Table des matières

~~~~~~~~~~~~~~~~

Introduction

~~~~~~~~~~~~~~~~

Dans ce travail on étudie la régularité maximale dans un espace d'interpolation pour la somme de trois opérateurs linéaires fermés sur un espace de Banach et on applique le résultat abstrait pour obtenir une Besov (ou Hölder) régularité maximale pour le problème de Cauchy pour une équation complète du second ordre sous des hypothèses naturelles de parabolicité.

Les résultats proviennent de l'article de **C.J.K. Batty, R. Chill** et **S. Srivastava,** intitulé : "**Maximal regularity in interpolation spaces for second order Cauchy problems**", arXiv 2014 [2] .

On s'intéresse aussi aux applications aux équations à dérivées partielles.

On étudie le résultat de la régularité maximale dans certains espaces d'interpolation pour le problème de Cauchy du second ordre :

$$\begin{cases} u'' + Bu' + Au = f & [0,T] \\ u(0) = u_0 & \\ u'(0) = u_1 & \end{cases} \tag{0.0.1}$$

tel que A et B sont deux opérateurs linéaires fermés dans un espace de Banach complexe X avec D_A et D_B les domaines de A et B respectivement.

Le résultat de la régularité maximale : Pour chaque $f \in E \subseteq L^1(0,T;X)$ et des valeurs initiales homogènes $u_0 = u_1 = 0$, le problème (0.0.1) admet une unique solution u vérifiant $u'', Bu', Au \in E$. En particulier, les trois termes sur le côté gauche de (0.0.1) ont la même régularité que le second membre donné.

Le résultat de la régularité maximale du problème de Cauchy du second ordre généralise naturellement la notion de la régularité maximale pour le problème de Cauchy du premier ordre :

$$\begin{cases} u' + Au = f & [0, T] \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{0.0.2}$$

En particulier, **Da Prato-Grisvard** montrent que si A, D sont deux opérateurs sectoriels avec des domaines respectivement D_A et D_D et des angles φ_A et φ_D et si $\varphi_A + \varphi_D < \pi$, alors pour chaque x dans l'espace d'interpolation réel entre X et D_D (ou D_A) il existe une unique solution y pour $Ay + Dy = x$ sur l'espace $D_A \cap D_D$ avec Ay et Dy dans le même espace d'interpolation.

Ce résultat est appliqué pour le problème (0.0.2) où D est l'opérateur différentiel. Les espaces d'interpolation réels incluent des espaces de Besov et des espaces de Hölder, alors on obtient une Besov ou Hölder régularité maximale.

D'une manière analogue, la régularité maximale pour la somme de trois opérateurs correspond à la définition de la régularité maximale pour le problème (0.0.1).

Ce mémoire est composé d' une introduction et de cinq chapitres. Dans **le premier chapitre**, on donne des rappels sur quelques notions utiles. Au **deuxième chapitre** un résultat abstrait concernant la régularité maximale pour une somme de trois opérateurs linéaires fermés est prouvé. Comme application on obtient un résultat de régularité maximale pour le problème de Cauchy du second ordre dans **le troisième chapitre**. **Le quatrième chapitre** est consacré au problème de la valeure initiale. Dans **le dernier chapitre** on cite quelques examples concrets pour les applications.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Les opérateurs

Définition 1.1.1 *Soient E, F deux espaces vectoriels normés. Un opérateur linéaire borné* de E dans F est une application linéaire continue

$$T : E \to F$$

tel que

$$\exists c > 0, \forall u \in E : \|Tu\|_F \leq c \|u\|_E .$$

Notation On désigne par $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de E dans F. Lorsque $E = F$, on notera $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

$\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur lequel on introduit la norme :

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{u \in E/\{0\}} \frac{\|Tu\|_F}{\|u\|_E} = \sup_{\|u\|_E = 1} \|Tu\|_F .$$

Théorème 1.1.1 *Si T est un opérateur linéaire borné dans un espace E ayant pour domaine* D_T, il existe un opérateur $\hat{T}$ linéaire borné dont le domaine est E tout entier et on a

$$\forall x \in D_T : \hat{T}x = Tx \qquad \text{et} \qquad \left\|\hat{T}\right\| = \|T\| .$$

On appele $\hat{T}$ extension de T (ou prolongement).

Théorème 1.1.2 *Soit T un opérateur linéaire borné sur un espace E, il existe un opérateur* linéaire borné T^* et un seul, appelé adjoint de T, tel que

$$\forall x, y \in E : \langle y, Tx \rangle = \langle T^* y, x \rangle .$$

T et T^* ont même norme.

* On dit que T est auto-adjoint s'il est identique à son adjoint ($T = T^*$).

Définition 1.1.2 *Un opérateur T est dit fermé si pour toute suite convergente (x_n)* d'éléments de D_T telle que la suite (Tx_n) soit convergente, on a

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in D_T \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx.$$

Définition 1.1.3 *Le graphe G_T d'un opérateur T étant l'ensemble des couples (x, Tx) où* $x \in D_T$. T est fermé si son graphe est fermé.

* Si T n'est pas fermé mais si la fermeture (c'est- à- dire l'adhérence $\bar{G}_T$) de son graphe est le graphe d'un opérateur $\bar{T}$ on dit que T est fermable et que $\bar{T}$, qui est la plus petite extension fermée de T, est la fermeture de T.

Théorème 1.1.3 (graphe fermé) *Soient E et F deux espaces de Banach, soit T un* opérateur linéaire de E dans F. On suppose que le graphe de T, G_T est fermé dans $E \times F$, alors T est continu.

Définition 1.1.4 *Soit T un opérateur linéaire définit dans un espace E. On étudie les* proprietés de l'opérateur $(\lambda I - T)$ où λ est un nombre complexe quelconque et I l'opérateur identité. L'inverse de $(\lambda I - T)$, quand il existe, est appelé opérateur résolvant ou résolvante de T. On le note $R_\lambda(T)$.

Définition 1.1.5 *On appelle ensemble résolvant de l'opérateur linéaire T,et on le note $\varrho(T)$, tel que*

$$\varrho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ (\lambda I - T) \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(E)\}.$$

Définition 1.1.6 *On dit que T est un opérateur non-négatif si $]-\infty, 0[$ est inclus dans son* ensemble résolvant $\varrho(T)$.

Définition 1.1.7 *On appelle spectre de T, et on le note $\sigma(T)$, le complémentaire de $\varrho(T)$.*

Définition 1.1.8 *On dit qu'un opérateur A commute avec un opérateur B inversible si* $AB \subseteq BA$, ou d'une manière équivalente si $B^{-1}A \subseteq AB^{-1}$.

1.2 C$_0$–semi groupe

Définition 1.2.1 *On appelle C_0- semi groupe une application*

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E) \\ t \mapsto G(t) \end{cases}$$

tel que

a- $G(0) = I$

b- $G(t+s) = G(t)G(s) \qquad \forall t, s \geq 0.$

c- $\forall \varphi \in E$ l'application

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+ \to E \\ t \mapsto G(t)\varphi \end{cases}$$

est fortement continue en 0.

i.e : $\forall \varphi \in E$, $\lim\limits_{t \to 0} \|G(t)\varphi - \varphi_E\| = 0.$

1.3 Semi groupe analytique

Définition 1.3.1 *Soit*

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2 \text{ et } \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}.$$

La famille $\{G(z)\}_{z\in D} \subset P(X)$ constitue un semi-groupe holomorphe dans Δ si

1. $z \mapsto G(z)$ est analytique dans Δ.

2. $G(0) = I$ et $\lim\limits_{z\to 0} G(z)x = x, \forall x \in X, z \in \Delta$.

3. $G(z_1 + z_2) = G(z_1) G(z_2)$ pour $z_1, z_2 \in \Delta$.

Tout semi-groupe $G(T)$, $T > 0$, qui se prolonge sur Δ, en un semi-groupe holomorphe est dit analytique.

1.4 Espace d'interpolation

Définition 1.4.1 *Soit X un espace de Banach, on désigne par $L_*^P(\mathbb{R}_+, X)$ tel que* $1 \leq p < \infty$, l'espace des fonctions f définies pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$ à valeur dans X telles que :

$$\left(\int_0^\infty \|f(t)\|_X^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_*^P(\mathbb{R}_+,X)} < \infty.$$

Si $p = \infty$, on définit l'espace $L_*^\infty(\mathbb{R}_+, X)$ par :

$$f \in L_*^\infty(\mathbb{R}_+, X) \Leftrightarrow \begin{cases} *f \text{ fortement mesurable} \\ *\operatorname{supess} \|f(t)\|_X < \infty \end{cases}$$

Définition 1.4.2 *Soient $X_{0,} X_1$ deux espaces de Banach s'injectant continuement dans un* espace topologique séparé F. Les espaces $(X_0 \cap X_1)$ et $(X_0 + X_1)$ munis des normes suivantes :

$$\left\{ \|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max_{x \in X_0 \cap X_1} \left(\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1} \right) \qquad x \in X_0 \cap X_1 \right.$$

$$\left\{ \|x\|_{X_0 + X_1} = \max_{\substack{x = x_0 + x_1 \\ x \in X_0 + X_1}} \left(\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} \right) \qquad x \in X_0 + X_1 \right.$$

sont des espaces de Banach.

* On définit l'espace d'interpolation entre X_0 et X_1 noté $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ tels que pour $\theta \in [0,1]$ et $p \in [1, \infty]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t > 0, \exists u_0(t) \in X_0, \exists u_1(t) \in X_1 : x = u_0(t) + u_1(t) \\ t^{-\theta} u_0 \in L_*^P(\mathbb{R}_+, X), t^{1-\theta} u_1 \in L_*^P(\mathbb{R}_+, X) \end{array} \right.$$

1.5 Quelques définitions et outils

Soit X un espace de Banach complexe, soit (D, D_D) un opérateur linéaire fermé dans X, $\theta \in (0,1)$, $1 \leq p \leq \infty$. On note

$$\begin{array}{rcl} D_D(\theta, p) & : & = (X, D_D)_{\theta,p} \\ D_D(\theta) & : & = (X, D_D)_{\theta} \end{array}$$

espace d'interpolation réel entre X et D_D tel que $D_D(\theta)$ est un sous espace fermé de

$D_D(\theta, \infty)$.

L'operateur D est dit sectoriel pour l'angle $\varphi \in (0, \pi)$ si

$$\sigma(D) \subseteq \Sigma_\varphi := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| \leq \varphi\} \cup \{0\}$$

et pour chaque $\varphi' \in (\varphi, \pi)$ on a

$$\sup_{\lambda \notin \Sigma_{\varphi'}} \|\lambda R(\lambda, D)\| < \infty.$$

Pour D un opérateur sectoriel et $\theta \in (0,1)$ et $1 \leq p \leq \infty$ on a l'équivalence suivante

$$\begin{aligned} D_D(\theta, p) &= \left\{x \in X : \left\|t^\theta D(t+D)^{-1} x\right\| \in L_*^p(0,\infty)\right\} \\ D_D(\theta) &= \left\{x \in D_D(\theta,\infty) : \lim_{t\to\infty} t^\theta D(t+D)^{-1} x = 0\right\} \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

et

$$\|x\|_{\theta,p} = \|x\| + \left\|t^\theta D(t+D)^{-1} x\right\|_{L_*^p(0,\infty)}.$$

Example 1

Soit X un espace de Banach complexe, on fixe $1 \leq p < \infty$. Si $D_{\max}$ est un opérateur différentiel dans $L^p(0,T;X)$ avec domaine maximal et soit

$$\begin{cases} D_{D\max} = W^{1,p}(0,T;X) \\ D_{\max} u = u' \end{cases}$$

alors, on a

$$D_{D\max}(\theta, p) = B_{pq}^\theta(0,T;X) \qquad \theta \in (0,1), 1 \leq q < \infty$$

et en particulier,

$$D_{D\max}(\theta, p) = W^{\theta,p}(0,T;X) \qquad \theta \in (0,1)$$

tel que

$$B_{pq}^\theta(0,T;X) = \left\{u \in L^p(0,T;X) : \int_0^T \left(\int_0^T \frac{\|u(t)-u(s)\|^p}{|t-s|^{\theta p}} ds\right)^{\frac{q}{p}} dt < \infty\right\}$$

et

$$W^{\theta,p}\left(0,T;X\right)=\left\{u\in L^{p}\left(0,T;X\right):\int_{0}^{T}\int_{0}^{T}\frac{\left\Vert u\left(t\right)-u\left(s\right)\right\Vert^{p}}{\left\vert t-s\right\vert^{\theta p}}dsdt<\infty\right\}.$$

Si D est la restriction de $D_{\max}$ sur $L^{p}\left(0,T;X\right)$ du domaine

$$D_{D}=\overset{\circ}{W}^{1,p}\left(0,T;X\right)=\left\{u\in W^{1,p}\left(0,T;X\right),u\left(0\right)=0\right\}$$

donc

$$D_{D}\left(\theta,q\right)=\begin{cases}\overset{\circ}{B}_{pq}^{\theta}\left(0,T;X\right) & \text{si }\theta\geq\frac{1}{p}\\ B_{pq}^{\theta}\left(0,T;X\right) & \text{si }\theta<\frac{1}{p}\end{cases}$$

$\overset{\circ}{B}_{pq}$ est l'espace de toutes les fonctions $u\in B_{pq}$ avec des traces $u\left(0\right)=0$. Noter que la trace est bien définie pour $\theta\geq\frac{1}{p}$, puis que l'espace de Besov B_{pq}^{s} est inclus dans l'espace de fonctions continues. D'autre part

$$D_{D_{\max}}\left(\theta,q\right)=D_{D}\left(\theta,q\right)\qquad\forall\theta<\frac{1}{p}.$$

On a D est un opérateur sectoriel d'angle $\frac{\pi}{2}$ alors que $D_{\max}$ n'est pas sectoriel (car $\sigma\left(D_{\max}\right)=\mathbb{C}$).

Example 2

$D_{\max}$ est un opérateur difféについては dans $C\left(\left[0,T\right];X\right)$ avec domaine maximal

$$\begin{cases}D_{D\max}=C^{1}\left(\left[0,T\right];X\right)\\ D_{\max}u=u'\end{cases}$$

donc

$$\begin{cases}D_{D\max}\left(\theta,\infty\right)=C^{\theta}\left(\left[0,T\right];X\right)\\ D_{D\max}\left(\theta\right)=h^{\theta}\left(\left[0,T\right];X\right)\end{cases}$$

tel que C^{θ} et h^{θ} sont les espaces de Hölder et petit Hölder tel que

$$C^{\theta}([0,T];X)=\left\{u\in C([0,T];X):\sup\frac{\|u(t)-u(s)\|}{|t-s|^{\theta}}<\infty\right\}$$

et

$$h^{\theta}([0,T];X)=\left\{u\in C^{\theta}([0,T];X):\lim_{|t-s|\to 0}\frac{\|u(t)-u(s)\|}{|t-s|^{\theta}}=0\right\}.$$

Si D est la restriction de $D_{\max}$ alors

$$D_D=\mathring{C}^1([0,T];X)=\left\{u\in C^1([0,T];X),u(0)=0\right\}$$

donc

$$\begin{array}{rcl} D_D(\theta,\infty) & = & \mathring{C}^{\theta}([0,T];X) \\ D_D(\theta) & = & \mathring{h}^{\theta}([0,T];X) \end{array}$$

$\mathring{C}^1$ est l'espace de toutes les fonctions $u\in C^1$ avec des traces $u(0)=0$.

On a D est un opérateur sectoriel d'angle $\frac{\pi}{2}$ alors que $D_{\max}$ n'est pas sectoriel (car $\sigma(D_{\max})=\mathbb{C}$).

Définition 1.5.1 *L'espace H^{∞} sur Σ_{φ} est défini par*

$$H^{\infty}(\Sigma_{\varphi})=\{f \text{ est holomorphe dans le secteur } \Sigma_{\varphi} \text{ sur le plan complexe tel que } f \text{ est borné}\}$$

Définition 1.5.2 *Le but du H^{∞}-calcul est de construire $f(t)$ quand T est un opérateur sectoriel et f est une fonction holomorphe complexe.*

Chapitre 2

Somme de trois opérateurs fermés

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

2.1 Théorème abstrait

Théorème 2.1.1 *Soit A, B et D trois opérateurs linéaires fermés. Soit X un espace de* Banach tel que A, B commutent avec D, supposons que

a- D est inversible et sectoriel de l'angle $\varphi_1 \in (0, \pi)$.

b- Il existe $\varphi_2 \in (\varphi_1, \pi)$ de telle sorte que $H(\lambda) := \left(\lambda^2 + \lambda B + A\right)^{-1}$ existe dans $\mathcal{L}(X)$ pour chaque $\lambda \in \Sigma_{\varphi_2}$.

c- $H \in H^{\infty}\left(\Sigma_{\varphi_2}; \mathcal{L}(X)\right)$

d- Les fonctions

$$\begin{array}{lcl} \lambda & \mapsto & \lambda^2 H(\lambda) \\ \lambda & \mapsto & \lambda B H(\lambda) \\ \lambda & \mapsto & A H(\lambda) \end{array}$$

sont uniforméments bornées dans Σ_{φ_2} à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$.

Alors pour chaque $\theta \in (0,1)$ et tout $1 \leq p \leq \infty$ l'opérateur $L_{\theta,p}$ définit par

$$\begin{aligned} D_{L\theta,p} &= \left\{x \in D_{D^2} \cap D_{BD} \cap D_A : D^2x, BDx, Ax \in D_D(\theta,p)\right\} \\ L_{\theta,p}x &= D^2x + BDx + Ax \end{aligned}$$

est fermé, borné et inversible.

Plus précisément, si on définit

$$Sx = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda, D)\, H(\lambda)\, x d\lambda \qquad x \in X \qquad (2.1.1)$$

où Γ est un chemin qui relié $\exp(i\varphi')\infty$ avec $\exp(-i\varphi')\infty$ pour $\varphi' \in (\varphi_1, \varphi_2)$et entourant

$\sigma(D)$, donc $S \in \mathcal{L}(X)$ et S est un inverse à gauche de $D^2 + BD + A$ dans X.

Pour chaque $x \in D_D(\theta,p)$ on a

$$\begin{aligned} Sx &\in D_{D^2} \cap D_{BD} \cap D_A \\ D^2Sx, BDSx, ASx &\in D_D(\theta,p) \\ L_{\theta,p}Sx &= \left(D^2 + BD + A\right) Sx = x. \end{aligned}$$

C'est à dire, la restriction de S à $D_D(\theta,p)$ est l'inverse borné de $L_{\theta,p}$. On a un résultat similaire pour $D_D(\theta)$ au lieu de $D_D(\theta,p)$.

2.2 Preuve

Il résulte des hypothèses, plus précisément à partir des estimations sur $R(\lambda, D)$ et H que l'intégrale (2.1.1) converge absolument et que S est donc un opérateur borné sur X.

Etant donné que $0 \notin \sigma(D)$, Γ peut étre choisi de façon que $0 \notin \Gamma$ et se trouvant dans le secteur Σ_{φ_2}. Comme A et B commutent avec D, les opérateurs bornés $H(\lambda)$ et $R(\lambda, D)$ commutent entre eux.

* Montrons d'abord que S est un inverse à gauche de $D^2 + BD + A$.

D'aprés la définition de S, pour tout $x \in D_{D^2} \cap D_{BD} \cap D_A$ nous pouvons calculer en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue :

$$\begin{aligned}
S\left(D^2+BD+A\right)x &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda,D)\,H(\lambda)\left(D^2+BD+A\right)xd\lambda \\
&= \lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda}R(\lambda,D)\,H(\lambda)\left(D^2-\lambda^2+B(D-\lambda)+\lambda^2+\lambda B+A\right)xd\lambda \\
&= \lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda}R(\lambda,D)\,H(\lambda)\,(D-\lambda)\,(D+\lambda)\,xd\lambda \\
&\quad +\lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda}R(\lambda,D)\,H(\lambda)\,(B(D-\lambda)+\lambda^2+\lambda B+A)xd\lambda \\
&= \lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda}R(\lambda,D)\,H(\lambda)\left((D-\lambda)\,(D+\lambda+B)+\lambda^2+\lambda B+A\right)xd\lambda \\
&= -\lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda}H(\lambda)\,(D+\lambda+B)\,xd\lambda \\
&\quad +\lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda}R(\lambda,D)\,xd\lambda \\
&= x.
\end{aligned}$$

En utilisant l'identité :

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda}R(\lambda,D)\,xd\lambda = x$$

et

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda}H(\lambda)\,(D+\lambda+B)\,xd\lambda = 0 \qquad \forall s>0.$$

Maintenant fixons $\theta \in (0,1)$ et $1 \leq p \leq \infty$.

On va montrer que S est un inverse à droite de $L_{\theta,p}$ sur $D_D(\theta,p)$. On a $\forall t>0$ et pour chaque $x \in X$ et d'aprés l'identité de la résolvante :

$$
\begin{aligned}
(t+D)^{-1} Sx &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t+D)^{-1} R(\lambda,D) H(\lambda) x d\lambda && (2.2.1)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{t+\lambda} (t+D)^{-1} H(\lambda) x d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{t+\lambda} R(\lambda,D) H(\lambda) x d\lambda && (2.2.2)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{t+\lambda} R(\lambda,D) H(\lambda) x d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{t+\lambda} H(\lambda) R(\lambda,D) x d\lambda.
\end{aligned}
$$

Pour chaque $t>0$ et $\forall x \in D_D(\theta,p)$, on a

$$
\begin{aligned}
g_1(r) &:= \frac{(r\exp(\pm i\varphi'))^{1-\theta}}{t+r\exp(\pm i\varphi')} \in L_*^q(0,\infty) \qquad 1\le q\le\infty\\
g_2(r) &:= \left\| r^\theta R(r\exp(\pm i\varphi'),D)x \right\| \in L_*^p(0,\infty).
\end{aligned}
$$

D'aprés (2.1.1) et comme $\|AH(r\exp(\pm i\varphi'))\|$ est borné d'aprés (d) et en utilisant l'inégalité de Hölder, on a :

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{t+\lambda} AH(\lambda) DR(\lambda,D) x d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\lambda^{1-\theta}}{t+\lambda} AH(\lambda)\lambda^\theta DR(\lambda,D) x \frac{d\lambda}{\lambda}
$$

converge absolument.

Puis que A est fermé, on conclue d'aprés (2.2.1) que pour chaque

$x\in D_D(\theta,p)$, $y := D(t+D)^{-1} Sx \in D_A$. Comme A commute avec D

$$
Sx = tD^{-1}y + y \in D_A
$$

et

$$
\begin{aligned}
D(t+D)^{-1} ASx &= AD(t+D)^{-1} Sx\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{t+\lambda} AH(\lambda) DR(\lambda,D) x d\lambda.
\end{aligned}
$$

Soit

$$g_3(r) := \frac{r^\theta}{|\cos\varphi'| + r} \in L^1_*(0,\infty)$$

d'aprés (d), nous pouvons estimer :

$$\left\| t^\theta D(t+D)^{-1} ASx \right\| \leq \frac{c}{\pi} \int_0^\infty g_3\left(\frac{t}{r}\right) g_2(r) \frac{dr}{r}.$$

Il suit de l'inégalité de Young que :

$$\left\| t^\theta D(t+D)^{-1} ASx \right\| \in L^p_*(0,\infty)$$

cela prouve que $ASx \in D_D(\theta,p)$.

De la même façon, on déduit que pour chaque $x \in D_D(\theta,p)$ on a $Sx \in D_{BD}$ et :

$$\begin{aligned}
D(t+D)^{-1} BDSx &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma D(t+D)^{-1} BDH(\lambda) DR(\lambda,D) x d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{t+\lambda} BDH(\lambda) DR(\lambda,D) x d\lambda \\
&= \lim_{s\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda} \frac{1}{t+\lambda} BDH(\lambda) DR(\lambda,D) x d\lambda \\
&= \lim_{s\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda} \frac{1}{t+\lambda} B(D-\lambda+\lambda)H(\lambda) DR(\lambda,D) x d\lambda \\
&= \lim_{s\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda} \frac{1}{t+\lambda} \lambda BH(\lambda) DR(\lambda,D) x d\lambda \\
& \lim_{s\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda} \frac{1}{t+\lambda} BH(\lambda) D(D-\lambda) R(\lambda,D) x d\lambda \\
&= \lim_{s\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda} \frac{1}{t+\lambda} \lambda BH(\lambda) DR(\lambda,D) x d\lambda \\
&\quad - \lim_{s\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda} \frac{1}{t+\lambda} BDH(\lambda) x d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{t+\lambda} \lambda BH(\lambda) DR(\lambda,D) x d\lambda.
\end{aligned}$$

On peut continuer de la même façon comme au- dessus et on obtient $BDSx \in D_D(\theta,p)$.

D'aprés le théorème de Cauchy :

$$\begin{aligned}
D\left(t+D\right)^{-1}D^2Sx &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma D\left(t+D\right)^{-1}D^2H\left(\lambda\right)DR\left(\lambda,D\right)xd\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{t+\lambda}D^2H\left(\lambda\right)DR\left(\lambda,D\right)xd\lambda \\
&= \lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda}\frac{1}{t+\lambda}D^2H\left(\lambda\right)DR\left(\lambda,D\right)xd\lambda \\
&= \lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda}\frac{1}{t+\lambda}(D^2-\lambda^2+\lambda^2)H\left(\lambda\right)DR\left(\lambda,D\right)xd\lambda \\
&= \lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda}\frac{1}{t+\lambda}((D-\lambda)(D+\lambda)+\lambda^2)H\left(\lambda\right)DR\left(\lambda,D\right)xd\lambda \\
&= \lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda}\frac{1}{t+\lambda}(D-\lambda)(\lambda-D)H\left(\lambda\right)DR\left(\lambda,D\right)xd\lambda \\
&\quad -\lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda}\frac{1}{t+\lambda}\lambda^2H\left(\lambda\right)DR\left(\lambda,D\right)xd\lambda \\
&= -\lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda}\frac{1}{t+\lambda}D^2H\left(\lambda\right)xd\lambda-\lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda}\frac{1}{t+\lambda}\lambda DH\left(\lambda\right)xd\lambda \\
&\quad +\lim_{s\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{s}{s+\lambda}\frac{1}{t+\lambda}\lambda^2H\left(\lambda\right)DR\left(\lambda,D\right)xd\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{t+\lambda}\lambda^2H\left(\lambda\right)DR\left(\lambda,D\right)xd\lambda.
\end{aligned}$$

D'aprés cette preuve, l'opérateur S laisse $D_D\left(\theta,p\right)$ invariant. A partir du théorème du graphe fermé, la restriction de S sur $D_D\left(\theta,p\right)$ est bornée.

De plus, les égalités ci-dessus montrent que $SL_{\theta,p}x=x$ pour tout $x\in D_D\left(\theta,p\right)$ et $L_{\theta,p}Sy=y$ pour tout $y\in D_D\left(\theta,p\right)$ ainsi $L_{\theta,p}:D_{L_{\theta,p}}\to D_D\left(\theta,p\right)$ est borné et inversible (nécessairement fermé) avec $L_{\theta,p}^{-1}=S/_{D_D(\theta,p)}$.

Chapitre 3

Application au problème de Cauchy du second ordre

On considère le problème de Cauchy du second ordre avec des conditions homogènes

$$\begin{cases} u'' + Bu' + Au = f & [0, T] \\ u(0) = 0 & \\ u'(0) = 0 & \end{cases} \tag{3.0.1}$$

3.1 Cadre L^p

Théorème 3.1.1 *Soit A et B deux opérateurs linéaires fermés dans un espace de Banach* X. Supposons que :

b- Il existe $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, tel que $H(\lambda) := \left(\lambda^2 + \lambda B + A\right)^{-1}$ existe on $\mathcal{L}(X)$ pour tout $\lambda \in \Sigma_\varphi$.

c- $H \in H^\infty(\Sigma_\varphi; \mathcal{L}(X))$

d- Les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \lambda & \mapsto & \lambda^2 H(\lambda) \\ \lambda & \mapsto & \lambda B H(\lambda) \\ \lambda & \mapsto & A H(\lambda) \end{array}$$

sont uniforméments bornées dans Σ_φ à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$.

Alors le problème (3.0.1) admet Besov régularité maximale dans le sens suivant :

pour chaque $f \in B^\theta_{pq}(0,T;X)$, $\theta < \frac{1}{p}$ (respectivement $f \in \mathring{B}^\theta_{pq}(0,T;X)$, $\theta \geq \frac{1}{p}$),

le problème (3.0.1) admet une unique solution u vérifiant $u, u', u'', Bu', Au \in B^\theta_{pq}(0,T;X)$

(respectivement $\in \mathring{B}^\theta_{pq}(0,T;X)$).

Preuve. □

Soient $\bar{A}$, $\bar{B}$ et D des opérateurs définiés sur l'espace $L^p(0,T;X)$, donnés par

$$\begin{array}{c} \left(\bar{A}u\right)(t) = Au(t) \\ \left(\bar{B}u\right)(t) = Bu(t) \\ (Du)(t) = u'(t) \end{array}$$

tels que

$$\begin{array}{rcl} D_{\bar{A}} & = & L^p(0,T;D_A) \\ D_{\bar{B}} & = & L^p(0,T;D_B) \\ D_D & = & \mathring{W}^{1,p}(0,T;X) \end{array}$$

Voir l'exemple 1 du chapitre de rappels. Rappelons que D est sectoriel d'angle $\frac{\pi}{2}$, on applique le théorème abstrait aux trois opérateurs et on note que

$$\begin{array}{rcll} D_D(\theta,p) & = & B^\theta_{pq}(0,T;X) & \text{si } \theta < \dfrac{1}{p} \\ D_D(\theta,p) & = & \mathring{B}^\theta_{pq}(0,T;X) & \text{si } \theta \geq \dfrac{1}{p} \end{array}$$

on obtient la régularité maximale.

3.2 Cadre $C([0,T];X)$

Théorème 3.2.1 *Soit A et B deux opérateurs linéaires fermés dans un espace de Banach* X. Supposons que :

b- Il existe $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, tel que $H(\lambda) := \left(\lambda^2 + \lambda B + A\right)^{-1}$ existe on $\mathcal{L}(X)$ pour tout $\lambda \in \Sigma_\varphi$.

c- $H \in H^\infty(\Sigma_\varphi; \mathcal{L}(X))$

d- Les fonctions

$$\begin{array}{rcl} \lambda & \mapsto & \lambda^2 H(\lambda) \\ \lambda & \mapsto & \lambda B H(\lambda) \\ \lambda & \mapsto & A H(\lambda) \end{array}$$

sont uniforméments bornées dans Σ_φ à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$.

Alors le problème (3.0.1) admet Hölder régularité maximale dans le sens suivant :

pour chaque $f \in \mathring{C}^\theta([0,T];X)$ (respectivement $f \in \mathring{h}^\theta([0,T];X)$), le problème (3.0.1) admet une unique solution u satisfiée $u, u', u'', Bu', Au \in \mathring{C}^\theta([0,T];X)$ (respectivement $\in \mathring{h}^\theta([0,T];X)$).

Preuve. □

Soient $\bar{A}$, $\bar{B}$ et D des opérateurs définiés sur l'espace $C([0,T];X)$, donnés par

$$\begin{array}{l} \left(\bar{A}u\right)(t) = Au(t) \\ \left(\bar{B}u\right)(t) = Bu(t) \\ (Du)(t) = u'(t) \end{array}$$

tels que

$$\begin{array}{rcl} D_{\bar{A}} & = & C([0,T];D_A) \\ D_{\bar{B}} & = & C([0,T];D_B) \\ D_D & = & \mathring{C}^1([0,T];X) \end{array}$$

Voir l'exemple 2 du chapitre de rappels. Rappelons que D est sectoriel d'angle $\frac{\pi}{2}$, on applique le théorème abstrait aux trois opérateurs et on note que

$$\begin{array}{rcl} D_D(\theta,p) & = & \mathring{C}^{\theta}([0,T];X) \\ D_D(\theta) & = & \mathring{h}^{\theta}([0,T];X) \end{array}$$

on obtient la régularité maximale.

Corollaire 3.2.1 *On considère le problème abstrait de Cauchy du second ordre*

$$\begin{cases} u''(t) + \alpha A^{\varepsilon} u'(t) + Au(t) = f(t) \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases} \tag{3.2.1}$$

tel que A est un opérateur sectoriel d'angle $\varphi \in (0,\pi)$ dans un espace de Banach X et $\varepsilon > 0, \alpha > 0$. Supposons que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

1. $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\alpha \geq 2$ et $\varphi \in (0,\pi)$

2. $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\alpha \in (0,2)$ et $\varphi \in \left(0, \pi - 2\arctan\frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{\alpha}\right)$

3. $\varepsilon \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\alpha > 0$ et $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2\varepsilon}\right)$.

Alors le problème (3.2.1) admet Besov ou Hölder régularité maximale dans le sens du théorème abstrait.

Example 3

Soit A et B deux opérateurs fermés dans un espace de Banach X et soit $1 \leq p < \infty$ $1 \leq q \leq \infty$ et $\theta \in \left(0, \frac{1}{p}\right)$.

Dans l'espace$L^p(0,1;X)$, soit les opérateurs différentiels D et $\hat{D} = D_{\max}$ donnés comme dans l'exemple 1 du chapitre de rappels, alors $\hat{D}^2$ est fermé.

Rappelons que

$$D_{\hat{D}}(\theta,p) = D_D(\theta,p) = B^{\theta}_{pq}(0,T;X)$$

d'ou

$$D_{\hat{L}\theta,q} = \left\{u \in W^{2,p}(0,T;X) : u'', Bu', Au \in B^{\theta}_{pq}(0,T;X)\right\}$$

et

$$D_{L\theta,q} = \left\{u \in D_{\hat{L}\theta,q} : u(0) = u'(0) = 0\right\}.$$

Noter que, le quotient $D_{\hat{L}_{\theta,q}} \backslash D_{L_{\theta,q}}$ peut être identifié naturellement avec l'espace de trace

$$(X, D_B, D_A)_{B^{\theta}_{pq}} = \left\{(u_0,u_1) \in X \times X : \exists u \in D_{\hat{L}_{\theta,q}}, u(0) = u_0, u'(0) = u_1\right\}.$$

Pour l'espace de trace on utilise une notation qui est semblable à la notation de l'espace d'interpolation réel entre une paire d'espace de Banach.

Chapitre 4

Problème de la valeure initiale

4.1 Théorème

Théorème 4.1.1 *On prend les hypothèses du théorème abstrait du chapitre 3 et on fixe* $\theta \in (0,1)$ et $1 \leq p \leq \infty$.

Soit $\hat{D}$ l'extension fermé de D et $\hat{L}_{\theta,p}$ l'opérateur en $D_{\hat{D}}(\theta,p)$ donné par

$$\begin{cases} D_{\hat{L}_{\theta,p}} = \left\{x \in D_{\hat{D}^2} \cap D_{B\hat{D}} \cap D_A : \hat{D}^2 x, B\hat{D}x, Ax \in D_{\hat{D}}(\theta,p)\right\} \\ \hat{L}_{\theta,p} = \hat{D}^2 x + B\hat{D}x + Ax \end{cases}$$

Alors, pour chaque $f \in D_{\hat{D}}(\theta,p)$ et $x_0 \in D_{\hat{L}_{\theta,p}}$ verifiant la condition de compatibilité

$f - \hat{L}_{\theta,p}x_0 \in D_D(\theta,p)$ il existe une unique solution $x \in D_{\hat{L}_{\theta,p}}$ du problème

$$\begin{cases} \hat{D}^2 x + B\hat{D}x + Ax = f \\ x - x_0 \in D_D(\theta,p) \end{cases} \tag{4.1.1}$$

4.2 Preuve

* Unicité : résulte de l'injectivité de l'opérateur $L_{\theta,p}$, en fait, si x_1, $x_2 \in D_{\hat{L}_{\theta,p}}$ sont deux solutions de (4.1.1), alors $\hat{L}_{\theta,p}(x_1 - x_2) = 0$.

D'autre part, $x_1 - x_2 = (x_1 - x_0) - (x_2 - x_0) \in D_{L_{\theta,p}}$, afin que $\hat{L}_{\theta,p}(x_1 - x_2) = L_{\theta,p}(x_1 - x_2)$ depuis $\hat{L}_{\theta,p}$ est un extension de $L_{\theta,p}$. Maintenant l'injectivité de $L_{\theta,p}$ implique $x_1 = x_2$.

* Existence : Soit $g = \hat{D}^2 x_0 + B\hat{D}x_0 + Ax_0 = \hat{L}_{\theta,p}x_0 \in D_{\hat{D}}\left(_{\theta,p}\right)$. Par hypothèse $f - g \in D_D\left(_{\theta,p}\right)$, d'aprés le théorème abstrait on a

$$\begin{aligned}
(f-g) &= \hat{D}^2(x-x_0) + B\hat{D}(x-x_0) + A(x-x_0) \\
&= D^2 x_1 + BDx_1 + Ax_1 \\
&= L_{\theta,p}x_1 \in D_D(\theta,p).
\end{aligned}$$

D'ou

$$x = x_0 + x_1$$

est la solution du problème (4.1.1).

4.3 Corollaire

Soit A, B deux opérateurs linéaires fermés sur un espace de Banach X verifiant les hypothèses (b), (c) et (d) du théorème abstrait du chapitre 2.

Soit $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ et $\theta \in \left(0, \frac{1}{p}\right)$, alors, pour chaque $f \in B^{\theta}_{pq}(0,T;X)$ et chaque $(u_0, u_1) \in (X, D_B, D_A)_{B^{\theta}_{pq}}$ tel que

$$(X, D_B, D_A)_{B^{\theta}_{pq}} = \left\{(u_0,u_1) \in D_{\hat{L}_{\theta,q}} : u(0) = u_0, u'(0) = u_1\right\}$$

est un espace de trace.

Le problème de Cauchy du second ordre :

$$\left\{\begin{array}{ll}
u'' + Bu' + Au = f & [0,T] \\
\qquad u(0) = u_0 & \\
\qquad u'(0) = u_1 &
\end{array}\right.$$

admet une unique solution $u \in B^{\theta}_{pq}(0,T;X)$ verifiant $u', u'', Bu', Au \in B^{\theta}_{pq}(0,T;X)$.

Chapitre 5

Les exemples

5.1 L'exemple 01

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $\alpha > 0$. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha \Delta u_t - \Delta u = f & (0,T) \times \Omega \\ u = 0 & (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0,x) = 0 & \Omega \\ u_t(0,x) = 0 & \Omega \end{cases} \tag{5.1.1}$$

Pour $1 \leq r \leq \infty$, on considère l'espace

$$X_r = \begin{cases} L^r(\Omega) & \text{si } 1 \leq r < \infty \\ C_0(\Omega) & \text{si } r = \infty \end{cases}$$

Sur $X_2 = L^2(\Omega)$ on considère l'opérateur de Dirichlet - Laplace B_2 donné par

$$\begin{cases} D_{B_2} = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \exists g \in L^2(\Omega), \forall v \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega \nabla u \bar{\nabla} v = \int_\Omega g \bar{v} \right\} \\ B_2 u = g \end{cases}$$

tel que

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), u' \in L^2(\Omega) \right\}.$$

On a B_2 est auto-adjoint et non négatif et donc sectoriel d'angle $\varphi = 0$.

D'où, l'opérateur $(-B_2)$ génère un C_0-semi groupe analytique. Donc, si $1 \leq r < \infty$

la restriction de l'opérateur B_2 à $X_r \cap L^2(\Omega)$ se prolonge à un opérateur sectoriel B_r sur X_r d'angle $\varphi = 0$.

On trouve la caractérisation du domaine

$$D_{B_r} = W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega) \qquad \text{si } 1 < r < \infty.$$

Cependant, on s'intéresse en particulier aux points limites $r = 1$ et $r = \infty$.

Si $1 \leq r < \infty$, et si on pose $A = B = B_r$ et $\varepsilon = 1$, alors cet exemple est un cas particulier du corollaire 3.2.1. Donc on obtient le résultat suivant

Corollaire 5.1.1 *On fixe $\theta \in (0,1)$, $1 \leq p, q \leq \infty$ et $1 \leq r < \infty$. alors pour chaque*

$f \in B_{pq}^{\theta}(0, T; L^r(\Omega))$ le problème (5.1.1) admet un unique solution forte

$u \in B_{pq}^{\theta+1}(0, T; D_{B_r}) \cap B_{pq}^{2+\theta}(0, T; L^r(\Omega))$.

* Sur l'espace $X_\infty = C_0(\Omega)$, on a l'opérateur de Dirichlet-Laplace

$$\begin{cases} D_{B_\infty} = \{u \in C_0(\Omega) : \Delta u \in C_0(\Omega)\} \\ B_\infty u = -\Delta u \end{cases}$$

On a $-B_\infty$ est générateur d'un semi-groupe analytique si et seulement si Ω est Wiener régulier, alors l'opérateur B_∞ est Wiener régulier.

Définition 5.1.1 *Un ensemble ouvert borné Ω est wiener régulier si et seulement si le* problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \Omega \\ u = g & \partial\Omega \end{cases}$$

admet pour chaque $g \in C(\partial\Omega)$ une unique solution $u \in C(\bar{\Omega})$.

* Si Ω est Wiener régulier, alors l'opérateur B_∞ est sectoriel d'angle $\varphi < \frac{\pi}{2}$.

De plus, si on pose $A = B = B_\infty$ et $\varepsilon = 1$, alors on applique le corollaire 3.2.1 au problème (5.1.1) on obtient le corollaire suivant

Corollaire 5.1.2 *Supposons que Ω est un ouvert et Wiener régulier et on fixe $\theta \in (0,1)$.*

Alors pour chaque $f \in C^\theta([0,T]; C_0(\Omega))$ le problème (5.1.1) admet une unique solution forte $u \in C^{1,\theta}([0,T]; D_{B_\infty}) \cap C^{2,\theta}([0,T]; C_0(\Omega))$.

Remarque 5.1.1 *Notez encore que les résultats de la régularité maximale précités*

s'appliquent en particulier dans les espaces $L^1(\Omega)$ (corollaire 5.1.1) et $C_0(\Omega)$
(corollaire 5.1.2)
lesquels ne sont pas des espaces U.M.D. De plus, dans le corollaire 5.1.1 la régularité par rapport à t (le temps), nous permet de considèrer aussi l'espace $B^\theta_{1,q}$ et en particulier $B^\theta_{1,1}$.

5.2 L'exemple 02

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \alpha\Delta u_t + \Delta^2 u = f & (0,T) \times \Omega \\ u = \Delta u = 0 & (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0,x) = 0 & \Omega \\ u_t(0,x) = 0 & \Omega \end{cases} \tag{5.2.1}$$

Ce problème est en fait un cas spécial du problème (3.2.1) du corollaire 3.2.1. Soit $1 \leq r \leq \infty$ et B_r est l'opérateur de Dirichlet-Laplace sur X_r et si on pose $A = B_r^2$ et $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alors A est encore sectoriel avec angle $\varphi = 0$ si $1 \leq r < \infty$ et $\varphi \in (0,\pi)$ si $r = \infty$.
De plus, $B_r = A^{\frac{1}{2}}$ et on obtient les deux corollaires suivants

Corollaire 5.2.1 *On fixe $\theta \in (0,1)$, $1 \leq p, q \leq \infty$ et $1 \leq r < \infty$. Supposons que $\alpha > 0$*

alors pour chaque $f \in B^{\theta}_{pq}(0,T;L^r(\Omega))$ le problème (5.2.1) admet une unique solution forte $u \in B^{\theta}_{pq}\left(0,T;D_{B_r^2}\right) \cap B^{1+\theta}_{pq}(0,T;D_{B_r}) \cap B^{2+\theta}_{pq}(0,T;L^r(\Omega))$.

Corollaire 5.2.2 *Supposons que $\alpha \geq 2$, Ω est ouvert et Wiener régulier et on fixe $\theta \in (0,1)$*

donc pour chaque $f \in C^{\theta}([0,T];C_0(\Omega))$ le problème (5.2.1) admet une unique solution forte $u \in C^{\theta}\left([0,T];D_{B_\infty^2}\right) \cap C^{1,\theta}([0,T];D_{B_\infty}) \cap C^{2,\theta}([0,T];C_0(\Omega))$.

Bibliographie

[1] **E. Azoulay** et **J. Avignant,** *Mathematiques 3. Analyse,* McGraw-Hill 1984.

[2] **C.J.K. Batty, R. Chill, et S. Srivastava**, *Maximal regularity for second order non-autonomous Cauchy problems, studia Math.* **189** (2014) arXiv**.**

[3] **N. Boccara,** *Analyse Fonctionnelle (Introduction pour les Physiciens).*

[4] **H. Brezis,** *Analyse Fonctionnelle (Théorème et Application)*, Masson Paris 1983.

[5] **G. Da Prato et P. Grisvard**, *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles,* J. Math. Pures Appl. **54** (1975).

[6] **A. Favini**, *Parabolicity of second order differential equations in Hilbert space, Semigroupe Forum* **42** (1991).

[7] **A. Favini, R. Labbas**, **St. Maingot**, **H. Tanabe**, et **A. Yagi**, *Necessary and sufficient conditions for maximal regularity in the study of elliptic differential equations in Hölder spaces, Discrete Contin. Dyn. Syst.* **22** (2008).

[9] **M. Haase**, *the Functional Clculus for Sectorial Operator Theory : Advances and Applications,* vol. 169, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[10] **A. Lunardi,** *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolitic problems, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications,* 1995.

[11] **J.P. Marco,** *Mathématiques analyse-L3*, Pears on 2009, 9320.