Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem

Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique

Département de Mathématiques et d'Informatique

Mémoire de Master

Spécialité : Analyse Harmonique et EDP

Thème

La théorie des frames et applications

Présenté par

BENRRANOU ANISSA

Soutenu le 26 /05/2015

Devant le jury

Mme	Bensikaddour Dj.	**Président**	**U. Mostaghanem**
Mr	Ould Ali M.	**Examinateur**	**U. Mostaghanem.**
Mr	Bahri. S.M.	**Encadreur**	**U. Mostaghanem.**

Année Universitaire 2014 -2015

Table des matières

Remerciments **i**

Résumé **iii**

Introduction **iv**

1 Bases dans un espace de Banach **2**

1.1 Base de Schauder 2

1.1.1 Base de Schauder pour $C[a,b]$ 3

1.2 Bases orthonormées (BON) dans un espace de Hilbert 4

1.2.1 Base orthonormée dans $L^2[-\pi,\pi]$ 6

1.3 Noyau reproduisant 7

1.4 Suites complètes 9

1.5 Les fonctionnelles coefficients 10

1.6 Dualité 11

1.7 Bases de Riesz 12

1.8 Stabilité des bases dans des Banach 16

1.9 Exemple 20

1.10 Stabilité des bases orthonormées dans un Hilbert 22

1.10.1 Application : Stabilité du système trigonométrique 22

2 Interpolation et bases dans un Hilbert **24**

2.1 Suites de moments dans un espace de Hilbert 25

2.2 Suites de Bessel et Suites de Riesz-Fischer 28

2.3 L'espace des moments et liaison avec les suites équivalentes 33

3 Théorie des frames **37**

3.1 Opérateurs associés à une frame 40

3.1.1 Définition de l'opérateur d'analyse (ou opérateur de décomposition) . . 40

3.1.2 Suites de Bessel et opérateur pré-frame (ou opérateur de synthèse) . . . 40

3.1.3 Définition de l'opérateur frame 42

3.1.4 Frame dual 43

3.1.5 Bases de Riesz comme frames étroits 46

3.2 Frame de Gabor 51

3.2.1 Conditions nécessaires 51

3.2.2 Conditions suffisantes 53

3.3 Frames d'ondelettes 55

3.3.1 Transformée en ondelettes continues (TOC) 55

3.3.2 Conditions nécessaires et suffisantes 56

Conclusion **58**

Bibliographie **61**

Remerciements

En préambule à ce mémoire nous remercions ALLAH qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

Nos vifs remerciements à notre professeur encadrant Monsieur. **Bahri.Sidi.Mohamed** qui s'est dévoué pour nos dispenser de tous conseils et directives utiles pour la réalisation de ce modeste travail.

Mes plus sincère remerciments à Madame **Bensikaddour. DJ** d'avoir bien voulu présider mon jury et Monsieur **Ould Ali** d'avoir accepter de faire partie de ce jury.

Nous souhaitant adresser nos remerciements les plus sincères aux personnes qui nous ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

On n'oublie pas nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours soutenue et encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Dédicace

J'ai le grand honneur de dédier ce modeste travail :

À ceux qui on attendu ce jour avec impatience et qui n'ont cessé de m'en courager et qui se sont toujours sacrifiés pour mon bonheur.

À ce qui m'a fait de moi un homme : Ma trés chère mère **Bakhta** et mon trés cher père **Mohamed** qui m'ont aidé et m'ont encourage beaucoup durant toutes mes études.

À mes frères : **Abdenour** et **Abderahim.**

À mes chères soeurs : **Ghanie** et **Rahima**.

À tous mes amis avec les quels je garde les meilleurs souvenirs de la vie universitaire.

À toute la promotion **2**$^{\text{ième}}$ **année master Analyse Harmonique**.

À toutes les personnes qui me connaissent.

RÉSUMÉ

On s'intérèsse dans ce mémoire, à la classe des frames qui sont des généralisations de la notion de base dans un espace vectoriel. Elle sont des outils utiles et essentiels à l'étude des différents problèmes mathématiques nous citerons par exemples le problème de moments, frames de Gabor et frames d'ondelettes.

INTRODUCTION

L'un des concepts importants dans l'étude d'espaces des vecteurs est le concept d'une base pour l'espace du vecteur qui permet à chaque vecteur d'être représenté uniquement comme une combinaison linéaire des éléments de la base. Cependant, la propriété de l'indépendance linéaire pour une base est restrictive, quelquefois c'est impossible de trouver des vecteurs qui accomplissent les exigences de la base et aussi satisfassent des conditions externes demandés par les problèmes appliqués. Pour de tels buts, nous avons besoin de chercher des types plus flexibles de système d'ensembles. Les frames fournissent cet alternatif. Elles n'ont pas uniquement une grande variété d'usage dans les applications, mais aussi elles développent une théorie riche d'un point de vue de l'analyse pure.

Actuellement, la théorie des frames est utilisée principalement en analyse du signal. La découverte du lien entre les frames et les ondelettes et les bases de Riesz a marqué le point de départ de l'essor de la théorie des frames dans ce domaine.

C'est dans le contexte de l'étude de la série non-harmonique de Fourier que les frames ont été introduites par R.J.Duffin et A.C.Schaffer en 1952 dans ([6]). Bien que la définition générale d'une frame sur un espace de Hilbert soit déjà donnée dans cet article et qu'une théorie des frames en elle même y soit déjà développée, les mathématiciens sont concernés surtout par l'analyse non-harmonique de Fourier.

La théorie des frames analyse la complétude, la stabilité et la redondance des représentations linéaires d'un signal. Une frame est une famille de vecteurs qui permet de représenter tout signal L^2 par ses produits scalaires avec ces vecteurs. Par contre, une suite quelconque de réels peut ne pas représenter un signal.

Les frames fournissent une représentation stable, éventuellement redondante, du signal.

C'est une généralisation de la notion de base d'un espace vectoriel. En général, les frames fournissent une représentation discrète et redondante du signal.

Tout d'abord, nous commençons par une brève présentation des bases sur un espace de Banach séparable et des bases ortonormées sur espace de Hilbert séparable en tout généralité et quelques définitions et exemples de la base (dualité,base de Riesz,. . .).

Ensuite, le second chapitre on a exploiter l'approximation et l'interpolation pour gagner de plus amples informations sur les bases de Riesz dans un Hilbert.

Enfin, le troisième chapitre nous allons introduire la notion d'une "frame" qui va élucider davantage le problème des moments et en même temps prouver une autre caractéristique des bases de Riesz.

−−

Chapitre 1

Bases dans un espace de Banach

1.1 Base de Schauder

Soit X un $\mathbb{k}$-espace de Banach ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: champs des scalaires). Vu comme espace vectoriel X possède une base de Hamel c'est à dire un sous-ensemble linéaire indépendant de X qui engendre tout l'espace.

Au fait, de telle base ne peut pas être construite, son existence dépend fortement de l'axiome du choix et son utilité est par conséquent très limitée.

La notion de base qui est d'une grande importance en analyse est celle introduite par Schauder.

Définition 1.1.1 *Une suite de vecteurs $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans X est dite base de Schauder pour X si pour tout x dans cet espace, il existe une suite unique de scalaires $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n. \tag{1.1.1}$$

La convergence de la série (1.1.1) est au sens de la topologie forte (i.e. norme) de X :

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{1.1.2}$$

avec $\|\cdot\|$ la norme de X.

Ainsi, dans toute la suite, le terme "base" pour un espace de Banach de dimension infini veut dire base de Schauder.

Exemple 1.1.1 *L'espace de Banach* $l^p(1 \leq p < \infty)$ *consiste en les suites infinies de scalaires* $c = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *telles que*

$$\|c\|_p = \left(\sum_n \mid c_n \mid^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{1.1.3}$$

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une base naturel dans* l^p *:*

$$e_i = \left(0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{i^{i\grave{e}me}\ place}, 0, \ldots\right)$$

Il est claire qu'un espace de Banach avec une base doit être séparable.

Raison de la séparabilité : Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de X, alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaire finies $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, où les c_n sont des scalaires rationnels, est dénombrable et dense dans X. Il s'en suit, par exemple, que puisque l^∞ n'est pas séparable, il ne peut pas posséder de base.

Remarque 1.1.1 *On comprend par ce qui précède qu'une condition nécessaire pour qu'un espace de Banach possède une base est qu'il soit séparable. Mais cette condition n'est pas suffisante, il existe des espaces de Banach séparables qui ne possèdent pas de base.*

1.1.1 Base de Schauder pour $C[a,b]$

L'espace $C[a,b] = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ continue}\}$ est l'un des plus importants espaces de Banach classiques largement étudiés. Il est muni de la norme

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} \mid f(x) \mid . \tag{1.1.4}$$

Théorème 1.1.1 (Théorème de Weierstrass) *Les polynômes sont dense dans* $C[a,b]$ *.*

$$\forall f \in C[a,b]\ , \forall \varepsilon > 0\ \exists P \quad / \quad \mid f(x) - P(x) \mid < \varepsilon. \tag{1.1.5}$$

Pour une fonction, une suite de polynômes approximants peut être donnée même explicitement. La représentation la plus élégante est due à Bernstein.

Exemple 1.1.2 *Soit* $f \in C[0,1]$, *alors le polynôme de Bernstein pour* f *est*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{1.1.6}$$

Il est bien connu que

$$f(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} B_n(x). \tag{1.1.7}$$

uniformément sur $[0,1]$ *[1].*

Remarque 1.1.2 *Comme tout polynôme peut être approché uniformément sur un intervalle fermé par un polynôme à coefficients rationnels.*

La remarque(1.1.1) montre que l'espace $C[a,b]$ est séparable, par conséquent, il admet une base.

Théorème 1.1.2 (Schauder) *L'espace* $C[a,b]$ *possède une base de Schauder.*

1.2 Bases orthonormées (BON) dans un espace de Hilbert

Dans un espace de Hilbert séparable, un rôle distingué est joué par les bases de Schauder qui sont orthonormales. Les vecteurs de base sont mutuellement perpendiculaires et chacun deux est unitaire. Une caractérisation équivalente de telles bases est qu'elles sont des suites orthonormales complètes. (Rappelons qu'une suite de vecteurs $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans un Hilbert est dite complète si le vecteur nul est l'unique vecteur orthogonal à chaque f_n).
Il s'en suit, de cette caractérisation, que tout espace de Hilbert séparable possède une base orthonormée.
La propriété la plus importante d'une base orthonormée (comme opposée à toute autre base) est la simplicité des décompositions en base.
Si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base orthonormée d'un Hilbert H, alors pour tout $f \in H$, nous avons la décomposition de Fourier

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)\, e_n. \tag{1.2.1}$$

Le produit scalaire (f, e_n) est dite le n$^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f (relativement à $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$).
Quand la formule de Pythagore est appliquée à cette série, le résultat est l'identité de Parseval

$$\| f \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | (f, e_n) |^2 . \tag{1.2.2}$$

La validité de l'identité de Parseval pour chaque vecteur dans l'espace est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite orthonormée soit une base. Comme la transformation linéaire $f \longmapsto \{(f, e_n)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de H dans l^2 préserve les normes, elle doit aussi préserver les produits scalaires. Donc

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, e_n)\,\overline{(g, e_n)} \tag{1.2.3}$$

pour toute paire de vecteurs f et g ; c'est l'identité de Parseval généralisée.
Même si une suite orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est incomplète, l'inégalité de Bessel est toujours valide :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid (f, e_n) \mid^2 \leq \parallel f \parallel^2 . \tag{1.2.4}$$

pour tout $f \in H$. Ceci montre, en particulier, que les coefficients de Fourier de chaque élément de H forment une suite à carré sommable. Réciproquent, le théorème de Riesz-fischer montre que chaque suite à carré sommable est obtenue de la manière suivante :
Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid c_n \mid^2 < \infty, \tag{1.2.5}$$

alors il existe un élément $f \in H$ tel que

$$(f, e_n) = c_n \ , \ \ n \in \mathbb{N}^* \tag{1.2.6}$$

La preuve est triviale : il suffit de choisir

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n. \tag{1.2.7}$$

Nous pouvons donc conclure que si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite orthonormale complète dans H, alors la correspondance

$$f \longmapsto \{(f, e_n)\}_{n\in\mathbb{N}^*} \tag{1.2.8}$$

entre H et l^2 est un isomorphisme d'espace de Hilbert. Il s'en suit d'un point de vue géométrique que tout les espace de Hilbert séparables sont non distinguables c'est à dire, isomorphes.

Exemple 1.2.1 *Dans l^2, la "base naturelle" est orthonormée.*

1.2.1 Base orthonormée dans $L^2[-\pi,\pi]$

Dans $L^2[-\pi,\pi]$, avec le produit scalaire

$$(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt, \tag{1.2.9}$$

le système trigonométrique complexe $\{\exp(int)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ constitut une base orthonormée. Le fait qu'il soit orthonormal est évident, montrons qu'il est complet.

Théorème 1.2.1 *[5]Le système trigonométrique* $\{\exp(int)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *est complet dans* $L^2[-\pi,\pi]$.

Preuve. $L^2[-\pi,\pi]$ est l'espace des fonctions à carré intégrable sur le segement $[-\pi,\pi]$. Les fonctions

$$\{1,\cos(nx),\sin(nx)\}_{n\in\mathbb{Z}} \tag{1.2.10}$$

forme un système orthogonale complet, dit système trigonomètrique.

L'orthogonalité est facile à vérifier par calcul direct :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(\frac{n+m}{2})x+\cos(\frac{n-m}{2})x\right]dx. \tag{1.2.11}$$

La complétude du système (1.2.10) result du théorème de Weirstrauss sur l'approximation d'une fonction periodique continue quelconque par les polynôme trigonométrique .

Le système (1.2.10) normé, correspondant est constitué par les fonctions $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}$.

$\square$

Par conséquent, toute fonction $f\in L^2[-\pi,\pi]$ admet une décomposition unique en série de Fourier :

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\exp(int) \tag{1.2.12}$$

(pour la norme en moyenne).

Ici $\widehat{f}(n)$ décrit le n$^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f relativement à $\{\exp(int)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, i.e.,

$$\widehat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp(-int)dt. \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\dots) \tag{1.2.13}$$

D'après la formule de Parseval (2.2.2),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mid f(t) \mid^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mid \widehat{f}(n) \mid^2 . \tag{1.2.14}$$

Ainsi, l'application $f \longmapsto \left\{\widehat{f}(n)\right\}$ est un isomorphisme d'espace de Hilbert entre $L^2[-\pi,\pi]$ et l^2.

Maintenant nous introduisons une extension simple mais utile de l'identité de Parseval. Si $f \in L^2[-\pi,\pi]$, soit $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f :

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp(-ixt)dt. \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{1.2.15}$$

Proposition 1.2.1 *Pour toute fonction $f \in L^2[-\pi,\pi]$ et tout nombre réel A,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid \widehat{f}(n+A) \mid^2 = \parallel f \parallel^2 . \tag{1.2.16}$$

Preuve. Posons

$$g(t) = f(t)\exp(-iAt) \tag{1.2.17}$$

alors

$$\widehat{f}(n+A) = \widehat{g}(n) \text{ pour tout entier } n. \tag{1.2.18}$$

Comme A est réel,

$$\parallel f \parallel = \parallel g \parallel, \tag{1.2.19}$$

et le résultat s'en suit de l'identité de Parseval(1.2.2) appliquée à g. □

1.3 Noyau reproduisant

Les plus importants exemples d'espaces de Hilbert sont les espaces de fonctions. Les propriétés spéciales des fonctions considérées, telle que l'analyticité, enrichissent la structure de l'espace, ce qui en retour fournit des informations supplémentaires à propos de ces fonctions.

Soit H un espace de Hilbert constitué de fonctions à valeurs réels ou complexes définies sur un ensemble S. Nous appelons H un espace fonctionnel si pour tout $x \in S$, la fonctionnelle

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{k} \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est bornée. Cela signifit qu'il existe une constante M_x telle que pour tout $f \in H$, on a

$$| f(x) | \leq M_x \parallel f \parallel . \tag{1.3.1}$$

D'après le théorème de représentation de Riesz [**?**], toute fonctionnelle linéaire bornée sur H peut être représenter par un produit scalaire : si $x \in S$, il existe un élément unique $K_x \in H$ tel que

$$f(x) = (f, K_x) \text{ pour tout } f \in H. \tag{1.3.2}$$

La fonction K sur $S \times S$, définie par

$$K(x, y) = (K_y, K_x) = K_y(x), \tag{1.3.3}$$

est dite fonction noyau ou noyau reproduisant de H.

Exemple 1.3.1 *L'espace des suites l^2 fournit un exemple trivial d'espace de Hilbert fonctionnel. Ici S est l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, et K est donné par*

$$K(m, n) = (e_n, e_m) = \delta_{mn}. \tag{1.3.4}$$

où

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & si\ m = n \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{1.3.5}$$

et $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la "base naturelle" pour l^2.

La proposition suivante montre que le noyau reproduisant d'un espace de Hilbert fonctionnel (séparable) peut toujours être décrit explicitement en termes d'une base orthonormée de cet espace.

Proposition 1.3.1 *Si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base orthonormée pour un espace de Hilbert fonctionnel H et si K une fonction noyau de H, alors*

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(x)\overline{e_n(y)}. \tag{1.3.6}$$

Preuve. Soit x un élément quelconque fixé dans S. Si K_x est exprimé en une série de Fourier relativement à $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, alors

$$K_x = \sum_{n=1}^{\infty} (K_x, e_n)\, e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{e_n(x)} e_n. \tag{1.3.7}$$

Le résultat s'en suit encore de l'identité de Parseval (généralisée) puisque

$$K(x,y) = (K_y, K_x) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(x)\overline{e_n(y)}. \tag{1.3.8}$$

□

1.4 Suites complètes

Une base dans un espace de Banach X admet la propriété que chaque vecteur dans l'espace peut être approximé par des combinaisons finies des éléments de cette base.
Cependant, dans plusieurs cas, il suffit de connaître qu'une suite de vecteurs, qui ne soit pas nécessairement une base, admet cette propriété d'approximation. De telles suites sont dites complètes.

Définition 1.4.1 *Une suite de vecteurs $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans un espace vectoriel normé X est dite compléte (fermée, totale ou fondamentale) si son enveloppe linéaire est dense dans X, c'est à dire, si pour tout vecteur x et tout $\varepsilon > 0$, il existe une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ telle que*

$$\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \| < \varepsilon. \tag{1.4.1}$$

C'est une conséquence importante et directe du théorème de Hahn-Banach [10]que la complétion d'une suite de vecteurs $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans X est équivalente à la condition suivante : si $\mu \in X'$ (le dual topologique de X) et si $\mu(x_n) = 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, alors $\mu = 0$. Quand X est un espace de Hilbert, le théorème de représentation de Riesz montre que tout est bien définit.

Exemple 1.4.1 *Dans $C[a,b]$, la suite des puissances $\{1, t, t^2, \ldots\}$ est complète en vertu du théorème de Weierstrauss sur l'approximation polynômiale :*

Il s'en suit que si g est un élément de $C[a,b]$ pour lequel tous les moments

$$\int_a^b t^n g(t)dt. \qquad ,n \in \mathbb{N}^* \tag{1.4.2}$$

sont nuls, alors g doit être nul. En effet, si l'on écrit

$$\mu(f) = \int_a^b f(t)g(t)dt, \tag{1.4.3}$$

alors μ est une fonctionnelle linéaire bornée sur $C[a,b]$ et $\mu(t^n) = 0$, pour tout n. Comme les puissances de t sont complètes, $\mu = 0$, et alors g doit être nul.

1.5 Les fonctionnelles coefficients

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base d'un Banach X, alors tout vecteur $x \in X$ admet une unique représentation en série de la forme

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n. \tag{1.5.1}$$

Il est clair que chaque coefficient c_n est une fonction linéaire de x. Si l'on note cette fonction linéaire par f_n, alors

$$c_n = f_n(x) \tag{1.5.2}$$

et l'on peut écrire

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)x_n. \tag{1.5.3}$$

Les f_n ainsi définies sont dites coefficients fonctionnels associés à la base $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ces coefficients jouent un rôle essentiel dans plusieurs domaines de la théorie des espaces de Banach ; peut être le fait le plus important est qu'elles soient continues.

Théorème 1.5.1 *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base d'un Banach X et si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite associée des fonctionnelles coefficients, alors chaque $f_n \in X'$. De plus, il existe une constante M telle que*

$$1 \leq \| x_n \| \| f_n \| \leq M \qquad (n \in \mathbb{N}^*). \tag{1.5.4}$$

1.6 Dualité

Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base dans un Banach X et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sa suite associée de coefficients fonctionnels.

Question : Que peut-on dire de la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Surement $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une base de X'(dual topologique de X). En effet, X' étant non séparable alors il ne contient pas de base (Par exemple $X = l^1$). Par conséquent, quand $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est complète, le plus qu'on puisse espérer est qu'elle soit une base pour son enveloppe linéaire fermée.

Notons par : $[x_n] = \overline{span}\,\{x_n\}$.

Théorème 1.6.1 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une base pour* $[f_n]$ *et la décomposition*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) f_n, \tag{1.6.1}$$

est valide pour tout $f \in [f_n]$*.*

Remarque 1.6.1 *Quand* X *est un Banach réflexif,* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est à fortiori complète.*

Théorème 1.6.2 *Si* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une base d'un Banach réflexif* X *(i.e.,* $X'' = X$*), alors la suite associée de fonctionnelles coefficients .* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une base de* X'*.*

Pour la suite de cette section X dénote un espace de Hilbert fixe.

Deux suites $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans X sont dites biorthogonales si

$$(x_m, y_n) = \delta_{mn} \text{ , pour tout } m,n. \tag{1.6.2}$$

δ_{mn} étant le symbole de Kronekcer.

Le théorème de Hahn-Banach [10] montre que, pour une suite donnée $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, une suite biorthogonale $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ existe si, et seulement si, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minimale (i.e., indépendante ou libre : cela signifit que tout élément de la suite n'appartient pas à l'enveloppe linéaire fermée de l'autre). Si cette condition est vérifiée, alors la suite biorthogonale $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est déterminée d'une manière unique si, et seulement si, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est complète.

Supposons maintenant que X est séparable et que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de X. L'isomorphisme entre X et X' montre que pour toute fonctionnelle coefficient f_n correspond un éléments $y_n \in X$ tel que

$$f_n(x) = (x, y_n) \text{ pour tout } x. \tag{1.6.3}$$

Comme $f_n(x_m) = \delta_{mn}$, alors $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont biorthogonales.
Ainsi, nous avons vu que toute base $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'un Hilbert possède une suite biorthogonale unique $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. En terme de cette paire biorthogonale, chaque vecteur x dans l'espace peut être représenté d'une manière unique sous la forme

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, y_n)\, x_n. \tag{1.6.4}$$

En combinant les théorèmes(1.6.1) et (1.6.2), on montre que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi une base pour X et donc par dualité,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, x_n)\, y_n. \tag{1.6.5}$$

Ainsi, dans un Hilbert la suite biorthogonale à une base est elle même une base.

1.7 Bases de Riesz

La manière la plus simple et peut être la plus évidente pour construire une nouvelle base à partir d'une ancienne est à travers l'isomorphisme d'espaces. Donc si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base quelconque fixe d'un Banach X, et si l'opérateur borné inversible T transforme $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ en $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, i.e., si

$$Tx_n = y_n \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \tag{1.7.1}$$

alors $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi une base de X. En effet, il est facile de voir que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont équivalentes dans le sens suivant.

Définition 1.7.1 *Deux bases $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'un Banach X sont dites équivalentes si :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \textit{ converge si,et seulement si,} \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n \textit{ converge.}$$

La propriété d'être lier par un isomorphisme d'espace caractérise complètement les bases équivalentes.

Théorème 1.7.1 *Deux bases* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *d'un Banach* X *sont équivalentes si, et seulement si, il existe un opérateur borné inversible* $T : X \longrightarrow X$ *tel que*

$$Tx_n = y_n \text{ pour tout } n. \tag{1.7.2}$$

Théorème 1.7.2 *Dans un espace de Hilbert, les bases équivalentes admettent des suites biorthogonales.*

Preuve. H un Hilbert

$$\begin{array}{lccccc} \text{Suites équivalentes} & \{x_n\} & \simeq & \{y_n\} & \longrightarrow & \text{base} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \Downarrow \\ \text{Suites biorthogonales} & \{f_n\} & & \{g_n\} & \longrightarrow & \text{base} \end{array}$$

Soit

$$\begin{array}{ccccc} T & : & H & \longrightarrow & H \\ & & x_n & \longrightarrow & Tx_n = y_n \end{array}$$

T inversible et borné implique que T^*inversible et borné.

À voir

$$T^* g_n = f_n \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

En effet,

$$(T^* g_n, x_m) = (g_n, Tx_m) = (g_n, y_m) = \delta_{mn} = (f_n, x_m)\,, \tag{1.7.3}$$

comme $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}^*}$ est complète, l'assertion s'en suit ceci prouve que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des bases équivalentes pour H. □

Dans un espace de Hilbert, les plus importantes bases sont orthonormales.

Les secondes dans l'importance sont les bases qui sont équivalentes à certaines base orthonormée. Elles sont dites bases de Riesz, et elles constituent la classe la plus large et la plus tractable des bases connues.

Définition 1.7.2 *Une famille* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *d'un espace de Hilbert* H *est une base de Riesz s'il existe deux constantes* A,$B > 0$ *telles que*

$$A \parallel c \parallel_{l^2}^2 \leq \parallel \sum_{n\in\mathbb{N}^*} c_n f_n \parallel^2 \leq A \parallel c \parallel_{l^2}^2\,, \quad c \in l^2. \tag{1.7.4}$$

Définition 1.7.3 *Dans un Hilbert, une base est dite base de Riesz si elle est équivalente à une base orthonormée, c'est à dire, si elle est obtenue à partir d'une base orthonormée à travers un opérateur inversible borné.*

Une base de Riesz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour un Hilbert est nécessairement bornée, c'est à dire

$$0 < \inf_n \| f_n \| \leq \sup_n \| f_n \| < \infty. \tag{1.7.5}$$

En effet, si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est obtenue via une base orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, comme image d'un opérateur inversible borné T, alors pour tout n

$$Te_n = f_n \Longrightarrow \| f_n \| = \| Te_n \| \leq \| T \| \| e_n \| = \| T \| \tag{1.7.6}$$

Il s'en suit facilement que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de Riesz, alors la suite des vecteurs $\left\{\frac{f_n}{\|f_n\|}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi une base de Riesz.

Raison : Il existe un opérateur borné inversible S tel que

$$Se_n = \frac{e_n}{\| f_n \|} \qquad n \in \mathbb{N}^* \tag{1.7.7}$$

Par conséquent, l'opérateur TS est borné et inversible, et

$$(TS)e_n = \frac{f_n}{\| f_n \|} \qquad n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.7.8}$$

Le théorème suivant fournit un nombre de propriétés caractéristiques importantes des bases de Riesz.

Théorème 1.7.3 *Soit H un Hilbert séparable. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme une base de Riesz dans H.*
2. *Il existe un produit scalaire équivalent [deux(02) produits scalaires sont équivalents si leurs normes induites sont équivalentes] relativement auquel la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ devient une base orthonormée dans H.*
3. *La suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est complète dans H, et il existe des constantes positives A et B telles que pour tous scalaires $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a :*

$$A \sum_{i=1}^{n} | c_i |^2 \leq \| \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \|^2 \leq B \sum_{i=1}^{n} | c_i |^2 \quad (n \in \mathbb{N}^*). \tag{1.7.9}$$

4. *La suite* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est complète dans* H*, et sa matrice de Gram* $\{(f_i, f_j)\}_{i,j=1}^{\infty}$ *engendre un opérateur borné inversible sur* l^2.

5. *La suite* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est complète dans* H *et possède une suite biorthogonale complète* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid (f, f_n) \mid^2 < \infty. \tag{1.7.10}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid (f, g_n) \mid^2 < \infty. \tag{1.7.11}$$

Pour tout f *dans* H.

Preuve. 1.$\Longrightarrow$ 2. : On suppose $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de Riesz dans H, alors il existe un opérateur inversible borné T qui transforme $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ en une base orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, i.e.,

$$Tf_n = e_n \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

Définissons un nouveau produit scalaire $(f, g)_1$ dans H, en posant $(f, g)_1 = (Tf, Tg)$ et soit $\| \cdot \|_1$la norme induite par ce produit scalaire. Alors

$$\frac{\| f \|}{\| T^{-1} \|} \leq \| f \|_1 \leq \| T \| \| f \| . \tag{1.7.12}$$

pour tout $f \in H$, et $(\cdot, \cdot)_1$est équivalent à $(\cdot, \cdot)$.Ainsi,

$$(f_i, f_j)_1 = (Tf_i, Tf_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}. \tag{1.7.13}$$

pour tout i et j.

2.$\Longrightarrow$ 3. : Supposons que $(f, g)_1$ est un produit scalaire dans H relativement à lequel la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme une base orthonormée. D'après les relations d'équivalence des normes :

$$m \| f \| \leq \| f \|_1 \leq M \| f \| , \tag{1.7.14}$$

on a :

$$\frac{1}{M} \| f \|_1 \leq \| f \| \leq \frac{1}{m} \| f \|_1 \tag{1.7.15}$$

pour tout f.où m et M sont des constantes positives dépendantes de f. Il s'en suit que pour tout scalaires $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a

$$\frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^{n} \mid c_i \mid^2 \leq \| \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \|^2 \leq \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{n} \mid c_i \mid^2 . \tag{1.7.16}$$

Ce qui implique que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est complète dans H. En effet, il suffit de prendre $f=\sum_{i=1}^{n}c_if_i$ dans (1.7.15).

3.$\Longrightarrow$ 1. : Soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base orthonormée quelconque dans H. Il s'en suit par hypothèse qu'il existe des opérateurs linéaires bornés T et S tels que

$$Te_n=f_n \ \text{ et } \ Sf_n=e_n \ \left(n\in\mathbb{N}^*\right). \tag{1.7.17}$$

Certainement, $ST=I$. Et comme $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est complète on a aussi $TS=I$. Donc T est inversible et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de Riesz pour H.

1.$\Longrightarrow$ 4. : Soit T un opérateur borné inversible sur H qui envoie une base orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ en une base $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.Si $A=(a_{ij})$ dénote la matrice de l'opérateur inversible T^*T relativement à $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, alors

$$a_{ij}=(T^*Te_j,e_i)=(Te_j,Te_i)=(f_j,f_i)\,. \tag{1.7.18}$$

Par conséquent, la matrice de Gram de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la conjugué de A.4.$\Longrightarrow$ 3. : voir[[16]] □

Remarque 1.7.1 *La classe des bases de Riesz est très large. Il est extrêmement difficile d'exhiber au moin une base bornée d'un espace de Hilbert qui ne soit pas équivalente à une base orthonormée.*

Nous mentionnons sans preuve l'exemple suivant d'une telle base dans l'espace $L^2\left[-\pi,\pi\right]$.

Exemple 1.7.1 *La suite*

$$\{\mid t\mid^{\alpha}\exp(int)\}_{n\in\mathbb{Z}} \tag{1.7.19}$$

avec $0<\alpha<\frac{1}{2}$, est une base de $L^2\left[-\pi,\pi\right]$ qui n'est pas une base de Riesz.

1.8 Stabilité des bases dans des Banach

Deux objets mathématiques qui sont en quelque sorte "étroitement proche" l'un à l'autre "voisins" ont souvent de propriétés communes. Nous allons montrer, dans ce qui suit, que les bases dans un Banach forment une classe stable dans le sens que des suites suffisement proches aux bases sont elles même des bases.

Commençons par formuler la notion "voisin" on "suffisement proche". Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base d'un espace de Banach X et soit $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments dans X.

Question : Quand dit-on que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est étroitement (ou suffisement) proche de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Réponse : Au fait, il existe plusieurs critères différents, mais tous ont un élément en commun chacun implique que l'application

$$x_n \longrightarrow y_n \text{ pour } (n \in \mathbb{N}^*) \tag{1.8.1}$$

oeut être prolongée à un isomorphisme T de X dans X qui soit en quelque sens "proche" de l'opérateur identité I.

De cette manière, les questions de stabilité de bases peuvent être réduite aux questions relevant de "petites" perturbations de l'opérateur identité.

Comme nous allons le voir, l'approche des opérateurs fournit un outil puissant dans la solution des problèmes de stabilité.

Le critère fondamental de la notion de stabilité, historiquement le premier, est du à Paley et wiener [12]. Il est basé sur le fait élémentaire qu'un opérateur linéaire borné T sur un Banach est inversible si l'on a

$$\| I - T \| < 1. \tag{1.8.2}$$

(C'est l'un des cas où les opérateurs linéaire ressemblent aux nombres ordinaires :
si $| t - 1 | < 1$, alors surement $\frac{1}{t}$ existe).

Théorème 1.8.1 (Paley-Wiener) *[12]Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base dans un Banach X, et supposons que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de X telle que*

$$\| \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - y_i) \| \leq \lambda \| \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \| . \tag{1.8.3}$$

Pour une certaine constante λ, $0 \leq \lambda < 1$, et tout choix des scalaires $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Alors $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de X équivalente à $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Preuve. Il s'en suit, d'après les hypothèses, que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(y_n - x_n) \tag{1.8.4}$$

est convergente toute les fois que la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ l'est. $\square$

Définissons une application $T : X \longrightarrow X$, en posant

$$T(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x_n - y_n). \tag{1.8.5}$$

Il est tout à fait évident que T est un opérateur linéaire borné et que

$$\| T \| \leq \lambda < 1 \tag{1.8.6}$$

.

Donc l'opérateur $I - T$ est inversible. Comme

$$(I - T)x_n = y_n \text{ pour tout } n \tag{1.8.7}$$

alors le résultat s'en suit.

Corollaire 1.8.1 *Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base d'un Banach X et soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sa suite associée de coefficients fonctionnels. Si $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de vecteur dans X telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n - y_n \| \| f_n \| < 1, \tag{1.8.8}$$

alors $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de X équivalente à $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Preuve. Soit

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \| x_n - y_n \| \| f_n \| \tag{1.8.9}$$

Si $x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, est une suite finie arbitraire, alors

$$\begin{aligned}
\| \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - y_i) \| &= \| \sum_{i=1}^{n} f_i(x)(x_i - y_i) \| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \| f_i(x)(x_i - y_i) \| \\
&\leq \lambda \| x \| = \lambda \| \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \| .
\end{aligned}$$

Comme $0 \leq \lambda < 1$, le résultat en découle d'après le théorème (1.8.1). $\square$

Maintenant, le théorème suivant est immédiat.

Théorème 1.8.2 (Kreiu-Milman-Rutmau) *[16]Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base pour un Banach X, alors il existe des nombres $\varepsilon_n > 0$ avec la propriété suivante : si $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de vecteurs dans X telle que*

$$\| x_n - y_n \| < \varepsilon_n, \quad (n \in \mathbb{N}^*) \tag{1.8.10}$$

alors $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base pour X équivalente à $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Preuve. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de coefficients fonctionnels associés à la base $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.D'après le corollaire du théorèm(1.8.1), il suffit de choisir ε_n suffisement petits tels que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \| f_n \| < 1. \tag{1.8.11}$$

□

Donc les deux corollaires suivants,

Corollaire 1.8.2 *Si X est un espace de Banach avec une base, alors tout sous-ensemble dense dans X contient une base.*

Corollaire 1.8.3 *L'espace $C[a,b]$ admet une base costituée entièrement de polynômes.*

Il est important pour les applications que le corollaire du théorème (1.8.1). Pour cela, nous devons utilisent le résultat bien connu concernant la "perturbation compacte" de l'opérateur identité.
Si T est un opérateur compact définit sur un Banach X et si

$$\ker(I - T) = \{0\}, \tag{1.8.12}$$

alors $I - T$ est inversible.
C'est l'alternative de Fredholm [8].

Définition 1.8.1 *Une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments d'un espace de Banach X est dite ω-indépendante si l'égalité*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = 0, \tag{1.8.13}$$

est possible seulement pour

$$c_n = 0 \ (n \in \mathbb{N}^*). \tag{1.8.14}$$

Théorème 1.8.3 *Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base d'un Banach X et soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite associée de coefficients fonctionnels. Si $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est complète dans X et si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n - y_n \| \| f_n \| < \infty, \tag{1.8.15}$$

alors $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de X équivalente à $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1.9 Exemple

Exemple 1.9.1 *1. Soit $\chi_{[0,1]}$ la fonction indicatrice sur l'intervalle $[0,1]$. Alors*

$$\left\{\exp(2\pi ikx)\chi_{[0,1]}(x)\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \tag{1.9.1}$$

est une BON pour $L^2[0,1]$, par translation nous observons que chaque $n\in\mathbb{Z}$, l'espace $L^2[n,n+1]$ admet une base orthonormée

$$\left\{\exp(2\pi ik(x-n))\chi_{[0,1]}(x-n)\right\}_{k\in\mathbb{Z}} = \left\{\exp(2\pi ikx)\chi_{[0,1]}(x-n)\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \tag{1.9.2}$$

En réunissant ces bases, nous obtenons une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$, à savoir

$$\left\{\exp(2\pi ikx)\chi_{[0,1]}(x)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}. \tag{1.9.3}$$

*2. **Base orthonormée concretes dans $L^2\,]0,1[$ et $L^2(\mathbb{R})$***

Soit $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ une base orthonormée pour$L^2\,]0,1[$, i.e., les fonctions

$$e_k(x) = \exp(2\pi ikx). \tag{1.9.4}$$

Etant donné un sous-intervalle ouvert $I\subset\,]0,1[$ avec $|\, I \,|< 1$. Nous pouvons identifier $L^2(I)$ avec le sous-espace de $L^2\,]0,1[$ qui consiste en les fonctions qui sont nuls sur $]0,1[\,\setminus I$. Ainsi une fonction $f\in L^2(I)$ est identifiée avec une fonction dans $L^2\,]0,1[$ (on garde la même notation f) admettant la décomposition suivante

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f,e_k)\, e_k, \text{ dans } L^2\,]0,1[\tag{1.9.5}$$

comme

$$\| \quad f - \sum_{|k|\le n} (f,e_k)\, e_k \|_{L^2(I)} = \left(\int_I |\, f(x) - \sum_{k=-n}^{n} (f,e_k)\exp(2\pi ikx) \,|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \quad \left(\int_0^1 |\, f(x) - \sum_{k=-n}^{n} (f,e_k)\exp(2\pi ikx) \,|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Nous avons aussi,

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (f, e_k)\, e_k, \text{ dans } L^2(I). \tag{1.9.6}$$

Ceci étant, les fonctions $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *admettent aussi la propriété de décomposition sur* $L^2(I)$. *Cependant, elles ne constituent pas une base pour* $L^2(I)$. *Pour voir ceci, on définit la fonction suivante*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in I. \\ 1, & \text{si } x \notin I. \end{cases}$$

Alors $\widetilde{f} \in L^2\,]0,1[$, *et nous avons la représentation*

$$\widetilde{f} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\widetilde{f}, e_k\right) e_k \text{ dans } L^2\,]0,1[\,. \tag{1.9.7}$$

Par restriction à I, *la décomposition (1.9.7) est aussi valide dans* $L^2(I)$, *comme* $f = \widetilde{f}$ *sur* I, *cela montre que*

$$\widetilde{f} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\widetilde{f}, e_k\right) e_k, \text{ dans } L^2(I). \tag{1.9.8}$$

Donc, les formules (1.9.6) et (1.9.8) sont deux décompositions de f *dans* $L^2(I)$, *et ne sont pas identiques, et comme* $f \neq \widetilde{f}$ *dans* $L^2\,]0,1[$, *les décompositions (1.9.5) et (1.9.7) montrent que*

$$\{(f, e_k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \neq \left\{\left(\widetilde{f}, e_k\right)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}. \tag{1.9.9}$$

La conclusion est que la restriction des fonctions $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *à* I *n'est pas une base pour* $L^2(I)$, *mais la propriété de décomposition est préservée. Dans l'exemple suivant, nous prouvons que* $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *est une frame pour* $L^2(I)$.

3. ***Limitation de la notion d'une base (surcomplétude)***

   Maintenant, comme

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\ (f, e_k)\ |^2 = \|\ f\ \|^2\ , \forall f \in L^2\,]0,1[\,, \tag{1.9.10}$$

(en particulier, on prend l'égalité pour tout $f \in L^2(I)$*), alors* $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *est une frame étroite pour* $L^2(I)$. *Nous prouvons que* $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *est surcomplète.*

1.10 Stabilité des bases orthonormées dans un Hilbert

Dans cette section H dénote un espace de Hilbert séparable et $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base orthonormée de H arbitraire et fixée. Il est tout à fait clair que les résultats de la section précédente restent valables aux base orthonormée, mais la structure d'un Hilbert fournit un critère de stabilité plus fort.

Commençons par reformuler le théorème (1.8.1).

Théorème 1.10.1 *Soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base orthonormée pour un Hilbert H et soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ proche de $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans le sens que*

$$\| \sum_{i=1}^{n} c_i(e_i - f_i) \| \leq \lambda \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | c_i |^2}. \tag{1.10.1}$$

pour un certaine constante λ, $0 \leq \lambda < 1$, et des scalaires arbitraires $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Alors $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de Riesz pour H.

1.10.1 Application : Stabilité du système trigonométrique

Il découle de ce précède que le système trigonométrique $\{\exp(int)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est stable dans $L^2[-\pi,\pi]$ sous de perturbations suffisement petites d'entiers.

Cela signifie que si $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de nombres réels ou complexes telles que $\{(\lambda_n - n)\}$ est suffisement en certain sens petit, alors le système $\{\exp(i\lambda_n t)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forme une base de $L^2[-\pi,\pi]$, en effet, une base de Riesz. Ainsi toute fonction f de $L^2[-\pi,\pi]$ admet une représentation unique en série de Fourier non- harmonique.

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp(i\lambda_n t) \qquad \text{(en moyenne)}, \tag{1.10.2}$$

avec

$$\sum_{n} | c_n |^2 < \infty. \tag{1.10.3}$$

La possibilité d'une telle représentation non-harmonique a été découverte par [Paley et Wiener [1934]], et c'est pour cette raison qu'il ont formulé le critère du théorème (1.10.1).

Remarque 1.10.1 (Relation entre base de Riesz et critère de Paley-Wiener) *Soit $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base orthonormée d'un Hilbert H. Le critère de Paley-Wiener n'est autre chose que la* *propriété que l'application :*

$$T : e_n \longrightarrow f_n \quad par \quad (n \in \mathbb{N}^*) \tag{1.10.4}$$

peut être prolongée à une isomorphisme sur tout H telle que

$$\| I - T \| < 1. \tag{1.10.5}$$

Chapitre 2

Interpolation et bases dans un Hilbert

L'interpolation et l'approximation apparaissent souvent comme deux faces d'une même pièce ; les résultats de l'une impliquent les résultats de l'autre.

Dans ce chapitre, nous allons exploiter cette dualité pour gagner de plus amples informations sur les bases de Riesz dans un Hilbert. Cela permet de mieux comprendre l'analyse des série de Fourier non- harmonique dans $L^2[-\pi, \pi]$.

Le problème d'interpolation dans un espace de Hilbert abstrait H est un prototype des problèmes de moments trigonométriques classiques dans $L^2[-\pi, \pi]$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t)\exp(-int)dt = c_n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{2.0.1}$$

Ici les c_n sont des nombres complexes donnés et une solution ϕ dans $L^2[-\pi, \pi]$ est à déterminer. On sait bien qu'une solution existe si, et seulement si, la suite des scalaires $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à l^2. La solution unique (l'unicité est garantie du fait que le système trigonométrique est complet) est donc donnée par

$$\phi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \exp(int). \tag{2.0.2}$$

Dans son extension logique à un espace de Hilbert H, le problème de moment trigonométrique prend la forme :

$$(f, f_n) = c_n \qquad (n \in \mathbb{N}^*), \tag{2.0.3}$$

avec $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ des vecteurs de H, $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ des scalaires et $f \in H$ à trouver.

Deux classes spéciales de suites $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ jouent un rôle important :

1. Celles pour lesquelles
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid (f, f_n) \mid^2 < \infty \tag{2.0.4}$$
pour tout $f \in H$. Ce sont les **suites de Bessel**.

2. Celles pour lesquelles le problème d'interpolation
$$(f, f_n) = c_n \ (n \in \mathbb{N}^*) \tag{2.0.5}$$
est solvable pour tout $\{c_n\} \in l^2$. Il s'agit de **suites de Riesz-Fischer**.

La première investigation détaillée des suites vérifiants la propriété de Bessel ou la propriété de Riesz-Fischer a été faite par [2]. Partagées par toute base orthonormée, ces deux propriétés sont les ingrédients critiques de toute base de Riesz.

2.1 Suites de moments dans un espace de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de vecteurs de H arbitraire et fixée. Par le n$^{\text{ième}}$ moment d'un élément $f \in H$, nous signifions le produit scalaire (f, f_n).
La suite $\{(f, f_n)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dite suite de moments de f, et la collection de toutes les suites de moments est dite espace de moments de $\{f_n\}$ que l'on noté $\mathcal{M}$.
Il est clair que $\mathcal{M}$ est un espace vectoriel muni de l'addition ponctuelle et de la multiplication par un scalaire.
Nous serons concernés par les questions suivantes :

i) Quand-est ce une suite de scalaires donnée appartient-elle à $\mathcal{M}$, i.e., sous quelles conditions sur $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ le problème des moments
$$(f, f_n) = c_n \ , \ (n \in \mathbb{N}^*). \tag{2.1.1}$$
admet-il au moins une solution ?

ii) Si une telle solution existe, est-elle unique ?

iii) S'il existe plusieurs solutions, comment peuvent-elles être reconstruites par $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Parmis ces questions, sauf l'unicité qui soit triviale : pour que le système d'équations (2.1.1) admet au moins une solution pour tout choix de scalaires $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ il est nécessaire et suffisant que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit complète.

Proposition 2.1.1 *Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de vecteurs appartenant à un espace de Hilbert H. Si pour une certaine suite de scalaires $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ le système (2.1.1) admet une solution $f \in H$, alors il admet une solution unique de norme minimale.*

Preuve. Soit Y le sous-espace de H engendré par les éléments $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Alors Y contient au moins une solution du problème de moments. En effet, supposons f et g deux solutions, toutes les deux appartiennent à Y, alors $f-g$ appartient en même temps à Y et $Y^{\perp}$. Comme

$$Y \cap Y^{\perp} = \{0\}, \tag{2.1.2}$$

alors

$$f = g. \tag{2.1.3}$$

Pour voir que Y contient au moins une solution du problème de moments, soit f une solution quelconque dans H et écrivons

$$f = \alpha + \beta, \quad \text{avec } \alpha \in Y \text{ et } \beta \in Y^{\perp}. \tag{2.1.4}$$

Il est claire que

$$(\alpha, f_n) = c_n \text{ pourtout } n. \tag{2.1.5}$$

Comme

$$\| \alpha \| < \| f \| \text{ sauf si } f = \alpha,$$

il s'en suit que α est l'unique solution de norme minimale. □

Exemple 2.1.1 (Interpolation finie) *Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ un ensemble de vecteurs linéairement indépendants de H. Alors le problème de moments fini*

$$(f, f_i) = c_i \quad (i = \overline{1, n}) \tag{2.1.6}$$

admet au moins une solution $f \in H$ pour tout choix de scalaires $\{c_i\}_{i=1}^{n}$. Ceci découle facilement du fait que le déterminant de Gram

$$G = \det\left((f_i, f_j)\right)_{i,j=1}^{n}. \tag{2.1.7}$$

D'un ensemble indépendant n'est jamais nul. En effet, la solution (unique) de norme minimale est donnée explicitement par la formule du déterminant :

$$f = -\frac{1}{G} \det \begin{pmatrix} 0 & f_1 & \cdot & \cdot & \cdot & f_n \\ c_1 & (f_1, f_1) & \cdot & \cdot & \cdot & (f_n, f_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & (f_1, f_n) & \cdot & \cdot & \cdot & (f_n, f_n) \end{pmatrix}. \tag{2.1.8}$$

Exemple 2.1.2 *L'espace de moments d'une base de Riesz est l^2. En effet, si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base de Riesz, d'un espace de Hilbert séparable H, alors elle possède une unique suite biorthogonale $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui, par dualité, est aussi une base de Riesz. Si $\{c_n\} \in l^2$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n$ converge vers un élément $f \in H$ vérifiant le système d'équation (2.1.1). Par conséquent, $\mathcal{M} \supset l^2$.*
D'autre part, l'expression

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, f_n)\, g_n, \tag{2.1.9}$$

est valide pour tout élément de H, donc $\{(f, f_n)\} \in l^2$ et $\mathcal{M} \subset l^2$. Enfin $\mathcal{M} = l^2$.

Il est à remarque que très souvent, il n'existe pas toujours de solution simple au problème de moments générale $(f, f_n) = c_n$.
Le théorème suivant fournit un critère pour une solution qui quoique nécessaire et suffisante, est en pratique difficile à appliquer. Néanmoins, en l'absence d'informations additionnelles sur les f_n, est fréquemment utilisée.

Théorème 2.1.1 *[16]Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de vecteurs appartenant à un Hilbert H et $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de scalaires. Pour que les équations*

$$(f, f_n) = c_n \ (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.1.10}$$

admettent au moins une solution $f \in H$ telle que $\| f \| \leq M$, il est nécessaire et suffisant que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{c_n} \right| \leq M \, \| a_n f_n \| \tag{2.1.11}$$

pour toute suite finie de scalaires $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2.2 Suites de Bessel et Suites de Riesz-Fischer

L'inégalité de Bessel et le théorème de Riesz-Fischer donnent l'une des caractéristiques fondamentales d'une base orthonormée :
l'espace des moments est l^2.
A cause de leur importance intrinsèque ces propriétés ont été résumées çi dessous.

Définition 2.2.1 *Une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ de vecteurs appartenant à un espace de Hilbert H est dite suite de Bessel si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid (f, f_n) \mid^2 < \infty, \tag{2.2.1}$$

pour tout élément $f \in H$.
La suite est dite une suite de Riesz-Fischer si le problème des moments

$$(f, f_n) = c_n \ (n \in \mathbb{N}^*) \tag{2.2.2}$$

admet au moins une solution $f \in H$ toutes les fois que $\{c_n\} \in l^2$.

Ainsi, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Bessel toutes les fois que son espace de moments est une sous-ensemble de l^2, tandis qu'elle est une suite de Riesz-Fischer si son espace de moments contient l^2.

Proposition 2.2.1 *Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de vecteur appartenant à un espace de Hilbert H. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Bessel, alors il existe une constante M telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid (f, f_n) \mid^2 \leq M \parallel f \parallel^2 , \tag{2.2.3}$$

pour tout $f \in H$.
Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Riesz-Fischer, alors il existe une constante m telle que la relation (2.2.2) admet au moins une solution f vérifiant :

$$\parallel f \parallel^2 \leq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \mid c_n \mid^2 , \tag{2.2.4}$$

à condition que $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2$.

Les nombres m et M apparaissantes dans la proposition sont dits bornes de la suite.

Nous introduisons séparément le corollaire suivant en vue de son importance dans les applications.

Corollaire 2.2.1 ([16]) *Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Riesz-Fischer dans un espace de Hilbert H, alors la boule unité de l^2 peut être interpolée dans un sens uniformément borné.*

Le théorème suivant fournit une caractérisation fondamentale des **suites de Bessel** et des **suites de Riesz-Fischer** dans un espace de Hilbert.

Théorème 2.2.1 *Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de vecteurs appartenant à un espace de Hilbert H. Alors*

1. *$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Bessel de borne M si, et seulement si, l'inégalité*

$$\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \|^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} | c_n |^2 , \tag{2.2.5}$$

est vérifiée pour toute suite de scalaires $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ finie.

2. *$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Riesz-Fischer de borne m si, et seulement si, l'inégalité*

$$m \sum_{n=1}^{\infty} | c_n |^2 \leq \| \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \|^2 , \tag{2.2.6}$$

est vérifiée pour toute suite de scalaire $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ finie.

Preuve. 1. pour la nécessite, soit $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de scalaires finie quelconque et soit

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n.$$

Alors

$$\begin{aligned} \| f \|^4 = | (f,f) |^2 &= | \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n} (f, f_n) |^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} | c_n |^2 \sum_{n=1}^{\infty} | (f, f_n) |^2 \\ &\leq M \| f \|^2 \sum_{n=1}^{\infty} | c_n |^2 , \end{aligned}$$

d'après la proposition (2.2.1). En divisant par $\| f \|^2$, on trouve

$$\| f \|^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} | c_n |^2 . \tag{2.2.7}$$

Pour la suffisance, primo observons que

$$\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \|^2 \leq M \sum_{n=1}^{\infty} | c_n |^2 , \tag{2.2.8}$$

pour tout $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \in l^2$. Si f est un élément de H quelconque et fixé, alors pour toute suite à carré-sommable $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a

$$\begin{aligned} | \sum_{n=1}^{\infty} c_n (f, f_n) |^2 &= \left| \left(f, \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n} f_n \right) \right|^2 \\ &\leq \| f \|^2 \| \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n} f_n \|^2 \\ &\leq M \| f \|^2 \sum_{n=1}^{\infty} | c_n |^2 . \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} | (f, f_n) |^2 \leq M \| f \|^2 , \tag{2.2.9}$$

d'après l'inverse de l'inégalité de Hölder.

2. Pour la nécessite, fixons une suite de scalaires finie quelconque $\{c_i\}_{i=1}^{N}$ et choisissons $a_1, a_2, \ldots$ tels que :

$$\begin{array}{lll} (i) & a_n & = 0 \text{ si } n > N, \\ (ii) & \sum_{n=1}^{N} | a_n |^2 & = 1, \\ (iii) & | \sum_{n=1}^{N} \overline{a}_n c_n |^2 & = \sum_{n=1}^{N} | c_n |^2 . \end{array}$$

D'après la proposition (2.2.1), il existe une constante m (indépendante de N et $\{c_i\}_{i=1}^{N}$) telle que le problème des moments

$$(f, f_n) = c_n, \qquad (n \in \mathbb{N}^*). \tag{2.2.10}$$

admet au moins une solution f avec

$$\| f \|^2 \leq \frac{1}{m}. \tag{2.2.11}$$

En appliquant le théorème (2.1.1), on trouve que

$$\sum_{n=1}^{N} \mid c_n \mid^2 = \mid \sum_{n=1}^{N} \overline{a}_n c_n \mid^2 \leq \frac{1}{m} \parallel \sum_{n=1}^{N} c_n f_n \parallel^2 , \tag{2.2.12}$$

et le résultat s'en suit.Pour la suffisance, il suffit de montre que (2.2.10) admet une solution f avec

$$\parallel f \parallel^2 \leq \frac{1}{m} \tag{2.2.13}$$

toutes les fois que

$$\sum_{n=1}^{N} \mid a_n \mid^2 \leq 1. \tag{2.2.14}$$

Supposons donc que $\{a_n\}_{n=1}^{N}$ appartient à la boule unité de l^2 et soit $\{c_n\}_{n=1}^{N}$ des scalaires arbitraires. Comme

$$\mid \sum_{n=1}^{N} \overline{a}_n c_n \mid^2 \leq \sum_{n=1}^{N} \mid c_n \mid^2 \leq \frac{1}{m} \parallel \sum_{n=1}^{N} c_n f_n \parallel^2 , \tag{2.2.15}$$

Le résultat est, encore une fois, une conséquence du théorème (2.1.1). □

Le critère du théorème (2.2.1) peut être exprimé plus succinctement dans le langage des opérateurs. Ainsi, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Bessel si, et seulement si, pour tout base orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans H, il existe un opérateur linéaire borné

$$T : H \longrightarrow H$$

tel que

$$Te_n = f_n \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \tag{2.2.16}$$

et elle est une suite de Riesz-Fischer si, et seulement si, il existe un opérateur linéaire borné

$$S : H \longrightarrow H$$

tel que

$$Sf_n = e_n \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \tag{2.2.17}$$

Une formulation équivalente en termes de la matrice de Gram

$$A = ((f_i, f_j))_{i,j=1}^{\infty} \tag{2.2.18}$$

est aussi utile. Dans ce cas, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Bessel de borne M si, et seulement si, A définie un opérateur borné (auto-adjoint) sur l^2 de norme n'excédant pas M.

Raison : A est borné par M si, et seulement si, la forme quadratique associée

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} (f_i, f_j)\, c_i \overline{c}_j, \tag{2.2.19}$$

est bornée par M, et égale à

$$\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \|^2 . \tag{2.2.20}$$

D'une manière similaire, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Riesz-Fischer de borne m si, et seulement si, les sections A_n de A sont bornées inférieurement par m. Cela signifit que

$$m \| c \| \leq \| A_n c \| , \tag{2.2.21}$$

pour tout n-uplet $c = \{c_i\}_{i=1}^{n}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ici les normes sont les normes euclidiennes, et A_n est la matrice $n \times n$ $((f_i, f_j))_{i,j=1}^{n}$. On vérifié facilement que cela équivaut à

$$m \| c \|^2 \leq (A_n c, c) \text{ pour tout } n \text{ et } c, \tag{2.2.22}$$

c'est aussi équivalent à

$$\| A_n^{-1} \| \leq \frac{1}{m} \text{ pour tout } n. \tag{2.2.23}$$

Exemple 2.2.1 *La suite des puissances* $\{1, t, t^2, \ldots\}$ *forme une suite de Bessel dans* $L^2[0,1]$. *En effet, si* $f \in L^2[0,1]$ *et*

$$c_n = \int_0^1 t^n f(t) dt, \ (n \in \mathbb{N}^*) \tag{2.2.24}$$

alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} | c_n |^2 \leq \ \pi \int_0^1 | f(t) |^2 \, dt. \tag{2.2.25}$$

La constante π *est la meilleure possible.*

Raison : La matrice de Gram correspondante

$$A = \left((t^i, t^j) \right)_{i,j=0}^{\infty} \tag{2.2.26}$$

est la "matrice de Hilbert" (l'entrée $i, j^{\text{ième}}$ est $\frac{1}{i+j+1}$), est donc définie un opérateur linéaire borné sur l^2 de norme π [9].

2.3 L'espace des moments et liaison avec les suites équivalentes

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de vecteurs d'un espace de Hilbert séparable. Nous voulons connaître l'impact des propriétés de suites sur leur espace de moments. Nous avons vu, par exemple, que si une suite est une base de Riesz, alors son espace de moments coïncide avec l^2. L'inverse, bien sûr, est faux : l'enlèvement d'un seul vecteur d'une base de Riesz laisse un ensemble incomplet dont l'espace de moments est aussi l^2. Le but de la présente section est de montrer que l'inverse est vrais à condition que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit complète : une suite complète de vecteurs d'un Hilbert est une base de Riesz si, et seulement si, son espace de moments coïncide avec l^2.

On commence par montrer que l'espace de moments caractérise les suites complètes jusqu'à l'équivalence.

Deux suites de vecteurs $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ appartenant à une espace de Hilbert H sont dites équivalentes s'il existe un opérateur inversible borné

$$T : H \longrightarrow H$$

tel que

$$Tf_n = g_n \ (n \in \mathbb{N}^*). \tag{2.3.1}$$

Théorème 2.3.1 *Deux suites complètes de vecteurs d'un espace de Hilbert séparable sont équivalentes si, et seulement si, elles ont le même espace de moments.*

Preuve. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites complètes dans H et supposons qu'il existe un opérateur inversible borné T sur H tel que

$$Tf_n = g_n(n \in \mathbb{N}^*). \tag{2.3.2}$$

À voir que le système d'équation

$$(f, f_n) = (g, g_n)\,(n \in \mathbb{N}^*) \tag{2.3.3}$$

admet une solution unique f, pour tout g, et une solution unique g, pour tout f. Il est clair que cela est vrais si

$$f = T^*g, \tag{2.3.4}$$

et la condition est nécessaire.Supposons maintenant que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont le même espace de moments. Alors pour tout g dans H correspond un vecteur unique f tel que l'égalité (2.3.3) est vérifiée. Nous allons montrer que cela implique l'existence d'un opérateur linéaire borné

$$T : H \longrightarrow H$$

tel que

$$Tf_n = g_n \ (n \in \mathbb{N}^*). \tag{2.3.5}$$

Soit Y l'enveloppe linéaire des f_n. Si $f \in Y$, avec $f = \sum_{n=1}^{N} c_n f_n$, on définit Tf en posant

$$Tf = \sum_{n=1}^{N} c_n g_n. \tag{2.3.6}$$

Primo, voyons que T est bien défini. Supposons le contraire, alors il existe des scalaires $\{c_i\}_{i=1}^{N}$ tels que

$$\sum_{n=1}^{N} c_n f_n = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{N} c_n g_n \neq 0. \tag{2.3.7}$$

En choisissant

$$g = \sum_{n=1}^{N} c_n g_n \tag{2.3.8}$$

et en prenant f la solution correspondante de l'égalité (2.3.3), on trouve

$$\begin{aligned} 0 = \left(f, \sum_{n=1}^{N} c_n f_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \overline{c_n} \,(f, f_n) &= \sum_{n=1}^{N} \overline{c_n} \,(g, g_n) \\ &= \left(g, \sum_{n=1}^{N} c_n g_n\right) \\ &= \parallel g \parallel^2 \neq 0, \end{aligned}$$

ce qui est absurde. donc T est bien défini.

Il est claire que T est linéaire et que l'égalité (2.3.5) est vérifiée.

Pour montrer que T est borné, définissons une fonction μ sur H par

$$\mu(g) = f, \tag{2.3.9}$$

où f est l'unique solution de l'égalité (2.3.3) . On affirme que μ est un opérateur linéaire borné. La linéarité est facile : si $h_1$et h_2 sont deux vecteurs dans H et si a_1 et a_2 sont des scalaires, alors pour tout n

$$\begin{aligned}(a_1h_1+a_2h_2,g_n) &= a_1(h_1,g_n)+a_2(h_2,g_n)\\ &= a_1(\mu(h_1),f_n)+a_2(\mu(h_2),f_n)\\ &= (a_1\mu(h_1)+a_2\mu(h_2),f_n)\,.\end{aligned}$$

Comme $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est complète, il s'en suit que

$$\mu(a_1h_1+a_2h_2)+a_1\mu(h_1)+a_2\mu(h_2) \tag{2.3.10}$$

et μ est linéaire. Supposons maintenant que $\{h_n\}$ est une suite dans H telle que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} h_n = h \text{ et } \lim_{n\longrightarrow\infty}\mu(h_n)=k.$$

Alors

$$(h,g_i)=\lim_{n\longrightarrow\infty}(h_n,g_i)=\lim_{n\longrightarrow\infty}(\mu(h_n),f_i)=(k,f_i)\,.$$

pour tout i, et donc par définition de μ on a $k=\mu(h)$. Ainsi μ est borné d'après le théorème de graphe fermé.

Soit f un élément quelconque de Y. Alors pour tout $g\in H$,

$$|\,(Tf,g)\,|=|\,(f,\mu(g))\,|\leq\|\,f\,\|\|\,\mu\,\|\|\,g\,\|\,, \tag{2.3.11}$$

et donc

$$\|\,Tf\,\|\leq\|\,f\,\|\|\,\mu\,\|\,. \tag{2.3.12}$$

Ainsi, T est borné sur Y. Comme Y est un sous-espace dense, nous pouvons prolonger T en un opérateur linéaire borné sur tout H.

D'une manière similaire, comme l'égalité (2.3.3) peut être résolue d'une manière unique pour g, étant donné f, il existe un opérateur linéaire borné

$$S:H\longrightarrow H$$

tel que

$$Sg_n=f_n \quad (n\in\mathbb{N}^*). \tag{2.3.13}$$

En combinant les deux égalités (2.3.5) et (3.1.10), on montre que

$$ST=I=TS, \tag{2.3.14}$$

car $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont toutes deux complètes. Par conséquent, T est inversible, et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des bases équivalentes pour H. $\square$

Maintenant, le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 2.3.1 *Une suite complète de vecteurs dans un espace de Hilbert séparable, est une base de Riesz si, et seulement si, son espace de moments est égale à l^2.*

Chapitre 3

Théorie des frames

Nous avons vu que l'étude des bases de Riesz dans un espace de Hilbert séparable H peut être réduite à l'étude d'un problème de moments abstrait

$$(f, f_n) = c_n \ (n \in \mathbb{N}^*). \tag{3.0.1}$$

Dans ce chapitre, nous allons introduire la notion d'une "frame" qui va élucider davantage le problème des moments et en même temps prouver une autre caractéristique des bases de Riesz.

Définition 3.0.1 *Une suite de vecteurs distincts $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'un espace de Hilbert séparable H est dite une frame s'il existe deux constantes positives A et B telles que*

$$A \parallel f \parallel^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\ (f, f_n)\ |^2 \leq B \parallel f \parallel^2 \tag{3.0.2}$$

pour tout $f \in H$. Les nombres A et B sont dits bornes (inférieure et supérieure respectivement) du frame.

La condition pour qu'une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de H soit une frame peut-être scinder en une condition supérieure, à savoir

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ (f, f_n)\ |^2 \leq B \parallel f \parallel^2, \ \text{ pour tout } f \in H \tag{3.0.3}$$

et une condition inférieure, à savoir

$$A \parallel f \parallel^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\ (f, f_n)\ |^2 \text{ ,pour tout } f \in H. \tag{3.0.4}$$

Il est souvent intéressant de regarder ces deux conditions séparément, c'est pour quoi nous introduisons la définition suivante.

Définition 3.0.2 *Soit H un espace de Hilbert, une suite d'éléments $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de H est appelée une suite de Bessel sur H, s'il existe une constante B strictement positive telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid (f, f_n) \mid^2 \leq B \parallel f \parallel^2 \text{ ,pour tout } f \in H. \tag{3.0.5}$$

La constante B est appelée borne de la suite de Bessel $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Il est claire qu'une frame est un ensemble de vecteurs complet car

$$\begin{cases} (f, f_n) = 0 \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Longrightarrow f = 0. \tag{3.0.6}$$

Remarque 3.0.1 *Notons aussi que la seconde inégalité dans (3.0.2) est juste la condition que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Bessel de borne B.*

La définition d'une frame montre que si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une frame pour H, alors $\overline{\text{span}}\{f_n\}_{n=1}^{\infty} = H$.
Si nous avons besoin de considérer une suite qui n'est pas complète dans H, alors elle ne peut pas former une frame pour H, mais elle reste bien une frames pour l'enveloppe linéaire fermée de ses éléments.

Définition 3.0.3 *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite dans H, on dit que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de frame si, et seulement si, elle est une frame pour $\overline{span}\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Exemple 3.0.1 *Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite orthonormale complète dans H, alors l'identité de Parseval montre que (3.0.2) est satisfaite avec $A = B = 1$.*

Remarque 3.0.2 *Si $A = B$, la frame est dite frame ajustée (ou étroite).*

Exemple 3.0.2 *Soit $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ une base orthonormée dans H. En répétant chaque élément dans $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ deux fois, on obtient*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \ldots\} \tag{3.0.7}$$

Ce système est une frame ajustée (ou frame 2-étroite) pour H, avec les bornes de frame $A = B = 2$.

Exemple 3.0.3 *Le système*

$$\left\{e_1, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \ldots, \frac{e_N}{\sqrt{N}}, \ldots, \frac{e_N}{\sqrt{N}}\right\} \tag{3.0.8}$$

est une frame de Parseval . Cet exemple indique une issue importante qu'une frame de Parseval peut avoir des copies multiples d'un seul vecteur.

Exemple 3.0.4 *Si l'on répéte seulement le vecteur e_1 a seulement répéter, nous obtenons*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, \ldots\} \tag{3.0.9}$$

ce système est une frame avec les bornes $A = 1$ et $B = 2$.

Remarque 3.0.3 *Une frame n'est pas nécessairement une base, pour s'en convaincre, il suffit de remarquer qu'en ajoutant l'élément 0 à la frame $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ on garde une frame.*

Exemple 3.0.5 *Soit $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ une base orthonormée dans H, alors le système*

$$\{e_1, 0, e_2, 0, \ldots, e_N, 0, \ldots\} \tag{3.0.10}$$

est une frame de Parseval pour H.

Exemple 3.0.6 (Frame de Fourier non harmonique) *Un système d'exponentielles complexes $\{\exp(i\lambda_n t)\}$ est une frame dans $L^2[-\pi, \pi]$ si*

$$A\int_{-\pi}^{\pi} \mid \phi(t) \mid^2 dt \leq \sum_n \mid \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t)\exp(-i\lambda_n t)dt \mid^2 \leq B\int_{-\pi}^{\pi} \mid \phi(t) \mid^2 dt. \tag{3.0.11}$$

pour tout $\phi \in L^2[-\pi, \pi]$. D'après le théorème de Paley-Wiener la formule(3.0.11) est équivalente à

$$A\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(x) \mid^2 dx \leq \sum_n \mid f(\lambda_n) \mid^2 \leq B\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(x) \mid^2 dx \tag{3.0.12}$$

pour toute fonction appartenant à l'espace de Paley-Wiener.

Exemple 3.0.7 (Frame de Mercedes-Benz) *Soit $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subset \mathbb{R}^2$ telle que*

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}(0,1)^\top, \varphi_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})^\top \text{ et } \varphi_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})^\top \tag{3.0.13}$$

On pose

$$\Phi^* = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

avec la décomposition corespondante

$$\forall X \in \mathbb{R}^2,\ X = \sum_{n=1}^{3} (x, \varphi_n)\, \varphi_n = \Phi\Phi^* X, \tag{3.0.14}$$

et de norme

$$\|X\|^2 = \sum_{n=1}^{3} \mid (x, \varphi_n) \mid^2 = \| X \|^2 . \tag{3.0.15}$$

3.1 Opérateurs associés à une frame

3.1.1 Définition de l'opérateur d'analyse (ou opérateur de décomposition)

Définition 3.1.1 *Considérons une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de H. Nous définissons l'opérateur d'analyse (ou opérateur de décomposition) que l'on note T^* par*

$$\begin{array}{cccl} T^* & : & H & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ & & f & \longrightarrow & T^* f = \{(f, f_n)\}_{n=1}^{\infty} \end{array}$$

3.1.2 Suites de Bessel et opérateur pré-frame (ou opérateur de synthèse)

Les suite de Bessel peuvent être caractérisées grâce à l'opérateur d'analyse associé T^*.

Proposition 3.1.1 *La suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de H est une suite de Bessel sur H si, et seulement si, l'opérateur d'analyse associé*

$$T^* : H \longrightarrow l^2$$

est défini et continu de H dans l^2. Dans ce cas, on a même

$$\| T^* \| \leq \sqrt{B},$$

pour toute borne B de la suite de Bessel $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Preuve. La première partie de la proposition résult directement de la définition d'une suite de Bessel. En effet, l'opérateur d'analyse T^* est continu de H dans l^2 si, et seulement si, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\| T^* f \|_{l^2(\mathbb{N})} \leq C \| f \|_H \; , \forall f \in H \tag{3.1.1}$$

c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} | (f, f_n) |^2} \leq C \| f \|_H \; , \forall f \in H. \tag{3.1.2}$$

En élévant les deux membres au carré, on a la conclusion. La second partie de la proposition est immédiate. □

Corollaire 3.1.1 *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de Bessel sur H. L'opérateur pré-frame associé T est donné par*

$$\begin{array}{rcccl} T & : & l^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & H \\ & & \{c_n\}_{n=1}^{\infty} & \longrightarrow & T\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \end{array}$$

avec la convergence dans H, pour toute suite $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$.

Preuve. La première partie est immédiate. Montrons la second partie, l'opérateur Tdoit satisfaire l'égalité suivante

$$(f, T\{c_n\}_{n=1}^{\infty})_H = (T^* f, \{c_n\}_{n=1}^{\infty})_{l^2} \, , \forall f \in H, \forall \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2. \tag{3.1.3}$$

Par définition de l'opérateur adjoint. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} (f, T\{c_n\}_{n=1}^{\infty})_H &= (T^* f, \{c_n\}_{n=1}^{\infty})_{l^2} \\ &= ((f, f_n), \{c_n\}_{n=1}^{\infty})_{l^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (f, f_n) \overline{\{c_n\}}_{n=1}^{\infty} \\ &= \left(f, \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \right)_H \end{aligned}$$

pour tout $f \in H$ et pour toute suite $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$. □

3.1.3 Définition de l'opérateur frame

Définition 3.1.2 *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une frame sur un espace de Hilbert H, nous définissons l'opérateur frame associé $S : H \longrightarrow H$ par*

$$S = TT^* \tag{3.1.4}$$

Nous avons, explicitement

$$\begin{aligned} Sf &= TT^*f = T(\{(f, f_n)\}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (f, f_n)\, f_n, \forall f \in H. \end{aligned}$$

Maintenant, associons à toute frame donnée $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ un opérateur linéaire borné S sur H définie par

$$Sf = \sum_{n=1}^{\infty} (f, f_n)\, f_n. \tag{3.1.5}$$

S est borné car $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Bessel

$$\| Sf \|^2 \leq B \sum_n | (f, f_n) |^2 \leq B^2 \| f \|^2 . \tag{3.1.6}$$

Lemme 3.1.1 *Soit une frame avec l'opérateur frame S et les bornes de frame A, B alors*

i) *S est bornée, inversible, auto-adjoint et positive.*

ii) *$\{S^{-1}f_n\}$ est une frame avec les bornes B^{-1} et A^{-1}, où B^{-1} et A^{-1} sont l'optimaux bornes pour $\{S^{-1}f_n\}$. L'opérateur frame pour $\{S^{-1}f_n\}$ est S^{-1}.*

En effet, puisque

$$(Sf, f) = \sum_{n=1}^{\infty} | (f, f_n) |^2 . \tag{3.1.7}$$

il s'en suit que

$$A \| f \|^2 \leq (Sf, f) \leq \| Sf \| \| f \| \tag{3.1.8}$$

et donc,

$$A \| f \| \leq \| Sf \| . \tag{3.1.9}$$

Ceci montre que S est borné inférieurement, et donc S est injectif.

Mais S est auto-adjoint (car il est positif), et un opérateur dont l'adjoint est borné inférieurement doit être surjectif (p.234 [15]). Ainsi S est inversible, on note que tout $f \in H$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mid \left(f, S^{-1}f_n\right) \mid^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \mid \left(S^{-1}f, f_n\right) \mid^2 \\ &\leq B \parallel S^{-1}f \parallel^2 \leq B \parallel S^{-1} \parallel^2 \parallel f \parallel^2 .\end{aligned}$$

Que est $\{S^{-1}f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Bessel, il suit que l'opérateur frame pour $\{S^{-1}f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est bien définie.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left(f, S^{-1}f_n\right) S^{-1}f_n &= S^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} \left(S^{-1}f, f_n\right) f_n \\ &= S^{-1}SS^{-1}f = S^{-1}f\end{aligned}$$

Ceci montrer que l'opérateur frame pour $\{S^{-1}f_n\}_{n=1}^{\infty}$ égale à S^{-1}. On a $AI \leq S \leq BI$, donne $BI \leq S^{-1} \leq AI$ i.e.,

$$B^{-1} \parallel f \parallel^2 \leq \left(S^{-1}f, f\right) \leq A^{-1} \parallel f \parallel^2 \tag{3.1.10}$$

Par

$$S^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f, S^{-1}f_n\right) S^{-1}f_n. \tag{3.1.11}$$

Alors, la relation (3.1.10) devient

$$B^{-1} \parallel f \parallel^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mid \left(f, S^{-1}f_n\right) \mid^2 \leq A^{-1} \parallel f \parallel^2 , \forall f \in H. \tag{3.1.12}$$

Donc $\{S^{-1}f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une frame avec les bornes de frame B^{-1} et A^{-1}.

3.1.4 Frame dual

Proposition 3.1.2 *$\{S^{-1}f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une frame de H, de bornes B^{-1} et A^{-1}, appelé frame dual de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. De plus tout $f \in H$, on a les formules de décomposition*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f, S^{-1}f_n\right) f_n, \forall f \in H. \tag{3.1.13}$$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, f_n)\, S^{-1}f_n, \forall f \in H. \tag{3.1.14}$$

Preuve. La première partie de la proposition est une conséquence immédiate de

$$\left(f, S^{-1} f_n\right) = \left(S^{-1} f, f_n\right). \tag{3.1.15}$$

D'autre part, évaluons :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(f, S^{-1} f_n\right) (f_n, g) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(S^{-1} f, f_n\right) (f_n, g) \\ &= \left(S^{-1} f, Sg\right) = (f, g). \end{aligned}$$

□

Remarque 3.1.1 *Lorsque la frame est presque étroite,(c'est-à-dire lorsque les constantes A et B sont proches l'une de l'autre), f peut être reconstruit à l'aide d'un algorithme itératif, dont la convergence est d'autant plus rapide que $B - A$ est petit. Pour cela, il est nécessaire d'étudier l'inverse de l'opérateur de frame S.*

La décomposition(3.1.13) de frame est trés importante, la proposition (3.1.2) montre que si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une frame pour H, alors chaque élément dans H a une représentation comme une infinité de combinaison linéaire d'élément de frame.

Théorème 3.1.1 *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une frame avec S l'opérateur frame. Alors*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f, S^{-1} f_n\right) f_n, \ \forall f \in H. \tag{3.1.16}$$

Preuve. Soit $f \in H$, on utilise les propriétés de l'opérateur frame

$$\begin{aligned} f &= SS^{-1} f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(S^{-1} f, f_n\right) f_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(f, S^{-1} f_n\right) f_n. \end{aligned}$$

Comme $\{f_n\}$ est une suite de Bessel et $\{(f, S^{-1} f_n)\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$.De même façon

$$f = S^{-1} S f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, f_n) S^{-1} f_n. \tag{3.1.17}$$

□

Exemple 3.1.1 *Soient* $\{f_n\}_{n=1}^{3} \subset \mathbb{R}^2$ *et* $\{e_n\}_{n=1}^{2}$ *forme une base orthonormée de l'espace vectoriel de deux-dimension, et soit*

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1, \\ f_2 &= e_1 - e_2, \\ f_3 &= e_1 + e_2. \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

On utilise la définition d'un opérateur frame

$$Sf = \sum_{n=1}^{3} (f, f_n) f_n. \tag{3.1.19}$$

Premièrement, en calculant

$$\begin{aligned} Se_1 &= (f, f_1) f_1 + (f, f_2) f_2 + (f, f_3) f_3 \qquad (3.1.20) \\ &= (e_1, e_1) e_1 + (e_1, e_1 - e_2)(e_1 - e_2) + (e_1, e_1 + e_2)(e_1 + e_2) \\ &= 3e_1. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Se_2 &= (f, f_1) f_1 + (f, f_2) f_2 + (f, f_3) f_3 \qquad (3.1.21) \\ &= (e_2, e_1) e_1 + (e_2, e_1 - e_2)(e_1 - e_2) + (e_2, e_1 + e_2)(e_1 + e_2) \\ &= 2e_2. \end{aligned}$$

Donc,

$$\left.\begin{array}{l} Se_1 = 3e_1 \\ Se_2 = 2e_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} e_1 = 3S^{-1}e_1 \\ e_2 = 2S^{-1}e_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} S^{-1}e_1 = \frac{1}{3}e_1 \\ S^{-1}e_2 = \frac{1}{2}e_2 \end{array}\right. \tag{3.1.22}$$

Donc le frame dual est

$$\left\{S^{-1}f_n\right\}_{n=1}^{3} = \left\{\frac{1}{3}e_1, \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{2}e_2\right\} \tag{3.1.23}$$

Finalement, la représentation de f dans terme de frame est donnée par

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=1}^{3} \left(f, S^{-1}f_n\right) f_n \qquad (3.1.24) \\ &= \frac{1}{3}(f, e_1) e_1 + \left(f, \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{2}e_2\right)(e_1 - e_2) + \left(f, \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{2}e_2\right)(e_1 + e_2). \end{aligned}$$

Ici, la stabilité peut être utilisée pour construire des frames avec des propriétés spéciales. Par exemple, c'est important que pour chaque frame, nous pouvons associée une frame étroite canonique avec la borne de frame $A = 1$

Théorème 3.1.2 *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une frame pour H avec l'opérateur frame S. On note le racine carré de S^{-1} par $S^{-\frac{1}{2}}$. Alors $\left\{S^{-\frac{1}{2}}f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ est une frame étroite avec la borne de frame égale à 1, et*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f, S^{-\frac{1}{2}}f_n\right) S^{-\frac{1}{2}}f_n. \tag{3.1.25}$$

Preuve. Comme $S^{-\frac{1}{2}}$ est une limite d'une suite de Polynôme en S^{-1}, donc chaque $f \in H$, peut être écrit comme suit

$$\begin{aligned} f &= S^{-\frac{1}{2}}SS^{-\frac{1}{2}}f \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(S^{-\frac{1}{2}}f, f_n\right) S^{-\frac{1}{2}}f_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(f, S^{-\frac{1}{2}}f_n\right) S^{-\frac{1}{2}}f_n, \end{aligned}$$

en prenant le produit scalaire S avec f, nous obtenons que $\left\{S^{-\frac{1}{2}}f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ est une frame étroite avec la borne de frame équal à 1. □

Définition 3.1.3 *Une frame qui cesse d'être une frame quand l'un de ses éléments est enlevé est dite une "frame exacte".*

3.1.5 Bases de Riesz comme frames étroits

Nous allons montrer que la classe des bases de Riesz et la classe des frames exactes sont identiques. Pour cela, nous avons besoin des deux lemmes suivants

Lemme 3.1.2 *Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une frame dans un espace de Hilbert séparable H et f un élément quelconque de H. Alors il existe un unique suite de moments $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n. \tag{3.1.26}$$

et

$$a_n = (g, f_n) \tag{3.1.27}$$

où $Sg = f$. Si$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ est toute autre suite telle que

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n \tag{3.1.28}$$

alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid b_n \mid^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n - b_n \mid^2 . \tag{3.1.29}$$

Preuve. La première assertion est immédiate car S est inversible et $f = S(S^{-1}f)$. Supposons maintenant que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n. \tag{3.1.30}$$

En prenant le produit scalaire des deux membres avec g, nous trouvons

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} b_n, \tag{3.1.31}$$

et la formule (3.1.29) s'en suit facilement. □

Lemme 3.1.3 *Si on enlève d'une frame un vecteur, alors il reste soit une frame soit un ensemble incomplet.*

Preuve. Soit $\{f_n\}$ une frame dans H, de bornes A et B, et supposons que f_m est enlevé. D'après le lemme (3.1.2)

$$f_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n, \tag{3.1.32}$$

avec $a_n = (g_m, f_n)$ et $Sg_m = f_m$.Considérons les deux cas $a_m = 1$ et $a_m \neq 1$, en montrant que dans le premier cas le système $\{f_n\}_{n \neq m}$ est incomplet, tandis que dans le second cas il reste une frame.Si $a_m = 1$, alors

$$\sum_{n \neq m} a_n f_n = 0, \tag{3.1.33}$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \acute{a}_n f_n = 0, \tag{3.1.34}$$

avec $\acute{a}_n = a_n$ si $n \neq m$ et $\acute{a}_m = 0$.

En appliquant le lemme (3.1.2), avec chaque b_n égale à zéro, on trouve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid \acute{a}_n \mid^2 = 0, \tag{3.1.35}$$

et donc $a_n = 0$ pour $n \neq m$.

Ainsi g_m est orthogonal à f_n pour $n \neq m$. Comme $(g_m, f_m) = a_m = 1$, il s'en suit que $g_m \neq 0$ et par suite $\{f_n\}_{n\neq m}$ est incomplète.

Supposons maintenant que $a_m \neq 1$. Alors

$$f_m = \frac{1}{1-a_m} \sum_{n\neq m} a_n f_n. \tag{3.1.36}$$

Par conséquent, pour tout f dans H

$$\mid (f, f_m) \mid^2 \leq \frac{1}{\mid 1-a_m \mid^2} \sum_{n\neq m} \mid a_n \mid^2 \sum_{n\neq m} \mid (f, f_n) \mid^2 , \tag{3.1.37}$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mid (f, f_n) \mid^2 \leq C \mid (f, f_n) \mid^2 , \tag{3.1.38}$$

où

$$C = 1 + \mid 1-a_m \mid^{-2} \sum_{n\neq m} \mid a_n \mid^2 . \tag{3.1.39}$$

Comme $\{f_n\}$ est une frame, on conclu que

$$A_1 \parallel f \parallel^2 \leq \sum_{n\neq m} \mid (f, f_n) \mid^2 \leq B_1 \parallel f \parallel^2 , \tag{3.1.40}$$

où

$$A_1 = \frac{A}{C} \text{ et } B_1 = B. \tag{3.1.41}$$

Donc le système $\{f_n\}_{n\neq m}$ est une frame. □

Remarque 3.1.2 *Une examination de la preuve révèle que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une frame exacte et $g_n = S^{-1} f_n$, alors $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont biorthogonales.*

Nous sommes maintenant en position de donner la caractérisation suivante des bases de Riesz.

Théorème 3.1.3 *Une suite de vecteurs appartenant à un espace de Hilbert séparable H est une base de Riesz si, et seulement si, elle est une frame exacte.*

Preuve. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de Riesz pour H. Alors elle est complète et admet l^2 comme espace de moments. En conséquence, l'application

$$f \longrightarrow \{(f, f_n)\} \tag{3.1.42}$$

définie une transformation linéaire injective de H dans l^2. Comme s'est bornée (via proposition (2.2.1)).Son inverse est aussi borné (d'après ce théorème de l'application ouverte), et la condition du frame s'en suit tout de suite. Comme l'enlèvement d'un vecteur d'une base laisse un ensemble incomplet, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une frame exacte.
Supposons maintenant que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une frame exacte dans H, de bornes A et B, et soit f un élément quelconque de H.
Alors d'après le lemme (3.1.2),

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n, \tag{3.1.43}$$

où

$$a_n = (g, f_n) \text{ et } g = S^{-1} f. \tag{3.1.44}$$

Pour montrer que cette représentation est unique, supposons que

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n. \tag{3.1.45}$$

Si l'on définit g_n en posant $g_n = S^{-1} f_n$, alors $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ seront biorthogonales (d'après la remarque du lemme (3.1.3)), et donc

$$a_n = (g, f_n) = (g, Sg_n) = (Tg, g_n) = (f, g_n) = b_n \tag{3.1.46}$$

Puisque S est auto-adjoint. Ainsi $\{f_n\}$ est une base pour H.Il reste à montrer que la série

$$\sum_n c_n f_n, \tag{3.1.47}$$

est convergente si, et seulement si,

$$\sum_n | c_n |^2 < \infty. \tag{3.1.48}$$

Supposons que la série $\sum_n c_n f_n$ est convergente, vers un élément f de H. Alors $c_n = (g, f_n)$, avec $g = S^{-1} f$, et d'après la condition du frame

$$\sum_n | a_n |^2 = \sum_n | (g, f_n) |^2 \leq B \parallel g \parallel^2 < \infty. \tag{3.1.49}$$

Supposons maintenant que $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de scalaires quelconque telle que

$$\sum_n | c_n |^2 < \infty. \tag{3.1.50}$$

Alors pour $n \geq m$ nous avons d'après le théorème(2.2.1)

$$\| \sum_{i=m}^{n} c_i f_i \|^2 \leq B \sum_{i=m}^{n} | c_i |^2 . \tag{3.1.51}$$

Car $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Bessel de borne B. Comme le second membre tend vers zéro quand $m, n \longrightarrow \infty$, la somme partielle de la série $\sum_n c_n f_n$ forme une suite de Cauchy, et donc la série est convergente. □

Exemple 3.1.2 (Frame étroite, non exacte, non linéairement indépendante) *Soit* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une base orthonormée d'un Hilbert* H*. Supposons* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une base orthonormée disjointe de* $\{f_n\}$ *. Alors la suite* $\{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots\}$ *est une frame étroite*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} | (f, f_n) |^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} | (f, g_n) |^2 = 2 \| f \|^2 , \quad f \in H \tag{3.1.52}$$

ce n'est pas exact. L'enlèvement d'un vecteur change les bornes du frame en convertissant l'égalité (3.1.52) en une inégalité stricte comme conséquence de l'inégalité de Bessel

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} | (f, f_n) |^2 \leq \| f \|^2 . \tag{3.1.53}$$

Mais elle reste toujours une frame. Si l'on enlève f_1*, par exemple, alors*

$$\| f \|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} | (f, f_n) |^2 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} | (f, g_n) |^2 \leq 2 \| f \|^2 \tag{3.1.54}$$

ses éléments ne sont pas linéairement indépendants.

Exemple 3.1.3 (Frame exacte non étroite) *Soit* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une base orthonormée d'un Hilbert* H*. La suite* $\{2f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ *est une frame exacte. Elle n'est pas étroite car*

$$| (f_1, 2f_1) |^2 + \sum_{n\geq 2} | (f_1, f_n) |^2 = 2 \| f_1 \|^2 , \tag{3.1.55}$$

mais pour tout $k \neq 1$*,*

$$| (f_k, 2f_1) |^2 + \sum_{n\geq 2} | (f_k, f_n) |^2 = \| f_k \|^2 . \tag{3.1.56}$$

Exemple 3.1.4 (Non une frame) *La suite* $\left\{f_1, \frac{f_2}{2}, \frac{f_3}{3}, \ldots, \frac{f_n}{n}, \ldots\right\}$ *n'est pas une frame dés que pour tout* k*,*

$$\frac{1}{k^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left| \left(f_k, \frac{f_n}{n} \right) \right|^2 . \tag{3.1.57}$$

3.2 Frame de Gabor

L'analyse de Gabor dans $L^2(\mathbb{R})$ est basée sur deux classes d'opérateurs sur $L^2(\mathbb{R})$:

1. Translation par $a \in \mathbb{R}$,

$$T_a : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}), (T_a f)(x) = f(x-a).$$

2. Modulation par $b \in \mathbb{R}$,

$$E_b : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}), (E_b f)(x) = \exp(2\pi ibx)f(x).$$

Définition 3.2.1 *Une frame de Gabor (ou frame de Weyl-Heisenberg) est une frame pour $L^2(\mathbb{R})$ de la forme $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$, où $a, b > 0$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$ est une fonction fixée, g est dite fenêtre ou générateur. Explicitement, on a*

$$E_{mb}T_{na}g(x) = \exp(2\pi ibmx)g(x-na). \tag{3.2.1}$$

Remarque 3.2.1 *Par convention, on entend par frame de Gabor une frame sur tout $L^2(\mathbb{R})$ et non pas sur un sous-ensemble de $L^2(\mathbb{R})$. Le système de Gabor $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ implique seulement les translations avec les paramètres na, $n \in \mathbb{Z}$ et les modulations avec les paramètres mb, $m \in \mathbb{Z}$.*

3.2.1 Conditions nécessaires

Maintenant, nous allons répondre à la question suivante, comment obtenir des frames de Gabor $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ pour $L^2(\mathbb{R})$? L'un des résultats les plus fondamentaux dit que le produit ab décide si c'est possible que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ soit une frame pour $L^2(\mathbb{R})$:

Théorème 3.2.1 *Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $a, b > 0$. Alors les assertions suivantes sont vérifiées :*

i) *Si $ab > 1$, alors $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une frame pour $L^2(\mathbb{R})$.*

ii) *Si $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ est une frame, alors*

$$ab = 1 \Longleftrightarrow \{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}} \text{ est une base de Riesz.} \tag{3.2.2}$$

Preuve de théorème (3.2.1) (P.214 [[11]]).

Donc, la seule possibilité pour que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ soit frame est que $ab \leq 1$. La frame est surcomplète si $ab < 1$.

Remarque 3.2.2 *1. Il est découle de ce théorème que la seule possibilité pour que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ soit une frame est que $ab \leq 1$ et la frame est surcomplète si $ab < 1$.*

2. *Au fait, il existe un résultat plus fort que si $ab > 1$, la famille $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ ne peut même pas être complète dans $L^2(\mathbb{R})$.*

3. *L'hypothèse $ab \leq 1$ n'est pas suffisante pour que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ soit une frame même si $g \neq 0$. Par exemple, si $a \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, les fonctions $\left\{E_m T_{na}\chi_{[0,\frac{1}{2}]}\right\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ ne sont pas complète dans $L^2(\mathbb{R})$ et donc ne peut pas former une frame.*

$$\underline{\text{Frame surcomplet } (ab<1) \qquad \underset{\displaystyle\downarrow}{ab=1} \qquad \text{Non une frame}(ab>1)}$$
$$\text{Base de Riesz}$$

La proposition suivante donne une condition nécessaire pour $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ soit une frame pour $L^2(\mathbb{R})$, il dépend de la fonction g et le paramètre de translation a, et est exprimé quant à la fonction $G_{0,0}$ définie comme suite

$$G_{m,k}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x - na - \frac{m}{b})\overline{g(x - na - \frac{k}{b})}. \tag{3.2.3}$$

Comme que cette fonction sera souvent utilisée.

Proposition 3.2.1 *Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$, et $a, b > 0$. Supposons que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ est une frame avec les bornes A, B. Alors,*

$$bA \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid g(x - na \mid^2 \leq bB. \tag{3.2.4}$$

Remarque 3.2.3 *Plus précisément, si la borne supérieure dans (3.2.4) n'est pas vérifiée, alors $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une suite Bessel ; si la borne inférieure dans (3.2.4) n'est pas vérifiée, alors $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ ne satisfait pas la condition inférieure.*

3.2.2 Conditions suffisantes

Les conditions suffisantes pour que $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ soit une frame pour $L^2(\mathbb{R})$ ont été connues depuis 1988.

Théorème 3.2.2 *Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$, et $a, b > 0$. On suppose qu'il existe $A, B > 0$ telles que*

$$A \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid g(x - na \mid^2 \leq B, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.2.5}$$

et

$$\sum_{k\neq 0} \| \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}gT_{na+\frac{k}{b}}\overline{g}\|_\infty < A. \tag{3.2.6}$$

Alors $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ est une frame de Gabor pour $L^2(\mathbb{R})$.

Nous introduisons, maintenant un résultat plus général que le théorème (3.2.2). Au fait les deux théorèmes sont basés sur identité que l'on a donnée dans le lemme suivant, ce lemme utilise un autre calcul que l'on utilisera dans la suite.

Lemme 3.2.1 *On suppose que f est une fonction mesurable bornée avec support compact et que la fonction G définie par*

$$G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid g(x - na) \mid^2 . \tag{3.2.7}$$

Alors

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \mid (f, E_{mb}T_{na}g) \mid^2 = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{+\infty} \mid f(x) \mid^2 G(x)dx + \frac{1}{b}\sum_{k\neq 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}f(x-\frac{k}{b})\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-na)\overline{g(x-na-\frac{k}{b})}dx. \tag{3.2.8}$$

Preuve de lemme (3.2.1) (P.177 [[11]]).

Théorème 3.2.3 *Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$, a,$b > 0$ et supposons que*

$$B := \frac{1}{b}\sup_{x\in[0,a]} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x - na)\overline{g(x - na - \frac{k}{b})} \mid < \infty. \tag{3.2.9}$$

Alors $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de Bessel avec la borne supérieur de frame B. Si aussi

$$A := \frac{1}{b}\inf_{x\in[0,a]} \left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid g(x - na) \mid^2 - \sum_{k\neq 0} \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x - na)\overline{g(x - na - \frac{k}{b})} \mid\right] > 0, \tag{3.2.10}$$

alors $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ est une frame pour $L^2(\mathbb{R})$ avec les bornes A, B.

Preuve de théorème(3.2.3) (P.180 [[11]]).

Remarque 3.2.4 *Notons que ce théorème peut être prolonge à un résultat concernant les suites de frames. Nous avons vu que si la fonction*

$$G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid g(x-na) \mid^2 , \tag{3.2.11}$$

n'est pas bornée inférieurement, alors $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ *ne peut être une frame pour* $L^2(\mathbb{R})$. *Cependant elle reste encore une frame pour son enveloppe linéaire fermée.*

Exemple 3.2.1 *Soit* $a = b = 1$, *on définie*

$$g(x) = \begin{cases} 1+x & si\ x \in \left]0,1\right], \\ \frac{1}{2}x & si\ x \in \left]1,2\right], \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

et

$$g(x) \neq 0\ si\ \begin{cases} n \in \{-1, 0\} \\ n = -1 \quad pour\ k \in \{0,1\} \\ n = 0 \quad pour\ \ k \in \{-1,0\} \end{cases}$$

On considère pour $n, k \in \mathbb{Z}$ *la fonction*

$$x \longrightarrow g(x-n)g(x-n-k) \quad pour\ x \in \left]0,1\right]. \tag{3.2.12}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-n)g(x-n-k) &= \begin{cases} g(x)g(x+1) & si\ k=-1, \\ g(x)^2 + g(x+1)^2 & si\ k=0, \\ g(x+1)g(x) & si\ k=1, \\ 0 & sinon, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x)^2 & si\ k=-1, \\ \frac{5}{4}(1+x)^2 & si\ k=0, \\ \frac{1}{2}(1+x)^2 & si\ k=1, \\ 0 & sinon. \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mid g(x-n) \mid^2 = \frac{5}{4}(1+x)^2\ , x \in \left]0,1\right], \tag{3.2.13}$$

et

$$\sum_{k\neq 0} \mid H_k(x) \mid = \sum_{k\neq 0} \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(x-n)\overline{g(x-n-k)} \mid = (1+x)^2,\ x \in \left]0,1\right]. \tag{3.2.14}$$

Maintenant, le théorème(3.2.3) montrons que$\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ *est une frame pour* $L^2(\mathbb{R})$ *avec les bornes* $A = \frac{1}{4}$, $B = 9$.

Remarque 3.2.5 *On définit H_k, comme suite*

$$H_k(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_{na}g(x)\overline{T_{na+\frac{k}{b}}g(x)} \quad pour\ k \in \mathbb{Z}. \tag{3.2.15}$$

3.3 Frames d'ondelettes

De manière analogue à la théorie des séries de Fourier, les ondelettes sont principalement utilisées pour la décomposition de fonctions. La décomposition d'une fonction en ondelettes consiste à l'écrire une somme pondérée de fonctions obtenues à partir d'opérations simples effectuées sur une fonction principale appelée ondelette-mère ψ, ces opérations consistent en des translations et dilatations de la variable.

Une famille d'ondelettes se réfère généralement à une fonction de base ψ

$$\left\{2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}} = \left\{\psi^{2^{-j},2^{-j}k}\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}}, \tag{3.3.1}$$

cela constitue une base orthonormée pour $L^2(\mathbb{R})$. Toutefois, lorsque j, k peut prendre des valeurs dans $\mathbb{R}$, L'ensemble représente une frame surcompletes et appelé base d'ondelettes décimées. Dans le cas général, une frame d'ondelette est définie comme une frame pour $L^2(\mathbb{R})$ de la forme

$$\left\{a^{\frac{j}{2}}\psi(a^j x - kb)\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}} \tag{3.3.2}$$

où a est le paramètre de dilatation et b est le paramètre de translation.

Selon que ces translation et dilatation sont choisies de manière continue ou discrète, on parlera d'une transformée en ondelette continue ou discrète.

3.3.1 Transformée en ondelettes continues (TOC)

Une ondelette mère ψ doit remplir une propriété dont le plus importante est l'admissibilité, ψ est admissible si

$$c_\psi : \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\gamma)|}{|\gamma|} d\gamma < \infty. \tag{3.3.3}$$

La transformée en ondelettes décompose les signaux sur une famille d'ondelettes translatées et dilatées, une ondelette est une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ où L^2 est l'ensemble des fonctions d'énergie finie telles que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(x) \mid^2 dx < \infty \tag{3.3.4}$$

de moyenne nulle

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0. \tag{3.3.5}$$

La transformée en ondelette continue de la fonction f est définie comme le produit scalaire de f et de $\psi^{a,b}$ est $W_\psi(f)$ de deux variables données par

$$\begin{aligned} W_\psi(f)(a,b) &= \left(f, \psi^{a,b}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\mid a \mid^{\frac{1}{2}}} \overline{\psi(\frac{x-b}{a})} dx. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Remarque 3.3.1 *1.*

$$\psi^{a,b}(x) = \left(T_b D_a \psi\right)(x) = \frac{1}{\mid a \mid^{\frac{1}{2}}} \psi(\frac{x-b}{a}), a \neq 0, b \in \mathbb{R}. \tag{3.3.7}$$

2. $\frac{1}{|a|^{\frac{1}{2}}} \overline{\psi(\frac{x-b}{a})}$ *est le complexe conjugué de* $\psi^{a,b}$ *en temps* b *et l'echelle* a.

Corollaire 3.3.1 *Si* $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ *est admissible. Alors* $\left\{\psi^{a,b}\right\}_{a \neq 0, b \in \mathbb{R}}$ *est une frame continue pour* $L^2(\mathbb{R})$ *avec respectivement à* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *muni avec la mesure* $\frac{1}{a^2} dadb$.

3.3.2 Conditions nécessaires et suffisantes

Premièrement, nous considérons le cas où les points (a, b) dans(3.3.7) sont restrients à l'ensembles discrets de type $\{(a^j, kba^j)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, où $a > 1$, $b > 0$; nous obtenons les fonctions

$$\begin{aligned} \left(T_{kba^j} D_{a^j} \psi\right)(x) &= \left(D_{a^j} T_{kb} \psi\right)(x) \\ &= \frac{1}{a^{\frac{j}{2}}} \psi(\frac{x}{a^j} - kb), \ j, k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

on remplace j par $-j$, nous voyons que

$$\left\{T_{kba^j} D_{a^j} \psi\right\}_{j,k \in \mathbb{Z}} = \left\{a^{\frac{j}{2}} \psi(a^j x - kb)\right\}_{j,k \in \mathbb{Z}}. \tag{3.3.8}$$

Définition 3.3.1 *Soit $a > 1$, $b > 0$ et $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Une frame pour $L^2(\mathbb{R})$ de la forme*

$$\left\{ a^{\frac{j}{2}} \psi(a^j x - kb) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}} \tag{3.3.9}$$

est dite une frame d'ondelette.

Le but principal de cette patrie est présenter la condition suffisante pour $\left\{ a^{\frac{j}{2}} \psi(a^j x - kb) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ soit une frame.

Remarque 3.3.2 *Le rôle joué par les fonctions G_0 et G_1 dans l'analyse d'ondelette correspond au rôle des fonctions G et $\sum\limits_{k \neq 0} \mid H_k(x) \mid$ définie dans les formules (3.2.11) et (3.2.15) dans l'analyse de Gabor.*

où

$$G_0(\gamma) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mid \widehat{\psi}(a^j \gamma) \mid^2 , \; G_1(\gamma) = \sum_{k \neq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mid \widehat{\psi}(a^j \gamma) \widehat{\psi}(a^j \gamma + \frac{k}{b}) \mid , \; \gamma \in \mathbb{R}.$$

Proposition 3.3.1 *Soit $a > 1$, $b > 0$ et $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Si $\left\{ a^{\frac{j}{2}} \psi(a^j x - kb) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est une frame avec les bornes de frame A, B, alors*

$$bA \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mid \widehat{\psi}(a^j \gamma) \mid^2 \leq bB. \tag{3.3.10}$$

Théorème 3.3.1 *Soit $a > 1$, $b > 0$ et $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Supposons que*

$$B := \frac{1}{b} \sup_{|\gamma| \in [1,a]} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \mid \widehat{\psi}(a^j \gamma) \widehat{\psi}(a^j \gamma + \frac{k}{b}) \mid < \infty. \tag{3.3.11}$$

Alors

$$\left\{ a^{\frac{j}{2}} \psi(a^j x - kb) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}} \tag{3.3.12}$$

est une suite de Bessel avec borne B, et pour toute fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ pour qui $\widehat{f} \in C_c(\mathbb{R})$,

$$\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \mid (f, D_{a^j} T_{kb} \psi) \mid^2 = \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} \mid \widehat{f}(\gamma) \mid^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mid \widehat{\psi}(a^j \gamma) \mid^2 \, d\gamma + \frac{1}{b} \sum_{k \neq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\gamma) \overline{\widehat{f}(\gamma - \frac{a^j k}{b}) \widehat{\psi}(a^{-j} \gamma)} \widehat{\psi}(a^{-j} \gamma - \frac{k}{b}) d$$

Si en autre

$$A := \frac{1}{b} \inf_{|\gamma| \in [1,a]} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mid \widehat{\psi}(a^j \gamma) \mid^2 - \sum_{k \neq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mid \widehat{\psi}(a^j \gamma) \widehat{\psi}(a^j \gamma + \frac{k}{b}) \mid \right) > 0, \tag{3.3.13}$$

alors

$$\left\{ a^{\frac{j}{2}} \psi(a^j x - kb) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}} \tag{3.3.14}$$

est une frame pour $L^2(\mathbb{R})$ avec les bornes A, B.

Remarque 3.3.3 *Si* $\widehat{\psi}$ *continue dans* 0, *lequel le cas si* $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. *Alors la condition (3.3.11) peut être satisfait seulement si* $\widehat{\psi}(0) = 0$, *car* $\widehat{\psi}(a^j\gamma) \longrightarrow \widehat{\psi}(0)$ *quand* $j \longrightarrow -\infty$. *Si cette condition nécessaire satisfaite, alors chaque conditions sur* $\widehat{\psi}$ *implique que*

$$\left\{a^{\frac{j}{2}}\psi(a^jx - kb)\right\}_{j,k\in\mathbb{Z}} \tag{3.3.15}$$

est une frame toutes les fois que b *est suffisamment petit.*

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a présenté une notion généralisant la notion de base orthonormée, à savoir les frames. Nous avons donné une génèse détaillée de cette nouvelle notion. Quelques aplications à l'analyse non harmonique, problèmes des moments, les frames de Gabor et des ondelettes ont été ésquissées.

Annexe

Liste des notations et symboles

$(\cdot,\cdot)$	Produit scalaire.
$\|\cdot\|$	Norme.
$C\,[a,b]$	L'espace des fonctions continues sur $[a,b]$.
H	Espace de Hilbert.
X	Espace de Banach
$\mathbb{N}$	L'espace des entiers naturels.
$\mathbb{Q}$	L'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	L'espace des nombres complexes.
$\Bbbk$	Designe un corps, dans la pratique $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$\binom{n}{k}$	$C_n^k,\ k \leq n$.
l^∞	L'espace des suites bornées.
l^2	L'espace des suites à carré sommables.
L^1	L'espace des classes de fonctions mesurables.
L^2	L'espace des classes de fonctions à carré intégrable.
$\mathrm{span}\,\{f_n\}$	L'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de f_n.
T^*	Opérateur adjoint de T.
$G(T)$	Graphe de l'opérateur T, où $G(T)=\{(x,Tx)\,/x\in D(T)\}$
$D(T)$	L'ensemble $D(T)$ est appelé domaine de T.
X'	$=\mathcal{L}(X,\Bbbk)$, L'espace dual topologique de X.
$TF(f)=\widehat{f}$	La transformée de Fourier.
$\{\exp(int)\}_{n\in\mathbb{Z}}$	Le système trigonométrique.
l^p	L'espaces des suites p-sommables.
$\mathcal{L}(X,\Bbbk)$	L'espaces des opérateurs continus(applications linéaires continues)de X dans $\Bbbk$.
$N_1 \simeq N_2$	Deux normes équivalent si chacun est plus fin que l'autre

Bibliographie

[1] **Akhiezer,N.I.,** theory of approximation translated by C.J, Hyman, Frederick ungar Publishinco., New york (1956).

[2] **Bari N.K.,** Biorthogonal system and bases i Hilbert space. Ucen Zap. Mosk. Gos. Université, 148, Mat, 4, 69-107, (1951).

[3] **Casazza, P.G**., Modem tools for Weyl-Heisenberg (Gabor) frame theory, Advances in Imaging and Electron Physics 115 (2000), 1-127.

[4] **Casazza, P.G.**, The art of frame theory, Taiwanese J. of Math. 4 no.2, 129-201. (2000).

[5] **Jean-Jacques Droesbeke** et **Gilbert Saporta**, Approches Non Paramétriques En Régression, Paris, (2010).

[6] **Duffin, R.J**. and **Schaeffe**r, A.C. : A class of nonharmonic Fourier series.Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952) 341-366.

[7] **Emilie Charlier,** Frames d'Exponentielles**,** Universite De Liège, Mémoire de Licence en Sciences Mathématiques, (2004).

[8] **Halmos Paul.R**, A Hilbert space problème book (Van Nostrand,Princeton ;New Jersey, Toronto,London (1967).

[9] **G.Hardy, J.E.Littlewood et Pólya.** INEQUALITIES, second edition, combridge university press (1952).

[10] **A.N.Kolmogorov and S.V.Fomis,** by Graylock press, (1956).

[11] **Ole Christensen**, An Introduction to Frames and Riesz Bases››. springer Science+Business Media, (2003).

[12] **Paley, R.E.C.,** and **Wiener**, **N**. ‘‘Fourier Transforms in the complex Domain,’’ Am. Math. Sac. Colloq. Publ., Vol. 19. Am.Math. Soc., New york (1934).

[13] **Say Song Goh, Amos Ron and Zuowei Shen**, Gabor And Wavelet Frames, World Sientific, (2007).

[14] **Singer. I**, Bases in Banach spaces 1. Springer, New York, (1970).

[15] **Taylor, A.E.** Introduction to functional analysis, wiley N.Y(1958) .

[16] **Young, R**., An introduction to nonharmonic Fourier series, Academic Press, New York, (1980) (revised first edition 2001).