|x\|\ \textit{pour tout}\ x\in Ker(U)^{\perp}.$$

Chapitre 2

Opérateurs de composition à image fermée

Dans cette partie, on va établir une condition necessaire et suffisante pour qu'un opérateur de composition soit à image fermée pour cela, on a besoin d'introduire tout d'abord certaines notions et résultats :

2.1 Définitions et proprietés

Définition 2.1.1 (Mesure de Radon-Nikodym) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$, on appelle mesure de Radon Nikodym toute application linéaire continue notée" $\boldsymbol{r}$ " de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$ pour la norme infinie.*

Définition 2.1.2 (Mesure de densité) *Soit (E, T, λ) un espace mesuré. Soit μ une mesure sur T.On dit que μ est une mesure de densité par rapport à λ s'il existe une fonction mesurable positive f telle que $\mu(A) = \int_A f \, d\lambda$ Pour tout $A \in T$. On pose alors $\mu = f \lambda$ (on dit aussi que f est la densité de μ par rapport à λ).*

Définition 2.1.3 (Mesure absolument continue) *Soient (E, T, λ) un espace mesuré et μ une mesure (positive) sur T. On dit que μ est absolument continue par rapport à λ,et on note $\mu \ll \lambda$, si :*

$$A \in T, \ \ avec \ \lambda(A) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0.$$

Théorème 2.1.1 (Radon-Nikodym) *Soient (E, T, λ) un espace mesuré $\sigma-$fini et μ une mesure $\sigma-$finie sur T.Alors μ est absolument continue par rapport à λ si et seulement si μ est une mesure de densité par rapport à λ.*

Preuve. $\Leftarrow$)Supposons que μ est une mesure de densité par rapport à λ et on montre que μ est absolument continue par rapport à λ
Soit f une fonction mesurable positive telle que $\mu = f\ \lambda$. Soit $A \in T$ telle que $\lambda(A) = 0$.On a alors $f1_A = 0\ \lambda - p.p.$ Donc $\mu(A) = \int f1_A\ d\lambda = 0$, ceci montre que μ est absolument continue par rapport à λ.
$\Rightarrow$)Supposons que μ est absolument continue par rapport à λ, et on montre que μ est une mesure de densité par rapport à λ.
Il existe donc deux partitions de E dénombrables et $T-$mesurables (F_n) et (G_n) telles que $\lambda(F_n) < \infty$ et $\mu(G_n) < \infty$. De ces deux partitions on peut tirer une partition de E dénombrable et $T-$mesurable (E_n) telle que $\lambda(E_n) < \infty$ et $\mu(E_n) < \infty$, par exemple en considérant toutes les intersections $F_j \cap G_k$ et en utilisant une bijection allant de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. Pour n fixé, soient λ_n et μ_n les mesures traces de λ et μ respectivement, sur E_n. Alors λ_n et μ_n sont des mesures finies et puisque $\mu \ll \lambda$, $\mu_n \ll \lambda_n$, donc il existe une fonction positive $f_n \in L^1(\lambda_n)$ telle que pour tout $A \in T$

$$\mu_n(A) = \int_A f_n d\lambda_n = \int_A f_n 1_{E_n} d\lambda.$$

Soit maintenant $f = \sum_n f_n 1_{E_n}$. Alors pour tout $A \in T$,

$$\begin{aligned}
\int_A f\ d\lambda &= \int_A \sum_n f_n 1_{E_n} d\lambda \\
&= \sum_n \int_A f_n 1_{E_n} d\lambda \\
&= \sum_n \mu_n(A) \\
&= \sum_n \mu(A \cap E_n) \\
&= \mu(A).
\end{aligned}$$

$\square$

2.2 Opérateur de composition

Définition 2.2.1 *Soit* (E, T, λ) *un espace mesuré. Une transformation mesurable* ϕ *sur* (E, T, λ) *est dite non singulière si*

$$\lambda\left(\phi^{-1}(A)\right) = 0 \text{ dés que } \lambda(A) = 0 \tag{2.2.1}$$

pour tout ensenble mesurable A

Si ϕ est non singulière alors la mesure $\lambda\phi^{-1}$ définit par

$$\lambda\phi^{-1}(A) = \lambda\left(\phi^{-1}(A)\right) \ \forall A \in T$$

est une mesure absolument continue sur T par rapport à λ.
on a alors la définition suivante toute transformation non singuliére $\phi : E \to E$ induit une transformation linéaire C_ϕ sur $L^2(\lambda)$.

Définition 2.2.2 (de l'opérateur de composition) *Soit* ϕ *une fonction mesurable non singulière sur l'espace mesuré* $\sigma-$*fini* (E, T, λ). *Alors l'opérateur noté* C_ϕ, *défini par*

$$C_\phi f = f \circ \phi \text{ pour chaque } f \in L^2(\lambda)$$

est appellé opérateur de composition induit par ϕ.

Définition 2.2.3 *Un opérateur* A *est borné loin de son ensemble d'annulation sur un ensemble* E *si il existe une constante* $c > 0$ *telque* $\|Af\| \geq c$ *pour tout* $f \in E$.

Lemme 2.2.1 *([9]-[3])Soit* $A \in B(H)$. A *est à image fermé si, et seulement si, il est borné loin de son ensemble d'annulation sur* $(N(A))^\perp$.

Corollaire 2.2.1 *Chaque isométrie partielle est à image fermée.*

Lemme 2.2.2 *[9]Soit* $A \in B(\mathcal{H})$ *normal. Alors* A *est à image fermée si et seulement si* A^n *est à image fermée pour un certain* $n \in \mathbb{N}$.

Avant d'énoncer le résultat principal de ce mémoire, on a besoin du résultat suivant

Lemme 2.2.3 *Soit* $A \in B(\mathcal{H})$. *Alors* A *est à image fermé si et seulement si* A^*A *est à image fermée.*

Preuve. $\Leftarrow$)on suppose que A^*A est à image fermée, comme $A \in B(\mathcal{H})$ d'après la décomposition polaire [10], il existe une isométrie partielle U telle que $A = UP$ avec $P = \sqrt{A^*A}$.
On a $P^2 = A^*A$ est à image fermée puis que P est normal alors d'après le lemme 2.2.2 , P est à image fermé.
Or U est à image fermée d'apré le corollaire 2.2.1.
Donc d'aprés la stabilité du produit A est à image fermé.
$\Rightarrow$) On Suppose que A est à image fermé et on montre que $R(A^*A)$ est fermé.
Pour cela, on utilise le résultat suivant([1] $Théoreme$ 1 p 205).

$$\begin{aligned} R(A) \text{ est fermé dans } \mathcal{H} &\Leftrightarrow R(A^*) \text{ est fermé dans } \mathcal{H}' \\ &\Leftrightarrow R(A) = N(A^*)^{\perp} \\ &\Leftrightarrow R(A^*) = N(A)^{\perp} \end{aligned}$$

Dans notre cas $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ et on applique le lemme 2.2.1 □
On va énoncer maintenant le résultat principal de ce mémoire

Théorème 2.2.1 *Soit* $C_\phi \in B(L^2(\lambda))$. *Alors* C_ϕ *est à image fermée si et seulement si* f_0 *est bornée loin de son ensemble d'annulation sur* Z^{f_0}, *où* f_0 *est la dérivée de Radon- Nikodym de la mesure* $\lambda\phi^{-1}$ *par rapport à* λ.

Preuve. On va utiliser les résultats précédents à savoir le théorème 2.1[9] et le lemme 2.2.3 pour établir la caractérisation de l'opérateur de composition, à image fermée.
Tout d'abord, on va montrer que $C_\phi^* C_\phi = M_{f_0}$ où $f_0 = \frac{d\lambda\phi^{-1}}{d\lambda}$ la dérivé de Radon Nikodym.

Soit $f, g \in L^2(\lambda)$, on a

$$\begin{aligned}
\langle C_\phi^* C_\phi f, g\rangle_{L^2(\lambda)} &= \langle C_\phi f, C_\phi g\rangle_{L^2(\lambda)} \\
&= \int_E f[\phi(t)]\,\overline{g}[\phi(t)]\,d\lambda \\
&= \int_E [f.\overline{g}][\phi(t)]\,d\lambda \\
&= \int_E f(t).\overline{g}(t)\,d\lambda\phi^{-1} \\
&= \int_E f_0 f(t)\,\overline{g}(t)\,d\lambda \\
&= \langle M_{f_0} f, g\rangle_{L^2(\lambda)}
\end{aligned}$$

Ainsi $C_\phi^* C_\phi = M_{f_0}$.

alors $C_\phi^* C_\phi$ est à image fermée si et seulement si f_0 est borné loin de son ensemble d'annulation sur Z^{f_0}. et on peut conclure d'après le lemme 2.2.3 que C_ϕ est à image fermée si et seulement si f_0 est borné loin de son ensemble d'annulation sur Z^{f_0}; ce qui achève la preuve du théoréme.

□

On a une conséquence directe du théoreme 2.2.1 en considèrant l'éspace de Hilbert $l^2(\lambda) = \{\{x_n\} / \sum_{n=1}^{\infty} P_n \mid x_n \mid^2 < \infty\}$
ou $P = \{P_1,\ P_2, ...\}$ désigne une suite de nombres positives strictement.

Corollaire 2.2.2 *Si* $\inf P = \alpha_1 > 0$ *et* $\sup P = \alpha_2 < \infty$. *Alors tout opérateur de composition sur* $l^2(P)$ *est à image fermée.*

Preuve. Dans ce cas on a :

$$f_0(n) = \frac{d\lambda\phi^{-1}(n)}{d\lambda(n)} \geq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \alpha$$

D'où

$$f_0(n) = \begin{cases} \alpha > 0 & \text{si } n \in \phi(\mathbb{N}) \\ 0 & \text{si } n \in \mathbb{N}/\phi(\mathbb{N}) \end{cases}$$

alors f_0 est borné loin de son ensemble d'annulation. Donc $R(C_\phi)$ est fermé le théoreme 2.2.1. En dernier, on va donner un exemple d'opérateur de composition à image non fermée et un exemple d'opérateur de composition à image fermée. □

Exemple 2.2.1 *On définit sur* $\mathbb{N}$ *une mesure* λ *par* $\lambda(\{n\}) = a^{2n}$ *avec* $0 < a < 1$

Si ϕ est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\phi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ pair} \\ \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ impair} \end{cases}$$

alors c_ϕ est un opérateur de composition sur $l^2(\lambda)$, où $l^2(\lambda) = \{\{x_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) \mid x_n \mid^2 < \infty\}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f^{(n)}$ la suite définie par

$$f^{(n)}(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \leq n \\ \\ 1 & \text{si } m > n \end{cases}$$

alors

$$\| \quad c_\phi f^{(n)} \|_{l^2(\lambda)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mid \lambda(n) \mid\mid f^{(n)} [\phi(m)] \mid^2$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \mid \lambda(n) \mid\mid f^{(n)} \left(\frac{m}{2}\right) \mid^2 & si \;\; m \; mpair \\ \\ \sum_{n=1}^{\infty} \mid \lambda(n) \mid\mid f^{(n)} \left(\frac{m+1}{2}\right) \mid^2 & si \; m \; impair \end{cases}$$

alors

$$\frac{\| c_\phi f^{(n)} \|^2}{\| f^{(n)} \|^2} = a^{2n}.$$

ceci montre que C_ϕ n'est pas inférieurement borné. Donc C_ϕ n'est pas à image fermée.

Exemple 2.2.2 *Soit* ϕ *une fonction réelle à valeurs réelles définie par*

$$\phi(x) = \begin{cases} x+1 & si \; x \in]-\infty, 4] \\ x+2 & si \; x \in]4, +\infty[\end{cases} \tag{2.2.2}$$

alors C_ϕ *est opérateur de composition sur* $L^2(-\infty, +\infty)$ *et la dérivée de Radon- Nikodym associée à* ϕ *est donnée par*

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & si \; x \in]-\infty, 5] \cup]6, +\infty[\\ 0 & si \; x \in]5, 6] \end{cases}$$

alors d'après le théorème 2.2.1, C_ϕ *est à image fermée.*

CONCLUSION

L'étude des opérateurs de composition a une longue histoire. On peut apprendre des livres d'analyse fonctionnelle, plusieurs propriétés de ces opérateurs sur différents espaces fonctionnels incluant les espaces L^p $1 \leq p \prec \infty$ notamment la propriété de la fermeture de l'image. On s'est intéressé à cette propriété pour ce type d'opérateurs sur l'espace L^2, plus précisément à caractériser ces opérateurs à image fermé par une des méthodes employées à cet effet.

Bibliographie

[1] Kôsaku Yosida, Functional analysis, second edition (Die Grundlehrender mathematischen Wissenschaften, 123. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968).

[2] Thierry Gallouet Raphaèle Herbin "MESURE, INTEGRATION, PROBABILITES" Cours de Master February 19, 2009.

[3] Paul R. Halmos, A Hilbert space problem book (Van Nostrand, Princeton, New Jersey ; Toronto ; London ; 19-67).

[4] Koenigs Gabriel "Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles" Annales Scientifiques de l'école normale Supérieure. 1.3-41 ;1884.

[5] E.Nordgren. Composition Operators. Canadian. J.Math, 20 :442-449,1968.

[6] W.C.Ridge, Composition Operators, thesis, Indiana University, 1969.

[7] R.K.Singh, Composition Operators Doctoral thesis,University of New HampShire, 1972.

[8] E.Schröeder "Ueberiterite Function" Math.Ann 3 (2) 296-322 ;1870.

[9] R.Singh- A.Kumar, Multiplication Operators and Composition Operators with Closed Ranges, BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. VOL. 16 (1977), 247-252

[10] Chalenda, Analyse Fonctionnelle et Thèorie des Opérateurs, Cour de Master Chap 4. Math. Univ. Lyon. fr.