Table des matières

Introduction

Les équations différentielles abstraites sont des équations différentielles ont comme coefficients des opérateurs linéaires sur un espace de Banach.
L'objectif de ce mémoire est donc l'étude d'une équation différentielle opérationnelle du second ordre de type elliptique dans la demi-droite réelle positive. Existence, unicité et la régularité maximale de la solution stricte qui étaient prouvé à l'aide de la théorie des semi groupes et le théorème de Dore et Venni.
Ce travail est inspiré du travail de M. Cheggag A. Favini, R. Labbas, S. Maingot et A. Medeghri [5]. Ils ont étudié un problème de Sturm-Liouville régit par une équation abstraite dans un espace UMD posé dans un domaine non borné. Ces auteurs ont utilisé la méthode de réduction de l'ordre de Krein [21] afin de trouver une représentation explicite de la solution puis ils ont appliqué le célèbre théorème de Dore et Venni [7] pour montrer l'existence, l'unicité et la régularité maximale de la solution stricte.
Dans ce travail on a considéré l'équation différentielle

$$u''(x) + Au(x) = f(x) \qquad x \in I = (0, \infty)$$

avec une condition aux limites abstraite de type Robin suivant

$$u'(0) - Hu(0) = d_0,$$

cette condition s'appelle aussi condition aux limites de Fourier, elle est définie par une relation linéaire entre les valeurs de la fonction u et les valeurs de la dérivée de la fonction sur le bord du domaine.
Ce travail est constitué de trois chapitres principaux.
Le premier est consacré aux rappels fondamentaux et outils nécessaires pour réaliser ce travail. Ils concernent les opérateurs, les semi-groupes [18], quelques espaces fonctionnelles (les espaces d'interpolations [13] [16], les espace UMD [12],...), les puissances fractionnaires d'opérateurs [7], la théorie des sommes d'opérateurs de Dore et Venni.
Dans **le second chapitre** on va étudier une équation différentielle elliptique du second ordre posé sur un domaine non borné et sur le bord on a imposé une condition aux limites à coefficient opérateur de type Robin lorsque le second membre de l'équation est dans l'espace L^p.
On donne une condition sur la donné d_0 et des hypothèses sur l'espace de Banach X et sur les opérateurs A et H pour montrer que la solution stricte satisfaite la régularité maximale. On termine ce chapitre par étudier de quelques cas particuliers, en remplaçant l'opérateur H par l'opérateur nul, l'opérateur αI $(\alpha > 0)$ ou par l'opérateur $\sqrt{-A}$.
Dans **le dernier chapitre**, on donne deux exemples d'application pour illustrer notre théorie abstraite.

Chapitre 1

Rappels

On donne ici quelques rappels fondamentaux sur les opérateurs, les semi-groupes, les espaces d'interpolations, les espace UMD...
Soient $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ et $(Z, \|.\|_Z)$ trois espaces vectoriels normés complexes.

1.1 Les opérateurs

Définition 1.1.1 *Un opérateur linéaire de X dans Y est une application linéaire A définie d'un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$ à valeurs dans Y, i.e pour tout $x, y \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :*
i) $A(x+y) = Ax + Ay$.
ii) $A(\lambda x) = \lambda Ax$.
On appelle domaine de A, et on le note $D(A)$ le sous espace vectoriel des éléments x de X tels que Ax ait un sens.
On appelle image de A notée $R(A)$, le sous espace vectoriel $A(D(A))$.

Remarque. On écrit par abus $A(x) = Ax$ pour tout $x \in D(A)$.
Si A est injectif, on peut définir l'inverse de A, noté A^{-1}, par :

$$\begin{array}{rcl} A^{-1} : A(D(A)) & \to & D(A) \\ y & \to & A^{-1}y = x. \end{array}$$

Définition 1.1.2 *Soient $(A, D(A)), (B, D(B))$ deux opérateurs linéaires de X dans Y. On dit que B est une extension ou un prolongement de A et on note $A \subset B$ si*

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A) \subset D(B) \\ \forall x \in D(A),\ Ax = Bx. \end{array} \right.$$

Définition 1.1.3 ***(Opérateurs linéaires bornés)*** *On dit qu'un opérateur A définit de X dans Y est borné si*

$$D(A) = X \quad et \quad \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|A\xi\| < \infty$$

On note $\mathcal{L}(X,Y)$ la collection de tous les opérateurs linéaires bornés de l'espace vectoriel normé X dans l'espace vectoriel normé Y. $\mathcal{L}(X,Y)$ est un espace normé et sa norme est définie par

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X\leq 1} \|Ax\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y, \qquad \forall A \in \mathcal{L}(X,Y).$$

On note $\mathcal{L}(X,X) := \mathcal{L}(X)$.

Proposition 1.1.1 *Si Y est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(X,Y)$ est un espace de Banach.*

Proposition 1.1.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Si $\|A\| < 1$ alors $(I-A)$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$ et $(I-A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$.*

Définition 1.1.4 ***(Opérateurs linéaires fermés)*** *On dit qu'un opérateur A est fermé si est seulement si son graphe*

$$G(A) = \{(\varphi, A\varphi) \;\; \varphi \in D(A)\}$$

est un fermé de $X \times X$.

Définition 1.1.5 *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to Y$ est dit fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \in D(A)$ telle que*

$$\begin{cases} x_n \to x \\ Ax_n \to y \end{cases}$$

on a $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

Définition 1.1.6 *On dit qu'un opérateur A est fermable si est seulement si pour tout suite $(x_n)_n \in D(A)$ telle que*

$$\begin{cases} x_n \to 0 \\ Ax_n \to y \end{cases} \Longrightarrow y = 0.$$

Définition 1.1.7 *On définit la fermeture d'un opérateur A par*

$$\begin{cases} D\left(\overline{A}\right) = \left\{\varphi \in X, \exists \psi \in X \text{ tel que } (\varphi,\psi) \in \overline{G(A)}\right\} \\ \forall \varphi \in D\left(\overline{A}\right) \;\; \overline{A}\varphi = \psi \text{ avec } (\varphi,\psi) \in \overline{G(A)} \end{cases}$$

Définition 1.1.8 *On appelle* ensemble résolvant de A *l'ensemble*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X)\}$$

Un élément de $\rho(A)$ est appelé valeur résolvante de A.

1. Si $\lambda \in \rho(A)$ on définit $R_\lambda(A)$ la résolvante de A au point λ par

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

2. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ est appelé le spectre de A et un élément de $\sigma(A)$ est appelé valeur spectrale de A.

Proposition 1.1.3 *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X. Alors l'application $R_\lambda : \lambda \in \rho(A) \to R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ est analytique sur $\rho(A)$.*

Proposition 1.1.4 *[10] Soit $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire.*

1. Si A est un opérateur fermé alors pour tout $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ l'opérateur $A + B : D(A) \subset X \to Y$ est fermé.

2. Si A est un opérateur fermé et injectif alors A^{-1} est fermé.

3. Si A est un opérateur fermé à valeurs dans X et $D(A)$ est fermé dans X alors A est continu de $D(A)$ dans X.

4. Si A est un opérateur continu de $D(A) \subset X$, alors A est fermé si et seulement si son domaine est fermé.

5. Si $\rho(A) \neq \varnothing$ alors A est fermé.

La proposition suivante est un résultat utilisé dans le chapitre suivant.

Proposition 1.1.5 *[11]Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ et $B : D(B) \subset X \to X$ un opérateur linéaire fermé tel que $\operatorname{Im}(A) \subset D(B)$. Alors $BA \in \mathcal{L}(X)$.*

Preuve. Il est clair que BA est défini sur X. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de X telle que

$$\begin{cases} x_n \to x \\ (BA)\, x_n \to y & \text{dans } X. \end{cases}$$

Alors, comme $\operatorname{Im}(A) \subset D(B)$, $(Ax_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'éléments de $D(B)$ et comme $A \in \mathcal{L}(X)$, on a :

$$\begin{cases} Ax_n \to Ax & \text{dans } X \\ B(Ax_n) \to y & \quad \text{dans } X \end{cases}$$

B étant fermé on a donc

$$Ax \in D(B) \quad \text{et} \quad B(Ax) = y$$

d'où

$$x \in D(BA) \quad \text{et} \quad (BA)\, x = y,$$

par la définition 1.1.5, on déduit que BA est un opérateur fermé et défini sur X, par conséquent BA est borné (continu) sur X selon le point 3. de la proposition 1.1.4, i.e. $BA \in \mathcal{L}(X)$.

Définition 1.1.9 ***(Opérateurs sectoriels)*** *Soit $0 < \omega \leq \pi$. On définit le secteur suivant*

$$S_\omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \pi - \omega\}.$$

– Un opérateur linéaire fermé A sur X est dit sectoriel d'angle ω si

$$\rho(A) \supset S_\omega,$$

et

$$\sup_{\lambda \in S_\omega} \left\| \lambda (A - \lambda I)^{-1} \right\|_X < \infty.$$

Définition 1.1.10 *Soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire dans l'espace de Banach X. L'opérateur $B : D(B) \to X$ est dit $A-$borné si $D(A) \subseteq D(B)$ et il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}^+$ tels que*

$$\|Bx\| \leq a\|Ax\| + b\|x\|, \qquad \forall x \in D(A).$$

Exemple. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ; on considère dans l'espace $X = L^p(I)$, $1 \leq p \leq \infty$, les opérateurs

$$A = \frac{d^2}{dx^2} \qquad D(A) = W^{2,p}(I)$$

$$B = \frac{d}{dx} \qquad D(B) = W^{1,p}(I)$$

alors, l'opérateur B est $A-$borné. Pour plus de détails, voir [9].

Lemme 1.1.1 *Si $(A,\ D(A))$ est un opérateur fermé et $(B,\ D(B))$ est $A-$borné, alors*

$$(A+B,\ D(A)) \text{ est un opérateur fermé.}$$

1.2 Les semi- groupes d'opérateurs linéaires

1.2.1 Semi -groupes fortement continu

Définition 1.2.1 *Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires dans X. On dit que cette famille forme un semi-groupe dans X si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $G(0) = I = I_X$
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}^+, G(t+s) = G(t)G(s)$.

Lorsque la famille $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est défini pour $t \in \mathbb{R}$, et que la deuxième propriété est vérifié pour tout s, t de $\mathbb{R}$ on dira qu'on a un groupe.

Définition 1.2.2 *On dit qu'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est fortement continu si et seulement si pour tout $x \in X$, l'application $t \to G(t)x$ de $\mathbb{R}^+$ dans X est continue, c'est-à-dire pour tout $x \in X$*

$$\lim_{t\to 0^+} \|G(t)x - x\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

On dit aussi que $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe.

Définition 1.2.3 *Un semi-groupe $(G(t))_{t\geq 0}$ est appelé semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés si*

$$\lim_{t\to 0} \|G(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Proposition 1.2.1 *Si $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu alors il existe deux constantes $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ telles que*

$$\|G(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t} \qquad \forall t \geq 0.$$

Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Définition 1.2.4 *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$*, l'opérateur* A *définit par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{\varphi \in X : \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{G(h)\varphi - \varphi}{h} \text{ existe}\right\} \\ A\varphi = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{G(h)\varphi - \varphi}{h}, \qquad \varphi \in D(A). \end{cases}$$

$D(A)$ *est non vide* $(0 \in D(A))$ *et est bien un sous espace vectoriel de* X*.* A *est linéaire de* $D(A)$ *dans* X*.*

Corollaire 1.2.1 *Soit* $(A,\ D(A))$ *le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe* $(G(t))_{t\geq 0}$*. Alors* $D(A)$ *est dense dans* X *et* A *est un opérateur linéaire fermé.*

Proposition 1.2.2 *Si* A *est le générateur infinitésimal d'un* C_0 *semi-groupe* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$*, alors*

1. *A est linéaire fermé de domaine $D(A)$ dense dans X.*
2. $]\omega, +\infty[\subset \rho(A)$ *et* $\forall \lambda \in]\omega, +\infty[$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\left\|(A-\lambda I)^{-n}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}$$

où $M > 1$ et $\omega \geq 0$.

1.2.2 Semi-groupes analytiques

On définit, pour tout $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$, le secteur

$$\Sigma_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \alpha\}$$

Définition 1.2.5 *Soit* $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$*. Une famille* $\{G(z)\}_{z\in\Sigma_\alpha}$ *d'éléments de* $\mathcal{L}(X)$ *forme un semi-groupe analytique de type* α *dans* X *si elle vérifie les conditions suivantes :*

1. $G(0) = I$,

2. $\forall\ z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha$, tel que $z_1 + z_2 \in \Sigma_\alpha$, $G(z_1+z_2) = G(z_1)G(z_2)$,

3. $\forall x \in X,\ \lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in\Sigma_\alpha}} G(z)x = x$,

4. l'application $z \to G(z)$ est holomorphe sur Σ_α.

Le théorème suivant est un résultat de Balakrishnan [1]. Il donne une propriété importante utilisée par la suite.

Théorème 1.2.1 *Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense $D(A)$ dans X tel que*

$$]0,+\infty[\subset \rho(A) \ \ et \ \exists M>0,\ \forall\lambda>0 : \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\lambda}.$$

Alors il existe un secteur Σ_δ, $0 \leq \delta \leq \dfrac{\pi}{2}$, tel que

$$\Sigma_\delta \subset \rho(A) \ \ et \ \forall\lambda \in \Sigma_\delta : \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda|}$$

De plus, l'opérateur $(-A)^{\frac{1}{2}}$ est bien défini et il existe un secteur $\Sigma_{\alpha+\pi\backslash 2}$ avec $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$, tel que

$$\Sigma_{\alpha+\pi\backslash 2} \subset \rho\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right)$$

et $-(-A)^{\frac{1}{2}}$ génère un semi-groupe analytique.

1.3 Quelques espaces fonctionnels

Définition 1.3.1 *On dit que l'espace normé $(E, \|.\|)$ est un* espace de Banach *si l'espace métrique correspondant muni de la distance $d(x,y) = \|x-y\|$ est complet.*

Définition 1.3.2 *Un espace* Préhilbertien *sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un couple (E, B) où E est un espace vectoriel et B est un produit scalaire réel (resp complexe) et on écrit*

$$B(x;y) = (x,y) = \langle x;y\rangle .$$

La norme dans un espace préhilbertien est

$$\|x\| = B(x;x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle x;x\rangle}$$

Définition 1.3.3 *L'espace topologique (E,τ) est dit* séparé *si :*

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E : x \neq y \Longrightarrow \exists v \in V(x),\ \exists w \in V(y) : v \cap w = \varnothing$$

tel que $V(x)$ est l'ensemble des voisinages de x.

Définition 1.3.4 *Un espace* Hilbertien *sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un espace préhilbertien séparé et complet pour la distance*

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

1.3.1 Espace d'interpolation

Soient $(X_0, \|.\|_0)$ et $(X_1, \|.\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continêment dans un espace vectoriel topologique séparé $\mathbb{F}$.
En posant

$$\begin{aligned} \|x\|_{X_0 \cap X_1} &: = \max\left\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\right\} \qquad \text{si } x \in X_0 \cap X_1 \\ \|x\|_{X_0 + X_1} &: = \inf_{\substack{x_0 \in X_0, x_1 \in X_1 \\ x_0 + x_1 = x}} \left(\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}\right) \qquad \text{si } x \in X_0 + X_1. \end{aligned}$$

Il est connu que les espaces $\left(X_0 \cap X_1, \|.\|_{X_0 \cap X_1}\right)$ et $\left(X_0 + X_1, \|.\|_{X_0 + X_1}\right)$ sont des espaces de Banach. De plus on a

$$X_0 \cap X_1 \subset X_0, X_1 \subset X_0 + X_1$$

avec des injections continues. Pour plus de détails voir J. L. Lions et J. Peetre [16].

Définition 1.3.5 *Pour $p \in [1, +\infty[$ et $\theta \in]0, 1[$, on définit l'espace intermédiaire noté $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ entre $X_0 \cap X_1$ et $X_0 + X_1$ par*

$$x \in (X_0, X_1)_{\theta,p} \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall t > 0,\ \exists u_0(t) \in X_0, \exists u_1(t) \in X_1 \text{ tel que} \\ x = u_0(t) + u_1(t) \\ t^{-\theta} u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0),\ t^{1-\theta} u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1) \end{cases}$$

où $L_*^p(\mathbb{R}_+, X_i)$ avec $p \in [1, +\infty[$ est l'espace des fonctions fortement mesurables $u_i : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X_i$ telles que

$$\|u_i\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X_i)} = \left(\int_0^{+\infty} \|u_i(t)\|_{X_i}^p \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Si $p = \infty$, on définit $\|u_i\|_{L_*^\infty(\mathbb{R}_+, X_i)}$ par

$$\|u_i\|_{L_*^\infty(\mathbb{R}_+, X_i)} = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \text{ess} \|u_i(t)\|_{X_i}.$$

Alors, $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|x\|_{\theta,p} = \inf_{\substack{u_i \in X_i, i=0,1 \\ x = u_0(t) + u_1(t), \forall t > 0}} \left(\left\|t^{-\theta} u_0\right\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X_0)} + \left\|t^{1-\theta} u_1\right\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, X_1)}\right)$$

De plus, on a

$$X_0 \cap X_1 \subset (X_0, X_1)_{\theta,p} \subset X_0 + X_1$$

avec des injections continues.

Remarque 1.3.1 *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset X$. On note*

$$D_A(\theta, p) = (D(A), X)_{1-\theta;p}$$

où $p \in [1, +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$. De plus, on a

$$(X, D(A))_{1+\theta,\infty} = \left\{\varphi \in D(A) : A\varphi \in (X, D(A))_{\theta,\infty}\right\}$$

(voir Triebel [20], p 25. et 76).

Lorsque A vérifie certaines propriétés spectrales, on peut caractériser explicitement l'espaces $D_A(\theta, p)$, par exemple ;
• Supposons que $\mathbb{R}_+ \subset \rho(A)$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0, \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{\lambda}$$

alors

$$D_A(\theta, p) = \left\{ \varphi \in X : t^\theta A (A - tI)^{-1} \varphi \in L^p_* (\mathbb{R}_+, X) \right\}$$

si $p \in [1, +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$ (voir Grisvard [14]), et si $p = \infty$, on a

$$D_A(\theta, \infty) = \left\{ x \in X : \sup_{t>0} \left\| t^\theta A (A - tI)^{-1} x \right\|_X < \infty \right\}$$

• Si A génère un semi-groupe fortement continu borné dans X, alors

$$D_A(\theta, p) = \left\{ \varphi \in X, t^{-\theta} \left(e^{tA} - I \right) \varphi \in L^p_* (\mathbb{R}_+, X) \right\}$$

(voir Lions [17]).
• Si A génère un semi-groupe analytique borné dans X alors

$$D_A(\theta, p) = \left\{ \varphi \in X, t^{1-\theta} A e^{tA} \varphi \in L^p_* (\mathbb{R}_+, X) \right\}$$

(voir Butzer-Berens [2]).

Définition discrète d'un espace d'interpolation

Définition 1.3.6 *On dit que x est dans l'espace d'interpolation $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ si et seulement si,*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{Z}, \quad x := v_n + w_n, & v_n \in X_0, \; w_n \in X_1 \\ \sum_{n\in z} \left\| e^{-\theta n} v_n \right\|^p_{X_0} < \infty & i.e \quad e^{-\theta n} v_n \in l^p(X_0) \\ \sum_{n\in z} \left\| e^{(1-\theta)n} w_n \right\|^p_{X_1} < \infty & i.e \quad e^{(1-\theta)n} w_n \in l^p(X_1) \end{cases}$$

Proposition 1.3.1 *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X, alors*

$$D_{A^2}(\theta, p) = D_A(2\theta, p)$$

si $\theta \neq \frac{1}{2}$ et plus généralement

$$D_{A^m}(\theta, p) = D_A(m\theta, p)$$

si $m\theta \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$ et $\theta \in]0, 1[$.

Lemme de Schur

Théorème 1.3.1 ***(Marcel-Riesz)*** *Soit $K : L^{p_0}(\Omega_0) + L^{p_1}(\Omega_0) \to L^{q_0}(\Omega_1) + L^{q_1}(\Omega_1)$ un opérateur linéaire, $p_i, q_i \in [1, +\infty]$, Ω_i des ouverts de $\mathbb{R}^n$, $i = 0, 1$ telle que*

$$K \backslash_{L^{p_0}(\Omega_0)} \in \mathcal{L}(L^{p_0}, L^{q_0}) \text{ et } K \backslash_{L^{p_1}(\Omega_0)} \in \mathcal{L}(L^{p_1}, L^{q_1})$$

alors

$$K \backslash_{L^{p_\theta}(\Omega_0)} \in \mathcal{L}(L^{p_\theta}, L^{q_\theta})$$

avec $0 \leq \theta \leq 1$ et

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Lemme 1.3.1 ***(De Schur)*** *Soit $k : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que*

1. il existe un $a > 0$, p.p. $x_2 \in \Omega_2$, $\int\limits_{\Omega_1} |k(x_1, x_2)|\, dx_1 \leq a$,
2. il existe un $b > 0$, p.p. $x_1 \in \Omega_1$, $\int\limits_{\Omega_2} |k(x_1, x_2)|\, dx_2 \leq b$

On définit l'opérateur K par

$$(Kf)(x_2) = \int\limits_{\Omega_1} k(x_1, x_2)\, f(x_1)\, dx_1$$

p.p. $x_2 \in \Omega_2$. Alors pour tout $p \in [1, +\infty]$

$$K \in \mathcal{L}\left(L^p(\Omega_1), L^p(\Omega_2)\right)$$

1.3.2 Les espaces de Sobolev et de Besov

On désigne par Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (non nécessairement borné) et on pose $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un multi-indice, avec $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ et on utilise la notation

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} .... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

<u>Pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leqslant p \leqslant \infty$</u> :

On note $W^{m,p}(\Omega, E)$ l'espace de Sobolev des fonctions $f : \Omega \to E$ telles que $\partial^\alpha f \in L^p(\Omega, E)$ pour tout $|\alpha| \leqslant m$. C'est un espace de Banach avec la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega,E)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha f\|^p_{L^p(\Omega,E)}\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leqslant p < \infty \\ \max\limits_{|\alpha| \leqslant m} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega,E)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

<u>Pour $s \in]0, 1[$ et $1 \leqslant p < \infty$:</u>

On définit l'espace fractionnaire de Sobolev

$$W^{s,p}(\Omega, E) = \left\{ f \in L^p(\Omega, E) : \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Omega} \frac{\|f(x) - f(y)\|^p_E}{|x - y|^{sp+n}} dxdy < \infty \right\}.$$

Les espaces de Sobolev ne sont pas stables complètement par interpolation, on est amené à définir les espaces de Besov $B^m_{p,q}(\Omega, E)$. Pour $s \in]0, 1[$ et $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, on définit

$$B^s_{p,q}(\Omega, E) = \left\{ f \in L^p(\Omega, E) : \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\Omega} \frac{\|f(x) - f(y)\|^p_E}{|x - y|^{sq+n}} dx \right)^{q/p} dy < \infty \right\}.$$

avec la modification classique quand $p = \infty$ et $q = \infty$.
Dans le cas où $p = q$ on a

$$B^s_{p,p}(\Omega, E) = W^{s,p}(\Omega, E).$$

1.3.3 Les espaces UMD

On présente ici, une propriété géométrique des espaces de Banach E, connue sous le nom UMD (Unconditional Martingale difference property, pour plus détails voir [7] et [12].)

Définition 1.3.7 *On dit que E est UMD si la transformation de Hilbert H définie sur $L^p(\mathbb{R}, E)$, $1 < p < \infty$ par*

$$(Hf)(t) = \frac{1}{i\pi} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int\limits_{\epsilon \leqslant |s| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{f(t-s)}{s} ds, \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}, E)$$

est bornée.

Définition 1.3.8 *E est ξ-convexe s'il existe une fonction $\xi : E \times E \to \mathbb{R}$ convexe telle que*

i) $\xi(0,0) > 0$

ii) $\xi(x,y) \leqslant \|x+y\|$ avec

$$\|x\| = \|y\| = 1, \quad \forall x, y \in E.$$

Théorème 1.3.2 *Soit E un espace de Banach, les conditions suivantes sont équivalentes*

i) E est UMD.

ii) Il existe une fonction ξ symétrique et biconvexe vérifie $\xi(0,0) > 0$ et

$$\xi(x,y) \leqslant \|x+y\|,$$

tel que $\|x\| \leqslant 1 \leqslant \|y\|, \forall x, y \in E$.

Les **exemples** les plus utilisés de tels espaces sont

- ▶ Les espaces de Hilbert (On choisit $\xi(x,y) = 1 + \langle x, y\rangle$ où le crochet $\langle .,. \rangle$ indique le produit scalaire).
- ▶ Les sous espaces fermés d'un espace UMD.
- ▶ Les espaces construits sur $L^p(\Omega, E)$, $1 < p < \infty$ tel que E est UMD.

Les espaces $C^\alpha(\Omega; E)$ ne sont pas UMD.

1.4 Calcul fonctionnel

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach complexe. Pour U un ouvert de $\mathbb{C}$, on désigne par $H(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Définition 1.4.1 *(**formule de Cauchy intégrale**). Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U de bord γ orienté positivement. Soient $f \in H(U)$ et $z_0 \in K$. On a*

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz.$$

Définition 1.4.2 *(**Intégrale de Dunford**). Soient $A \in \mathcal{L}(X)$, U un ouvert de $\mathbb{C}$, K un compact de U contenant $\sigma(A)$, γ le bord de K orienté positivement (γ est donc finie et entoure le spectre de A) et $f \in H(U)$. Alors*

$$f(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)(zI - A)^{-1} dz$$

L'opérateur $f(A) \in \mathcal{L}(X)$ et ne dépend pas du choix de γ.

1.5 Les puissances fractionnaires, classe Bip$(\theta; E)$

Dans cette sous section, on donne la définition des puissances complexes d'un opérateur sectoriel. Si $\mathbf{A} : E \to E$ est un opérateur **borné** positif, la puissance complexe de l'opérateur $\mathbf{A}$ est définie par

$$\mathbf{A}^z x = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma t^z (tI - \mathbf{A})^{-1} x dt,$$

où z est un nombre complexe arbitraire.

Si $\mathbf{A}$ est un opérateur linéaire fermé sectoriel, on définit la puissance fractionnaire de partie réelle positive (pour $0 < \operatorname{Re} z < 1$) par la représentation de Balakrishnan suivante

$$\mathbf{A}^z x = \frac{\sin z\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} t^{z-1} (tI - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A} x dt,$$

pour tout $x \in D(\mathbf{A})$ (voir Haase [15], Proposition 3.1.12, page 67).

Si $-1 < \operatorname{Re} z < 0$, on écrit, pour $x \in D(\mathbf{A})$,

$$\mathbf{A}^z x = \mathbf{A}^{z+1} \mathbf{A}^{-1} x = \frac{\sin(z+1)\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} t^z (tI - \mathbf{A})^{-1} x dt.$$

Le théorème suivant, rassemble quelques propriétés essentielles de $\mathbf{A}^z$ (voir Dore et Venni [7])

Théorème 1.5.1 *Soit $\mathbf{A}$ un opérateur linéaire positif, alors on a les propriétés suivantes*

1) Soit $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0$ *et* $m,\ n \in \mathbb{N} : m > n + \operatorname{Re} z > 0$ *alors*

$$\forall x \in E \quad \mathbf{A}^z x = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(n+z)\,\Gamma(m-n-z)} \int_0^{+\infty} t^{z+n-1} \left(\mathbf{A}(tI - \mathbf{A})\right)^{-1} \mathbf{A}^{-n} x dt$$

est absolument convergente.

2) $z \to \mathbf{A}^z$ *est holomorphe de* $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ *dans* $\mathcal{L}(E)$.

3) Si $m \in \mathbb{N} : m \geqslant 2$ *et* $z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < m$ *alors* $D(\mathbf{A}^m)$ *est dense dans* $D(\mathbf{A}^z)$.

4) Soit $w, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w < 0 < \operatorname{Re} z$ *alors*

$$\mathbf{A}^w \mathbf{A}^z \subseteq \mathbf{A}^{w+z} \subseteq \mathbf{A}^z \mathbf{A}^w.$$

De plus, si $\operatorname{Re}(w+z) \neq 0$ *alors*

$$\mathbf{A}^{w+z} = \mathbf{A}^z \mathbf{A}^w.$$

5) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *et* $x \in D(\mathbf{A}^\alpha)$ *alors* $z \to \mathbf{A}^z x$ *est holomorphe pour* $\operatorname{Re} z < \alpha$.

6) Supposons que $\mathbf{A}^{is} \in \mathcal{L}(E)$ *pour* $s \in \mathbb{R}$ *donc*

(a) Si $\operatorname{Re} w < 0$ *et* $w + z = is$ *alors* $\mathbf{A}^{w+z} = \mathbf{A}^w \mathbf{A}^z = \mathbf{A}^z \mathbf{A}^w$.

(b) Si $\operatorname{Re} w < 0$ *alors* $\mathbf{A}^{is}\mathbf{A}^w = \mathbf{A}^{w+is} = \mathbf{A}^w \mathbf{A}^{is}$.

(c) Si $\operatorname{Re} w \geqslant 0$ *alors* $\mathbf{A}^{is}\mathbf{A}^w \subseteq \mathbf{A}^{w+is} \subseteq \mathbf{A}^w \mathbf{A}^{is}$ *et la seconde inclusion*

est en fait une égalité si $\operatorname{Re} w > 0$.

7) Si $0 < \operatorname{Re} z < 1$ *alors*

$$\left\|\mathbf{A}^{-z}\right\| \leqslant M \left(\cosh(\pi \operatorname{Im} z) + \frac{\sinh(\pi \operatorname{Im} z)}{\sin(\pi \operatorname{Im} z)}\right).$$

8) Soit $\mathbf{A}^{is} \in \mathcal{L}(E)$ *avec* $s \in \mathbb{R}$, *pour* $\varphi \in \left]0, \pi/2\right[$ *fixé, on pose*

$$\Sigma_\varphi = \left\{\rho e^{i\theta} : \rho > 0 \text{ et } \pi - \varphi < \theta < \pi + \varphi\right\},$$

alors $\mathbf{A}^{z+is} \to \mathbf{A}^{is}$ *(dans la topologie forte de* $\mathcal{L}(E)$*).*

9) Soit $\Delta \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ *et* $\Delta_1 = \overline{\Delta} \cap (i\mathbb{R}) \neq \emptyset$. *On suppose que*

$$\sup_{z \in \Delta} \|\mathbf{A}^z\| < +\infty,$$

alors $\forall w \in \Delta_1$, $\mathbf{A}^w \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\mathbf{A}^z \to \mathbf{A}^w$ *où* $z \to w$, $z \in \Delta$ *(dans la topologie forte de* $\mathcal{L}(E)$*).*

10) Si $T \in \mathcal{L}(E)$ *alors* $(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1} T = T (\mathbf{A} - \lambda I)^{-1}$, *pour* $\lambda \in \rho(\mathbf{A})$, *et*

$$\begin{array}{rcl} (a)\ T\mathbf{A}^z & = & \mathbf{A}^z T \text{ pour } \operatorname{Re} z < 0. \\ (b)\ T\mathbf{A}^z & \subseteq & \mathbf{A}^z T \text{ pour } \operatorname{Re} z \geqslant 0. \end{array}$$

11) Si $(\mathbf{A} - \lambda I)^{-1}$ *et* $(\mathbf{B} - \mu I)^{-1}$ *commutent alors*
(a) $\mathbf{A}^z \mathbf{B}^w = \mathbf{B}^w \mathbf{A}^z$ *pour* $\max\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} < 0.$

(b) *si* $\mathbf{A}^{is}$ *et* $\mathbf{B}^{it} \in \mathcal{L}(X)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$ *alors* $\mathbf{A}^z \mathbf{B}^w = \mathbf{B}^w \mathbf{A}^z$ *pour* $\max\{\operatorname{Re} w, \operatorname{Re} z\} \leqslant 0.$

Définition 1.5.1 *On note Bip(θ; E) (Bounded imaginary powers) l'ensemble des opérateurs sectoriels sur E qui admettent des puissances imaginaires bornées.*

1.6 Sommes d'opérateurs linéaires dans les espaces de Banach

On donne, ici, quelques rappels sur les principaux résultats de la théorie des sommes d'opérateurs linéaires. Soit X un espace de Banach complexe, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux opérateurs linéaires fermés de domaines $D(\mathbf{A})$ et $D(\mathbf{B})$ respectivement dans X et leurs ensembles résolvants $\rho(\mathbf{A})$ et $\rho(\mathbf{B})$ non vides. La résolution de l'équation suivant

$$\mathbf{A}u + \mathbf{B}u - \lambda u = f, \quad \lambda > 0 \tag{1.6.1}$$

où f est un vecteur donné de X, reposera sur la construction de l'inverse de $A + B - \lambda$ sous des hypothèses correspondantes à des méthodes différentes, selon les deux cas suivants :

1- les résolvantes des opérateurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ commutent : i.e.,

$$\left[(\mathbf{A} - z)^{-1}; (\mathbf{B} - \mu)^{-1}\right] := (\mathbf{A} - z)^{-1} (\mathbf{B} - \mu)^{-1} - (\mathbf{B} - \mu)^{-1} (\mathbf{A} - z)^{-1} = 0$$

2- les résolvantes des opérateurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ne commutent pas (le cas non commutatif).

1.6.1 Sommes commutatives

Dans ce cas, il y a deux approches différentes.

Sommes de Da Prato et Grisvard

Da Prato et Grisvard [6] ont étudié l'équation (1.6.1) sous les hypothèses suivantes

$$(DG.1)\quad \begin{cases} \exists\ C_{\mathbf{A}}, C_{\mathbf{B}} > 0,\ \theta_{\mathbf{A}}, \theta_{\mathbf{B}} \in [0,\pi[\ \text{ tels que} \\ i)\ \rho(\mathbf{A}) \supset \Sigma_{\mathbf{A}} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \pi - \theta_{\mathbf{A}}\}, \\ \forall z \in \Sigma_{\mathbf{A}}; \left\|(\mathbf{A} - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C_{\mathbf{A}}(\theta)}{|z|}. \\ ii)\ \rho(\mathbf{B}) \supset \Sigma_{\mathbf{B}} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \pi - \theta_{\mathbf{B}}\}, \\ \forall z \in \Sigma_{\mathbf{B}}; \left\|(\mathbf{B} - zI)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \dfrac{C_{\mathbf{B}}(\theta)}{|z|}. \\ iii)\ \theta_{\mathbf{A}} + \theta_{\mathbf{B}} < \pi. \\ iv)\ \overline{D(\mathbf{A}) + D(\mathbf{B})} = X, \end{cases}$$

$$(DG.2)\quad \begin{cases} \quad \forall \lambda \in \rho(\mathbf{A}), \forall \mu \in \rho(\mathbf{B}) : \\ \left[(\mathbf{A} - \lambda)^{-1}; (\mathbf{B} - \mu)^{-1}\right] = 0. \end{cases}$$

Ces auteurs ont montré, pour $f \in D_{\mathbf{A}}(\theta, q) + D_{\mathbf{B}}(\theta, q)$, $\theta \in]0,1[$ et $q \in [1, +\infty]$ que l'équation (1.6.1) admet une solution stricte et unique u donnée explicitement par l'intégrale de Dunford

$$u = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\gamma_\lambda} (\mathbf{A} - (z + \lambda) I)^{-1} (\mathbf{B} + zI)^{-1} f dz$$

où γ_λ est une courbe simple orientée de $\infty\ e^{-i\theta_0}$ à $\infty\ e^{i\theta_0}$ avec $\theta_0 \in]\theta_{\mathbf{B}}, \pi - \theta_{\mathbf{A}}[$, demeurant dans $\Sigma_{\mathbf{A}-\boldsymbol{\lambda}} \cap \Sigma_{-\mathbf{B}}$, et la solution a la régularité suivante

$$\mathbf{A}u, \mathbf{B}u \in D_{\mathbf{A}}(\theta, q) \qquad (\text{resp. } D_{\mathbf{B}}(\theta, q)).$$

Sommes de Dore et Venni

Dore et Venni ont utilisé la théorie des opérateurs linéaires qui admettent des puissances imaginaires bornées pour étudier l'équation (1.6.1). Ils ont supposé que

$(DV.0)$ $\quad X$ est un espace de Banach de type UMD,

$$(DV.1) \begin{cases} i)\rho(\mathbf{A}) \supset]-\infty, 0]\ \ et\ \exists M_{\mathbf{A}} > 0 : \left\|(\mathbf{A} + tI)^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{M_{\mathbf{A}}}{1+t}, \forall t \geqslant 0 \\ ii)\rho(\mathbf{B}) \supset]-\infty, 0]\ \ et\ \exists M_{\mathbf{B}} > 0 : \left\|(\mathbf{B} + tI)^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{M_{\mathbf{B}}}{1+t}, \forall t \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(DV.2) \begin{cases} \forall \lambda \in \rho(\mathbf{A}), \quad \mu \in \rho(\mathbf{B}), \\ (\lambda I - \mathbf{A})^{-1} (\mu I - \mathbf{B})^{-1} = (\mu I - \mathbf{B})^{-1} (\lambda I - \mathbf{A})^{-1}. \end{cases}$$

$$
(DV.3)\begin{cases}
i)\forall s\in\mathbb{R}:\mathbf{A}^{is}\in\mathcal{L}\left(x\right)\ et\\
\exists K_{\mathbf{A}}\geqslant 1,\ \theta_{\mathbf{A}}>0,\ \forall s\in\mathbb{R}:\left\|\mathbf{A}^{is}\right\|\leqslant K_{\mathbf{A}}e^{\theta_{\mathbf{A}}|s|},\\
ii)\forall s\in\mathbb{R}:\mathbf{B}^{is}\in\mathcal{L}\left(x\right)\ et\\
\exists K_{\mathbf{B}}\geqslant 1,\ \theta_{\mathbf{B}}>0,\ \forall s\in\mathbb{R}:\left\|\mathbf{B}^{is}\right\|<K_{\mathbf{B}}e^{\theta_{\mathbf{B}}|s|},\\
iii)\ \theta_{\mathbf{A}}+\theta_{\mathbf{B}}<\pi.
\end{cases}
$$

Alors, la somme $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ est fermée, inversible et son inverse est défini par

$$
(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}=\frac{1}{2i}\int_{\gamma}\frac{\mathbf{A}^{-z}\mathbf{B}^{z-1}}{\sin\pi z}dz,
$$

où γ est une courbe verticale contenue dans la bande $\{z\in\mathbb{C}:0<\operatorname{Re}z<1\}$ et orientée de $\infty e^{-i\pi/2}$ vers $\infty e^{i\pi/2}$.

Ce résultat a été généralisé par Prüss et Sohr [19], dans le cas où l'un des deux opérateurs (seulement) est inversible.

Comme application de cette théorie, on cite l'exemple de Dore et Venni [7] pages 196-197. Ils ont étudiés, dans le cadre $L^p(0,T,E)$ avec $1<p<\infty$, le problème de Cauchy

$$
\begin{cases}
u'(t)+\mathbf{A}u(t)=f(t), & 0\leqslant t\leqslant T\\
u(0)=0,
\end{cases}
\tag{1.6.2}
$$

lorsque

$$
E \text{ est un espace } UMD, \tag{1.6.3}
$$

$\mathbf{A}$ est un opérateur linéaire fermé vérifie

$$
\rho\left(\mathbf{A}\right)\supset\left]-\infty,0\right]\ et\ \exists M>0:\left\|(\mathbf{A}+t)^{-1}\right\|\leqslant\frac{M}{1+t},\forall t\geqslant 0 \tag{1.6.4}
$$

et

$$
\exists K\geqslant 1,\ \theta>0,\ \forall s\in\mathbb{R}:\left\|\mathbf{A}^{is}\right\|\leqslant Ke^{\theta|s|}. \tag{1.6.5}
$$

Le résultat est donné par le théorème suivant

Théorème 1.6.1 *Sous les hypothèses (1.6.3), (1.6.4), (1.6.5) et pour $f\in L^p(0,T,E)$, $1<p<\infty$, le problème (1.6.2) admet une unique solution stricte*

$$
t\longmapsto u(t)=\int_0^t e^{(s-t)\mathbf{A}}f(s)ds\in L^p(0,T,E),
$$

de plus $t\mapsto\mathbf{A}u(t)=\mathbf{A}\int_0^t e^{(s-t)\mathbf{A}}f(s)ds\in L^p(0,T,E)$.

1.6.2 Sommes non commutatives

Ici, l'hypothèse de commutativité n'est plus vérifiée elle est remplacée par une nouvelle hypothèse sur le commutateur.

Méthode de Labbas et Terreni

L'idée fondamentale de cette méthode est de construire la solution de l'équation (1.6.1) sous forme $u = (1+\mathbf{T})^{-1}\,\mathbf{S}_\lambda f$ où

$$\mathbf{S}_\lambda f = \frac{-1}{2i\pi}\int_{\gamma_\lambda} (\mathbf{A} - z - \lambda)^{-1}\,(\mathbf{B} + z)^{-1}\, f dz,$$

et $\mathbf{T}$ est un opérateur linéaire assez petit et nul dans le cas commutatif.

Méthode de Monniaux et Prüss

Monniaux et Prüss, ont montré que le Théorème de Dore et Venni reste valable dans le cas où les résolvantes de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ne commutent pas, mais vérifient une condition sur le commutateur du type de Labbas-Terreni.

1.7 La transformée de Fourier :

Transformée de Fourier dans L^1

Définition 1.7.1 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier de f, la fonction notée $F(f)$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$; par*

$$\mathcal{F}(f)(t) := F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-2i\pi xt)\,dx.$$

Exemple. On considère la fonction porte définie par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

il est clair que $\Pi \in L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier est $\mathcal{F}(\Pi)(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$.

Remarques.

* La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ n'est pas $L^1(\mathbb{R})$ car $\left|\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right|$ n'est pas intégrable.

* Les intégrales précédentes ont un sens si et seulement si $f \in L^1(\mathbb{R})$, puisque

$$\left|e^{-2i\pi xt}\right| = 1, |\cos(2\pi xt)| \leq 1 \text{ et } |\sin(2\pi xt)| \leq 1.$$

Exemple. La transformée de $f(x) = e^{-|x|}$ est $\mathcal{F}(f(x))(t) = \dfrac{2}{1+(2\pi t)^2}$.

La transformée de Fourier inverse

Définition 1.7.2 *Soit $F \in L^1(\mathbb{R})$. On définit la transformée de Fourier inverse de la fonction F par*

$$\mathcal{F}^{-1}(F(t)) := f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\exp(2i\pi xt)\,dt.$$

Comportement de la fonction $F = \mathcal{F}f$.

Théorème 1.7.1 (Riemann-Lebesgue) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$*

i) $\mathcal{F}f$ est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

ii) $\mathcal{F}f$ est un opérateur linéaire et continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et

$$\|F\|_\infty \leq \|f\|_1 \tag{1.7.1}$$

tel que $F = \mathcal{F}f$.

iii) $\lim\limits_{|t|\to\infty} |F(t)| = 0$.

Les propriétés de la transformée de Fourier

La linéarité. Soient $f, g \in L^1$ alors

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g) \qquad \forall\alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Transformée de Fourier de la dérivée. Soit $f \in L^1$. Si $f \in L^1$ alors

$$\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right)(t) = 2i\pi x\mathcal{F}(f)(x).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\frac{df}{dt}\right)(t) &= \lim_{|a|\to\infty}\int_{-a}^{+a}\frac{df}{dx}(x)\,e^{-2i\pi tx}dx \\
&= 2i\pi t\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt} f(x)\,dx + \lim_{|a|\to\infty}\left[e^{-2i\pi xt} f(x)\right]_{-a}^{+a} \\
&= 2i\pi t\mathcal{F}(f)(x).
\end{aligned}$$

Ici on a utilisé le résultat suivant,

Proposition 1.7.1 *On suppose que Ω n'est pas borné et soit $f \in L^p(\Omega)$. Si $f' \in L^p(\Omega)$ alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.*

Pour la preuve voir H. Brezis, page 130.

La dérivée de la transformée de Fourier. Soit $f \in L^1$. Alors $\mathcal{F}'(f(x))(t) = -2i\pi\mathcal{F}(xf(x))(t)$.

La transformée de Fourier d'une translation. Soient $f \in L^1, a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathcal{F}\left(f\left(x-a\right)\right)\left(t\right) = e^{-2i\pi at}\mathcal{F}\left(f\left(x\right)\right)\left(t\right).$$

Changement de variables Soit $\omega > 0$, alors $\mathcal{F}\left(f\left(\omega x\right)\right)\left(t\right) = \dfrac{1}{\omega}\mathcal{F}\left(f\left(x\right)\right)\left(\dfrac{t}{\omega}\right)$.

Transformées de Fourier dans L^2

En traitement du signal $L^2(\mathbb{R})$ est l'espace des signaux temps continu d'énergie finie. La transformée de Fourier n'a été vue pour l'instant que pour des fonctions intégrables et $L^2(\mathbb{R})$ n'est pas inclus dans $L^1(\mathbb{R})$. Le but de cette section est d'étendre la définition de la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$.

Proposition 1.7.2 *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $F = \mathcal{F}f$ et $G = \mathcal{F}g$; et on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)G\left(t\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(x\right)g\left(x\right)dx. \tag{1.7.2}$$

Preuve. *Puisque $e^{2it\pi x}f(t)g(x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)G\left(t\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi tx}g\left(x\right)dx\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi tx}f\left(t\right)g\left(x\right)dxdt$$

donc fG est donc dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. D'après le théorème de Fubini, il résulte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t\right)G\left(t\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g\left(x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi tx}f\left(t\right)dt\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(x\right)g\left(x\right)dx.$$

Définition 1.7.3 *Si $f \in L^2$, alors $F = \mathcal{F}f$ est définie par $\mathcal{F}\left(f\right)\left(t\right) = F\left(t\right) = \lim\limits_{T\to\infty}\int_{-T}^{+T} f\left(x\right)e^{-2i\pi xt}dx$.*

On remarque que l'intégrale est prise en valeur principal à l'infinie. Alors $F \in L^2$. De plus, on a

i) Formule de Plancherel $\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(t\right)\overline{G\left(t\right)}dt$.

ii) Formule de Parseval $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f\left(x\right)\right|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|F\left(t\right)\right|^2 dt$.

La transformation de Fourier définie sur $L^1(\mathbb{R})$ et celle obtenue par prolongement sur $L^2(\mathbb{R})$ coïncident sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Chapitre 2

Problème elliptique avec des conditions aux limites de type Robin dans le cadre Lp

2.1 Position du problème et hypothèses

On considère l'équation différentielle abstraite du second ordre de type elliptique avec la condition aux limites suivante

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x) & x \in (0, \infty) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0. \end{cases}$$

Posé dans l'espace de Banach X. Où
– d_0 est un élément de X.
– A et H sont des opérateurs linéaires fermés dans X
– f est une fonction de $L^p(0, \infty; X)$ avec $(1 < p < \infty)$.
On va étudier ce problème sous les hypothèses suivantes :

(H.1) X est un espace UMD.

(H.2) A est un opérateur linéaire fermé tel que

$$[0, +\infty[\subset \rho(A) : \quad \sup_{\lambda \geq 0} \left\| \lambda (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(X)} < +\infty$$

(H.3) H est un opérateur linéaire fermé tel que

$$[0, +\infty[\subset \rho(H) : \quad \sup_{\zeta \geq 0} \left\| \zeta (H - \zeta I)^{-1} \right\|_{L(X)} < +\infty$$

(H.4) Les opérateurs A et H commutent au sens des résolvantes c'est-à-dire pour tout $\lambda \in \rho(A)$ et $\zeta \in \rho(H)$ on a

$$\left[(A - \lambda I)^{-1} ; (H - \zeta I)^{-1} \right] = 0$$

(H.5) Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $(-A)^{is} \in L(X)$ et il existe $\theta_A \in]0, \pi[$ tel que

$$\sup_{s \geq 0} \left\| e^{(-\theta_A |s|)} (-A)^{is} \right\|_{L(X)} < +\infty$$

(H.6) Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $(H)^{is} \in L(X)$ et il existe $\theta_H \in]0, \pi[$ tel que

$$\sup_{s \geq 0} \left\| e^{(-\theta_H |s|)} (H)^{is} \right\|_{L(X)} < +\infty$$

et

$$\frac{\theta_A}{2} + \theta_H \in]0, \pi[.$$

Conséquences des hypothèses :

1. L'hypothèse **(H.2)** implique que l'opérateur $Q := -\sqrt{-A}$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\left(e^{tQ}\right)_{t \geqslant 0}$.
2. D'autre part, l'hypothèse **(H.5)** implique que

$$\exists C > 1, \quad \theta_A \in]0, \pi[: \forall s \in \mathbb{R} \quad \left\| \left(\sqrt{-A}\right)^{is} \right\| \leqslant C e^{\frac{\theta_A}{2}|s|},$$

ce qui signifie que $\sqrt{-A}$ est $\mathrm{Bip}(\theta_A/2; X)$ (voir Haase [15], Proposition 3.2.1, pages 62-63).
3. L'hypothèse **(H.1)** entraine la réflexivité de X, cependant l'opérateur A est sectoriel (L'hypothèse (**H.2**) est vérifie), donc, le domaine $D(A)$ est dense dans X (pour plus de détail voir Haase [15] Proposition 2.1.1 pages 18-19). De même pour le domaine de l'opérateur H.
4. On suppose que les hypothèses (**H.1**)$\sim$(**H.6**) ont lieu et par une application directe du théorème de Dore-Venni on a $H - Q$ oŭ $Q = -\sqrt{-A}$ est un opérateur fermé, borné et inversible c'est à dire il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left\| \left(H + \sqrt{-A}\right)^{-1} \right\|_{L(X)} \leq C.$$

En effet. D'après l'approche de Dore et Venni on a

$$\left(\sqrt{-A} + H\right)^{-1} = \frac{1}{2i} \int_{1/2 - i\infty}^{1/2 + i\infty} \frac{\left((-A)^{1/2}\right)^{-z} + H^{z-1}}{\sin(\pi z)} dz$$

posant $z = 1/2 + i\beta, \beta \in \mathbb{R}$, en utilisant les opérations des puissances complexes sur les opérateurs linéaires, on obtient

$$\begin{cases} (-A)^{i\beta/2} (-A)^{1/4} \subset (-A)^{-z/2} \\ \left((-A)^{1/2}\right)^{-z} = (-A)^{-z/2} \end{cases}$$

d'après **(H.2)** et **(H.5)** $(-A)^{i\beta/2} (-A)^{1/4} \in L(X)$,par conséquent $(-A)^{i\beta/2} (-A)^{1/4} = (-A)^{-z/2}$,en utilisant le fait que

$$\begin{cases} (-A)^{1/4} = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty s^{-1/4} (s - A)^{-1} ds \\ \dfrac{\sin(\pi/4)}{\pi} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\tau^{-1//4}}{1 + \tau} d\tau \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned}\left\|(-A)^{1/4}\right\| &\leq \frac{\sin(\pi/4)}{\pi}\int_0^\infty s^{-1/4}\left\|(s-A)^{-1}\right\|ds\\ &\leq \frac{C\sin(\pi/4)}{\pi}\int_0^\infty \frac{s^{-1/4}}{1+s}ds\\ &\leq C\end{aligned}$$

finalement

$$\left\|(-A)^{-z/2}\right\| \leq \left\|(-A)^{i\beta/2}\right\|\left\|(-A)^{1/4}\right\| \leq Ce^{|\beta|\theta_A/2}.$$

De **(H.6)**, on déduit que

$$\left\|\left(H+\sqrt{-A}\right)^{-1}\right\|_{L(X)} \leq C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(\theta_A/2+\theta_H)|\beta|}}{e^{\pi|\beta|}}d\beta \leq C$$

(on a utilise le fait que pour $z = 1/2 + i\beta, \beta \in \mathbb{R}, |\sin(\pi z)| = \cos(\pi\beta) = \cosh(\pi|\beta|) \geq \frac{e^{\pi|\beta|}}{2}$.)
Remarque. on peut étudier, notre problème dans un cas plus général, en remplaçant les hypothèses (**H**.**3**), (**H**.**4**) et (**H**.**6**) par l'unique hypothèse$H - Q$ est fermé et inversible.

5. De **??** ils existent $v_H > 0$, $r_0 > 0$ et $C > 0$ tel que

$$S_{v_H,r_0} \subset \rho(-H) \text{ et } \sup_{\lambda\in S_{v_H,r_0}}\left\|\lambda(H+\lambda I)^{-1}\right\|_{L(X)} < +\infty.$$

Où

$$S_{v_H,r_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| < v_H\} \cup B(0,r_0).$$

6. Sous (**H**.**2**) $\sim$ (**H**.**6**),on a pour tout $\xi \in D(H)$ et $x \geq 0$,

$$He^{xQ}\xi = e^{xQ}H\xi.$$

En effet pour $\xi \in D(H)$ et $x > 0$ (le cas $x = 0$ est évident). On sait que

$$\forall x \geqslant 0 \qquad e^{xQ} = \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma e^{\lambda t}(Q-\lambda I)^{-1}d\lambda.$$

alors

$$\begin{aligned}He^{xQ}\xi &= \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma e^{\lambda t}H(Q-\lambda I)^{-1}\xi d\lambda\\ &= \frac{-1}{2i\pi}\int_\gamma e^{\lambda t}(Q-\lambda I)^{-1}H\xi d\lambda\\ &= e^{xQ}H\xi.\end{aligned}$$

7. On sait que $(D(A), X)_{1/2,1} \subset D(Q)$, mais pour $\theta_1 < \theta_2$ et $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$, on a $(D(A), X)_{\theta_1,p_1} \subset (D(A), X)_{\theta_2,p_2}$, d'où
$$(D(A), X)_{\frac{1}{2p},p} \subset (D(A), X)_{1/2,1} \subset D(Q)$$
8. l'opérateur
$$(Q - H)^{-1}(Q + H) \in \mathcal{L}(X).$$
Puisque
$$(Q - H)^{-1}(Q + H) = I + 2(Q - H)^{-1} H$$
et selon la proposition 1.1.5 on trouve le résultat.
9. D'après l'hypothèse (**H**.**4**) on a un rapport entre $D(A)$ et $D(H)$ et sous les hypothèses (**H**.**1**) $\sim$ (**H**.**6**) on peut utiliser pour tout $\phi \in X$ le fait que
$$(Q - H)^{-1}\phi \in D(H) \cap D(Q),$$
on a besoin de ce résultat pour la construction d'une solution u satisfait $u(0) \in D(H)$.

2.2 Résolution du problème

On résout ce problème
$$\begin{cases} u''(t) + Au(t) = f(t) & t \in (0, \infty) \\ u'(0) - Hu(0) = d_0 \end{cases} \tag{2.2.1}$$
par la méthode de la variation de la constante en supposant que A et H sont des scalaires vérifiant certains conditions.
Remarque. Selon le corollaire suivant la solution du problème (2.2.1) est nulle au voisinage de l'infini.

Corollaire 2.2.1 *On suppose que I un intervalle n'est pas borné et soit $u \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p < \infty$ alors on a*
$$\lim_{\substack{x \in I \\ |x| \to \infty}} u(x) = 0.$$

Preuve. Voir Brezis [3].
L'équation caractéristique associée à l'équation homogène
$$u''(t) + Au(t) = 0$$
est
$$\lambda^2 + A = 0,$$
donc la solution homogène est donnée sous la forme
$$u(x) = C_1 e^{-\sqrt{-A}x} + C_2 e^{\sqrt{-A}x}.$$

Pour utiliser la méthode de variation des constantes, on cherche une solution sous la forme

$$u(x) = C_1(x)\, e^{-\sqrt{-A}x} + C_2(x)\, e^{\sqrt{-A}x}.$$

On a

$$u'(x) = C_1'(x)\, e^{-\sqrt{-A}x} - C_1(x)\sqrt{-A}e^{-\sqrt{-A}x} + C_2'(x)\, e^{\sqrt{-A}x} + C_2(x)\sqrt{-A}e^{\sqrt{-A}x}$$

On pose

$$C_1'(x)\sqrt{-A}e^{-\sqrt{-A}x} + C_2'(x)\sqrt{-A}e^{\sqrt{-A}x} = 0$$

En remplaçant dans notre équation, on obtient le système d'équation suivant

$$\left\{ \begin{array}{c} C_1'(x)\, e^{-\sqrt{-A}x} + C_2'(x)\, e^{\sqrt{-A}x} = 0 \\ -\sqrt{-A}C_1'(x)\, e^{-\sqrt{-A}x} + \sqrt{-A}C_2'(x)\, e^{\sqrt{-A}x} = f(x) \end{array} \right.$$

En résoud ce système par la méthode de CRAMER, on trouve

$$C_1(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-A}}\int_0^x f(s)\, e^{\sqrt{-A}s}ds + k_1 \qquad k_1 = cste$$

et

$$C_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{-A}}\int_0^x f(s)\, e^{-\sqrt{-A}s}ds + k_2 \qquad k_2 = cste$$

D'où

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(-\frac{1}{2\sqrt{-A}}\int_0^x f(s)\, e^{\sqrt{-A}s}ds + k_1\right) e^{-\sqrt{-A}x} + \left(\frac{1}{2\sqrt{-A}}\int_0^x f(s)\, e^{-\sqrt{-A}s}ds + k_2\right) e^{\sqrt{-A}x} \\ &= k_1 e^{-\sqrt{-A}x} + k_2 e^{\sqrt{-A}x} - \frac{1}{2\sqrt{-A}}\int_0^x f(s)\, e^{-\sqrt{-A}(x-s)}ds + \frac{1}{2\sqrt{-A}}\int_0^x f(s)\, e^{-\sqrt{-A}(s-x)}ds \end{aligned}$$

On veut trouver une fonction $u \in L^p$ et $u' \in L^p$, donc on a selon le corollaire 2.2.1

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0.$$

Pour avoir une telle solution, on suppose que

$$k_2 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^\infty f(s)\, e^{-\sqrt{-A}s}ds.$$

Alors la solution du probléme

$$\left\{ \begin{array}{c} u''(t) + Au(t) = f(t) \\ u(\infty) = 0 \end{array} \right.$$

est

$$\begin{aligned} u(x) &= k_1 e^{-\sqrt{-A}x} + k_2 e^{\sqrt{-A}x} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^x f(s)\, e^{-\sqrt{-A}(x-s)}ds + \frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^x f(s)\, e^{-\sqrt{-A}(s-x)}ds \\ &= k_1 e^{-\sqrt{-A}x} - \left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^\infty f(s)\, e^{-\sqrt{-A}s}ds\right) e^{\sqrt{-A}x} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^x f(s)\, e^{-\sqrt{-A}(x-s)}ds \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^x f(s)\, e^{-\sqrt{-A}(s-x)}ds \\ &= k_1 e^{-\sqrt{-A}x} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^x f(s)\, e^{-\sqrt{-A}(s-x)}ds - \frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_x^\infty f(s)\, e^{-\sqrt{-A}(s-x)}ds \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^x f(s)\, e^{-\sqrt{-A}(x-s)}ds + \frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^x f(s)\, e^{-\sqrt{-A}(s-x)}ds \\ &= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_x^\infty f(s)\, e^{-\sqrt{-A}(s-x)}ds - \frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^x f(s)\, e^{-\sqrt{-A}(x-s)}ds + k_1 e^{-\sqrt{-A}x}. \end{aligned}$$

Revenant à notre problème dans le cas d'une équation abstraite (A opérateur), la solution s'écrit sous la forme suivante

$$u(x) = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_x^\infty f(s)\, e^{-\sqrt{-A}(s-x)}ds - \frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^x f(s)\, e^{-\sqrt{-A}(x-s)}ds + k_1 e^{-\sqrt{-A}x}.$$

Montrons maintenant que cette solution vérifie bien la condition $u(\infty) = 0$. En effet

$$\begin{aligned} \|u(x)\| &\leq \frac{1}{2}M\int_0^x e^{-a(x-s)}\|f(s)\|\, ds + \frac{1}{2}M\int_x^\infty e^{-a(s-x)}\|f(s)\|\, ds + M\|k_1\|\, e^{-ax} \\ &\leq \frac{1}{2}M\int_0^{\frac{x}{2}} e^{-a(x-s)}\|f(s)\|\, ds + \frac{1}{2}M\int_{\frac{x}{2}}^x e^{-a(x-s)}\|f(s)\|\, ds + M\|k_1\|\, e^{-ax} \\ &\quad + \frac{1}{2}M\int_x^\infty e^{-a(s-x)}\|f(s)\|\, ds \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\|u(x)\| &\leq \frac{M}{2}\left[\left(\int_0^{\frac{x}{2}}\|f(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{x}{2}}e^{-aq(x-s)}ds\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x}\|f(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x}e^{-aq(x-s)}ds\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\ &\quad+\frac{1}{2}M\left(\int_x^{\infty}e^{-aq(s-x)}ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_x^{\infty}\|f(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}+Me^{-ax}\|k_1\|\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\|u(x)\| &\leq \frac{M}{2}\left(\int_0^{\frac{x}{2}}\|f(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{e^{\frac{-aqx}{2}}-e^{-aqx}}{aq}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (2.2.2)\\ &\quad+\frac{M}{2}\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x}\|f(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{I-e^{\frac{-aqx}{2}}}{aq}\right)^{\frac{1}{q}}+\frac{1}{2}M\left(\frac{I}{aq}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_x^{\infty}\|f(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\quad+\frac{1}{2}M\left(\int_0^{\infty}\|f(s)\|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{e^{-aq(x)}}{aq}\right)^{\frac{1}{q}}+Me^{-ax}\|k_2\|\end{aligned}$$

lorsque x tend vers l'infini le second membre de (2.2.2) tend vers zéro. Ainsi la solution est

$$u(x)=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_x^{\infty}f(s)\,e^{-\sqrt{-A}(s-x)}ds-\frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^{x}f(s)\,e^{-\sqrt{-A}(x-s)}ds+k_1e^{-\sqrt{-A}x}.$$

Pour trouver k_1 on utilise la condition $u'(0)-Hu(0)=d_0$, on a

$$Hu(0)=-\frac{1}{2}H\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^{\infty}e^{\left(-\sqrt{-A}s\right)}f(s)\,ds+Hk_1.$$

La dérivée de u est

$$\begin{aligned}u'(x) &= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}e^{-\sqrt{-A}(x-x)}f(x)-\frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^{x}\left(-\sqrt{-A}\right)e^{\sqrt{-A}(x-s)}f(s)\,ds\\ &= +\frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}e^{-\sqrt{-A}(x-x)}f(x)-\frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_x^{\infty}\left(\sqrt{-A}\right)e^{-\sqrt{-A}(s-x)}f(s)\,ds\\ &\quad-k_1\left(\sqrt{-A}\right)e^{-\sqrt{-A}x},\end{aligned}$$

donc

$$u'(0) = -\left(\sqrt{-A}\right)k_1 - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{\left(-\sqrt{-A}s\right)} f(s)\,ds.$$

Alors

$$\begin{aligned} u'(0) - Hu(0) &= -\left(H+\sqrt{-A}\right)k_1 - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{\left(-\sqrt{-A}s\right)} f(s)\,ds + \frac{1}{2}H\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^\infty e^{\left(-\sqrt{-A}s\right)} f(s)\,ds \\ &= d_0, \end{aligned}$$

d'où

$$\left(H+\sqrt{-A}\right)k_1 = \frac{1}{2}\left(H-\sqrt{-A}\right)\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^\infty e^{-\sqrt{-A}s} f(s)\,d - d_0.$$

Donc

$$k_1 = \frac{1}{2}\left(H+\sqrt{-A}\right)^{-1}\left(H-\sqrt{-A}\right)\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^\infty e^{-\sqrt{-A}s} f(s)\,d - \left(H+\sqrt{-A}\right)^{-1} d_0$$

par conséquent la solution du problème considéré est

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^x e^{-\sqrt{-A}(x-s)} f(s)\,ds - \frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_x^\infty e^{-\sqrt{-A}(s-x)} f(s)\,ds \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(H+\sqrt{-A}\right)^{-1}\left(H-\sqrt{-A}\right)\left(\sqrt{-A}\right)^{-1}\int_0^\infty e^{-\sqrt{-A}(s+x)} f(s)\,ds - \left(H+\sqrt{-A}\right)^{-1} e^{-\sqrt{-A}x} d_0 \end{aligned}$$

pour presque tout $x > 0$.
Afin de démontrer que la solution obtenue est stricte, on a besoin des lemmes suivants

2.3 Lemmes techniques

Lemme 2.3.1 *Sous les hypothèses (**H.1**), (**H.2**) et (**H.5**) on a pour* $f \in L^p(0,\infty;X)$

(1) $x \to L_0(x,f) = Q\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\,ds \in L^p(0,\infty;X)$.

(2) $x \to L_\infty(x,f) = Q\int_x^\infty e^{(s-x)Q} f(s)\,ds \in L^p(0,\infty;X)$.

(3) $x \to L_{0,\infty}(x,f) = Q\int_0^\infty e^{(s+x)Q} f(s)\,ds \in L^p(0,\infty;X)$.

Preuve.
► La première assertion est une conséquence du théorème de Dore-Venni [7] et le résultat de Dore [8]. Puisque Q génère un semi-groupe analytique alors

$$u(x) = \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds,$$

est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) - Qu(x) = f(x), \ 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Selon le théorème de Dore-Venni

$$x \mapsto Qu(x) = Q\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \in L^p(0,1;X).$$

Il reste a vérifie que $Qu \in L^p(0,\infty;X)$ i.e.,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|Qu(x)\|^p dx &= \int_0^\infty \left\| Q\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \right\|^p dx \\ &= \int_0^1 \left\| Q\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \right\|^p dx + \int_1^\infty \left\| Q\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \right\|^p dx < \infty \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} &\int_1^\infty \left\| Q\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \right\|^p dx \\ \leq\ & 2^{p-1}\left(\int_1^\infty \left\| Q\int_0^{x-1} e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \right\|^p dx + \int_1^\infty \left\| Q\int_{x-1}^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \right\|^p dx \right). \end{aligned}$$

On écrit l'intégrale

$$x \mapsto \int_0^{x-1} Qe^{(x-s)Q} f(s)\, ds$$

sous forme produit de convolution de deux fonctions, une fonction $L^1(\mathbb{R})$ et l'autre est $L^p(\mathbb{R})$, donc selon l'inégalité de Young le produit de convolution est $L^p(\mathbb{R})$. Il résulte donc

$$\int_1^\infty \left\| Q\int_0^{x-1} e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \right\|^p dx < \infty.$$

Il reste à montrer que

$$\int_0^1 \left\| Q\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \right\|^p dx + \int_1^\infty \left\| Q\int_{x-1}^x e^{(t-s)Q} f(s)\, ds \right\|^p dx < \infty.$$

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$f_k = \chi_{[k,k+1[} f,$$

où $\chi_{[k,k+1[}$ est la fonction caractéristique définie sur l'intervalle $[k, k+1[$. Donc

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left\| Q\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \right\|^p dx + \int_1^\infty \left\| Q\int_{x-1}^x e^{(t-s)Q} f(s)\, ds \right\|^p dx \\
= &\int_0^1 \left\| Q\int_0^x e^{(x-s)Q} f_0(s)\, ds \right\|^p dx + \sum_{j=1}^\infty \int_j^{j+1} \left\| Q\int_{x-1}^j e^{(x-s)Q} f_{j-1}(s)\, ds + Q\int_j^x e^{(x-s)Q} f_j(s)\, ds \right\|^p dx \\
\leq &\; 2^{p-1} \left(\sum_{j=0}^\infty \int_j^{j+1} \left\| Q\int_j^x e^{(x-s)Q} f_j(s)\, ds \right\|^p dx + \sum_{j=1}^\infty \int_j^{j+1} \left\| Q\int_{x-1}^j e^{(x-s)Q} f_{j-1}(s)\, ds \right\| dx \right)
\end{aligned}$$

Pour la première intégrale on pose $\tau = x - j$ et $\eta = s - j$ et pour la deuxième on considère ce changement $\tau = x - j$ et $\eta = j - s$ on trouve que

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left\| Q\int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \right\|^p dx + \int_1^\infty \left\| Q\int_{x-1}^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \right\|^p dx \\
\leq &\; 2^{p-1} \left(\sum_{j=0}^\infty \int_0^1 \left\| Q\int_0^\tau e^{(\tau-\eta)Q} f_j(\eta + j)\, d\eta \right\|^p d\tau + \sum_{j=1}^\infty \int_0^1 \left\| Q\int_0^{1-\tau} e^{(\tau+\eta)Q} f_{j-1}(j-\eta)\, d\eta \right\|^p d\tau \right);
\end{aligned}$$

La première série est converge, d'après la régularité dans $[0, 1]$, donc il existe C_1 tel que

$$\sum_{j=0}^\infty \int_0^1 \left\| Q\int_0^\tau e^{(\tau-\eta)Q} f_j(\eta + j)\, ds \right\|^p d\tau \leq C_1 \sum_{j=0}^\infty \|f_j\|_{L^p}^p,$$

et la deuxiéme série est bornèe par

$$\sum_{j=1}^\infty \int_0^1 \left(\int_0^{1-\tau} \left\| Q e^{(\tau+\eta)Q} f_{j-1}(j-\eta) \right\| d\eta \right)^p d\tau.$$

Il existe $C_2 \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $t, s \in [0, 1]$

$$\left\| Q e^{(t+s)Q} \right\| \leq C_2 (t+s)^{-1},$$

on a $(t+s)^{-1}$ défini un opérateur bornè sur $L^p([0,1],\mathbb{R})$, puisque l'espace X est UMD, car pour tout $f \in L^p(0,1;X)$ la fonction F définit par

$$F(f)(t) := \int_0^1 \frac{f(s)}{s+t} ds,$$

vérifie

$$F \in L^p(0,1;X).$$

En effet

$$F(f)t = \int_0^1 \frac{f(s)}{s+t} ds = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(s)}{s+t} ds = \int_{\mathbb{R}} \frac{g(\tau - t)}{\tau} ds,$$

$$F(f)t = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < |\tau| < \frac{1}{\epsilon}} \frac{f(\tau - t)}{\tau} ds = V_p\left(\frac{1}{\tau}\right) * g(-.) = H(g(-.))(t),$$

tel que V_p est la valeur principale de Cauchy et H est la transformée de Hilbert, d'où on a

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^1 \left(\left\| \int_0^{1-\tau} Q e^{(\tau+\eta)Q} f_{j-1}(j-\eta) \right\| d\eta \right)^p d\tau \leq C_3 \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{j-1}\|_{L^p}^p.$$

D'où

$$\int_0^1 \left\| Q \int_0^x e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \right\|^p dx + \int_1^{\infty} \left\| Q \int_{x-1}^{\infty} e^{(x-s)Q} f(s)\, ds \right\|^p dx < \infty.$$

► Concernant la deuxième assertion, l'idée de la preuve est inspirée de Dore. On écrit pour presque $x \in (0,\infty)$

$$x \to L_\infty(x,f) = Q \int_x^{x+1} e^{(s-x)Q} f(s)\, ds + Q \int_{x+1}^{\infty} e^{(s-x)Q} f(s)\, ds = I_1(x) + I_2(x).$$

Soit $f \in L^p(0,\infty;X)$, pour la deuxième intégrale on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \|I_2(x)\|^p dx &\leq \int_0^{\infty} \left\| Q \int_{x+1}^{\infty} e^{(s-x)Q} f(s)\, ds \right\|^p dx \\
&\leq M^P \int_0^{\infty} \left(\int_{x+1}^{\infty} \frac{1}{(s-x)} e^{-(s-x)\alpha} \|f(s)\|\, ds \right)^p dx \\
&\leq M^P \int_0^{\infty} \left(\int_{x+1}^{\infty} e^{-(s-x)\alpha} \|f(s)\|\, ds \right)^p dx.
\end{aligned}$$

On pose

$$\int_{x+1}^{\infty} e^{-(s-x)\alpha} \left\| f\left(s\right) \right\| ds = \left(\varphi * \psi\right)\left(x\right),$$

où

$$\phi\left(\xi\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi > -1 \\ e^{\xi\alpha} & \text{si } \xi \leq -1, \end{cases}$$

et

$$\psi\left(\omega\right) = \begin{cases} \left\| f\left(\omega\right) \right\| & \text{si } \omega \geq 0 \\ 0 & \text{si } \omega < 0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que $\psi \in L^p\left(\mathbb{R}\right)$ et $\phi \in L^p\left(\mathbb{R}\right)$. Alors que l'inégalité de Young implique que $\varphi * \psi \in L^p\left(\mathbb{R}\right)$, c'est à dire

$$\int_0^{\infty} \left\| Q \int_{x+1}^{\infty} e^{(s-x)Q} f\left(s\right) ds \right\|^p dx < \infty.$$

Il reste à montrer que $I_1 \in L^p\left(0, \infty, X\right)$. Pour cela on considère pour tout $j \in \mathbb{N}$, la fonction $f_j = \chi_{[j,j+1[} f$, où $\chi_{[j,j+1[}$ est la fonction caractéristique sur l'intervalle $[j, j+1[$. Donc on peut écrire

$$I_1(x) = Q \int_x^{x+1} e^{(s-x)Q} f\left(s\right) ds = Q \int_x^{j+1} e^{(s-x)Q} f_j\left(s\right) ds + Q \int_{j+1}^{x+1} e^{(s-x)Q} f_{j+1}\left(s\right) ds$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left\| I_1\left(x\right) \right\|^p dx &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_j^{j+1} \left\| Q \int_x^{j+1} e^{(s-x)Q} f_j\left(s\right) ds + Q \int_{j+1}^{x+1} e^{(s-x)Q} f_{j+1}\left(s\right) ds \right\|^p dx \\ &\leq 2^{p-1} \sum_{j=0}^{\infty} \int_j^{j+1} \left\| Q \int_x^{j+1} e^{(s-x)Q} f_j\left(s\right) ds \right\|^p dx \\ &\quad + 2^{p-1} \sum_{j=0}^{\infty} \int_j^{j+1} \left\| Q \int_{j+1}^{x+1} e^{(s-x)Q} f_{j+1}\left(s\right) ds \right\|^p dx. \end{aligned}$$

Posons

$$J_j = \int_j^{j+1} \left\| Q \int_x^{j+1} e^{(s-x)Q} f_j\left(s\right) ds \right\|^p dx,$$

et

$$k_j = \int_j^{j+1} \left\| Q \int_{j+1}^{x+1} e^{(s-x)Q} f_{j+1}\left(s\right) ds \right\|^p dx.$$

En posant $\eta = 1 + j - s$ il vient

$$\begin{aligned}
J_j &= \int_j^{j+1} \left\| Q \int_x^{j+1} e^{(s-x)Q} f_j(s)\, ds \right\|^p dx \\
&= \int_j^{j+1} \left\| Q \int_0^{1+j-x} e^{(-\eta+j+1-x)Q} f_j(-\eta + j + 1)\, d\eta \right\|^p dx
\end{aligned}$$

et puis on pose $\tau = 1 + j - x$ on obtient que

$$\begin{aligned}
J_j &= -\int_1^0 \left\| Q \int_0^{\tau} e^{(\tau-\eta)Q} f_j(-\eta + j + 1)\, d\eta \right\|^p d\tau \\
&= \int_0^1 \left\| Q \int_0^{\tau} e^{(\tau-\eta)Q} f_j(-\eta + j + 1)\, d\eta \right\|^p d\tau \\
&= \left\| L_0(\tau, f_j(1 + j - .)) \right\|^p_{L^p(0,1,;X)},
\end{aligned}$$

par conséquent il existe $C_1 > 0$ tel que

$$J_j \leq C_1^p \left\| f(1 + j - .) \right\|^p_{L^p(0,1,;X)} \leq C_1^p \left\| f \right\|^p_{L^p(j,j+1,;X)}. \tag{2.3.1}$$

Pour k_j on utilise le changement de variable suivant

$$\tau = 1 + j - x \qquad\qquad \sigma = s - j - 1,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
k_j &= \int_j^{j+1} \left\| Q \int_{j+1}^{x+1} e^{(s-x)Q} f_{j+1}(s)\, ds \right\|^p dx \\
&= \int_j^{j+1} \left\| Q \int_0^{x-j} e^{(\sigma+j+1-x)Q} f_{j+1}(1 + j + \sigma)\, d\sigma \right\|^p dx \\
&= \int_0^1 \left\| Q \int_0^{1-\tau} e^{(\sigma+\tau)Q} f_{j+1}(1 + j + \sigma)\, d\sigma \right\|^p d\tau \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^{1-\tau} \left\| Q e^{(\tau+\sigma)Q} f(1 + j + \sigma) \right\| d\sigma \right)^p d\tau \\
&\leq M^p \int_0^1 \left(\int_0^{1-\tau} \frac{1}{\tau + \sigma} \left\| f(1 + j + \sigma) \right\| d\sigma \right)^p d\tau.
\end{aligned}$$

D'autre part, puisque l'espace X est UMD, le noyau $\dfrac{1}{\tau+\sigma}$ définit un opérateur borné sur $L^p(0,1;\mathbb{R})$, par conséquent il existe C_2 tel que

$$k_j \leq C_2 M^p \|f(1+j+.)\|^p_{L^p(0,1,;X)} \leq C_2 M^p \|f\|^p_{L^p(j+1,j+2,;X)}. \tag{2.3.2}$$

De (2.3.1) et (2.3.2), on déduit que

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left\| Q \int_x^{x+1} e^{(s-x)Q} f(s)\,ds \right\|^p dx \\
\leq\ & C_1^p 2^{p-1} \sum_{j=0}^\infty \|f\|^p_{L^p(j,j+1,;X)} + C_2 2^{p-1} M^p \sum_{j=0}^\infty \|f\|^p_{L^p(j+1,j+2,;X)}.
\end{aligned}$$

et comme

$$\sum_{j=0}^\infty \|f\|^p_{L^p(j,j+1,;X)} = \|f\|^p_{L^p(0,\infty,;X)}$$

et

$$\sum_{j=0}^\infty \|f\|^p_{L^p(j+1,j+2,;X)} = \|f\|^p_{L^p(0,\infty,;X)},$$

alors

$$\int_0^\infty \left\| Q \int_x^{x+1} e^{(s-x)Q} f(s)\,ds \right\|^p dx \leq 2^{p-1} \max\left(C_1^p, C_2 M^p\right) \|f\|^p_{L^p(0,\infty,;X)}.$$

► Pour la troisième fonction en effet

$$\begin{aligned}
L_{0,\infty}(x,f) &= Q\int_0^x e^{(s+x)Q} f(s)\,ds + Q\int_x^\infty e^{(s+x)Q} f(s)\,ds \\
&= Q\int_0^x e^{(x-s)Q}\left[e^{2sQ} f(s)\right] ds + e^{2xQ}.Q\int_x^\infty e^{(s-x)Q} f(s)\,ds \\
&= L_0\left(x, e^{2.Q} f(.)\right) + e^{2xQ} L_\infty(x,f).
\end{aligned}$$

Lemme 2.3.2 *On suppose* $(H.2)$ *et soit* $p \in\,]1,\infty[$, *alors*

$$Ae^{\cdot Q}\varphi \in L^p(0,\infty;X) \quad \textit{si et seulement si} \quad \varphi \in (D(A),X)_{\frac{1}{2P},p}.$$

Preuve. Puisque Q génère un semi-groupe analytique alors

$$(D(A),X)_{\frac{1}{2P},p} = \left(D\left(Q^2\right),X\right)_{\frac{1}{2P},p} = \left\{\phi \in X : \int_0^\infty \left\| t^{2\left(\frac{1}{2P}\right)} Q^2 e^{tQ} \right\|^p \frac{dt}{t} < +\infty \right\}.$$

Montrons que $\phi \in \left(D\left(Q^2\right), X\right)_{\frac{1}{2P},p}$ si est seulement si $Q^2 e^{\cdot C}\phi \in L^p\left(0,\infty;X\right)$.
Soit $\phi \in \left(D\left(Q^2\right), X\right)_{\frac{1}{2P},p}$, on a

$$\int\limits_0^\infty \left\|Q^2 e^{tQ}\phi\right\|^p dt = \int\limits_0^\infty \left\|t^{2\left(\frac{1}{2p}\right)} Q^2 e^{tQ}\phi\right\|^p \frac{dt}{t} \leq \|\phi\|_{\left(D\left(Q^2\right),X\right)_{\frac{1}{2P},p}}.$$

Réciproquement, si $Q^2 e^{\cdot Q}\phi \in L^p\left(0,\infty;X\right)$, alors

$$\int\limits_0^\infty \left\|t^{2\left(\frac{1}{2p}\right)} Q^2 e^{tQ}\phi\right\|^p \frac{dt}{t} = \int\limits_0^\infty \left\|t^{\frac{1}{p}} Q^2 e^{tQ}\phi\right\|^p \frac{dt}{t} = \int\limits_0^\infty \left\|Q^2 e^{tQ}\phi\right\|^p dt < \infty.$$

2.4 Solution Stricte

On donne ici, une condition nécessaire et suffisante sur la donnée d_0 assurant l'existence de la solution stricte du problème (2.2.1) c'est à dire

$$u \in W^{2,p}\left(0,\infty;X\right) \cap L^p\left(0,\infty;D\left(A\right)\right)$$

avec $u\left(0\right) \in D(H)$ et u vérifie (2.2.1).

Théorème 2.4.1

Sous les hypothèses (**H.1**) $\sim$ (**H.6**) et pour $f \in L^p\left(0,\infty;X\right)$,avec $1 < p < \infty$. Alors le problème (2.2.1) admet une solution stricte si

$$d_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

Preuve. Soient

$$d_0 \in (D(A), X)_{\frac{1}{2p},p}.$$

On écrit la solution u et Au en fonction de L_0, L_∞ et $L_{0,\infty}$ qui sont définie dans le lemme (2.3.1), on trouve

$$\begin{aligned} u\left(x\right) &= \frac{1}{2}Q^{-1}\int\limits_0^x e^{Q(x-s)} f\left(s\right) ds + \frac{1}{2}Q^{-1}\int\limits_x^\infty e^{Q(s-x)} f\left(s\right) ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(H-Q\right)^{-1}\left(H+Q\right)Q^{-1}\int\limits_0^\infty e^{Q(s+x)} f\left(s\right) ds - \left(H-Q\right)^{-1} e^{Qx} d_0 \\ &= \frac{1}{2}Q^{-2}L_0\left(x,f\right) + \frac{1}{2}Q^{-2}L_\infty\left(x,f\right) - \frac{1}{2}\left(H-Q\right)^{-1}\left(H+Q\right)Q^{-2}L_{0,\infty}\left(x,f\right) - \left(H-Q\right)^{-1} e^{Qx} d_0 \end{aligned}$$

où $Q = -\sqrt{-A}$.

$$\begin{aligned} Au\left(x\right) &= -Q^2 u(x) \\ &= -\frac{1}{2}L_0\left(x,f\right) - \frac{1}{2}L_\infty\left(x,f\right) + \frac{1}{2}\left(H-Q\right)^{-1}\left(H+Q\right)L_{0,\infty}\left(x,f\right) - \left(H-Q\right)^{-1} Q^2 e^{Qx} d_0 \end{aligned}$$

on applique les lemmes (2.3.2) et (2.3.1).

2.5 Cas particuliers

On fait l'étude de notre problème pour des choix différents de l'opérateur H.

2.5.1 Le cas $H = 0$

Le problème devient :

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x) & x \in I = (0, \infty) \\ u'(0) = d_0. & \end{cases}$$

Dans ce cas les hypothèses sont réduites aux

$$X \text{ est un espace UMD.}$$

A est un opérateur linéaire fermé tel que

$$\begin{cases} [0, +\infty[\subset \rho(A) \\ \sup_{\lambda \geq 0} \left\| \lambda (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{L(X)} < +\infty. \end{cases}$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}$,$(-A)^{is} \in L(X)$ et il existe $\theta_A \in]0, \pi[$ tel que

$$\sup_{s \geq 0} \left\| \exp(-\theta_A |s|) (-A)^{is} \right\|_{L(X)} < +\infty.$$

La solution du problème s'écrit

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{2} \left(\sqrt{-A}\right)^{-1} \int_0^x e^{\sqrt{-A}(x-s)} f(s)\, ds - \frac{1}{2} \left(\sqrt{-A}\right)^{-1} \int_x^\infty e^{-\sqrt{-A}(s-x)} f(s)\, ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\sqrt{-A}\right)^{-1} \int_0^\infty e^{-\sqrt{-A}(s+x)} f(s)\, ds - \left(\sqrt{-A}\right)^{-1} e^{-\sqrt{-A}x} d_0 \end{aligned}$$

pour tout $x \in (0, \infty)$.

2.5.2 Le cas $H = \alpha I, \alpha > 0$

On considère le problème abstrait suivant

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x) & x \in I = (0, \infty) \\ u'(0) - \alpha u(0) = d_0. & \alpha > 0 \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$, les hypothèses sont réduites aux

$$X \text{ est un espace UMD.}$$

A est un opérateur linéaire fermé tel que

$$\begin{cases} [0,+\infty[\subset \rho\left(A\right) \\ \sup\limits_{\lambda \geq 0} \left\| \lambda\left(A-\lambda I\right)^{-1} \right\|_{L(X)} < +\infty. \end{cases}$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\left(-A\right)^{is} \in L\left(X\right)$ et il existe $\theta_A \in]0,\pi[$ tel que

$$\sup_{s \geq 0} \left\| \exp\left(-\theta_A \left|s\right|\right) \left(-A\right)^{is} \right\|_{L(X)} < +\infty.$$

La solution dans ce cas s'écrit

$$\begin{aligned} u\left(x\right) &= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1} \int_0^x e^{-\sqrt{-A}(x-s)} f\left(s\right) ds - \frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1} \int_x^\infty e^{-\sqrt{-A}(s-x)} f\left(s\right) ds \\ &+ \frac{1}{2}\left(\alpha I + \sqrt{-A}\right)^{-1} \left(\alpha I - \sqrt{-A}\right) \left(\sqrt{-A}\right)^{-1} \int_0^\infty e^{-\sqrt{-A}(s+x)} f\left(s\right) ds \\ &- \left(\alpha I + \sqrt{-A}\right)^{-1} e^{-\sqrt{-A}x} d_0 \end{aligned}$$

Remarquons que l'opérateur $\left(\alpha I + \sqrt{-A}\right)$ est inversible car $\alpha \in \rho\left(-\sqrt{-A}\right)$.

2.5.3 Le cas $H = \sqrt{-A}$

On obtient le problème suivant

$$\begin{cases} u''\left(x\right) + Au\left(x\right) = f\left(x\right) \qquad x \in I = \left(0,\infty\right) \\ u'\left(0\right) - \sqrt{-A}u\left(0\right) = d_0. \end{cases}$$

On voit que l'opérateur $H = \sqrt{-A}$ vérifier bien les hypothèses (**H.3**), (**H.4**) et (**H.6**). La solution s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} u\left(x\right) &= -\frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1} \int_0^x e^{-\sqrt{-A}(x-s)} f\left(s\right) ds - \frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1} \int_x^\infty e^{-\sqrt{-A}(s-x)} f\left(s\right) ds \\ &- \frac{1}{2}\left(\sqrt{-A}\right)^{-1} e^{-\sqrt{-A}x} d_0. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Exemples d'application

3.1 Exemple 1

Soit $E = L^2(\mathbb{R})$, on définit les opérateurs A et H par

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\mathbb{R}) = \{u \in E : u',\ u'' \in E\} \\ Au = u'', \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(H) = H^1(\mathbb{R}) = \{u \in E : u' \in E\} \\ Hu = bu',\ b > 0. \end{cases}$$

Notre problème abstrait est équivalent au

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}u(x,y) = f(x,y) & (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) - b\dfrac{\partial u}{\partial y}u(0,y) = d_0(y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Les opérateurs A et H sont linéaires, fermés et à domaines denses dans $L^2(\mathbb{R})$.

Lemme 3.1.1 *A vérifie l'hypothèse (H.2).*

Preuve. L'ensemble résolvant de A
Soit $v \in E$, $\lambda \geq 0$. On cherche une unique solution $u \in D(A)$ telle que :

$$(\lambda I - A)u = \lambda u - u'' = v,$$

Alors

$$\lambda \mathcal{F}(u) - \mathcal{F}(u'') = \mathcal{F}(v)$$

où $\mathcal{F}$ est la transformation de Fourier, donc pour tout $\omega := 2\pi t \in \mathbb{R}_+$ on a

$$\begin{aligned} (\lambda \mathcal{F}(u))(\omega) - (i\omega)^2(\mathcal{F}(u))(\omega) &= \left(\lambda + \omega^2\right)(\mathcal{F}(u))(\omega) \\ &= (\mathcal{F}(v))(\omega), \end{aligned}$$

d'où

$$(\mathcal{F}(u))(\omega) = \frac{(\mathcal{F}(v))(\omega)}{\lambda + \omega^2}.$$

et puisque $\mathcal{F}$ est isomorphisme dans $L^2(\mathbb{R})$ (Voir la formule Parseval) donc

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{F}(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{F}(u))(\omega)|^2 \, d\omega = \int_{\mathbb{R}} \frac{|(\mathcal{F}(v))(\omega)|^2}{|(\lambda+\omega^2)|^2} d\omega$$

et donc $\forall \lambda > 0$

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\lambda^2} \|\mathcal{F}(v)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\lambda^2} \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R})} .$$

Pour u' on a

$$(\mathcal{F}(u'))(\omega) = \frac{(\mathcal{F}(v'))(\omega)}{\lambda+\omega^2}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\mathcal{F}(u')\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{F}(u'))(\omega)|^2 \, d\omega = \int_{\mathbb{R}} \frac{|i\omega(\mathcal{F}(v))(\omega)|^2}{|(\lambda+\omega^2)|^2} d\omega \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega^2 |(\mathcal{F}(v))(\omega)|^2}{|(\lambda+\omega^2)|^2} d\omega
\end{aligned}$$

et comme $\dfrac{\omega^2}{|(\lambda+\omega^2)|^2} \leq \dfrac{1}{\lambda}$ alors

$$\|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\lambda} \|\mathcal{F}(v)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\lambda} \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R})} .$$

De même pour u''

$$(\mathcal{F}(u''))(\omega) = \frac{(\mathcal{F}(v''))(\omega)}{\lambda+\omega^2} = \frac{(i\omega)^2 (\mathcal{F}(v))(\omega)}{\lambda+\omega^2} = -\frac{\omega^2 (\mathcal{F}(v))(\omega)}{\lambda+\omega^2}.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\|u''\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\mathcal{F}(u'')\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{F}(u''))(\omega)|^2 \, d\omega = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\omega^2|^2 |(\mathcal{F}(v))(\omega)|^2}{|\lambda+\omega^2|^2} d\omega \\
&\leq \|\mathcal{F}(v)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R})} .
\end{aligned}$$

c'est à dire u' et u'' sont dans $L^2(\mathbb{R})$. D'où u est bien dans $D(A)$ et

$$u(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix\omega} (\mathcal{F}(v))(\omega)}{\lambda+\omega^2} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix(w-t)} v(t)}{\lambda+\omega^2} dt dx,$$

et donc pour $\lambda > 0$, on a la majoration suivante

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1} v\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{K}{\lambda} \|v\|_{L^2(\mathbb{R})} .$$

Lemme 3.1.2 *H vérifie l'hypothèse (H.3).*

Preuve. L'ensemble résolvant de $(-H)$
Soit $v \in E$, $\varsigma \geq 0$. On cherche une unique solution $u \in D(A)$ telle que $(\varsigma I + H) u = v$ ou bien

$$\varsigma u + bu' = v.$$

En utilisant la transformée de Fourier pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ on trouve

$$\varsigma (\mathcal{F}(u))(\omega) + ib\omega (\mathcal{F}(u))(\omega) = (\varsigma + ib\omega)(\mathcal{F}(u))(\omega) = (\mathcal{F}(v))(\omega)$$

alors

$$(\mathcal{F}(u))(\omega) = \frac{(\mathcal{F}(v))(\omega)}{(\varsigma + ib\omega)}$$

et

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{F}(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{F}(u))(\omega)|^2 \, d\omega = \int_{\mathbb{R}} \frac{|(\mathcal{F}(v))(\omega)|^2}{|(\varsigma + b\omega)|^2} d\omega.$$

Donc

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\varsigma^2} \|\mathcal{F}(v)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{\varsigma^2} \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

De la même façon on a pour u'

$$(\mathcal{F}(u'))(\omega) = \frac{(\mathcal{F}(v'))(\omega)}{(\varsigma + ib\omega)} = \frac{i\omega (\mathcal{F}(v))(\omega)}{(\varsigma + ib\omega)}.$$

Or

$$\begin{aligned} \|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\mathcal{F}(u')\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \frac{|i\omega (\mathcal{F}(v))(\omega)|^2}{|\varsigma + ib\omega|^2} d\omega \\ &\leq \frac{K}{\varsigma^2} \|\mathcal{F}(v)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{K}{\varsigma^2} \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

c'est à dire u' est dans $L^2(\mathbb{R})$. D'où u est bien dans $D(H)$ et

$$u(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix\omega} (\mathcal{F}(v))(x)}{\varsigma + ib\omega} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix(w-t)} v(t)}{\varsigma + ib\omega} dt dx.$$

Pour $\varsigma > 0$ on a $\varsigma \in \rho(-H)$ et

$$\left((\varsigma I + H)^{-1} v\right)(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix\omega} (\mathcal{F}(v))(x)}{\varsigma + ib\omega} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix(w-t)} v(t)}{\varsigma + ib\omega} dt dx,$$

et de plus on la majoration suivante :

$$\left\|(\varsigma I + H)^{-1} v\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{K}{\varsigma} \|v\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Lemme 3.1.3 *Les opérateurs A et H sont commutent au sens des résolvantes.*

Preuve. On a pour tout $\lambda \in \rho(A)$ et $\varsigma \in \rho(-H)$

$$\begin{aligned}\left((\lambda I - A)^{-1}(\varsigma I + H)^{-1} v\right)(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix\omega}\left(\mathcal{F}\left((\varsigma I + H)^{-1} v\right)\right)(\omega)}{\lambda + \omega^2} dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix(\omega - t)}\left(\mathcal{F}(v)\right)(\omega)}{(\lambda + \omega^2)(\varsigma + ib\omega)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix(\omega - t)} v(t)}{(\lambda + \omega^2)(\varsigma + ib\omega)} dt dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix(\omega - t)}\left(\mathcal{F}(u)\right)(\omega)}{(\varsigma + ib\omega)} dx.\end{aligned}$$

et par suite

$$\left[(\lambda I - A)^{-1}; (\varsigma I + H)^{-1}\right] = 0.$$

Lemme 3.1.4 *les Opérateurs A et H vérifient les hypothèses (H.5) et (H.6) c'est à dire*

1. $\exists\ K_A > 0,\ \forall\ \theta_A \in (0;\pi),\ \forall\ s \in \mathbb{R} : \left\|(-A)^{is}\right\| \leq K_A e^{\theta_A |s|}$.
2. $\exists\ K_H > 0,\ \forall\ \theta_H \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right),\ \forall\ s \in \mathbb{R} : \left\|(H)^{is}\right\| \leq K_H e^{\theta_H |s|}$.

Preuve. Pour la démonstration on applique le lemme 3 page 218 due à Fuhramn [12] pour $m = 0$ et $m = 1$

Lemme. Soit E un espace de Banach UMD. On considère les deux opérateurs différentiels définis dans l'espace $X = L^p(\mathbb{R}, E)$ par

$$(B_1 u)(t) = (-1)^m u^{(2m)}(t), \quad D(B_1) = W^{2m,p}(\mathbb{R}, E),\ m = 1, 2, ...$$

et

$$(B_2 u)(t) = \sigma u^{(2m+1)}(t),\ D(B_2) = W^{2m+1,p}(\mathbb{R}, E),\ m = 0, 1, 2, ... \text{ et } \sigma = \pm 1.$$

Alors

$$B_1 \in BIP(\varepsilon) \qquad \forall \varepsilon \in [0, \pi]$$

et

$$B_2 \in BIP\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \qquad \forall \varepsilon \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

plus précisément, il existe $C = C(p, m, E)$ telle que

$$\begin{aligned}\left\|B_1^{i\tau}\right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq C(1 + |\tau|) \quad \forall \tau \in \{\mathbb{R}/0\} \\ \left\|B_2^{i\tau}\right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq C(1 + |\tau|)\, e^{|\tau|\pi/2} \quad \forall \tau \in \{\mathbb{R}/0\}\end{aligned}$$

Pour l'espace d'interpolation on a selon Grisvard [13]

$$(D(A), E)_{1/2p,p} = \left(H^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})\right)_{1/2p,p} = H^{2-\frac{1}{P}}(\mathbb{R})$$

Donc on peut appliquer le résultat obtenu dans le deuxième chapitre à cet Exemple, c'est à dire

Proposition 3.1.1 *Soit $f \in L^p(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}))$ avec $1 < p < \infty$. Alors Le problème 3.1.1 admet une unique solution stricte u si $d_0 \in H^{2-\frac{1}{P}}(\mathbb{R})$.*

3.2 Exemple 2

Soit $E = L^2(0,1)$, on considère l'opérateur auto-adjoint T définir par

$$\begin{cases} D(T) = \{u \in H^1(0,1) : u(0) = u(1)\} \\ Tu = iu', u \in D(T) \end{cases}$$

On définit les opérateurs A et H à l'aide de T comme suit

$$A = -T^2 - aI \qquad H = -iT$$

avec $a > 0$; donc

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in H^2(0,1) : u(0) = u(1), u'(0) = u'(1)\} \\ Au = u'' - au, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} D(H) = D(T) = \{u \in H^1(0,1) : u(0) = u(1)\} \\ Hu = u'. \end{cases}$$

Les opérateurs A et H sont linéaires, fermés et vérifier les hypothèses $(\mathbf{H.2}) \sim (\mathbf{H.6})$.
Ensemble résolvant de A : (Voir [4]) Soit $v \in E, \lambda \geq 0$. La résolvante de l'opérateur A

$$(A - \lambda I) u = v,$$

vérifie le problème suivant

$$\begin{cases} u''(x) - (\lambda + a) u(x) = v \\ u(0) = u(1) \quad u'(0) = u'(1). \end{cases}$$

La solution de l'équation homogène donnée sous la forme

$$u(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda+a}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda+a}x},$$

Pour l'équation non homogène, on utilise la méthode de variation des constantes, et les conditions aux limites, on trouve que la solution est donnée sous la forme

$$u(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda+a}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda+a}x} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\lambda+a}} sh\sqrt{\lambda+a}(x-s) v(s) ds$$

avec

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda+a}\left(1-e^{\sqrt{\lambda+a}}\right)} \int_0^1 e^{\sqrt{\lambda+a}(1-s)} v(s) ds \\ C_2 = -\frac{1}{2\sqrt{\lambda+a}\left(1-e^{-\sqrt{\lambda+a}}\right)} \int_0^1 e^{-\sqrt{\lambda+a}(1-s)} v(s) ds \end{cases}$$

et donc

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_0^1 \frac{e^{\sqrt{\lambda+a}(1+x-s)}}{2\sqrt{\lambda+a}\left(1-e^{\sqrt{\lambda+a}}\right)} v(s)\,ds - \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{\lambda+a}(1+x-s)}}{2\sqrt{\lambda+a}\left(1-e^{-\sqrt{\lambda+a}}\right)} v(s)\,ds \\
&\quad + \int_0^x \frac{sh\sqrt{\lambda+a}\,(x-s)}{\sqrt{\lambda+a}} v(s)\,ds \\
&= \int_0^1 \frac{\left(1-e^{-\sqrt{\lambda+a}}\right) e^{\sqrt{\lambda+a}(1+x-s)} - \left(1-e^{\sqrt{\lambda+a}}\right) e^{-\sqrt{\lambda+a}(1+x-s)}}{2\sqrt{\lambda+a}\left(1-e^{\sqrt{\lambda+a}}\right)\left(1-e^{-\sqrt{\lambda+a}}\right)} v(s)\,ds \\
&\quad + \int_0^x \frac{sh\sqrt{\lambda+a}\,(x-s)}{\sqrt{\lambda+a}} v(s)\,ds \\
&= \int_0^1 \frac{sh\sqrt{\lambda+a}\,(1+x-s) - sh\sqrt{\lambda+a}\,(x-s)}{2\sqrt{\lambda+a}\left(1-ch\sqrt{\lambda+a}\right)} v(s)\,ds + \int_0^x \frac{sh\sqrt{\lambda+a}\,(x-s)}{\sqrt{\lambda+a}} v(s)\,ds \\
&= \int_0^x \frac{sh\sqrt{\lambda+a}\,(x-s) + sh\sqrt{\lambda+a}\,(1-x+s)}{2\sqrt{\lambda+a}\left(1-ch\sqrt{\lambda+a}\right)} v(s)\,ds \\
&\quad + \int_x^1 \frac{sh\sqrt{\lambda+a}\,(s-x) + sh\sqrt{\lambda+a}\,(1+x-s)}{2\sqrt{\lambda+a}\left(1-ch\sqrt{\lambda+a}\right)} v(s)\,ds
\end{aligned}$$

On a

$$ch\sqrt{\lambda} - 1 = 2\left(sh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\right)^2$$

et

$$sh\sqrt{\lambda}\,(x-s) + sh\sqrt{\lambda}\,(1-x+s) = 2ch\sqrt{\lambda}\left(\frac{1}{2}-x+s\right) sh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda}$$

finalement

$$u(x) = \int_0^1 K_{\sqrt{\lambda+a}}(x,s)\,v(s)\,ds$$

avec

$$K_{\sqrt{\lambda+a}}(x,s) = -\begin{cases} \dfrac{ch\sqrt{\lambda+a}\left(s-x+\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\lambda+a}sh\left(\dfrac{\sqrt{\lambda+a}}{2}\right)} & \text{si } \ 0 \le s \le x \\[2ex] \dfrac{ch\sqrt{\lambda+a}\left(x-s+\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\lambda+a}sh\left(\dfrac{\sqrt{\lambda+a}}{2}\right)} & \text{si } x \le s \le 1. \end{cases}$$

De plus on a

$$\begin{aligned}
& \sup_x \int_0^1 \left| K_{\sqrt{\lambda+a}}(x,s) \right| ds \\
\leq \; & \sup_x \int_0^x \left| \frac{ch\sqrt{\lambda+a}\left(s-x+\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\lambda+a}sh\left(\frac{\sqrt{\lambda+a}}{2}\right)} \right| ds + \sup_x \int_x^1 \left| \frac{ch\sqrt{\lambda+a}\left(x-s+\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\lambda+a}sh\left(\frac{\sqrt{\lambda+a}}{2}\right)} \right| ds \\
\leq \; & \frac{C}{\lambda+a},
\end{aligned}$$

et selon le Lemme de Schur on trouve que $\left\| (A-\lambda I)^{-1} \right\|_{L(L^2(0,1))} \leq \dfrac{C}{\lambda+a}$.

Lemme 3.2.1 *L'opérateur H vérifie l'hypothèse (H.3).*

Preuve. Soit $v \in E, \varsigma \geq 0$. Cherchons u (unique) dans $D(H)$ tel que

$$(\varsigma I + H) u = \varsigma u + u' = v$$

ce qui donne

$$u(x) = Ce^{-\varsigma x} + \int_0^x e^{-\varsigma(x-s)} v(s)\, ds$$

en utilisant les conditions aux bords, on obtient

$$C = \frac{1}{1-e^{-\varsigma}} \int_0^1 e^{-\varsigma(1-s)} v(s)\, ds$$

d'où

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{1-e^{-\varsigma}} \int_0^1 e^{-\varsigma(1-s+x)} v(s)\, ds + \int_0^x e^{-\varsigma(x-s)} v(s)\, ds \\
&= \frac{1}{1-e^{-\varsigma}} \int_0^x e^{-\varsigma(x-s)} v(s)\, ds + \frac{e^{-\varsigma}}{1-e^{-\varsigma}} \int_x^1 e^{-\varsigma(x-s)} v(s)\, ds \\
&= \frac{1}{2e^{-\frac{\varsigma}{2}} sh\left(\frac{\varsigma}{2}\right)} \int_0^x e^{-\varsigma(x-s)} v(s)\, ds + \frac{e^{-\varsigma}}{2e^{-\frac{\varsigma}{2}} sh\left(\frac{\varsigma}{2}\right)} \int_x^1 e^{-\varsigma(x-s)} v(s)\, ds \\
&= \frac{e^{\frac{\varsigma}{2}}}{2sh\left(\frac{\varsigma}{2}\right)} \int_0^x e^{-\varsigma(x-s)} v(s)\, ds + \frac{e^{-\frac{\varsigma}{2}}}{2sh\left(\frac{\varsigma}{2}\right)} \int_x^1 e^{-\varsigma(x-s)} v(s)\, ds
\end{aligned}$$

alors, pour $\varsigma > 0$, la solution est donnée par

$$u(x) = \int_0^1 K_\varsigma(x,s)\, v(s)\, ds$$

où

$$K_\varsigma(x,s) = \begin{cases} \int_0^x \frac{e^{-\varsigma\left(x-s-\frac{1}{2}\right)}}{2sh\left(\frac{\varsigma}{2}\right)} v(s)\, ds & 0 \leq s \leq x \\ \int_x^1 \frac{e^{-\varsigma\left(x-s+\frac{1}{2}\right)}}{2sh\left(\frac{\varsigma}{2}\right)} v(s)\, ds & x \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |K_\varsigma(x,s)|\, ds \\ \leq & \int_0^x \left| \frac{e^{-\varsigma\left(x-s-\frac{1}{2}\right)}}{2sh\left(\frac{\varsigma}{2}\right)} \right| ds + \int_x^1 \left| \frac{e^{-\varsigma\left(x-s+\frac{1}{2}\right)}}{2sh\left(\frac{\varsigma}{2}\right)} \right| ds \\ \leq & \frac{sh\frac{\varsigma}{2}}{2\left|sh\frac{\varsigma}{2}\right|\varsigma} \leq \frac{1}{\varsigma} \end{aligned}$$

par conséquent $\left\|(\varsigma I + H)^{-1}\right\|_{L(L^2(0,1))} \leq \dfrac{1}{\varsigma}$.

Lemme 3.2.2 *Les opérateurs A et H sont linéaires fermés vérifiant*

i) $\exists\, K > 0,\ \forall\, \theta_A \in (0;\pi),\ \forall\, s \in \mathbb{R}$:

$$\left\|(-A)^{is}\right\| \leq K e^{\theta_A |s|}$$

ii) $\exists\, K_H > 0,\ \forall\, \theta_H \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right),\ \forall\, s \in \mathbb{R} : \left\|(H)^{is}\right\| \leq K_H e^{\theta_H |s|}$.

Preuve. Pour la preuve on applique le théorème 4 page 221 de Fuhrman **[12].**

Remarque. Les opérateurs A et H commutent au sens de résolvantes, et

$$\begin{aligned} (D(A), E)_{1/2p,p} &= \left(H^2(0,1), L^2(0,1)\right)_{1/2p,p} = \left(W^{2,2}(0,1), L^2(0,1)\right)_{1/2p,p} \\ &= \left\{ v \in W^{2-\frac{1}{p},2}(0,1),\ v(0) = v(1),\ v'(0) = v'(1) \right\} \\ &= \left\{ v \in H^{2-\frac{1}{p}}(0,1),\ v(0) = v(1),\ v'(0) = v'(1) \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi le problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) - a u(x,y) = f(x,y) & x \in (0,\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial u}{\partial y}(0,y) = d_0. \end{cases}$$

admet une unique solution stricte si on suppose que $f \in L^p(0,\infty;L^2(0,1))$ et que

$$d_0 \in (D(A), E)_{1/2p,p} = H^{2-\frac{1}{p}}(0,1),$$

avec les conditions périodiques.

Bibliographie

[1] A.V. Balakrishnan . : *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them. Pacific. J .Math., 19 (1964), pp. 419-437.*

[2] P.L. Butzer et H. Berners. : Semisroups of operators and Approximation, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[3] Brezis H. : *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, Paris, New York, Barcelone, Milan, Mexico, Sao Paulo (1983).

[4] Cheggag M. : *Problème de Sturm-Liouville abstrait pour une équation différentielle abstrait complète elliptique du second ordre dans divers espaces.* Thèse d'état, Université d'Oran, Es-Sénia, (2008).

[5] Cheggag M., Favini A., Labbas R. and Medeghri A. : *Sturm-Liouville problem for an abstract differential equation of elliptic type in UMD spaces.* Differential and Integral Equations, 21 (2008), pp. 981-1000.

[6] Da Prato G. and Grisvard P. : *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles.* J. Math. Pures Appl. IX Ser. 54 (1975), pp. 305-387.

[7] Dore G. and Venni. A. : *On the closedness of the sum of two closed operators.* Math. Z. 196 (1987), pp. 189–201.

[8] Dore G. : *Lp regularity for abstract differential equations.* Functional analysis and related topics, 1991 (Kyoto), Lecture Notes in Math. 1540 (1993), Springer, Berlin, pp. 25-38.

[9] K-J. Engel et R. Nagel, One parameter semigroups for linear evolution equations, Grad. Texts Math. 194, Springer, New York, 2000.

[10] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Meisner, Study of complete abstract elliptic differential equations set on the whole line in non commutative cases, Appl. Anal., 91 (2012), 1495-1510.

[11] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot and M. Meisner, Boundary Value for Elliptic Differential Equations in Non-Commutative Cases, Dix. Contin. Dyn. Sys. (2012).

[12] Fuhrman. M. : Bounded imaginary powers of abstract differential operators, evolution equations, Control theory and Biomathematics, Proceedings on the Hman-Sur-Lesse conference, edited by Ph. Clément and G. Lumer, M. Dekker, New York-Basel- Hong Kong, (1994), pp. 215-223.

[13] P. Grisvard : *Spazi di tracce e applicazioni.* Rendiconti di Matematica (4). 5 (1972), série VI, pp. 657-729.

[14] P. Grisvard : commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications, J. Math. Pure Appl. (9) 45 (1966), p.143-290.

[15] M. Haase : *The functional calculus for sectorial operators and similarity methods.* Thesis, Universität Ulm, Germany, (2003).

[16] J. L. Lions and J. Peerte, *Sur une classe d'espaces d'interpolation, Inst. Hautes Etude Sci. Publ. Math., 19 (1964). 5-68.*

[17] J. L. Lions, théorèmes de trace et d'interpolation I et II, Ann. Sc. Norm super. Pisa, Sci. Fis. Mat. (3) 13 (1959),p.389'403 ; et 14 (1960), p. 317-331.

[18] A. Lunardi, "Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic problems,"Birkhaüser Verlag, Basel, 1995.

[19] Pruss J. and Sohr H. : *Imaginary powers of elliptic second order differential operators in L^p-spaces.* Hiroshima Math. J., 23 (1993), pp. 161-192.

[20] H. Triebel, "Interpolation theory, Functions Spaces, Differential Operators," North-Holland Publishing Co.,Amsterdam, New York, 1978.

[21] S.G. Krein, Linear Diffirential Equations in Banach Spaces, Nauka, Moscou, 1967.

Résumé

L'objectif de ce travail est l'étude de la régularité maximale de la solution stricte d'une équation différentielle abstraite du second ordre de type elliptique avec une condition au limite à coefficient opérateur posée dans un domaine non borné. Les techniques utilisées reposent sur la théorie du semi-groupe et principalement sur les travaux de Dore et Venni [7] et Dore [8].
Mots clés : équation differentielle opérationnelle du secod ordre de type elliptique, cadre commutatif, conditions aux limites, régularité maximale, semi-groupe analytique, espace d'interpolation.