Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostagane

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire de Master

Spécialité : Analyse Harmonique et EDP

Thème

Fermeture de l'image de l'opérateur de multiplication

Présenté par

BELARADJ Fawzia

Soutenu le 26 /06/2015

ANDASMAS	Président	**M.A.A**	**U. MOSTAGANEM.**
BENSIKADDOUR	Examinateur	**M.A.A**	**U. MOSTAGANEM.**
Mme.**OULD.ALI.BELMOUHOUB.S**	**Encadreur**	**M.A.A**	**U. MOSTAGANEM.**

Année Universitaire 2014 -2015

Table des matières

Remerciements

Merci Mon Dieu pour cet accomplissement honorable et fatidique.

Je tiens aussi à exprimer toute ma reconnaissance et toute ma gratitude envers mon encadreur **Mme. OULD.ALI.BELMOUHOUB.S**, pour avoir encadrée ce travail et pour la cofiance qu'elle m'a accordée.

Je voudrais remercier également ma famille et mes amis pour leurs soutien moral et tous ceux qui me sont chères et que j'ai oublié de citer.

Je n'oublie pas de remercier mes collègues de la promotion 2 ème année Master.

NOTATIONS

Nous utilisons les notations suivantes dans ce travail :

- $\mathcal{H}$ désigne un espace de Hilbert.
- T désigne un opérateur de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$.
- $\mathcal{A}$ Algèbre de Banach.
- $B(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ désigne l'ensemble des opérateurs bornés de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$.
- On note $L^2(X,S,\lambda)$ par $L^2(X)$.

INTRODUCTION

Plusieurs applications concrètes des mathématiques en science et engineering, font appel éventuellement à un problème impliquant des équations opératorielles. Ce problème peut être représenté comme une équation opératorielle du type

$$Tx = y \tag{0.0.1}$$

où $T : X \to Y$ est un opérateur linéaire ou non linéaire tel qu'un opérateur différentiel ou opérateur intégral ou une matrice. Les espaces X et Y sont des espaces linéaires munis de certaines normes.

Résoudre les équations linéaires à une infinité de variables est un problème d'analyse fonctionnelle et le problème de résolution de l'équation (0.0.1) est bien posé si on assure l'existence et l'unicité de la solution de (0.0.1) et la continuité de la solution dépendant de la variable y.

Il est bien connu que le problème de résolution des équations opératorielles du type (0.0.1) essentiellement bien posé si l'image de T est fermé. Donc l'étude des opérateurs à image fermé joue un rôle vital dans la théorie de perturbation. Plusieurs travaux ont été élaborés dans ce sens, nous citerons R.Bouldin.(1973) [1] ; Singh[8];Singh [6].

Notre attention dans ce mémoire a été porté plus particulièrement sur la fermeture de l'image des opérateurs de multiplication, vu l'importance de ces opérateurs en analyse fonctionnelle (dans le cadre d'étude spectrale) avec le théorème spectral ([7]- [9]) qui nous assure que tout opérateur auto-adjoint est unitairement équivalent à un opérateur de multiplication.

Etant donné un espace mesuré $\sigma-$finie (X, S, λ) et une fonction mesurable essentiellement bornée sur X, on définit l'opérateur de multiplication noté M_θ induit par θ, par la relation

$$M_\theta f = \theta f \text{ pour tout } f \in L^2(\lambda) \tag{0.0.2}$$

Le but ce travail est de caractériser ces opérateurs de multiplication bornés à image fermé dans l'espace de Lebesgue $L^2(X, S, \lambda)$ et ceci est donné dans le théorème (2.2.1).

Plan du mémoire :

Ce mémoire est divisé en deux chapitres

- Le chapitre 1 est consacré au rappel des définitions et notions mathématiques dont on a besoin : le mesure ; espace de Hilbert ; espace L^2 ; opérateurs bornés.
- Dans le chapitre 2, on donne la définition de l'opérateur de multiplication et quelques de ses propriétés spectrales. Ensuite on établit le résultat caractérisant théorème (2.2.1) de la fermeture de l'image de l'opérateur de multiplication borné sur l'espace de Lebesgue $L^2(X, S, \lambda)$,avec (X, S, λ) un espace mesuré $\sigma-$finie ; on termine le chapitre par un corollaire et un exemple d'un opérateur de multiplication à image non fermé.

On finit ce travail par une conclusion et une bibliographie.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans cette partie, nous rappelons quelques notions et résultats sur la théorie de mesure et sur les espaces sur lesquels nous travaillons[4].

1.1 Notion de mesure

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 (Tribus ou $\sigma-$algèbre) *Soit un ensemble X, et soit S la famille des parties de X ($S \subset \mathcal{P}(X)$). On dit que S est une tribu sur X, si elle vérifie :*

1. *$\varnothing \in S$, $X \in S$.*
2. *Pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ on a :*
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in S$$
3. *Pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ on a :*
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in S$$
4. *Pour tout $A \in S$ on a :*
$$A^c \in S$$

Définition 1.1.2 (Espace mesurable) *Soient X un ensemble et S une tribu sur X. Le couple (X,S) est appelé espace mesurable. Les parties de X qui sont des éléments de S sont dites ensembles mesurables.*

Définition 1.1.3 (Mesure) *Soit* (X,S) *un espace mesurable. On appelle mesure sur* (X,S) *toute application* $\lambda : S \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ *(avec* $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup (+\infty)$*) vérifiant :*

1. $\lambda(\varnothing) = 0$.
2. λ est $\sigma-$additive, c'est-à-dire que pour toute famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ de parties disjointes deux à deux (i.e $A_n \cap A_m = \varnothing$, si $n \neq m$), on a :

$$\lambda\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A_n).$$

Remarque 1.1.1 *Quand on munit l'espace mesurable* (X,S) *d'une mesure* λ*, on parle d'espace mesuré et on note* (X, S, λ)

Définition 1.1.4 (Mesure $\sigma-$finie) *Soit* (X,S,λ) *un espace mesuré, on dit que* λ *est* $\sigma-$*finie (ou que* (X,S,λ) *est* $\sigma-$*fini) s'il existe une suite d'éléments* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de* S *tel que*

$$\lambda(A_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Exemple 1.1.1 (Mesure de Dirac) *Soient* X *un ensemble,* S *une tribu sur* X *et* $a \in X$*. On définit sur* S *la mesure de Dirac* δ_a *par*

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 0, & si\ a \notin A \\ 1, & si\ a \in A \end{cases}, \ A \in S$$

1.1.2 Propriétés d'une mesure

Soit (X,S,λ) un espace mesuré. La mesure λ vérifie les quatres propriétés suivantes :

1. Monotonie : Soit A, $B \in S$ tel que $A \subset B$, alors

$$\lambda(A) \leq \lambda(B).$$

2. $\sigma-$sous$-$additivité : Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$, alors

$$\lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A_n).$$

3. Continuité croissante : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$, telle que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\lambda\left(A_n\right)\right)\\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\lambda\left(A_n\right)\right).\end{aligned}$$

4. Continuité décroissante : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$, telle que $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $\lambda\left(A_{n_0}\right) < \infty$, alors

$$\begin{aligned}\lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\lambda\left(A_n\right)\right)\\ &= \inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\lambda\left(A_n\right)\right).\end{aligned}$$

1.1.3 Fonctions mesurables

Définition 1.1.5 (Fonction mesurable) *Soient (E,S) et (F,S') deux espaces mesurables et $f : E \longrightarrow F$ une application. f est dite mesurable si, et seulement si,*

$$\forall A \in S',\ f^{-1}(A) \in S \ \left(i.e\ f^{-1}\left(S'\right) \subset S\right).$$

Exemple 1.1.2 *Soit (X,S) un espace mesurable quelconque, toute fonction constante $(i.e. f(x) = a$ pour tout $x \in X$, a est un réel fixé$)$ est mesurable. En effet*

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} E \in S,\ si\ a \in A \\ \varnothing \in S,\ si\ a \notin A. \end{cases}$$

Définition 1.1.6 (Partie négligeable) *Soient (X,S,λ) un espace mesuré et $A \subset X$. On dit que A est négligeable s'il existe un ensemble $B \subset S$ tel que*

$$A \subset B \text{ et } \lambda(B) = 0.$$

Définition 1.1.7 (Propriété vraie presque partout) *Une propriété P est dite vraie presque partout si l'ensemble des éléments pour lequel P est fausse, est négligeable.*

Définition 1.1.8 (Fonction mesurable essentiellement bornée) *Une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{C}$ est dite essentiellement bornée s'il existe une constante $m > 0$ telle que*

$$|f(x)| \leq m \text{ presque partout.}$$

Définition 1.1.9 *L'espace des fonctions essentiellement bornées se note* $L^\infty(X,S,\lambda)$.

Théorème 1.1.1 (de la convergence dominée) *Soient* (X,S,λ) *un espace mesuré et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions mesurables telle que pour tout* $x \in X$,

$$\underset{n\to+\infty}{f_n(x) \to f(x)} \text{ presque partout}$$

(*et on note* $\underset{n\to+\infty}{f_n(x) \to f(x)}$ *pp). S'il existe une fonction* $g \in L^1(X,S,\lambda)$ *(i.e g est* $\lambda-$*intégrable) telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in X,\ |f_n(x)| \leq g(x) \text{ pp}$$

alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\lambda &= \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \ d\lambda \\ &= \int_X f \ d\lambda.\end{aligned}$$

1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.2.1 (Produit scalaire) *Soit* E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{k}\,(\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{k} = \mathbb{C})$.
On appelle produit scalaire sur E *toute application notée* $\langle .,.\rangle$ *de* $E\times E$ *dans* $\mathbb{k}$ $(\langle .,.\rangle : E \times E \to \mathbb{k})$ *telle que :*

– *Positivité :* $\forall u,v \,\epsilon E : \langle u,v\rangle \geq 0$.
– *Sesquilinéairité :* $\forall u,\ v,\ w\ \epsilon\ E : \begin{cases} \langle u,v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle \\ \langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle \end{cases}$,

– et $\forall\ u,\ v \in E, \forall\alpha \in \mathbb{k} : \begin{cases} \langle \alpha u,v\rangle = \alpha\,\langle u,v\rangle \text{ dans le cas réel} \\ \langle u,\alpha v\rangle = \overline{\alpha}\,\langle u,v\rangle \text{ dans le complexe} \end{cases}$,
– et $\forall\ u,\ v \in E : \begin{cases} \langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle \text{ appelée symétrie dans le cas réel} \\ \langle u,v\rangle = \overline{\langle u,v\rangle} \text{ appelée hermicité dans le complexe.} \end{cases}$

Définition 1.2.2 (Norme) *On appelle norme sur* E *noté* $\|.\|_E$, *toute application de* E *dans* $\mathbb{R}^+$ *telle que :*

– $\forall\ x \in E : \|x\|_E = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
– $\forall\ x \in E, \forall\alpha \in \mathbb{C} : \|\alpha x\|_E = |\alpha|\,\|x\|_E$
– $\forall\ x,\ y \in E :\ \|x+y\|_x \leq \|x\|_E + \|y\|_E$.

Remarque 1.2.1 *Pour tout produit scalaire sur X, on peut associer la norme :*

$$\|.\|_E = \sqrt{\langle .,. \rangle_E}.$$

Définition 1.2.3 (Espace préhilbertien) *On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, un espace préhilbertien de dimension finie est dit euclidien dans R.*

Définition 1.2.4 (Espace de Hilbert) *Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est un espace préhilbertien complet pour la norme définie sur le produit scalaire.*

1.3 Espace L^2

Définition 1.3.1 (Espace $\mathcal{L}^2$) *Soient (X,S,λ) un espace mesuré, et $f : X \longrightarrow \mathbb{k}$ une fonction mesurable. On appelle espace $\mathcal{L}^2$ l'ensemble des fonctions mesurables, a valeurs réelles telles que la fonction $|f|^2$ soit $\lambda-$intégrable, et on note :*

$$\mathcal{L}^2(\lambda) = \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{k} \text{ telle que } f \text{ mesurable et } \int_X |f|^2 \, d\lambda < +\infty \right\}.$$

Donc $f \notin \mathcal{L}^2$ si $\int_X |f|^2 \, d\lambda = +\infty$ et on pose alors

$$\|f\|_2 = \left(\int_X |f|^2 \, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} = +\infty \tag{1.3.1}$$

Cas particulier : si $(X, S, \lambda) = (\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), c)$, on note :

$$\ell_2 = \left\{ x = (x_n)_{\boldsymbol{n \geq 1}}, \ \|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}$$

Définition 1.3.2 *Soit (X,S,λ) un espace mesuré, soit f, $g : X \longrightarrow F$ deux fonctions avec $F = \bar{\mathbb{R}}$, on dit que $f = g$ presque partout, et on note $f = g$ p.p. si l'ensemble*

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$$

est négligeable.

Définition 1.3.3 (L'espace L^2) *Soient (X, S, λ)un espace mesuré , on définit l'espace L^2 comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{L}^2$ pour la relation d'équivalence égalité p.p, donc :*

$$L^2 = \left\{ \dot{f} \diagup f \in \mathcal{L}^2 \right\}$$

où $\dot{f}$ désigne le représentant de la classe d'équivalence p.p sur $\mathcal{L}^2$. Si $F \subset L^2$ et $f \in F$ on pose $F = \dot{f}$ et on a :

$$\|F\|_2 = \|f\|_2 = \left(\int_X |f|^2 \; d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}$$

Une autre manière d'exprimer cette définition consiste à dire que l'espace L^2 est le quotient de $\mathcal{L}^2$ par la relation d'équivalence "égales presque partout", et on note :

$$L^2 = \mathcal{L}^2 \diagup \sim$$

Remarque 1.3.1 *On confond classe de fonctions de L^2 et fonctions de L^2. On peut donc définir $L^2(X,S,\lambda)$ de la manière suivante*

Définition 1.3.4 *Si (X, S, λ) est un espace mesuré, on définit L^2 par*

$$L^2(X,S,\lambda) = \left\{ f \text{ définie sur } X : \left(\int_X |f|^2 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\} \tag{1.3.2}$$

et on le munit de la norme $\|.\|_{L^2}$ donnée par

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_X |f(x)|^2 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.3.3}$$

1.3.1 Propriétés de L^2

1/ l'espace L^2 muni de la norme $\|.\|_{L^2}$ (1.3.3) est un espace vectoriel normé complet i.e un Banach.

2/ l'espace $L^2(X,S,\lambda)$ muni de la norme $\|.\|_{L^2}$ est un espace de Hilbert et le produit scalaire associé à la norme est définie par

$$\langle f,g \rangle = \int_X f \; \bar{g} \; d\lambda$$

1.4 Algèbre de Banach

Définition 1.4.1 (Algèbre) *Soient X un ensemble, $\mathcal{A}$ une famille de parties de X (i.e. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$). La famille $\mathcal{A}$ est une algèbre sur X si*

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{A}$.
2. *$\mathcal{A}$ est stable par union finie, c'est-à-dire que pour tout A, $B \in A$ on a*
$$A \cup B \in A.$$
3. *$\mathcal{A}$ est stable par intersection finie, c'est-à-dire que pour tout A, $B \in A$ on a*
$$A \cap B \in \mathcal{A}.$$
4. *$\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a*
$$A^c \in \mathcal{A}$$

Définition 1.4.2 (Algèbre de Banach) *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur $\mathbb{C}$ équipée d'une norme $\|.\|$. On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *A est un $\mathbb{C}$-espace de Banach c'est à dire un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé, complet.*
2. *pour tous x, $y \in \mathcal{A}$ on a*
$$\| xy\| \leq \| x\| \, \| y\| \, .$$
Si de plus, il existe un élément $e \in \mathcal{A}$ telle que
$$\begin{aligned} xe &= ex \\ &= x, \, (x \in \mathcal{A}) \quad et \ \|e\| = 1 \end{aligned}$$
alors, on dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach unitaire. L'élément e s'appelle l'élément unité de l'algèbre $\mathcal{A}$

Enfin, nous dirons qu'une algèbre $\mathcal{A}$ est commutative si $xy = yx$ pour tous x, $y \in \mathcal{A}$.

1.5 Les opérateurs dans un espace de Hilbert

Définition 1.5.1 (Opérateurs) *Soit $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ des espaces de Hilbert. Un opérateur T de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$ est une application linéaire de $D(T)$(appelé domaine de T) dans $\mathcal{H}'$.*
On note par $L(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ l'espace vectoriel des opérateur de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$. Si $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$, on pose $L(\mathcal{H}) = L(\mathcal{H},\mathcal{H})$.

Définition 1.5.2 *On appelle noyau de T notée $N(T)$ le sous-espace*

$$N(T) = \{x \in D(T)\,;\, Tx = 0\}.$$

Définition 1.5.3 *On appelle l'image de T notée $R(T)$ le sous-espace*

$$R(T) = \{y \in \mathcal{H}'\,;\, y = T(x), x \in D(T)\}.$$

Définition 1.5.4 *Un opérateur T est dit borné s'il existe un $C > 0$ tel que*

$$\forall x \in D(T)\, \|Tx\| \leq C\, \|x\|\,.$$

Le plus petite constante C qui réalise cette propriété est appelée norme de T et notée $\|T\|$.

Définition 1.5.5 *Un opérateur T est dit densément défini si $D(T)$ est dense dans $\mathcal{H}$.*

Définition 1.5.6 (Graphe d'un opérateur) *Le graphe d'un opérateur T de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}'$ noté $G(T)$ est un sous-espace de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}'$ défini par :*

$$G(T) = \{(x,Tx),\ x \in D(T)\}.$$

Définition 1.5.7 (Spectre d'un opérateur) *Le spectre d'un operateur $T \in L(\mathcal{H})$ est le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par*

$$\sigma(T) = \{z \in \mathbb{C},\ (T - zI) \text{ n'est pas inversible}\}.$$

Définition 1.5.8 (Opérateur fermé) *Un opérateur T de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$ est dit fermé si, et seulement si, son graphe $G(T)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}'$ c'est a dire :*

$$G(T) = \overline{G(T)}.$$

Définition 1.5.9 (Adjoint d'un opérateur) *Soit $T \in L(\mathcal{H})$. L'adjoint est l'opérateur linéaire borné, note T^* vérifiant*

$$\langle Tx,y\rangle = \langle x,T^*y\rangle \,,\forall x,\ y \in \mathcal{H}.$$

Proposition 1.5.1 *Soit l'isométrie*

$$J : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}' \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}'$$

définie par

$$J(x,y) = (-y,x).$$

Soit T un opérateur de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}'$ a domaine dense. Alors

$$G(T^*) = [JG(T)]^{\perp}.$$

Preuve

En définissant le produit scalaire de deux élément $\{a,b\}$ et $\{c,d\}$ de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}'$ par

$$\langle \{a,b\},\{c,d\}\rangle = \langle a,c\rangle + \langle b,d\rangle \,.$$

On a

$$\begin{array}{rcc} (y,z) \in G(T^*) & \Longleftrightarrow & \langle Tx,y\rangle = \langle x,z\rangle \text{, pour tout } x \in D(T) \\ & \Longleftrightarrow & \langle (-Tx,x),(y,z)\rangle = 0,\ \forall x \in D(T) \\ & \Longleftrightarrow & \langle J(x,Tx),(y,z)\rangle = 0,\ \forall x \in D(T) \\ & \Longleftrightarrow & (y,z) \in [JG(T)]^{\perp}. \end{array}$$

Chapitre 2

Opérateur de multiplication à image fermée

Dans ce chapitre, (X,S,λ) désigne un espace mesuré.

2.1 Définitions et Propriétés spectrales

Définition 2.1.1 (Opérateur de multiplication) *Soit θ une fonction mesurable sur X. L'opérateur de multiplication par θ noté M_θ est défini par :*

$$D(M_\theta) = \{f \in L^2(X) : \theta f \in L^2\} \qquad \forall f \in D(M_\theta) \;\; M_\theta f = \theta f.$$

Remarquons que l'espace $D(M_\theta)$ est bien un sous -espace vectoriel de $L^2(X)$ et M_θ est un opérateur sur $L^2(X)$.

2.1.1 Propriétés spectrales de l'opérateur de multiplication

Proposition 2.1.1 *M_θ est densément défini.*

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$Y_n = \{x \in X : |\theta(x)| \leq n\}.$$

On a $Y_n \subset Y_{n+1}$ et $\bigcup_{n=1}^{+\infty} Y_n = X$. Posons pour $f \in L^2(X)$ $f_n = 1_{Y_n} f \in D(M_\theta)$ et on a $f_n \to f$ par le théorème de convergence dominée. On conclut bien que $D(M_\theta)$ est dense dans $L^2(X)$.

Proposition 2.1.2 *M_θ est borné si, et seulement si, θ est essentiellement bornée(c'est-à-dire $\theta \in L^\infty$) et dans ce cas $\|M_\theta\| = \|\theta\|_\infty$.*

Preuve

Supposons que θ est essentiellement bornée. Soit $C \in \mathbb{R}$ telle que $|\theta(x)| \leq C$ pp. On a

$$\begin{aligned}\|M_\theta f\|^2 &= \|\theta f\|^2 \\ &= \int_X |\theta(x)|^2 |f(x)|^2 \, dx \\ &\leq \|\theta\|^2 \|f\|^2 \\ &\leq C^2 \|f\|^2 .\end{aligned}$$

Donc M_θ est borné et

$$\|M_\theta\| \leq C.$$

Si $C = 0$ alors

$$\|M_\theta\| = 0.$$

Si $C > 0$. Soit $\varepsilon \in]0,C[$, on pose

$$Y_\epsilon = \{x \in X : |\theta(x)| \geq C - \epsilon\}$$

ensemble de mesure non nulle, donc pour $f \in L^2(\lambda)$ s'annulant hors de Y_ϵ on a

$$\|M_\theta f\|^2 \geq (C - \epsilon)^2 \|f\|^2$$

donc $\|M_\theta\| = \|\theta\|_\infty$.
Réciproquement, si θ n'est pas essentiellement bornée, posons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = \{x \in X : |\theta(x)| \geq n\}$$

ensemble de mesure non nulle. Pour $f \in D(M_\theta)$ s'annulant hors de Y_n on a

$$\|M_\theta f\| \geq n \|f\| .$$

Donc M_θ n'est pas borné.

Proposition 2.1.3 *M_θ^* est l'opérateur de multiplication par θ^* :$x \to \theta(x)^*$ et on a*

$$D(M_\theta^*) = D(M_\theta).$$

Preuve

Remarquons tout d'abord que la proposition(2.1.1) nous permet de définir M_θ^*. De plus il, clair que $D(M_\theta)$ est aussi le domaine de l'opérateur de multiplication par θ^*. On a pour tout $(f,g) \in D(M_\theta)^2$

$$\begin{aligned} \langle M_\theta f, g\rangle &= \int_X \theta(x) f(x) g(x)^* dx \\ &= \int_X (\theta(x)^* g(x))^* f(x) dx \\ &= \langle f, M_\theta^* g\rangle . \end{aligned}$$

L'opérateur de multiplication par θ^* est ainsi un adjoint formel de M_θ. On en déduit $D(M_\theta) \subset D(M_\theta^*)$. Il reste donc à montrer que pour $g \in D(M_\theta^*)$ on a $M_\theta^* g \in L^2(X)$.

Soit $g \in D(M_\theta^*)$. Pour $f \in D(M_\theta)$ on a

$$\begin{aligned} \langle f, M_\theta^* g\rangle &= \langle M_\theta f, g\rangle \\ &= \int_X \theta(x) f(x) g(x)^* dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall f \in D(M_\theta) \qquad \int_X (M_\theta^* g(x) - g(x)\theta(x)^*) f(x) dx \quad = 0.$$

Donc la fonction $x \to M_\theta^* g(x) - g(x)\theta(x)^*$ est orthogonale à $D(M_\theta)$ qui est dense d'après la proposition (2.1.1). Donc pour tout $g \in D(M_\theta^*)$ on a

$$M_\theta^* g(x) = \theta(x)^* g(x) \ pp.$$

En particulier $\theta^* g \in L^2(X)$ et donc $D(M_\theta^*) \subset D(M_\theta)$ car $D(M_\theta)$ est le domaine de θ^*.

Proposition 2.1.4 *M_θ est un opérateur fermé.*

Preuve

M_{θ^*} est l'adjoint de l'opérateur de multiplication par θ^*. Donc d'après la proposition(1.5.1), M_θ est fermé.

Proposition 2.1.5 *On a*

$$\sigma_p(M_\theta) = \{z \in \mathbb{C} : \theta^{-1}(z) \ \textit{est de mesure positive}\}.$$

Preuve

$z - M_\theta$ est l'opérateur de multiplication par $z - \theta$. Donc $z \in \sigma_p(M_\theta)$ si, et seulement si, $z - M_\theta$ n'est pas injectif si, et seulement s'il existe $f \in L^2(X)$ tel que

$$(z - \theta)f = 0 \text{ où } f \neq 0.$$

Ceci est vrai si, et seulement si,

$$\{x \in X : \theta(x) \neq z\}$$

est de mesure strictement positive.

Proposition 2.1.6 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i *$R(M_\theta)$ est dense.*

ii *$\theta(x) \neq 0$ pp.*

iii *M_θ est injectif.*

Dans ce cas, M_θ^{-1} est l'opérateur de multiplication défini par la fonction

$$\theta_1(x) = \begin{cases} \theta(x)^{-1} & \text{si } \theta(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \theta(x) = 0. \end{cases}$$

Preuve

– $i) \Longrightarrow ii$

Soit $f \in L^2(X)$ telle que f s'annule hors de

$$Y_1 = \{x \in X : \theta(x) = 0\}.$$

Alors

$$f \in R(M_\theta)^\perp = \{0\}$$

par hypothèse.

Donc

$$L^2(Y_1) = \{0\}$$

est de mesure nulle.

– $ii) \Longrightarrow i)$

Soit

$$Y_n = \{x \in X : |\theta(x)| \geq \frac{1}{n}\}.$$

On a $Y_n \subset Y_{n+1}$ et $X - \bigcup_{n=1}^{+\infty} Y_n$ est de mesure nulle. Soit $g \in L^2(X)$ et posons

$$g_n = 1_{Y_n} g \in R(M_\theta).$$

On a $\|g_n - g\|_2 \to 0$ d'après le théorème de la convergence dominée. Donc $R(M_\theta)$ est dense.

– *ii)* $\Longrightarrow$ *iii)*

Si $M_\theta f = 0$, alors

$$\theta(x)f(x) = 0 \text{ pp.}$$

Donc

$$f = 0 \text{ pp}$$

– *iii)* $\Longrightarrow$ *ii)*

Soit

$$Y_1 = \{x \in X : \theta(x) = 0\}.$$

Soit $f \in L^2(X)$ s'annulant hors de Y_1. On a $M_\theta f = 0$, donc $f = 0$. Donc Y_1 est de mesure nulle.

Si une de ces propriétés est satisfaite alors M_θ est injectif et $\theta(x) \neq 0$ pp

$$D(M_\theta^{-1}) = R(M_\theta) = \{g \in L^2(X) : \exists\ f \in L^2(X)\ : g = \theta f\} = \{g \in L^2(X) :\ \theta_1 g \in L^2(X)\}$$

et pour tout $g \in D(M_\theta^{-1})$, il existe $f \in L^2(X)$ telle que $g = \theta f$. On a donc

$$M_\theta^{-1} g = f = \theta_1 g.$$

2.2 Caractérisation de l'opérateur de multiplication à image fermée

On établit dans cette partie le résultat caractérisant la fermeture de l'image de l'opérateur de multiplication borné sur $L^2(X,S,\lambda)$. Mais avant, on a besoin du lemme suivant qui sera utilisé pour la démonstration.

Lemme 2.2.1 *([6]-[5])Soit $A \in B(H)$. A est à image fermé si, et seulement si, il est borné loin de son ensemble d'annulation sur $(N(A))^{\perp}$.*

Définition 2.2.1 *Une fonction f est dite bornée loin de son ensemble d'annulation sur un ensemble E s'il existe un nombre C strictement positif tel que*

$$|f(x)| \geq c, \text{ pour tout } x \text{ dans } E.$$

Définition 2.2.2 *un opérateur est dit borné loin de son ensemble d'annulation sur un ensemble E s'il existe un nombre C strictement positif tel que*

$$\|Af\| \geq c, \text{ pour tout } f \text{ dans } E.$$

Théorème 2.2.1 *Soit $M_\theta \in B(L^2(\lambda))$. Alors M_θ est à image fermé si, et seulement si, θ est bornée loin de son ensemble d'annulation sur Z^θ.*

Preuve

Soit l'ensemble d'annulation de θ

$$X_1 = \{x \in X\,;\,\theta(x) = 0\},$$

on pose

$$Z^\theta = X \backslash \{x \in X\,;\,\theta(x) = 0\} = X_2\ .$$

1)On suppose que θ est bornée loin de son ensemble d'annulation sur Z^θ et on montre que l'image de l'opérateur M_θ est fermé.

$1^{ère}$ *étape* : On décompose $L^2(X)$ en somme directe comme suit :

$$L^2(X, S, \lambda) = L^2(X_1, S_1, \lambda) \oplus L^2(X_2, S_2, \lambda) \tag{2.2.1}$$

où $S_1 = S \cap X_1$, $S_2 = S \cap X_2$

on a

$$N(M_\theta) = L^2(X_1, S_1, \lambda)$$

et

$$(N(M_\theta))^{\perp} = L^2(X_2, S_2, \lambda)$$

en effet, on montre que $N(M_\theta) = L^2(X_1,S_1,\lambda)$

soit $f \in L^2(X_1,S_1,\lambda)$ alors $\theta(x)f(x) = 0$ pour tout $x \in X_1$ ainsi $f \in N(M_\theta)$

donc $L^2(X_1,S_1,\lambda) \subset N(M_\theta)$.

On montre l'autre inclusion, pour cela considérons $f \in L^2(X,S,\lambda)$ alors f s'écrit de manière unique sous la forme $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in L^2(X_1,S_1,\lambda)$ et $f_2 \in L^2(X_2,S_2,\lambda)$ d'après(2.2.1).

Si $f \in N(M_\theta)$ alors $\theta f = 0_{L^2}$ i.e, $\theta(f_1 + f_2) = 0_{L^2}$ d'où $\theta(x)f_1(x) + \theta(x)f_2(x) = 0$ $\forall x \in X$ or $\theta f_1 = 0$ car $f_1 \in L^2(X_1, S_1, \lambda)$ donc $\theta f_2 = 0_{L^2}$ et comme $\theta(x) \neq 0$ sur X_2 alors

$$f_2 = 0_{L^2}$$

on obtient alors $f = f_1$ et donc $f \in L^2(X_1,S_1,\lambda)$ d'où $N(M_\theta) \subset L^2(X_1,S_1,\lambda)$.

Conclusion $L^2(X_1,S_1,\lambda) = N(M_\theta)$.

(2.2.1) Devient

$$L^2(X,S,\lambda) = N(M_\theta) \oplus (N(M_\theta))^\perp$$

donc

$$(N(M_\theta))^\perp = L^2(X_2,S_2,\lambda).$$

2^{emme} *étape* : On montre maintenant que M_θ est inversible sur $L^2(X_2,S_2,\lambda) = (N(M_\theta))^\perp$ étant donné que

$$L^2(X,S,\lambda) = N(M_\theta) \oplus (N(M_\theta))^\perp$$

on obtient alors pour tout $f \in L^2(X,S,\lambda)$, $M_\theta f = \theta f = \theta f_2 = M_\theta f_2$

avec $f_2 \in L^2(X_2,S_2,\lambda)$ i.e, l'image de M_θ est égale à l'image de sa restriction sur $L^2(X_2,S_2,\lambda)$ et on écrit

$$R(M_\theta) = R(M_\theta\backslash_{L^2(X_2,S_2,\lambda)})$$

examinons alors la restriction de M_θ sur $L^2(X_2,S_2,\lambda)$

$$M_\theta\backslash_{L^2(X_2,S_2,\lambda)} : L^2(X_2,S_2,\lambda) \to R(M_\theta)$$

C'est un opérateur bijectif, en effet

$i)$ Il est injectif car

si g_1, $g_2 \in L^2(X_2,S_2,\lambda)$ tel que $\theta\ g_1 = \theta\ g_2$ alors

$$\theta(x)(g_1(x) - g_2(x)) = 0 \quad \forall x \in X_2$$

or $\theta(x) \neq 0$ donc $g_1(x) = g_2(x)$

$ii)$Il est surjectif par construction.

Il reste à montrer que l'inverse de M_θ est borné sur $L^2(X_2,S_2,\lambda)$.

Comme $(M_\theta)^{-1} = M_{\frac{1}{\theta}}$, $(\forall x \in X_2\ \theta(x) \neq 0\ )$ et θ est borné alors $\frac{1}{\theta} \in L^\infty$. On conclut que M_θ est inversible sur $L^2(X_2,S_2,\lambda) = (N(M_\theta))^\perp$

3^{emme}*étape* : Finalement on montre que $R(M_\theta) = (N(M_\theta))^\perp = \overline{R(M_\theta)}$

On utilise la formule connue pour un opérateur A borné ou fermé de domaine $D(A)$, à savoir

$$\begin{aligned} N(A^*) &= R(A)^\perp \\ N(A) &= R(A^*)^\perp \end{aligned}$$

Donc $N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}$ et aussi $N(A)^\perp = \overline{R(A^*)}$. Dans notre cas $N(M_\theta) = N(M_\theta^*) = N(M_{\overline{\theta}}^*) = \{0\}$. Ainsi $R(A)$ est dense dans $L^2(X_2,S_2,\lambda)$.

D'autre part, si θ est bornée loin de de son ensemble d'annulation, on a

$$\|M_\theta f\| \geq c\,\|f\|\,, \forall f \in L^2(X_2,S_2,\lambda)$$

ce qui assure que $R(M_\theta)$ est fermé dans $L^2(X_2,S_2,\lambda)$. En fait, il s'agit d'un résultat assez général très connu qui dit que si A est semi-borné inférieurement, $\|Ax\| \geq c\,\|x\|$, $\forall x \in D(A)$, alors il est à image fermé [2] Par conséquent, $R(M_\theta) = L^2(X_2,S_2,\lambda) = (N(M_\theta)^\perp$.

2) On suppose que l'image de l'opérateur M_θ est fermé et on montre que θ est bornée loin de son ensemble d'annulation sur Z^θ.

Comme X est $\sigma-$fini nous pouvons écrire $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$, où $\lambda(Y_i) < \infty$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

On suppose θ non bornée loin de son ensemble d'annulation sur $Z^\theta = X_2$ i.e,

$$\forall c > 0, \exists\ x \in Z^\theta \text{ tel que } |\theta(x)| < c$$

on définit l'ensemble des éléments pour lequel θ n'est pas bornée, par

$$E_j = \{x : x \in X_2 \text{ et } |\theta(x)| \leq \frac{1}{j}\}$$

soit $F_{j_i} = Y_i \cap E_j$. Maintenant on définit g_j par

$$\begin{aligned} g_j &= \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n}) \chi_{F_{j_n}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n}) \chi_{Y_n \cap E_j} \end{aligned}$$

on a

$$(\frac{1}{n})\chi_{Y_n\cap E_j}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x \in Y_n \cap E_j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

or $|\theta(x)| < \frac{1}{j}$, $\forall x \in X_2$, donc

$$\begin{aligned} |M_\theta g_j(x)| &= |\theta(x) g_j(x)|, \, x \in Yn \cap E_j \\ &< \frac{1}{j}|g_j(x)| \end{aligned}$$

en passant à la norme sur L^2, on obtient

$$\begin{aligned} \|M_\theta g_j\|^2_{L^2} &= \int_X |M_\theta g_j(x)|^2 \, dx \\ &\leq \left(\frac{1}{j}\right)^2 \int_X |g_j(x)|^2 \, dx \\ &\leq \left(\frac{1}{j}\right)^2 \|g_j\|^2_{L^2} \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\frac{\|M_\theta g_j\|_{L^2}}{\|g_j\|_{L^2}} < \frac{1}{j}.$$

Donc M_θ n'est pas borné inférieurement sur $(N(M_\theta)^\perp$, et par le lemme (2.2.1), M_θ n'est pas à image fermée.

On donne un résultat conséquence du théorème (2.2.1).

Théorème 2.2.2 *Soit $A \in B(\mathcal{H})$ et normal. Alors A est à image fermé si, et seulement si, A^n est à image fermé, pour un certain $n \in \mathbb{N}$.*

Preuve

Considérons $A \in B(\mathcal{H})$ un opérateur normal, par le théorème spectral A est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication M_θ donc A^n est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication M_{θ^n} aussi.

$\Longleftarrow$) On suppose que pour certains $n \in \mathbb{N}$, l'opérateur A^n est à image fermé alors M_{θ^n} est à image fermé, d'où d'après le théorème (2.2.1), θ^n est bornée loin de son ensemble d'annulation sur Z^{θ^n} i.e, pour un certain $n \in \mathbb{N}$

$$\exists c > 0 \text{ tel que } |\theta^n(x)| \geq c \text{ pour tout } x \in Z^{\theta^n} \tag{2.2.2}$$

avec $Z^{\theta^n} = \{x \in X \ / \ \theta^n(x) \neq 0\}$

On va montrer maintenant que M_θ est à image fermé, à cet effet on montre que θ est borné loin de son ensemble d'annulation sur Z^θ.

Prenons $x \in Z^\theta$ alors

$$\theta(x) \neq 0 \Longrightarrow \theta^n(x) \neq 0 \text{ pour un certain } n \in \mathbb{N}$$

d'où $Z^\theta \subset Z^{\theta^n}$ et ainsi d'après (2.2.2)

$$|\theta^n(x)| \geq c, \forall x \in Z^\theta$$

or

$$|\theta^n(x)| = |\theta(x)|^n \geq c \Longrightarrow |\theta(x)| \geq \sqrt[n]{c}.$$

Ainsi $\exists \ k = \sqrt[n]{c} > 0$ tel que

$$|\theta(x)| \geq k \ \forall x \in Z^\theta$$

on déduit alors que θ est bornée loin de son ensemble d'annulation et par le théorème(2.2.1) M_θ est à image fermé et donc A est à image fermé.

$\Longrightarrow$) On suppose que A est à image fermé alors M_θ est à image fermé, d'où θ est borné loin de son ensemble d'annulation sur Z^θ i.e,

$$\exists \ c > 0 \text{ tel que } \ |\theta(x)| \geq c \text{ pour tout } x \in Z^\theta \tag{2.2.3}$$

On va montrer maintenant que M_{θ^n} est à image fermé, à cet effet on montre que θ^n est borné loin de son ensemble d'annulation sur Z^{θ^n} et ceci en démontrant par récurrence sur n qu'il existe $k > 0$ telle que

$$|\theta^n(x)| \geq k, \text{ pour tout } x \in Z^{\theta^n} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On pose pour tout $x \in Z^{\theta^n}$, la propriété P_n suivante

$$|\theta^n(x)| \geq c, \ \forall n \in \mathbb{N} \qquad\qquad (P_n)$$

on a pour $n = 1$, $|\theta(x)| \geq c$ est d'après (2.2.3) donc P_1 est vérifiée avec $k = c$

supposons que P_n est vérifiée et on montre que P_{n+1} est vérifiée aussi. On a

$$\begin{aligned} \left|\theta^{n+1}(x)\right| &= |(\theta^n\theta)(x)| \\ &= |\theta^n(x)\theta(x)| \\ &= |\theta^n(x)|\,|\theta(x)| \\ &\geq kc \end{aligned}$$

$\exists\ k' = kc$ tel que

$$\left|\theta^{n+1}(x)\right| \geq k'$$

donc (P_{n+1}) est vérifiée

Donc $\theta^n(x)$ est borné loin de son ensemble d'annulation sur Z^{θ^n} alors d'après le théorème (2.2.1) M_{θ^n} est à image fermé on conclut alors que A^n est à image fermé.

Exemple 2.2.1 *Soit $l^2(\mathbb{N})$ l'espace de Hilbert des suites de nombres complexes à carré sommable*

on considère l'opérateur de multiplication M_θ sur $l^2(\mathbb{N})$ induit par la fonction θ définie par :

$$\theta(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; n = 1 \text{et } n = 2 \\ \frac{1}{n} & \text{si } n = 3,4... \end{cases}$$

alors l'image de M_θ est composée de toutes les suites $(\delta_1,\delta_2,\delta_2,...\,)$ vérifiant $\sum_{n=3}^{\infty} n^2 \left|\delta_n\right|^2 < \infty$ et il est dense dans $l^2(\mathbb{N}_2)$ où

$$l^2(\mathbb{N}_2) = \{\{x_n\}/\ x_1 = x_2 = 0 \text{ et } \sum_{n=3}^{\infty} \left|x_n\right|^2 < \infty\ \}$$

étant donné que $R(M_\theta)$ ne contient pas la suite $\{\ 0,0,\frac{1}{3},\frac{1}{4},.....\}$ alors il n'est pas fermé.

CONCLUSION

L'étude des opérateurs de multiplication a une longue histoire. On peut apprendre des livres d'analyse fonctionnelle, plusieurs propriétés de ces opérateurs sur différents espaces fonctionnels incluant les espaces L^p $1 \leq p < \infty$ notamment la propriété de la fermeture de l'image. On s'est intéressé à cette propriété pour ce type d'opérateurs sur l'espace L^2, plus précisément à caractériser ces opérateurs à image fermé par une des méthodes employées à cet effet.

Bibliographie

[1] R. Bouldin, The product of operators with closed rang,Tohku math.Journ.25(1973)359-363.

[2] I. Chalenda, Analyse Fonctionnelle et Théorie des Opérateurs ; Cour de Master Chap 4.Math. Univ. Lyon.fr

[3] B.Graille-M.Lewin. Introduction à La Théorie Spectrale Des Opérateurs De Schördinger. Sous la Direction de Georgescu, Université de Cergy-Pontoise.

[4] T.Gallouet-R.Herbin, Mesure, Integration, Probabilites, Cours de Master, February 19, 2009.

[5] Paul R. Halmos, A Hilbert space problem book (Van Nostrand, Princeton, New Jersey ; Toronto ; London ; 19-67).

[6] R. Singh - A. Kumar. Multiplication Operators and Composition Operators with Closed Ranges. BULL. AUSTRAL. MATH. SOC, VOL. 16 (1977), 247-252.

[7] T.Kato. Perturbation Theory for Linear Operators R Eprind of the 1980 Edition.

[8] R.K.Singh, "Normal and Hermitian Composition Operators", Proa.Amer. Math.Soc. 47 (1975),348-350.

[9] K.Yosida,Functional Analysis, Second Edition (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 123. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968).