UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET D'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES-INFORMATIQUE

Mémoire de Fin d'Etude

Pour l'Obtention du Diplôme de Master en Mathématiques

Cycle LMD

Spécialité : Analyse Fonctionnelle

Thème

Les problèmes aux limites concernant les équations différentielles fractionnaires.

Présenté par

M[elle] BOUKHOBZA Zahira

Soutenu le 26 /05/2015

Devant le jury

Mr FETTOUCHE Houari	**Président**	**M.A.A**	**U. MOSTAGANEM.**
Mr DAHMANI Zoubir	**Examinateur**	**Pr**	**U. MOSTAGANEM.**
Mme BELARBI HAMANI Samira	**Encadreur**	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM.**

Table des matières

INTRODUCTION

Les équations différentielles fractionnaires sont devenus importantes, ces dernières années dans différentes branches mathématiques appliquées telle que les phénomenes physiques, la technologie, l'énergie et la biologie ...etc.

Ce mémoire consiste à étudier le problème aux limites pour les équations différentielles fractionnaires . Notre approche est basé sur la théorie du point fixe (théorème du Banach et théorème de Schaefer).

Ce mémoire est composé de deux chapitres :
Le premier chapitre est consacré à des notions préliminaires concernant les espaces fonctionnelle, le calcul fractionnaire et quelques théorèmes du point fixe.
Le deuxième chapitre est consacré à l'existence et l'unicité pour les équations différentielles fractionnaires où l'ordre $\alpha \in]0,1[$. Notre approche est basé sur les théories du point fixe de Banach et de Schaefer, et on termine avec un exemple qui illustre le cas théorique.

Chapitre 1

Préliminaires :

1.1 Introduction :

Dans cette section, nous introduisons les notations, les définitions et les préliminaires qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire.
Soit $C(J,\mathbb{R})$ l'espace de Banach de toute fonction continue de J en $\mathbb{R}$ avec la norme

$$\|y\|_\infty = \sup\{|y(t)| : 0 \leq t \leq T\}.$$

Soit f une fonction réelle, α appartient au domaine de définition de f et α un nombre réelle strictement positif.

1.2 Notations et définitions :

Espace $\mathbf{L}^p$:

Les espaces L^p sont des espace de fonctions dont la puissance $p^{iéme}$ de la fonction est intégrable, au sens de Lebesgue.
Soit $\Omega = [a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$.

Définition 1.2.1 *Soit $\Omega =]a,b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle borné et non borné de $\mathbb{R}$. pour $1 \leq p \leq +\infty$, on définit l'espace L^p comme suit :*

Pour $1 \leq p < +\infty$ *:*

$L^p(\Omega)$ *est espace des fonctions mesurables de puissance* $p^{iéme}$ *intégrables sur* Ω *c'est à dire :*

$$f \in L^p(\Omega) \Longleftrightarrow \int_\Omega |f(t)|^p \, dt < \infty, \ f \text{ mesurable}$$

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \text{ est une norme sur } L^p(\Omega).$$

$$\left(L^p(\Omega), \|.\|_p \right) \text{ est un espace de Banach}$$

Pour $p = +\infty$ *on a :*

$$\|f\|_{+\infty} = \sup_{a \leq x \leq b} |f(t)|$$

où

$$L^\infty(a, b) \quad \text{est l'espace des fonctions bornée sur } [a, b]$$

Définition 1.2.2 ***(Espace de Banach)***

Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

Exemple 1.2.1 $((C([a,b], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach.*

Définition 1.2.3 *L'opérateur* T *est dite complétement continue, si elle est continue et compacte.*

Définition 1.2.4 *Soit* $f : J \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *une fonction continue, on dit que* f *est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, si :*

$\forall \ (t_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}^d$, *il existent un voisinage* U *de* (t_0, y_0) *et une constante* $C_{t_0,y_0} > 0$ *tels que,* $\forall (t, x), (t, y) \in U$:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq C_{t_0,y_0} \|x - y\| \tag{1.1.1}$$

Proposition 1.2.1 *$f : X \to X$ est contractante si :*

$$\exists 0 < k < 1; \forall x, y \in X,$$

$$\|f(x) - f(y)\|_X \leq k \|x - y\|_X \tag{1.1.2}$$

Définition 1.2.5 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeur dans $\mathbb{R}$, on dit que la fonction f est équicontinue si :*

$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0,\ \forall t_1 \in I, \quad \forall t_2 \in I$

$$|t_1 - t_2| < \delta \Longrightarrow |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon \tag{1.1.3}$$

La notion d'équicontinuité intervient notamment dans le théorème d'Arzela-Ascoli :

Théorème 1.2.1 *(Arzela-Ascoli) :*

Soit X espace compacte et $C(X)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur X à valeurs complexe, munis de la norme du sup. Alors, un sous-ensemble H de $C(X)$ est relativement compact ssi :

1) H est équicontinue.

2) H est bornée dans $C(X)$.

Remarque 1.2.1 *On peut remplacer la condition 2) par la condition locale :*

$$\forall x \in X, \exists M_x > 0, \forall f \in H,\ |f(x)| \leq M_x.$$

Thérème de Cauchy Lipschitz :

Théorème 1.2.2 *Soit $f : J \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction localment lipchitzienne par rapport à la deuxiéme variable alors le problème de cauchy est :*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) & t \in j \subset J \\ x(t_0) = x_0 & t_0 \in J \end{cases} \tag{1.1.4}$$

admet une solution unique dans J.

Où la solution $x(t)$ est écrit sous forme :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \qquad t \in j.$$

1.3 Le calcul fractionnaire :

1.3.1 Intégrales fractionnaires :

Définition 1.3.1 *On appelle intégrale fractionnaire de f d'ordre α, et on la note I_a^α, la fonction définie par :*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds. \tag{1.3.1}$$

Remarque 1.3.1 *On peut écrire I_a^α sous la forme suivante :*

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} s^{\alpha-1} f(t-s)\, ds. \tag{1.3.2}$$

Définition 1.3.2 *La fonction Gamma est définie par l'intégrale :*

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} \exp(-t)\, t^{z-1} dt, \;\; z > 0 \tag{1.3.3}$$

Où

$$t^{z-1} = \exp(z-1)\ln t.$$

Propriétés :

Pour tout $z \in \mathbb{R} \backslash \{0, -1, -2, ...\}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z) \\ \Gamma(z+n) &= z(z+1)...(z+n-1)\Gamma(z) \\ \Gamma(n+1) &= n! \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Définition 1.3.3 *La fonction δ est définie par :*

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & si\ t\neq 0\\ +\infty & si\ t=0\end{cases} \tag{1.3.5}$$

telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1$$

Propriété :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,f(t)dt=f(0)$$

Définition 1.3.4 [5, 8] *L'intégrale d'ordre fractionnaire de la fonction $f\in\mathcal{L}^1([a,b],\mathbb{R})$ d'ordre $\alpha\in\mathbb{R}_+$; est définie par :*

$$I_a^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t\frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds; \tag{1.3.5}$$

où Γ est la fonction gamma, lorsque $a=0$ nous écrivons :

$$\begin{aligned}I^\alpha f(t) &= f(t)*\phi_\alpha(t)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)\,ds\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

où :

$$\phi_\alpha(t)=\begin{cases}\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & t>0\\ 0 & t\leq 0\end{cases} \tag{1.3.7}$$

et $\phi_\alpha\longrightarrow\delta$ quand $\alpha\longrightarrow 0$.

si $\alpha=0$, on écrit :

$$I^0f(t)=f(t)$$

Propriété :

Soit $\alpha, \beta > 0$, alors pour tout $f(t) \in \mathcal{L}^1 [a, b]$, on a :

$$I_a^{\alpha} I_a^{\beta} f(t) = I_a^{\alpha+\beta} f(t) = I_a^{\beta} I_a^{\alpha} f(t) \tag{1.3.8}$$

1.3.2 Dérivées fractionnaires :

Opérateure de dérivée n^{iéme} :

Définition 1.3.5 *L'opérateur de la dérivée d'ordre n, $n \in \mathbb{N}^*$ est noté par D^n;*

$$D^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \tag{1.3.9}$$

où D^n vérifie les propriétés suivantes :

$$D^n I^n f = f \quad \text{et} \quad I^n D^n f \neq f,\ f \in C^n (\mathbb{R}_+)$$

$$I^n D^n f = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}, t > 0 \tag{1.3.10}$$

Preuve. D'aprés le dévellopement limités de f au point 0 on a :

$$f(t) = f(0) + f^{(1)}(0) + f^{(2)}(0) \frac{t^2}{2!} + ... + \frac{1}{(n-1)} \int_0^t (t-\zeta)^{n-1} f^{(n)}(\zeta)\, d\zeta$$

.

D'où :

$$\frac{1}{(n-1)} \int_0^t (t-\zeta)^{n-1} f^{(n)}(\zeta)\, d\zeta = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}.$$

□

1.4 Dérivée au sens de Riemann-Liouville :

Définition 1.4.1 *Soit* $f \in C^1([a,b])$; *on définit la dérivée fractionnaire d'ordre* $(0 < \alpha < 1)$ *au sens de Riemann-Liouville par :*

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \\ &= D^1 I_a^{1-\alpha} f(t) \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Définition 1.4.2 [5,8] *Soit* $f \in C^n([a,b])$. *On définie la dérivée fractionnaire d'ordre (*$0 < n-1 < \alpha < n$*) au sens de Rimann-Liouville par*

$$\begin{aligned} D_a^n f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \\ &= D^n I_a^{n-\alpha} f(t) \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Propriétés :

Soient α, β deux paramétres réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,alors on a :

1. $D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t)$, $\alpha > 0$.
2. $D^\beta I^\alpha f(t) = D^{\beta-\alpha} f(t)$, $\alpha > 0, \beta < 0$.
3. $D^n I^\alpha f(t) = D^{n+\alpha} f(t)$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$.
4. $I^\alpha D^\alpha f(t) \neq f(t)$.
5. $D^\alpha D^\beta f(t) \neq D^\beta D^\alpha f(t)$.
6. $D^\beta D^\alpha f(t) \neq D^{\beta+\alpha} f(t)$.

1.5 Dérivée au sens de Caputo :

Définition 1.5.1 *Soit $f \in C^n([a,b])$. On définie la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction f par :*

$$\begin{aligned} {}^cD_a^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)^{(n)}\, ds \\ &= I_a^{n-\alpha} D^n f(t) \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

ici $n = [\alpha] + 1$et $[\alpha]$ désignent la partie entier de α.
par example, pour $0 < \alpha < 1$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction absolument continue alors la dérivée d'ordre fractionnaire α de f existe.

cas particuliers :

$(0 < \alpha < 1)$:

$$\begin{aligned} {}^cD_a^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s)\, ds \\ &= I_a^{1-\alpha} D^1 f(t) \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

1.6 Le lien entre Riemann Liouville et Caputo :

Pour tout $t > 0$, $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$on a :

$$ {}^cD_{a+}^{\alpha} f(t) = {}^{RL}D_{a+}^{\alpha} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right). \tag{1.6.1}$$

1.7 Quelques théorèmes du point fixe :

1.7.1 Théorème du point fixe de Schaefer :

Théorème 1.7.1 *Soient X un espace de banach et $f : X \to X$ une application continue et compact sur X. Si l'ensemble*

$$B = \{x \in X; \textit{telle que } \exists \lambda \in [0,1] \ \ tq\ x = \lambda f(x)\} \tag{1.7.1}$$

est bornée, alors, il existe un point x de E telque :

$$f(x) = x.$$

1.7.2 Théorème du point fixe de Banach :

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom le théorème de l'application contractante) est un théorème simple à prouver et qui s'applique aux espaces complets et posséde de nombreuses applications. ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution pour les équations différentielles ou les équations intégrales.

Théorème 1.7.2 *Soient $(E, \|.\|)$ un espace de banach et $f : X \subset E \to X$; (X et un fermé de E) une application contractante alors f admet un point fixe unique,*

$$\exists! x_0 \in X, f(x_0) = x_0 \tag{1.6.2}$$

Chapitre 2

Existence et l'unicité des solutions :

2.1 Introduction :

Dans ce chapitre on s'intéresse à établie les conditions suffisant pour assure l'existence et l'unicité des solutions pour des classes d'équations différentielles fractionnelles.

On considère le problème aux limites pour les équations différentielles fractionnaires suivantes :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)) \qquad t \in J := [0, T], \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{2.1.1}$$

$$ay(0) + by(T) = c. \tag{2.1.2}$$

où $^{c}D^{\alpha}$ désigne l'opérateur de dérivation au sens de Caputo d'ordre α telle que α un réel positif vérifiant $0 < \alpha < 1$, f une fonction continue et a, b, c sont des constantes réelles avec $a + b \neq 0$.

Pour trouver la solution intégrale, on a besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.1.1 *Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielle fractionnaire suivante :*

$$^{c}D^{\alpha}f\left(t\right) = 0 \tag{2.1.3}$$

admet comme solution :

$$f\left(t\right) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}, \tag{2.1.4}$$

avec $c_i \in \mathbb{R}$. $i = 0, 1, ..., n-1$, $\quad n = [\alpha] + 1$.

Lemme 2.1.2 *Soit $\alpha > 0$, alors on a :*

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}f\left(t\right) = f\left(t\right) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}. \tag{2.1.5}$$

avec $c_i \in \mathbb{R}$. $i = 0, 1, ..., n-1$, $\quad n = [\alpha] + 1$.

Définition 2.1.1 *Une fonction $y \in C^1\left(\left[0, T\right], \mathbb{R}\right)$ est dit étre une solution de (2.1.1)–(2.1.2) si y satisfait à l'équation*

$$^{c}D^{\alpha}y\left(t\right) = f\left(t, y\left(t\right)\right) \tag{2.1.6}$$

sur $[0, T]$, et de condition :

$$ay\left(0\right) + by\left(T\right) = c.$$

Pour l'existence de solutions pour le probléme (2.1.1)–(2.1.2),nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1.3 [5]*Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0, T] \ \to \mathbb{R}$ continue, une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire :*

$$y\left(t\right) = y_0 + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t \left(t - s\right)^{\alpha - 1} h(s)ds \tag{2.1.7}$$

si et seulement si y *est une solution du problème de valeur intiale pour l'équation différentielle fractionnaire*

$$ {}^{c}D^{\alpha}y\left(t\right)=h(t) \quad t\in J \tag{2.1.8}$$

$$y(t_0)=y_0. \tag{2.1.9}$$

En conséquence du lemme (2.1.3) on a le résultat suivant qui est utile dans ce qui suit.

Lemme 2.1.4 *Soient* $0<\alpha<1$ *et* $h:[0,T]\to\mathbb{R}$ *continue. Une fonction* y *est une solution de l'équation intégrale fractionnaire :*

$$\begin{aligned} y\left(t\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t\left(t-s\right)^{\alpha-1}h(s)ds \\ &-\frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^T\left(T-s\right)^{\alpha-1}h(s)ds-c\right] \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

si et seulement si y *est une solution de problème aux limites fractionnaire*

$$\begin{cases} \text{1) } {}^{c}D^{\alpha}y\left(t\right)=h(t) & t\in[0,T] \\ \text{2) } ay\left(0\right)+by\left(T\right)=c \end{cases} \tag{2.1.11}$$

Preuve. 1) Supposons que (2.1.10) est vérifié. Alors :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}y\left(t\right) &= D^{\alpha}(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t\left(t-s\right)^{\alpha-1}h(s)ds \\ &-\frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^T\left(T-s\right)^{\alpha-1}h(s)ds-c\right]) \\ &= D^{\alpha}I^{\alpha}h(t,y(t)). \\ &= h(t,y(t)). \end{aligned}$$

2) Supposons que (2.1.1) est vérifié et par application de lemme (2.1.2) on trouve :

$$\begin{aligned} D^{\alpha}I^{\alpha}y\left(t\right) &= y\left(t\right) \\ &= I^{\alpha}h(t,y(t))-c_0. \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

Pour touver c_0, on utilise la condition initialet :

Calculons $y(0)$:

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^0 (0-s)^{\alpha-1} h(s)ds - c_0 \\ y(0) &= -c_0 \Longrightarrow y_0 = -c_0 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} y(T) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds - c_0 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds + y_0 \end{aligned}$$

D'aprés la condition initiale on a :

$$\begin{aligned} ay_0 + by(T) &= c \Longleftrightarrow ay_0 + b\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds + y_0\right] = c \\ &\Longrightarrow (a+b)\, y_0 + \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds - c = 0 \\ &\Longrightarrow y_0 + \frac{1}{(a+b)}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds - c\right] = 0 \\ &\Longrightarrow y_0 = -\frac{1}{(a+b)}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds - c\right] \end{aligned}$$

En remplace dans (2.1.12), on obtient :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds + y_0 \\ y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s)ds - \frac{1}{(a+b)}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s)ds - c\right] \end{aligned}$$

Alors, les points fixes de l'opérateur F sont solution de la (2.1.1)–(2.1.2).

$\square$

2.2 Premier Résultat :

Le premier résultat est basé sur le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 2.2.1 *Supposons que :*

(H1) il Existe une constante $K > 0$ telle que :

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K\,|x-y| \qquad \text{pour } t \in [0,T] \text{ et tout } x,y \in \mathbb{R}.$$

Si :

$$\frac{KT^{\alpha}\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\Gamma(\alpha+1)} < 1 \tag{2.2.1}$$

alors le problème (2.1.1)–(2.1.2) admet une solution unique sur $[0,T]$

Preuve. On transforme le problème (2.1.1)–(2.1.2) au problème de point fixe.

On considére l'opérateur $F : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$.

En effet :

Soient $x,y \in C([0,T],\mathbb{R})$ .puis pour chaque $t \in [0,T]$ nous avons :

$$\begin{aligned} F(x)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))ds \\ &\quad -\frac{1}{(a+b)}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))ds - c\right]. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Et :

$$\begin{aligned} F\left(y\right)\left(t\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds \\ &-\frac{1}{(a+b)}\left[\frac{b}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^T \left(T-s\right)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds-c\right]. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

telle que :

$$\begin{aligned} F\left(x\right)\left(t\right)-F\left(y\right)\left(t\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1}\left[f(s,x(s))-f(s,y(s))\right]ds \\ &-\frac{1}{(a+b)}\left[\frac{b}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^T \left(T-s\right)^{\alpha-1}\left[f(s,x(s))-f(s,y(s))\right]ds\right] \\ \left|F\left(x\right)\left(t\right)-F\left(y\right)\left(t\right)\right| &\leq \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1}\left|f(s,x(s))-f(s,y(s))\right|ds \\ &+\frac{|b|}{\Gamma\left(\alpha\right)|a+b|}\int_0^T \left(T-s\right)^{\alpha-1}\left|f(s,x(s))-f(s,y(s))\right|ds. \end{aligned}$$

D'aprés le théorème (2.2.1) on a :

$$\left|f(s,x(s))-f(s,y(s))\right| \leq K\left\|x-y\right\|_\infty. \tag{2.2.4}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \left|F\left(x\right)\left(t\right)-F\left(y\right)\left(t\right)\right| &\leq \frac{K\left\|x-y\right\|_\infty}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1}ds+\frac{K|b|\left\|x-y\right\|_\infty}{\Gamma\left(\alpha\right)|a+b|}\int_0^T \left(T-s\right)^{\alpha-1}ds. \\ &\leq \frac{K\left\|x-y\right\|_\infty}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left[\frac{t^\alpha}{\alpha}\right]+\frac{K|b|\left\|x-y\right\|_\infty}{\Gamma\left(\alpha\right)|a+b|}\left[\frac{T^\alpha}{\alpha}\right] \\ &\leq \left[\frac{KT^\alpha\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma\left(\alpha\right)}\right]\left\|x-y\right\|_\infty. \end{aligned}$$

avec :

$$\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}\leq\frac{T^\alpha}{\alpha}\right).$$

Donc :

$$|F(x)(t) - F(y)(t)| \leq \left[\frac{KT^{\alpha} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right] \|x - y\|_{\infty} \tag{2.2.5}$$

D'où, F est contactant et d'aprés le théorème de point fixe da Banach, F admet un seul point fixe qui est une solution du problème (2.1.1)–(2.1.2). □

2.3 Deuxième Résultat :

On va utiliser le théorème de point fixe de Schaefer pour démontrer que F admet au moins un point fixe.

Théorème 2.3.1 *Supposons que :*
(H2) La fonction $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est continue.*
(H3) Il Existe une constante $M > 0$ *telle que :*

$$|f(t,u)| \leq M \quad \textit{pour chaque } t \in [0,T] \;\; \textit{et toutes } u \in \mathbb{R}.$$

Alors le problème (2.1.1)–(2.1.2) admet au moins une solution sur $[0,T]$.

Preuve. Nous allons utiliser le théorème de point fixe Schaefer pour prouver que F définie par (2.2.3) ait un point fixe.
La preuve sera donnée en plusieurs étapes :
étape 1 : "F est continue".

Soit $(y_n)_{n\in N}$ est une suite telle que y_n converge vers y dans $C([0,T],\mathbb{R})$. Puis pour chaque $t\in[0,T]$ on a :

$$\begin{aligned}
|F(y_n)(t)-F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|\,ds \\
&\quad+\frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|\,ds. \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\sup_{s\in[0,T]}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|\,ds \\
&\quad+\frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\sup_{s\in[0,T]}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|\,ds. \\
&\leq \frac{\|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \\
&\quad.\left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds+\frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds\right]. \\
&\leq \frac{\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)T^\alpha\|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\|_\infty}{\alpha\Gamma(\alpha)} \qquad (2.3.1)
\end{aligned}$$

puisque F est une fonction continue, nous avons :

$$\|F(y_n)-F(y)\|_\infty \leq \frac{\left(1+\frac{|b|}{|a+b|}\right)T^\alpha\|f(.,y_n(.))-f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \to 0 \text{ quand } n\to\infty. \qquad (2.3.2)$$

étape 2 : "F transforme un ensemble bornée au un ensemble bornée dans $C([0,T],\mathbb{R})$".
En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta^*>0$, il existe une constante positive l telle que pour chaque

$$y\in B_{\eta^*}=\{y\in C([0,T],\mathbb{R}) : \|y\|_\infty\leq\eta^*\}$$

Il faut monter que :

$$\|F(y)\|_\infty\leq l. \qquad (2.3.3)$$

Par $(H3)$, nous avons pour chaque $t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|\,ds \\
&\quad+\frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|f(s,y(s))|\,ds+\frac{|c|}{|a+b|}. \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds+\frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}ds+\frac{|c|}{|a+b|}. \\
&\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)}T^\alpha+\frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|}T^\alpha+\frac{|c|}{|a+b|}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}T^\alpha + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|}T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} := l. \quad (2.3.4)$$

D'où F est bornée sur $C([0,T],\mathbb{R})$.

étape 3 : "F transforme un ensemble borné en un ensemble équicontinue".

Soient $t_1, t_2 \in [0,T]$, $t_1 < t_2$, $y \in B_{\eta^*}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
|F(y)(t_2) - F(y)(t_1)| &\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}\right] f(s,y(s))ds \right.\\
&\left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds \right| \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} \left[(t_2-s)^{\alpha-1} - (t_1-s)^{\alpha-1}\right] ds \\
&+ \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(t_2-t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha\right] + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2-t_1)^\alpha \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2-t_1)^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_1^\alpha - t_2^\alpha). \quad (2.3.5)
\end{aligned}$$

Comme $t_1 \to t_2$, le second membre de cette derniére inégalité tend vers zéro. à. Des étapes 1 à 3, d'aprés le théorème d'Arzela-Ascoli, nous pouvons conclure que $F : C([0,T],\mathbb{R}) \to C([0,T],\mathbb{R})$ est un opérateur continu et complètement continue.

étape 4 : Les limites à priori.

Maintenant il reste à montrer que l'ensemble :

$$\Omega = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : y = \lambda F(y) \text{ pour certain } 0 < \lambda < 1\}$$

est borné.

Soit $y \in \Omega$, alors

$$y = \lambda F(y)$$

pour certain $0 < \lambda < 1$. Donc, pour chaque $t \in J$, nous avons :

$$\begin{aligned}
y(t) &= \lambda[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds \\
&- \frac{1}{(a+b)} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds - c\right]] \quad (2.3.6)
\end{aligned}$$

Ce qui implique par $(H3)$ que pour chaque t nous avons :

$$\begin{aligned}
|F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \, ds \\
&\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| \, ds + \frac{|c|}{|a+b|}. \\
&\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|c|}{|a+b|}. \\
&\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|}. \qquad (2.3.7)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque $t \in [0, T]$, nous avons :

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha+1)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} := R. \qquad (2.3.8)$$

Cela montre que l'ensemble Ω est borné. Comme une conséquence de point fixe le théorème de Schaefer, nous en déduire que F a un point fixe qui est une solution du problème (2.1.1)–(2.1.2). □

Remarque 2.3.1 *Nos résultats pour le problème aux limite (2.1.1)–(2.1.2) sont appliquées à :*

1. *des problèmes aux valeurs initiales si a=1, b=0 :*
$$\begin{cases} D^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = c \end{cases}.$$

2. *les problèmes des terminaux de valeur si a=0, b=1 :*
$$\begin{cases} D^{\alpha}y\left(t\right)=f\left(t,y\left(t\right)\right) \\ y(T)=c \end{cases}.$$
3. *Et des solutions anti-périodique si a=1, b=1, c=0 on a :*
$$\begin{cases} D^{\alpha}y\left(t\right)=f\left(t,y\left(t\right)\right) \\ y(0)=-y(T) \end{cases}.$$

2.4 Problème non locale :

Cette section est consacrée à existence et l'unicité des solutions pour la classe suivante des problèmes non locaux.

$$^{c}D^{\alpha}y\left(t\right)=f\left(t,y\left(t\right)\right), \quad \text{pour tout } \ t\in J=\left[0,T\right], 0 \ <\alpha<1. \tag{2.4.1}$$

$$y(0)+g(y)=y_0. \tag{2.4.2}$$

Où $^{c}D^{\alpha}$ *est la dérivé caputo fractionnée,* $f:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *; est une fonction continue, et* $g:[0,T]\to\mathbb{R}$ *est une fonction continue. La condition non local ne peut être appliquée en physique avec un meilleur effet que la classique condition initiale* $y(0)=y_0$*.*
Par exemple, $g(y)$ *peut être donné par :*

$$g(y)=\sum_{i=1}^{p}c_i y(t_i). \tag{2.4.3}$$

Où les constantes c_i *sont donnés et* $0 \ <t_1<...<t_p<T$*.*
Conditions non locaux ont été initiées par Byszewski quand il a prouvé l'existence et l'unicité des solutions douces et classiques des problèmes de Cauchy non locaux. Comme l'a remarqué Byszewski, la condition non locale ne peut être plus utile que l'état initial standard pour décrire certains phénomènes physiques.

Nous vous présentons l'ensemble des conditions sur la fonction g suivant :

H4) Il existe une constante $M^* > 0$ telle que :

$$|g(y)| \leq M^* \text{ pour chaque } y \in C\left([0,T], \mathbb{R}\right)$$

H5) Il existe une constante $K^* > 0$ telle que :

$$|g(y) - g(y^*)| \leq K^* \left|y - y^*\right|, \text{ pour chaque } y, y^* \in C\left([0,T], \mathbb{R}\right). \tag{2.4.4}$$

Théorème 2.4.1 [2, 3] *Supposons que (H1), (H2), (H5) est vérifiée si :*

$$K^* + \frac{KT^\alpha}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} < 1. \tag{2.4.5}$$

Alors le problème non locale (2.4.1), (2.4.2) a une solution unique sur $[0,T]$.

Preuve. *On transforme le problème (2.4.1) au un problème de point fixe. Considérons l'opérateur :*

$$F^* : C\left([0,T], \mathbb{R}\right) \to C\left([0,T], \mathbb{R}\right)$$

On peut montrer facilement que F^* est une contraction ; Alors le problème (2.4.1) admet au moins une solution sur $[0,T]$. □

Théorème 2.4.2 *Supposons que (H2), (H4) est vérifié. Alors le problème non locale (2.4.1), (2.4.2) a une solution moins sur une $[0,T]$.*

2.5 Exemple :

Exemple 2.5.1 [1] *Considérons le problème aux limites suivant :*

$$D^\alpha y\left(t\right) = \frac{\exp(-t)\left|y(t)\right|}{(9+\exp(t))(1+|y(t)|)}, \quad t \in [0,T] := [0,1]\,, \alpha \in \left]0,1\right], \tag{2.5.1}$$

$$y(0) + y(1) = 0 \tag{2.5.2}$$

On prend :

$$f(t,x) = \frac{\exp(-t)x}{(9+\exp(t))(1+x)}, (t,x) \in [0,1] \times [0,\infty[\,. \tag{2.5.3}$$

Soient $x, y \in [0,\infty[\,$, *et* $t \in [0,1]$ *.Alors, on obtient :*

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,y)| &= \frac{\exp(-t)}{(9+\exp(t))} \left| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \right| \\ &= \frac{\exp(-t)\,|x-y|}{(9+\exp(t))\,(1+x)\,(1+y)} \\ &= \frac{\exp(-t)}{(9+\exp(t))}\,|x-y| \\ &\leq \frac{1}{10}\ |x-y| \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

Donc la condition (H1) détient avec $k = \frac{1}{10}$*, nous allons vérifier que la condition est satisfaite (2.2.1) pour les valeurs appropriées d'un* $\alpha \in (0,1]$ *avec* $a = b = T = 1$.

En effet :

$$\begin{aligned} \frac{3k}{2\Gamma(\alpha+1)} &< 1 \\ &\Longleftrightarrow \Gamma(\alpha+1) > \frac{3k}{2} = 0,15 \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Puis par le théorème (2.2.1) le problème (2.5.1) et (2.5.2) a une solution unique sur $[0,1]$ *,pour des valeurs de condition satisfaisante (2.5.2).*

Par exemple :

Si $\alpha = \frac{1}{5}$, *puis*

$$\Gamma(\alpha+1) = \Gamma(\frac{6}{5}) = 0,92$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{3k}{2}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} &= \frac{0,15}{0,92} \\ &= 0,1630434 < 1 \end{aligned}$$

Si $\alpha = \frac{2}{3}$, *puis*

$$\Gamma(\alpha+1) = \Gamma(\frac{5}{3}) = 0,89$$

et :

$$\frac{3k}{2}\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{0,15}{0,89} = 0,1685393 < 1$$

On passe maintenant à vérifie les hypothéses,

(H2) : f est continue sur $[0,1] \times [0,\infty[$.

(H3) : f est bornée.

On a,

$$\begin{aligned} |f(t,x)| &= \left|\frac{\exp(-t)x}{(9+\exp(t))(1+x)}\right| \\ &\leq \frac{1}{\exp(t)(9+\exp(t))}\left|\frac{x}{1+x}\right| \\ &\leq \frac{1}{10} \leq M. \end{aligned}$$

Donc f est bornée.

D'où, le problème admet au moins une solution sur $[0,1]$.

CONCLUSION

Notre but principal, dans ce mémoire, est de présenter plusieurs résultats d'existence pour certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Caputo avec des conditions locales dans des espaces de Banach. Ces résultats ont été obtenus par l'utilisation du théorème de point fixe de Banach et le théorème de point fixe de Schaefer.

Dans le future, on peut utilisé l'alternative non-linéaire de Leray Schauder pour montrer l'existence de ces problèmes.

Bibliographie

[1] **M. Benchohra, S. Hamani and S. K. Ntouyas**, *Boundary value problems for differential equations with fractional order*, Surveys in Mathematics and its Applications, 3(2008).

[2] **L.Byszewski**, *Theorem about existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal cauchy problem*, J. Math. Anal. Appl. 162(1991), 494-505.

[3] **L.Byszewski**, *Existence and uniqueness of mild and classical solutions of semilinear functional-differential evolution nonlocal cauchy problem*. Selected problems of mathematics, 25-33, 50th Anniv. Cracow Univ. Technol. Anniv. Issue, Cracow Univ. Technol, Krakow, 1995.

[4] **D. Delbosco and L. Rodino**, *Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation*, J. Math. Anal. Appl. 204 (1996), 609-625.

[5] **A.A. Kilbas, Hari M. Srivastavn, and Juan J. Trujillo**, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[6] **K. S. Miller and B. Ross**, *An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations,* John Wiley, New York, 1993.

[7] **S. M. Momanl, S. B. Hadid and Z. M. Alawenh**, *Some analyticol properties of solutions of differential of equations of noninteger order*, Int. J. Math. Math. Sci. 2004 (2004), 697-701.

[8] **I. Podlubny**, *Fractional Differential Equations*, Mathematics in Sciences and Engineering, 198, Academic Press, San Diego, 1999.