REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

Département de mathématiques et informatique

Mémoire de fin d'étude

pour l'obtention du diplome de Master en mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Présenté par

M$^{\text{lle}}$. MOSTEFA Bahia

THEME

Sur l'exposant de convergence des zéros des solutions des équations différentielles linéaires complexes

Soutenu le 26/05/2015 devant le Jury

Mr BELAIDI Benharrat	**Président**	**Pr**	**U. MOSTAGANEM**
Mme AZIZ Karima	**Examinateur**	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM**
Mr Hamouda Saâda	**Encadreur**	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM**

Année universitaire: 2014-2015

Résumé:

Dans ce mémoire, on s'intéresse à étudier quelques propriétés des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients fonctions entières et méromorphes. Parmi ces propriétés est l'exposant de la convergence des zéros. Pour cela, on doit passer par l'ordre de la croissance des solutions et sa relation avec celui des coefficients. Dans cette étude, on a étudié l'exposant de convergence des zéros de $f^{(j)} - \varphi$ où f est une solution de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{(k-1)} f^{(k-1)} + ... + A_0 f = 0$$

et φ est une fonction de faible croissance devant f. En remplaçant φ par z on en déduit les points fixes des solutions.

Remerciements

Tout d'abord je remarcie ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté et le courage pour effectuer ce modeste travail

je tiens à remarcier

Monsieur **Hamouda Saâda** Maître de conférence à l'université de Mostaganem, qui a accepté de diriger ce mémoire, et a mis à notre disposition tous les moyens nécessaires ainsi que ses conseils et sa présence pendant la réalisation de ce travail;

Monsieur **BELAIDI Benharrat** professeur à l'université de Mostaganem, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury;

Madame **AZIZ Karima** Maître de conférence à l'université de Mostaganem, qui a accepté d'analyser ce travail et me fait l'honneur d'être examinateur;

Tous les enseignants que j'ai rencontré durant mon cursus universitaire sans oublier le personnel administratif.

En fin j'exprime mes remerciements à mes chers parents qui m'ont sontenu durant mon existence et ma scolarité, et sans oublier mes soeurs, mes frères, et mes camarades pour leur présence continue et leur soutien indéfectible.

Table des Matières

Introduction

La théorie de l'oscillation complexe des solutions des équations différentielles linéaires dans le plan complexe $\mathbb{C}$ a été introduite la première fois par Bank et Laine [2, 3] en 1982, ils ont étudié l'oscillation des équations différentielles de la forme $f'' + Af = 0$ où A est une fonction entière; puis en 1983, ils ont étudié les zéros des solutions méromorphes des équations différentielles linéaires de second ordre.

Parmi les propriétés des solutions des équations différentielles qui intéressent plusieurs chercheurs récemment sont l'étude des points fixes des solutions des équations différentielles avec coefficients polynômiaux et des coefficients entières transcendantes, l'étude de l'exposant de convergence des zéros des équations différentielles de plus haut ordre et aussi l'étude de l'exposant itératif de convergence des zéros des équations difféertielles de plus haut ordre qui est l'objet de notre travail dans ce mémoire.

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Dans le premier chapitre, on va citer quelques rappels sur la théorie de R. Nevalinna et les définitions nécessaires pour notre travail. Dans le deuxième chapitre, on va étudier l'hyper exposant de convergence des zéros de $f^{(j)} - \varphi$ où f est une solution de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{(k-1)} f^{(k-1)} + ... + A_0 f = 0$$

et φ est une fonction de faible croissance devant f. Dans le dernier chapitre, on étudie l'exposant itératif de convergence des zéros de $f^{(j)} - \varphi$.

Chapitre 1

Rappels et définitions

On va citer seulement les éléments nécessaires pour notre travail dans ce mémoire et pour plus de détail voir [17].

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

1.1.1 Formule de Jenson

Théorème 1.1.1 [17] Soit f une fonction méromorphe telles que $f(0) \neq 0, \infty$ et soit $a_1, a_2, ...$(resp. $b_1, b_2, ...$) ses zéros (resp. ses pôles), chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors

$$\ln |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| f(re^{i\varphi}) \right| d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \ln \frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_i|<r} \ln \frac{r}{|a_i|}.$$

Définition 1.1.1 [17] Pour tout réel $x > 0$, on définit

$$\ln^+ x = \max(\ln x, 0) = \begin{cases} \ln x, \text{ si } x > 1, \\ 0, \text{ si } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Définition 1.1.2 [17] Soit f une fonction méromorphe. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t, a, f)$ le nombre des racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leq t$. Chaque racine étant comptée un nombre de fois égal á son ordre de multiplicité, par $\overline{n}(t,a,f)$ les racines distinctes dans $|z| \leq t$. On désigne par $n(t,\infty,f)$ le nombre des pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$. Chaque pôle étant compté un nombre de fois égal á son ordre de multiplicité, par $\overline{n}(t,\infty,f)$ le nombre des pôles distincts dans $|z| \leq t$.

1.1.2 Fonction a–points

Définition 1.1.3 [17] Soit f une fonction méromorphe, on définit la fonction a–points par

$$N(r,a,f) = N\left(r,\frac{1}{f-a}\right) = \int_0^r \frac{n(t,a,f)-n(0,a,f)}{t}dt + n(0,a,f)\ln r,\ a \neq \infty$$

et

$$N(r,\infty,f) = N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t}dt + n(0,\infty,f)\ln r.$$

1.1.3 Fonction de proximité

Définition 1.1.4 [17] Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe. Alors, on définit la fonction de proximité de la fonction f par

$$m(r,a,f) = m\left(r,\frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}-a)|}d\varphi,\ a \neq \infty$$

et

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi.$$

1.1.4 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Définition 1.1.5 [17] On définit la fonction caractéristique de R. Nevanlinna de la fonction f par

$$T(r,\infty,f) = T(r,f) = m(r,f) + N(r,f).$$

1.2 Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.2.1 [17] Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors pour tout nombre complexe a, on a

$$m(r,a,f) + N(r,a,f) = T(r,f) + O(1)$$

où

$$0 < r < +\infty \text{ et } O(1) = \varepsilon(r,a) \text{ quand } r \to +\infty.$$

Proposition 1.2.1 [17] Soient $f, f_1, ..., f_n$ des fonctions méromorphes et a, b, c, d des constantes complexes telle que $ad - cb \neq 0$, alors

(a)

$$m\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \ln n.$$

(b)

$$m\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i).$$

(c)

$$N\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i).$$

(d)

$$N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i).$$

(e)

$$T\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \ln n, n \geq 1.$$

(f)

$$T\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i), n \geq 1.$$

(g)

$$T(r, f^n) = nT(r, f), n \in \mathbb{N}^*.$$

(h)

$$T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) = T(r, f) + O(1), f \not\equiv \frac{-d}{c}.$$

Parmi les résultats fondamentanx de la théorie de R. Nevanlinna le résultat suivant.

Lemme 1.2.1 (La dérivée logarithmique) [17] Soit f une fonction méromorphe transcendante. Alors

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = S(r, f) = o(T(r, f)),$$

où $S(r, f) = O(\ln T(r, f) + \ln r)$à l'extérieur d'un ensemble $E \subset]0, +\infty[$ de mesure linéaire finie.

Définition 1.2.1 (Fonction de faible croissance) [28] Soient $f(z)$ et $\psi(z)$ des fonctions méromorphes, on dit que $\psi(z)$ est une fonction de faible croissance devant f si

$$T(r, \psi) = S(r, f).$$

1.3 Mesure linéaire et logarithmique

Définition 1.3.1 [28] La mesure linéaire d'un ensemble $E \subset [0, +\infty[$ est définie par

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt,$$

où $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble E et la mesure logarithmique d'un ensemble $F \subset [1, +\infty[$ est définie par

$$m_l(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt.$$

Exemple 1.3.1 La mesure linéaire de l'ensemble $E = [a, b] \subset [0, +\infty[$ est

$$m(E) = \int_{0}^{+\infty} \chi_E(t)\, dt = \int_{a}^{b} dt = b - a.$$

La mesure logarithmique de l'ensemble $F = [e, e^4] \subset [1, +\infty[$ est

$$m_l(F) = \int_{1}^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt = \int_{e}^{e^4} \frac{dt}{t} = 3.$$

1.4 L'ordre p-itératif, le type p-itératif et l'exposant de convergence p-itératif

1.4.1 Ordre de croissance, l'hyper-ordre et le type

Définition 1.4.1 ([16], [12]) Soit f une fonction méromorphe. L'ordre et l'hyper-ordre de cette fonction sont définis respectivement par

$$\sigma(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln T(r,f)}{\ln r},$$

et

$$\sigma_2(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln\ln T(r,f)}{\ln r}.$$

Si f est une fonction entière, alors l'ordre et l'hyper-ordre de cette fonction sont définis aussi respectivement par

$$\begin{aligned} \sigma(f) &= \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r}, \\ \sigma_2(f) &= \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln\ln\ln M(r,f)}{\ln r}, \end{aligned}$$

où $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$.

Exemple 1.4.1 Soit $f(z) = e^z$. Nous avons $n(t,f) = 0$ car f n'admet pas des pôles, par conséquent $N(r,f)=0$. De plus

$$\begin{aligned} m(r,f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|e^{r\cos\varphi}\right| d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left|e^{r\cos\varphi}\right| d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi d\varphi \\ &= \frac{r}{\pi}. \end{aligned}$$

Donc

$$T(r,e^z)=\frac{r}{\pi}$$

D'où

$$\sigma(e^z)=\lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\ln T(r,f)}{\ln r}=1,$$

et

$$\sigma_2(e^z)=0.$$

Remarque. Si l'ordre est fini, alors l'hyper-ordre est nul.

Définition 1.4.2 ([16], [12]) Le type d'une fonction entière $f(z)$ d'ordre fini $0<\sigma(f)=\sigma<+\infty$ est défini par

$$\tau(f)=\limsup_{r\to+\infty}\frac{\ln M(r,f)}{r^\sigma},$$

où $M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|$.

1.4.2 L'exposant et l'hyper exposant de convergence

Définition 1.4.3 [16], [12] Soit f une fonction méromorphe. L'exposant de convergence des zéros de la fonction f est définie par

$$\lambda(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\ln r},$$

où

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n\left(t, \frac{1}{f}\right) - n\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + n\left(0, \frac{1}{f}\right) \ln r,$$

et l'exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\overline{\lambda}(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\ln r},$$

où

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{\overline{n}\left(t, \frac{1}{f}\right) - \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right)}{t} dt + \overline{n}\left(0, \frac{1}{f}\right) \ln r,$$

Exemple 1.4.2 Soit $f(z) = e^z - a$, $a \neq 0, \infty$.

On a $e^z = a \Longleftrightarrow z = \ln a = \ln|a| + i(\arg a + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
|z| &< t \Rightarrow \sqrt{(\ln|a|)^2 + (\arg a + 2k\pi)^2} < t \\
&\Rightarrow \frac{-\sqrt{t^2 - (\ln a)^2} - \arg a}{2\pi} < k < \frac{\sqrt{t^2 - (\ln a)^2} - \arg a}{2\pi} \\
&\Rightarrow n\left(t, \frac{1}{f}\right) \sim \frac{\sqrt{t^2 - (\ln a)^2}}{\pi} \sim \frac{t}{\pi},\ t \to +\infty \\
&\Rightarrow N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \frac{r}{\pi} + o(1) \\
&\Rightarrow \lambda(f) = 1.
\end{aligned}$$

Définition 1.4.4 [30]Soit $f(z)$ une fonction méromorphe. L'hyper exposant de convergence des zéros de la fonction f est défini par

$$\lambda_2(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln\ln N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\ln r},$$

et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction f par

$$\overline{\lambda_2}(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln\ln \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\ln r}.$$

1.4.3 L'ordre p-itératif et le type p-itératif

Notation Pour tout $r \in [0, +\infty[$, on note

$$\exp_1 r = \exp r \quad \text{et} \quad \exp_{j+1} r = \exp\left(\exp_j r\right) \qquad j \in \mathbb{N},$$

et pour r assey grand, on note

$$\ln_1 r = \ln r \quad \text{et} \quad \ln_{j+1} r = \ln\left(\ln_j r\right) \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.4.5 [28] L'ordre p-itératif d'une fonction méromorphe $f(z)$ est défini par

$$\sigma_p(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln_p T(r, f)}{\ln r},$$

Si $f(z)$ est une fonction entière, alors

$$\sigma_p(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln_p T(r, f)}{\ln r} = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln_{p+1} M(r, f)}{\ln r},$$

où $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Remarque 1.4.1 Pour $p = 2$, on a

$$\sigma_2(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln_2 T(r, f)}{\ln r} = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln_3 M(r, f)}{\ln r},$$

est l'hyper ordre de $f(z)$.

Définition 1.4.6 [28] Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\sigma_p(f) = \sigma < \infty$, on définit le type p-itératif de $f(z)$ par

$$\tau_p(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln_p M(r,f)}{r^{\sigma}}.$$

Définition 1.4.7 [28] Ie degré d'indice de croissance d'une fonction entière $f(z)$ est défini par

$$i(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f \text{ est polynômial,} \\ \min\{j \in \mathbb{N}, \sigma_j(f) < \infty\} & \begin{array}{c}\text{si } f \text{ est transcendante pour quelque } j \in \mathbb{N} \\ \text{avec } \sigma_j(f) < \infty \text{ existe,}\end{array} \\ \infty & \text{si } \sigma_j(f) = \infty \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1.4.4 L'exposant de convergence p-itératif

Définition 1.4.8 [28] Posons que $\varphi(z)$ est une fonction entière satisfait $\sigma_p(\varphi) < \sigma_p(f)$ ou bien $i(\varphi) < i(f)$. Alors l'exposant de convergence d'ordre p-itératif des zéros de $f(z) - \varphi(z)$ est défini par

$$\lambda_p(f-\varphi) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln_p N\left(r, \frac{1}{f-\varphi}\right)}{\ln r},$$

Si $\varphi(z) = z$, alors

$$\lambda_p(f-z) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln_p N\left(r, \frac{1}{f-z}\right)}{\ln r},$$

est l'exposant de convergence d'ordre p-itératif des points fixes de $f(z)$.

Si $\varphi(z) = 0$, alors

$$\lambda_p(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\ln_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\ln r},$$

est l'exposant de convergence p-itératif des zéros de $f(z)$.

Définition 1.4.9 [28] L'exposant de convergence p-itératif des zéros distincts de $f(z)-\varphi(z)$ et l'exposant de convergence p-itératif des points fixes distinctes de $f(z)$ sont définis respectivement par

$$\begin{aligned}\overline{\lambda}_p(f-\varphi) &= \lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\ln_p \overline{N}\left(r,\frac{1}{f-\varphi}\right)}{\ln r},\\ \overline{\lambda}_p(f-z) &= \lim_{r\to+\infty}\sup\frac{\ln_p \overline{N}\left(r,\frac{1}{f-z}\right)}{\ln r}.\end{aligned}$$

Définition 1.4.10 [28] Si $\varphi(z)$ est une fonction entière satisfait $\sigma_p(\varphi)<\sigma_p(f)$. ou bien, $i(\varphi)<i(f)$. Alors le degré d'indice de croissance de l'exposant de convergence p-itératif des zéros de $f(z)-\varphi(z)$ est défini par

$$i_\lambda(f-\varphi)=\begin{cases}0 & \text{si } N\left(r,\frac{1}{f-\varphi}\right)=O(\ln r),\\ \min\{j\in\mathbb{N},\lambda_j(f-\varphi)<\infty\} & \begin{array}{c}\text{si } f \text{ est transcendante pour quelque } j\in\mathbb{N}\\ \text{avec } \sigma_j(f)<\infty \text{ existe,}\end{array}\\ \infty & \text{si } \lambda_j(f-\varphi)=\infty \text{ pour tout } j\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

1.5 Indice central et le terme maximal

Définition 1.5.1 Soit $f(z)=\sum\limits_{n\geq 0}a_nz^n$ une fonction entière. Pour tout $r>0$ la série $\sum\limits_{n\geq 0}a_nr^n$ est convergente. D'où

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n|r^n=0,$$

et le terme maximal $\mu(r,f)=\{\max|a_n|r^n,\ n\in\mathbb{N}\}$ est bien défini. On définit l'indice central par

$$\nu(r,p)=\max\{m:|a_m|r^m=|a_n|r^n\}.$$

Exemple 1.5.1 Pour $f(z)=a_nz^n+...+a_0$, alors quand $|z|=r\to+\infty$, on a le terme maximal est a_nz^n et par conséquent $\nu(r,f)=n=\deg(f)$.

Chapitre 2

Sur l'hyper exposant de convergence des zéros de $f^{(j)} - \varphi$

2.1 Introduction

Soit l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$f'' + A(z) f' + B(z) f = 0 \tag{2.1}$$

où $A(z)$ et $B(z)$ $(\not\equiv 0)$ sont des fonctions entières. Plusieurs mathématiciens ont étudié l'oxillation complexe des solutions de l'équation (2.1) et ont obtenu des résultats significatifs et importants **[1, 9, 11, 14, 16].**

En 1996, Shon [**20**] a étudié l'hyper ordre des solutions de (2.1) et il a obtenu le résultat suivant :

Théorème 2.1.1 [**20**] Soient $A(z)$ et $B(z)$ des fonctions entières telles que $\sigma(A) < \sigma(B)$ ou $\sigma(B) < \sigma(A) < \frac{1}{2}$, alors toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.1) satisfait $\sigma_2(f) \geq \max\{\sigma(A), \sigma(B)\}$.

En 2006, Chen et Shon [12] ont étudié l'exposant de convergence de $f^{(j)} - \varphi$ $(j = 1, 2)$ où φ est une fonction entière de faible croissance devant la solution $f \not\equiv 0$ en déduit les points fixes des solutions des équations différentielles linéaires du second ordre. En fait, ils ont obtenu les résultats suivants.

Théorème 2.1.2 [12] Soient $A_j(z) \not\equiv 0\,(j = 1, 2)$ des fonctions entières avec $\sigma(A_j) < 1$, supposons que a, b sont des nombres complexes satisfaisant $ab \neq 0$ et $\arg a \neq \arg b$ ou bien $a = cb$ $(0 < c < 1)$. Si $\varphi(z) \not\equiv 0$ est une fonction entière d'orde fini, alors toute solution non triviale f de l'équation

$$f'' + A_1(z)\,e^{az} f' + A_2(z)\,e^{bz} f = 0$$

satisfait $\overline{\lambda}(f - \varphi) = \overline{\lambda}(f' - \varphi) = \overline{\lambda}(f'' - \varphi) = \infty$.

Théorème 2.1.3 [12] Soient $A_1(z) \not\equiv 0$, $\varphi(z) \not\equiv 0$ et $Q(z)$ des fonctions entières avec $\sigma(A_1) < 1$, $1 < \sigma(Q) < \infty$ et $\sigma(\varphi) < \infty$, alors toute solution non triviale f de l'équation

$$f'' + A_1(z)\,e^{az} f' + Q(z)\,f = 0$$

satisfait $\overline{\lambda}(f - \varphi) = \overline{\lambda}(f' - \varphi) = \overline{\lambda}(f'' - \varphi) = \infty$, où $a \neq 0$ est un nombre complexe.

Dans la même année , Liu et Zhang **[23]** ont étudié les points fixes quand les coefficients des équations sont des fonctions méromorphes, ce qui nous donne le résultat suivant:

Théorème 2.1.4 [23] Supposons que $k \geq 2$ et $A(z)$ est une fonction méromorphe transcendante satisfaisant $\delta(\infty, A) = \liminf_{r\to\infty} \frac{m(r,A)}{T(r,A)} = \delta > 0$, $\sigma(A) = \sigma < +\infty$. Alors toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ de l'équation

$$f^{(k)} + A(z)\,f = 0 \tag{2.2}$$

satisfait que f et $f', f'', ..., f^{(k)}$ ont plusieurs points fixes et $\overline{\lambda}\left(f^{(j)} - z\right) = \sigma$ $(j = 0, 1, ..., k)$.

Pour l'équation (2.2), Belaidi [5], a étudié les points fixes et la relation entre les fonctions de faible croissance et les polynômes différentiels des solutions de l'équation (2.2) et il a obtenu quelques résultats qui améliorent les théorèmes (2.1.4) et (2.1.3).

Maintenant, qu'en est-il pour l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{(k-1)} f^{(k-1)} + ... + A_0 f = 0 \qquad (k \geq 2) \tag{2.3}$$

où $A_j(z)$ $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont des fonctions entières ou méromorphes? Ce qu'on va voir par la suite.

2.2 Résultats principaux

Dans cette partie on va voir la généralisation des résultats précédents faite par Xu, Tu et Zheng [30].

Théorème 2.2.1 Soient $A_j(z)$, $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions entières d'ordre fini et vérifiant une des deux conditions suivantes :

(i) $\max\{\sigma(A_j) : j = 0, 1, ..., k-1\} < \sigma(A_0) < \infty$;

(ii) $0 < \sigma(A_{k-1}) = \cdots = \sigma(A_1) = \sigma(A_0) < \infty$

et $\max\{\tau(A_j) : j = 0, 1, ..., k-1\} = \tau_1 < \tau(A_0) = \tau$.

Alors pour chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.3) et pour toute fonction entière $\varphi(z) \not\equiv 0$ satisfaisant $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$, on a

$$\overline{\lambda}_2(f - \varphi) = \overline{\lambda}_2(f' - \varphi) = \overline{\lambda}_2(f'' - \varphi) = \overline{\lambda}_2(f''' - \varphi) = \overline{\lambda}_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_2(f) = \sigma_2(A_0) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Corollaire 2.2.1 Sous les hypothèses du théorème 2.2.1, si $\varphi(z) = z$, pour chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.3), on a

$$\overline{\lambda}_2(f - z) = \overline{\lambda}_2(f' - z) = \overline{\lambda}_2(f'' - z) = \overline{\lambda}_2(f''' - z) = \overline{\lambda}_2\left(f^{(i)} - z\right) = \sigma_2(f) = \sigma_2(A_0) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Théorème 2.2.2 Soient $A_j(z)$, $j = 1, 2, ..., k-1$ des polynômes et $A_0(z)$ une fonction entière transcendante, alors pour chaque solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (2.3) et pour toute fonction entière $\varphi(z) \not\equiv 0$ d'orde fini, on a

(i) $\overline{\lambda}(f - \varphi) = \lambda(f - \varphi) = \sigma(f) = \infty$,

(ii) $\overline{\lambda}\left(f^{(i)}-\varphi\right)=\lambda\left(f^{(i)}-\varphi\right)=\sigma\left(f^{(i)}-\varphi\right)=\infty\ \ (i\geq 1, i\in\mathbb{N})$.

Corollaire 2.2.2 Sous les hypothèses du théorème 2.2.2, si $\varphi(z)=z$, pour chaque solution $f\not\equiv 0$ de (2.3), nous avons

(i) $\overline{\lambda}(f-z)=\lambda(f-z)=\sigma(f)=\infty$,

(ii) $\overline{\lambda}\left(f^{(i)}-z\right)=\lambda\left(f^{(i)}-z\right)=\sigma\left(f^{(i)}-z\right)=\infty\ \ (i\geq 1, i\in\mathbb{N})$.

Théorème 2.2.3 Soient $A_j(z)$, $j=0,1,...,k-1$ des fonctions méromorphes satisfaisant $\max\{\sigma(A_j):j=1,2,...,k-1\}<\sigma(A_0)$ et $\delta(\infty,A_0)>0$. Alors pour chaque solution méromorphe $f\not\equiv 0$ de l'équation (2.3) et pour toute fonction méromorphe $\varphi(z)\not\equiv 0$ satisfaisant $\sigma_2(\varphi)<\sigma(A_0)$, on a

$$\overline{\lambda}_2\left(f^{(i)}-\varphi\right)=\lambda_2\left(f^{(i)}-\varphi\right)\geq\sigma(A_0)\ \ (i=0,1,...),$$

où $f^{(0)}=f$.

Remarque 2.2.1 L'exemple suivant montre que le théorème 2.2.3 n'est pas valide quand $A_j(z)$, $j=0,1,...,k-1$ ne vérifient pas la condition

$\max\{\sigma(A_j):j=0,1,...,k-1\}<\sigma(A_0)$.

Exemple 2.2.1 Pour l'équation

$$f''+\frac{e^{2z}+e^{z}-1}{1-e^{z}}f'+\frac{-e^{2z}}{1-e^{z}}f=0,\tag{2.4}$$

on obtient que $f(z)=e^{e^{z}}+e^{z}$ est une solution de l'équation (2.4). Et $\frac{e^{2z}+e^{z}-1}{1-e^{z}}$, $\frac{-e^{2z}}{1-e^{z}}$ sont des fonctions méromorphes, de plus on a $\delta\left(\infty,\frac{-e^{2z}}{1-e^{z}}\right)=\frac{1}{2}$. On prend $\varphi(z)=e^{z}$, alors $\sigma_2(\varphi)<\sigma\left(\frac{-e^{2z}}{1-e^{z}}\right)$. Donc, on trouve que

$\overline{\lambda}_2(f'-\varphi)=\overline{\lambda}_2\left(e^{e^{z}}e^{z}\right)=0\neq 1=\sigma\left(\frac{-e^{2z}}{1-e^{z}}\right)$.

Corollaire 2.2.3 Sous les hypothèses du théorème 2.2.3, si $\varphi(z)=z$, pour chaque solution méromorphe $f\not\equiv 0$ de (2.3), on a

$$\overline{\lambda}_2\left(f^{(i)}-z\right)=\lambda_2\left(f^{(i)}-z\right)\geq\sigma_2(A_0)\ \ (i=0,1,...),$$

où $f^{(0)} = f$.

Remarque 2.2.2 Dans le théorème 2.1.2, si $ab \neq 0$ et $a = cb\,(0 < c < 1)$, c'est facile de voir que $\sigma(A_1 e^{az}) = \sigma\left(A_2 e^{bz}\right) = 1$ et $\tau(A_1 e^{az}) = |a| < \tau\left(A_2 e^{bz}\right) = |b|$. Du théorème 2.2.1, pour chaque solution $f \not\equiv 0$ de (2.3) et pour toute fonction entière $\varphi(z) \not\equiv 0$ avec $\sigma_2(\varphi) < 1$, on a $\overline{\lambda}_2(f - \varphi) = \overline{\lambda}_2(f' - \varphi) = \overline{\lambda}_2(f'' - \varphi) = 1$. Donc, le théorme 2.2.1 est une extension partielle du théorème 2.1.2. Le théorème 2.2.2 est une amélioration du théorème 2.1.3. Le théorème 2.2.3 et le corollaire 2.2.3 sont des améliorations du théorème 2.1.4.

2.3 Lemmes

Pour démontrer ces théorèmes, on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 2.3.1 [30] Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (2.3), posons $g = f - \varphi$, alors g satisfait l'équation

$$g^{(k)} + A_{k-1} g^{(k-1)} + ... + A_0 g = -\left[\varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + A_0 \varphi\right]. \tag{2.5}$$

Preuve Puisque $g = f - \varphi$, on a $g' = f' - \varphi', ..., g^{(k)} = f^{(k)} - \varphi^{(k)}$. On les remplace dans l'équation (2.3), on trouve (2.5).

Lemme 2.3.2 [30] Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (2.3), posons $g_1 = f' - \varphi$, alors g_1 satisfait l'équation

$$g_1^{(k)} + U_{k-1}^1 g_1^{(k-1)} + ... + U_0^1 g_1 = -\left[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^1 \varphi^{(k-1)} + ... + U_0^1 \varphi\right], \tag{2.6}$$

où

$$U_j^1 = A'_{j+1} + A_j - \frac{A'_0}{A_0} A_{j+1},$$

$j = 0, 1, ..., k-1$, et $A_k \equiv 1$.

Lemme 2.3.3 [30] Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (2.3), posons $g_2 = f'' - \varphi$, alors g_2 satisfait l'équation

$$g_2^{(k)} + U_{k-1}^2 g_2^{(k-1)} + ... + U_0^2 g_2 = -\left[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^2 \varphi^{(k-1)} + ... + U_0^2 \varphi\right], \tag{2.7}$$

où

$$U_j^2 = {U_{j+1}^1}' + U_j^1 - \frac{U_0^{1\prime}}{U_0^1} U_{j+1}^1,$$

$j = 0, 1, ..., k-1$, et $U_k^1 \equiv 1$.

Lemme 2.3.4 [30] Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (2.3), posons $g_3 = f''' - \varphi$, alors g_3 satisfait l'équation

$$g_3^{(k)} + U_{k-1}^3 g_3^{(k-1)} + ... + U_0^3 g_3 = -\left[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^3 \varphi^{(k-1)} + ... + U_0^3 \varphi\right], \tag{2.8}$$

où

$$U_j^3 = {U_{j+1}^2}' + U_j^2 - \frac{U_0^{2\prime}}{U_0^2} U_{j+1}^2,$$

$j = 0, 1, ..., k-1$, et $U_k^2 \equiv 1$.

Lemme 2.3.5 [30] Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de l'équation (2.3), posons $g_i = f^{(j)} - \varphi$, alors g_i satisfait l'équation

$$g_i^{(k)} + U_{k-1}^i g_i^{(k-1)} + ... + U_0^i g_i = -\left[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^i \varphi^{(k-1)} + ... + U_0^i \varphi\right], \tag{2.9}$$

où

$$U_j^i = U_{j+1}^{i-1\prime} + U_j^{i-1} - \frac{U_0^{i-1\prime}}{U_0^{i-1}} U_{j+1}^{i-1},$$

$j = 0, 1, ..., k-1$, $U_k^{i-1} \equiv 1$, et $i \in \mathbb{N}$.

Preuve On procède par récurrence.

Premièrement, du lemmes (2.3.2)-(2.3.4), nous obtenons que (2.9) est vérifié pour $i = 1, 2, 3$.

Deuxièment, on suppose que $g_i = f^{(i)} - \varphi$, $i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ satisfait (2.9). Donc

$g_n = f^{(n)} - \varphi$ satisfait l'équation

$$g_n^{(k)} + U_{k-1}^n g_n^{(k-1)} + ... + U_0^n g_n = -\left[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^n \varphi^{(k-1)} + ... + U_0^n \varphi\right], \qquad (2.10)$$

où

$$U_j^n = U_{j+1}^{n-1\prime} + U_j^{n-1} - \frac{U_0^{n-1\prime}}{U_0^{n-1}} U_{j+1}^{n-1},\ j = 0, 1, ..., k-1, U_k^{n-1} \equiv 1.$$

Puisque $g_n = f^{(n)} - \varphi$, on a

$$f^{(n+1)} = g_n' + \varphi', \qquad f^{(n+2)} = g_n'' + \varphi'', \qquad ..., \qquad f^{(k+n)} = g_n^{(k)} + \varphi^{(k)}. \quad (2.11)$$

De (2.10) et (2.11), on a

$$f^{(k+n)} + U_{k-1}^n f^{(k+n-1)} + U_{k-2}^n f^{(k+n-2)} + \cdots + U_0^n f^{(n)} = 0. \qquad (2.12)$$

Maintenant on va montrer que $g_{n+1} = f^{(n+1)} - \varphi$ satisfait (2.9).

Comme $g_{n+1} = f^{(n+1)} - \varphi$, on a

$$f^{(n+2)} = g_{n+1}' + \varphi', \qquad f^{(n+3)} = g_{n+1}'' + \varphi'', \qquad ..., \quad f^{(k+n+1)} = g_{n+1}^{(k)} + \varphi^{(k)}. \quad (2.13)$$

La dérivation de l'équation (2.12) est

$$f^{(k+n+1)} + U_{k-1}^n f^{(k+n)} + (U_{k-1}^n{}' + U_{k-2}^n) f^{(k+n-1)} + \cdots + U_0^{n\prime} f^{(n)} = 0. \qquad (2.14)$$

En remplaçant (2.12) dans (2.14), on obtient

$$\begin{aligned} f^{(k+n+1)} + (U_{k-1}^n - \tfrac{U_0^{n\prime}}{U_0^n}) f^{(k+n)} + (U_{k-1}^n{}' + U_{k-2}^n - \tfrac{U_0^{n\prime}}{U_0^n} U_{k-1}^n) f^{(k+n-1)} \\ + \cdots + (U_1^{n\prime} + U_0^n + \tfrac{U_0^{n\prime}}{U_0^n} U_1^n) f^{(n)} = 0. \end{aligned} \qquad (2.15)$$

De la définition de U_j^i et (2.15), on a

$$f^{(k+n+1)} + U_{k-1}^{n+1} f^{(k+n)} + \cdots + U_1^{n+1} f^{(n+1)} + U_0^{n+1} f^{(n)} = 0, \qquad (2.16)$$

Où

$$U_j^{n+1} = U_{j+1}^{n}{}' + U_j^n - \frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n} U_{j+1}^n, \ j = 0, 1, ..., k-1, U_k^n \equiv 1.$$

On remplace (2.13) dans (2.16) ,on obtient

$$g_{n+1}^{(k)} + U_{k-1}^{n+1} g_{n+1}^{(k-1)} + ... + U_0^{n+1} g_{n+1} = -\left[\varphi^{(k)} + U_{k-1}^{n+1}\varphi^{(k-1)} + ... + U_0^{n+1}\varphi\right]. \quad (2.17)$$

Lemme 2.3.6 [30] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante avec $\sigma(f) = \sigma \geq 0$, alors il existe un ensemble $E \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E$, on a

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r} = \sigma, \qquad r \in E.$$

Lemme 2.3.7 [30] Soient $A_0(z)$, $A_2(z), \ldots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières d'ordre fini et satisfaients $\max\{\sigma(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} = \sigma_1 < \sigma(A_0) < \infty$, et posons

$$U_j^1 = A_{j+1}' + A_j - \frac{A_0'}{A_0} A_{j+1},$$

et

$$U_j^i = U_{j+1}^{i-1\prime} + U_j^{i-1} - \frac{U_0^{i-1\prime}}{U_0^{i-1}} U_{j+1}^{i-1},$$

où $j = 0, 1, 2, ..., k-1$, $A_k \equiv 1$, $U_k^{i-1} \equiv 1$ et $i \in \mathbb{N}$. Alors il existe un ensemble E de mesure logarithmique infinie tel que

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\ln m(r, U_0^i)}{\ln r} = \sigma(A_0) > \limsup_{r \to +\infty} \frac{\max_{1 \leq j \leq k-1}\left\{\ln m\left(r, U_j^i\right)\right\}}{\ln r} = \sigma_1, \quad r \in E. \quad (2.18)$$

Preuve Utilisons la démonstration par récurrence.

Pour $i = 1$, On a $U_j^1 = A_{j+1}' + A_j - \frac{A_0'}{A_0} A_{j+1}$, $j = 0, 1, 2, ..., k-1$ et $A_k \equiv 1$.

Si $j = 0$, donc $U_0^1 = A_1' + A_0 - \frac{A_0'}{A_0} A_1$. Alors, nous avons

$$m\left(r, U_0^1\right) \leq m(r, A_1) + m(r, A_0) + m\left(r, \frac{A_1'}{A_1}\right) + m\left(r, \frac{A_0'}{A_0}\right) + O(1). \qquad (2.19)$$

De $A_0 = -A_1' + U_0^1 + \frac{A_0'}{A_0} A_1$, on obtient

$$m(r, A_0) \leq m(r, A_1) + m\left(r, U_0^1\right) + m\left(r, \frac{A_1'}{A_1}\right) + m\left(r, \frac{A_0'}{A_0}\right) + O(1). \quad (2.20)$$

où $j \neq 0$, $j = 1, 2, ..., k-1$, par la définition de U_0^1, on a

$$m\left(r, U_j^1\right) \leq m(r, A_{j+1}) + m(r, A_j) + m\left(r, \frac{A_1'}{A_1}\right) + m\left(r, \frac{A_0'}{A_0}\right) + O(1). \quad (2.21)$$

Comme $A_j(z)$ sont des fonctions entières avec
$\max\{\sigma(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} < \sigma(A_0) < \infty$, et (2.21), on a

$$\max_{1\leq j\leq k-1}\left\{m\left(r, U_j^1\right)\right\} \leq \max_{1\leq j\leq k-1}\left\{m(r, A_j) + o(m(r, A_0)) + O(\ln r)\right\}. \quad (2.22)$$

De (2.19), (2.20), (2.22) et le lemme 2.3.6, il existe un ensemble E de mesure logarithmique infinie tel que

$$\begin{aligned} \lim_{r\to+\infty} \frac{\ln m\left(r, U_0^1\right)}{\ln r} &= \sigma(A_0) > \sigma_1 = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\max_{1\leq j\leq k-1}\{\ln m(r, A_j)\}}{\ln r} \quad (2.23) \\ &\geq \limsup_{r\to+\infty} \frac{\max_{1\leq j\leq k-1}\left\{\ln m\left(r, U_j^1\right)\right\}}{\ln r}, \quad r \in E. \end{aligned}$$

Maintenant, on suppose que (2.18) est vérifié pour $i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Donc, il existe un ensemble E de mesure logarithmique infinie tel que

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln m\left(r, U_0^n\right)}{\ln r} = \sigma(A_0) > \limsup_{r\to+\infty} \frac{\max_{1\leq j\leq k-1}\left\{\ln m\left(r, U_j^n\right)\right\}}{\ln r} = \sigma_1. \quad (2.24)$$

On démontre que (2.18) est vérifié pour $i = n+1$. Puisque $i = n+1$, on a $U_j^{n+1} = {U_{j+1}^n}' + U_j^n - \frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n} U_{j+1}^n$, où $j = 0, 1, 2, ..., k-1$, et $U_k^{i-1} \equiv 1$. Pour $j = 0$, on a $U_0^{n+1} = U_1^{n\prime} + U_0^n - \frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n} U_1^n$. Alors, on obtient

$$m\left(r, U_0^{n+1}\right) \leq m\left(r, U_0^n\right) + m\left(r, U_1^n\right) + m\left(r, \frac{(U_0^n)'}{U_0^n}\right) + m\left(r, \frac{(U_1^n)'}{U_1^n}\right) + O(1). \quad (2.25)$$

Et comme $U_0^n = U_1^{n\prime} + U_0^{n+1} - \frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n} U_1^n$, on trouve

$$m\left(r, U_0^n\right) \leq m\left(r, U_0^{n+1}\right) + m\left(r, U_1^n\right) + m\left(r, \frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n}\right) + m\left(r, \frac{U_1^{n\prime}}{U_1^n}\right) + O\left(1\right). \quad (2.26)$$

Pour $j \neq 0$, des définitions de U_j^{n+1}, $j = 1, 2, ..., k-1$, et $U_k^n \equiv 1$, on a

$$m\left(r, U_j^{n+1}\right) \leq m\left(r, U_{j+1}^n\right) + m\left(r, U_1^n\right) + m\left(r, \frac{U_{j+1}^{n\prime}}{U_{j+1}^n}\right) + m\left(r, \frac{U_0^{n\prime}}{U_0^n}\right) + O\left(1\right). \quad (2.27)$$

De (2.24)-(2.27), il existe un ensemble E de mesure logarithmique infinie tel que

$$\begin{aligned} \lim_{r \to +\infty} \frac{\ln m\left(r, U_0^{n+1}\right)}{\ln r} &= \lim_{r \to +\infty} \frac{\ln m\left(r, U_0^n\right)}{\ln r} = \sigma\left(A_0\right) > \sigma_1 \\ &= \limsup_{r \to +\infty} \frac{\max_{1 \leq j \leq k-1} \left\{\ln m\left(r, U_j^n\right)\right\}}{\ln r} \\ &= \limsup_{r \to +\infty} \frac{\max_{1 \leq j \leq k-1} \left\{\ln m\left(r, U_j^{n+1}\right)\right\}}{\ln r}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

D'où le résultat.

Lemme 2.3.8 [30] Soient $H_j\left(z\right)$ $\left(j = 0, 1, ..., k-1\right)$ des fonctions méromorphes d'ordre fini. Si

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{\max_{1 \leq j \leq k-1} \left\{\ln m\left(r, H_j\right)\right\}}{\ln r} = \beta_1$$

et il existe E_1 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E$, on a

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\ln m\left(r, H_0\right)}{\ln r} = \beta_2 > \beta_1,$$

alors toute solution méromorphe f de

$$f^{(k)} + H_{k-1} f^{(k-1)} + \cdots + H_1 f' + H_0 f = 0 \quad (2.29)$$

satisfait $\sigma_2\left(f\right) \geq \beta_2$.

Preuve Supposons que $f\left(z\right)$ est une solution méromorphe de (2.29). De (2.29), on a

$$m(r,H_0)\leq m\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)+m\left(r,\frac{f^{(k-1)}}{f}\right)+\cdots+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+\sum_{j=1}^{k-1}m(r,H_j)+O(1). \tag{2.30}$$

Du lemme de la dérivée logarithmique et (2.30), on obtient

$$m(r,H_0)\leq O\{\ln rT(r,f)\}+\sum_{j=1}^{k-1}m(r,H_j), \qquad r\notin E_2, \tag{2.31}$$

où $E_2\subset[1,+\infty)$ est un ensemble de mesure linéaire fini. Des hypothèses du lemme 2.3.6, il existe un ensemble E_1 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z|=r\in E_1-E_2$, on a

$$r^{\beta_2-\varepsilon}\leq O\{\ln rT(r,f)\}+(k-1)\,r^{\beta_1+\varepsilon}, \tag{2.32}$$

où $0<2\varepsilon<\beta_2-\beta_1$. De (2.32), on trouve $\sigma_2(f)\geq\beta_2$.

Lemme 2.3.9 [15] Soient f une fonction méromorphe transcendante avec $\sigma(f)=\sigma<\infty$, $\Gamma=\{(k_1,j_1),\ldots,(k_m,j_m)\}$ est un ensemble fini de couples d'entiers qui satisfait $k_i>j_i\geq0$ pour $i=1,...,m$. Et soit $\varepsilon>0$ une constante donné, alors il existe un ensemble $E_3\subset(1,+\infty)$ de mesure logarithmique fini tel que pour tout z satisfaire $|z|=r\notin[0,1]\cup E_3$ et $(k,\ j)\in\Gamma$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right|\leq|z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)}.$$

Lemme 2.3.10 [29] Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\sigma(f)=\sigma$, $\tau(f)=\tau$, $0<\sigma<\infty$, $0<\tau<\infty$, alors pour tout donné $\beta<\tau$ il existe un ensemble $E_4\subset[1,+\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r\in E_4$, on a

$$\ln M(r,f)>\beta r^{\sigma}.$$

Lemme 2.3.11 [30] Soient $A_0(z),\ A_1(z),\ldots,A_{k-1}(z)$ des fonctions entières d'ordre fini et satisfaites $0<\sigma(A_0)=\sigma(A_1)=\cdots=\sigma(A_{k-1})=\sigma_2<\infty$ et

$\max\{\tau(A_j) : j = 1,2,...,k-1\} = \tau_1 < \tau(A_0) = \tau$, et soient U_j^1, U_j^i donnés dans le lemme 2.3.7, alors pour tout ε donné $(0 < \varepsilon < \tau - \tau_1)$, il existe un ensemble E_5 de mesure logarithmique infinie tel que

$$\left|U_j^i\right| \leq \exp\{(\tau_1 + \varepsilon) r^{\sigma_2}\}, \qquad \left|U_0^i\right| \geq \exp\{(\tau - \varepsilon) r^{\sigma_2}\}, \tag{2.33}$$

où $i \in \mathbb{N}$ et $j = 1,2,...,k-1$.

Preuve

Raisonnement par récurrence.

(i) On va prouver que $U_j^i \, (j = 0,1,...,k-1)$ satisfait (2.33) quand $i = 1$. De la définition de $U_j^1 = A'_{j+1} + A_j - \frac{A'_0}{A_0} A_{j+1} \, (j \neq 0)$ et $U_0^1 = A'_1 + A_0 - \frac{A'_0}{A_0} A_1$, on a

$$\left|U_0^1\right| \geq |A_0| - |A_1| \left(\left|\frac{A'_1}{A_1}\right| + \left|\frac{A'_0}{A_0}\right| \right) \tag{2.34}$$

et

$$\left|U_j^1\right| \leq |A_j| + |A_{j+1}| \left(\left|\frac{A'_{j+1}}{A_{j+1}}\right| + \left|\frac{A'_0}{A_0}\right| \right), \; j = 1,2,...,k-1, \; A_k \equiv 1. \tag{2.35}$$

Du lemme 2.3.9, lemme 2.3.10 et (2.34)-(2.35), pour tout $\varepsilon \, (0 < 2\varepsilon < \tau - \tau_1)$, il existe un ensemble E_5 de mesure logarithmique infinie tel que

$$\left|U_0^1\right| \geq \exp\left\{\left(\tau - \frac{\varepsilon}{4}\right) r^{\sigma_2}\right\} - 2\exp\left\{\left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) r^{\sigma_2}\right\} r^M \geq \exp\left\{\left(\tau - \frac{\varepsilon}{2}\right) r^{\sigma_2}\right\} \tag{2.36}$$

et

$$\begin{aligned} \left|U_j^1\right| &\leq \exp\left\{\left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) r^{\sigma_2}\right\} + 2\exp\left\{\left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) r^{\sigma_2}\right\} r^M \\ &\leq \exp\left\{\left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{4}\right) r^{\sigma_2}\right\}, \quad j \neq 0, \end{aligned} \tag{2.37}$$

où $M > 0$ est une constante.

(ii) On vérifie que $U_j^i \, (j = 0,1,...,k-1)$ satisfait (2.33) pour $i = 2$.

De $U_0^2 = U_1^{1'} + U_0^1 - \frac{U_0^{1'}}{U_0^1} U_1^1$, $U_j^0 = U_{j+1}^{1'} + U_j^1 - \frac{U_0^{1'}}{U_0^1} U_{j+1}^1 \, (j = 0,1,...,k-1)$

et $U_k^1 \equiv 1$, on a

$$\left|U_0^2\right| \geq \left|U_0^1\right| - \left|U_1^1\right| \left(\left| \frac{U_1^{1'}}{U_1^1} \right| + \left| \frac{U_0^{1'}}{U_0^1} \right| \right) \tag{2.38}$$

et

$$\left|U_j^2\right| \leq \left|U_j^1\right| + \left|U_{j+1}^1\right| \left(\left| \frac{U_{j+1}^{1'}}{U_{j+1}^1} \right| + \left| \frac{U_0^{1'}}{U_0^1} \right| \right), \ j = 1, 2, ..., k-1. \tag{2.39}$$

De la conclusion de (i) et lemme 2.3.9, (2.36)-(2.39), pour tout $|z| = r \in E_5$,

$$\left|U_0^2\right| \geq \exp\left\{ \left(\tau - \frac{\varepsilon}{2}\right) r^{\sigma_2} \right\} - 2\exp\left\{ \left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) r^{\sigma_2} \right\} r^M \geq \exp\left\{ \left(\tau - \varepsilon\right) r^{\sigma_2} \right\} \tag{2.40}$$

et

$$\begin{aligned} \left|U_j^2\right| &\leq \exp\left\{ \left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) r^{\sigma_2} \right\} + 2\exp\left\{ \left(\tau_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) r^{\sigma_2} \right\} r^M \\ &\leq \exp\left\{ \left(\tau_1 + \varepsilon\right) r^{\sigma_2} \right\}, \quad j \neq 0. \end{aligned} \tag{2.41}$$

(iii) Supposons que (2.33) est vérifiée pour $i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, d'où pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \tau - \tau_1)$, il existe un ensemble E_5 de mesure logarithmique infinie tel que

$$\left|U_j^i\right| \leq \exp\left\{ \left(\tau_1 + \varepsilon\right) r^{\sigma_2} \right\}, \qquad \left|U_0^i\right| \geq \exp\left\{ \left(\tau - \varepsilon\right) r^{\sigma_2} \right\} \qquad \left(i \leq n, j = 1, 2, ..., k-1\right). \tag{2.42}$$

De $U_0^{n+1} = U_1^{n'} + U_0^n - \frac{U_0^{n'}}{U_0^n} U_1^n$ et $U_j^{n+1} = U_{j+1}^{n'} + U_j^n - \frac{U_0^{n'}}{U_0^n} U_{j+1}^n \, (j = 0, 1, ..., k-1)$ et $U_k^n \equiv 1$, on a

$$\left|U_0^{n+1}\right| \geq \left|U_0^n\right| - \left|U_1^n\right| \left(\left| \frac{U_1^{n'}}{U_1^n} \right| + \left| \frac{U_0^{n'}}{U_0^n} \right| \right) \tag{2.43}$$

et

$$\left|U_j^{n+1}\right| \leq \left|U_j^n\right| + \left|U_{j+1}^n\right| \left(\left| \frac{U_{j+1}^{n'}}{U_{j+1}^n} \right| + \left| \frac{U_0^{n'}}{U_0^n} \right| \right), \ j = 1, 2, ..., k-1. \tag{2.44}$$

Alors, du lemme 2.3.9, (2.42)-(2.44), pour tout $|z| = r \in E_5$

$$\begin{aligned} \left|U_j^{n+1}\right| &\leq \exp\left\{(\tau_1+\varepsilon)\, r^{\sigma_2}\right\} + 2\exp\left\{(\tau_1+\varepsilon)\, r^{\sigma_2}\right\} r^M \\ &\leq \exp\left\{(\tau_1+2\varepsilon)\, r^{\sigma_2}\right\}, \qquad j \neq 0, \end{aligned} \tag{2.45}$$

et

$$\left|U_0^{n+1}\right| \geq \exp\left\{(\tau-\varepsilon)\, r^{\sigma_2}\right\} - 2\exp\left\{(\tau_1+\varepsilon)\, r^{\sigma_2}\right\} r^M \geq \exp\left\{(\tau-2\varepsilon)\, r^{\sigma_2}\right\}. \tag{2.46}$$

D'où le résultat.

Lemme 2.3.12 [30] Soient $B_j(z)$, $j = 0, 1, ..., k-1$ des fonctions méromorphes avec $\max\{\sigma(B_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} = \sigma_4 < \sigma(B_0) = \sigma_3$
et $\delta(\infty, B_0) = \liminf\limits_{r\to+\infty} \frac{m(r,B_0)}{T(r,B_0)} > 0$. Alors toute solution méromorphe f de l'équation

$$f^{(k)} + B_{k-1} f^{(k-1)} + \cdots + B_1 f' + B_0 f = 0 \tag{2.47}$$

satisfait $\sigma_2(f) \geq \sigma_3$.

Preuve. Soit f une solution méromorphe de l'éqution (2.47), de (2.47), on a

$$m(r, B_0) \leq m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) + m\left(r, \frac{f^{(k-1)}}{f}\right) + \cdots + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} m(r, B_j)$$

$$\leq O\{\ln r T(r,f)\} + \sum_{j=1}^{k-1} m(r, B_j), \qquad r \notin E_6, \tag{2.48}$$

où $E_6 \subset [1, +\infty)$ est un ensemble de mesure linéaire finie. Du lemme 2.3.6, il existe un ensemble E de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in E$, on a

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln T(r,f)}{\ln r} = \sigma_3, \qquad r \notin E. \tag{2.49}$$

Comme $\delta(\infty, B_0) > 0$, alors pour tout donné ε $(0 < 2\varepsilon < \sigma_3 - \sigma_4)$ et pour tout $r \in E$, de (2.49), on obtient

$$m(r, B_0) \geq r^{\sigma_3 - \varepsilon}. \tag{2.50}$$

De (2.48) et (2.50), on a

$$r^{\sigma_3-\varepsilon} \leq O\left\{\ln rT\left(r,f\right)\right\}+\left(k-1\right)r^{\sigma_4+\varepsilon}, \qquad r\in E-E_6. \tag{2.51}$$

De (2.51), on obtient $\sigma_2\left(f\right)\geq\sigma_3=\sigma\left(B_0\right)$.

Lemme 2.3.13 [15] Soit f une fonction méromorphe transcendante et $\alpha>1$ une constante donnée, pour tout donné $\varepsilon>0$, il existe un ensemble $E_7\subset[1,+\infty)$ de mesure logarithmique finie et une constante $M>0$ qui dépend de α et (m,n) $(m,n\in\{0,...,k\}$ avec $m<n)$ tel que pour tout z satisfaisant $|z|=r\notin[0,1]\cup E_7$, on a

$$\left|\frac{f^{(n)}\left(z\right)}{f^{(m)}\left(z\right)}\right|\leq M\left(\frac{T\left(\alpha r,f\right)}{r}\left(\ln^{\alpha}r\right)\ln T\left(\alpha r,f\right)\right)^{n-m}.$$

Lemme 2.3.14 [30] Soient $B_j\left(z\right)$, $j=0,1,...,k-1$ des fonctions méromorphes d'ordre fini. S'ils existent des constantes positives σ_5, β_3, $\beta_4\left(0<\beta_3<\beta_4\right)$ et un ensemble E_8 de mesure logarithmique infinie tel que

$$\max\left\{\left|B_j\left(z\right)\right|:j=1,2,...,k-1\right\}\leq\exp\left\{\beta_3 r^{\sigma_5}\right\}, \quad \left|B_0\left(z\right)\right|\geq\exp\left\{\beta_4 r^{\sigma_5}\right\}$$

vérifie pour tout $|z|=r\in E_8$, alors toute solution méromorphe de (2.47) satisfait $\sigma_2\left(f\right)\geq\sigma_5$.

Preuve. Supposons que f est une solution méromorphe de (2.47), de (2.47), on a

$$\left|B_0\left(z\right)\right|\leq\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right|+\sum_{j=1}^{k-1}\left|B_j\left(z\right)\right|\left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|. \tag{2.52}$$

Du lemme 2.3.13, il existe un ensemble E_8 de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z|=r\notin E_7$, on a

$$\left|\frac{f^{(j)}}{f}\right|\leq M\left[T\left(2r,f\right)\right]^{j}, j=1,2,...,k, \tag{2.53}$$

où $M>0$ est une constante. De (2.52),(2.53) et les hypothèses du lemme 2.3.14, pour tout $|z| = r \in E_8 - E_7$, on a

$$\exp\{\beta_4 r^{\sigma_5}\} \leq M[T(2r, f)]^k \exp\{\beta_3 r^{\sigma_5}\}. \tag{2.54}$$

Puisque $0 < \beta_3 < \beta_4$, de (2.54), on obtient $\sigma_2(f) \geq \sigma_5$.

Lemme 2.3.15 [26] Soient $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}, F \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes, si f est une solution méromorphe de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z) f = F,$$

alors on a

(i) Si $\max\{\sigma(F), \sigma(A_j) : j = 0, 1, ..., k-1\} < \sigma(f) = \sigma \leq \infty,$ *alors* $\sigma(f) = \lambda(f) = \overline{\lambda}(f)$;

(ii) Si $\max\{\sigma_2(F), \sigma_2(A_j) : j = 0, 1, ..., k-1\} < \sigma_2(f) = \sigma,$ *alors* $\sigma_2(f) = \lambda_2(f) = \overline{\lambda}_2(f)$.

Lemme 2.3.16 [29] Soient $A_j(z)\,(j = 0, 1, ..., k-1)$ des fonctions entières satisfaire $0 < \sigma(A_{k-1}) = \cdots = \sigma(A_1) = \sigma(A_0) < \infty$, $\max\{\tau(A_j) : j = 1, 2, ..., k-1\} = \tau(A_0) < \infty$, alors toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.3) satisfait $\sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.

2.4 Preuves des théorèmes

2.4.1 Preuve du théorème 2.2.1

Pour démontrer la conclusion du théorème 2.2.1, on considère deux cas :

Cas 1. supposons que $\max\{\sigma(A_j) : j = 0, 1, ..., k-1\} < \sigma(A_0) < \infty$.

(i)Premièrement, on démontre que $\overline{\lambda}_2(f - \varphi) = \sigma_2(f)$.

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de (2.3), de [13], on a $\sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.

Posons $g = f - \varphi$. Comme $\sigma_2(f) < \sigma(A_0)$, alors

$$\sigma_2(g) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0) \qquad \text{et} \qquad \overline{\lambda}_2(g) = \overline{\lambda}_2(f - \varphi).$$

Par le lemme 2.3.1, on obtient que g satisfait l'équation (2.5). Posons

$$F = \varphi^{(k)} + A_{k-1}\varphi^{(k-1)} + \cdots + A_0\varphi.$$

Si $F \equiv 0$, de [13], on a $\sigma_2(\varphi) = \sigma(A_0)$, on obtient une contradiction, alors $F \not\equiv 0$, par le lemme 2.3.15, on a

$$\overline{\lambda}_2(g) = \lambda_2(g) = \sigma_2(g) = \sigma(A_0).$$

Donc, on a

$$\overline{\lambda}_2(f-\varphi) = \lambda_2(f-\varphi) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0).$$

(ii)Deuxiément, on preuve que $\overline{\lambda}_2(f'-\varphi) = \sigma_2(f)$. Posons $g_1 = f' - \varphi$, alors $\sigma_2(g_1) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0)$. Par lemme 2.3.2, on obtient que g_1 satisfait l'équation (2.6). Posons $F_1 = \varphi^{(k)} + U^1_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + U^1_0\varphi$, où U^1_j $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont donnés dans le lemme 2.3.2. Si $F_1 \equiv 0$, par lemme 2.3.7 et lemme 2.3.8, on a $\sigma_2(\varphi) \geq \sigma(A_0)$, une contradiction avec $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$. Donc $F_1 \not\equiv 0$. Par lemme 2.3.15, on obtient $\overline{\lambda}_2(f'-\varphi) = \lambda_2(f'-\varphi) = \sigma_2(f)$.

(iii)Maintenant, on prouve que $\overline{\lambda}_2(f''-\varphi) = \sigma_2(f)$. Posons $g_2 = f'' - \varphi$, alors $\sigma_2(g_2) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0)$. Par le lemme 2.3.3, on obtient que g_2 satisfait l'équation (2.7). Posons $F_2 = \varphi^{(k)} + U^2_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + U^2_0\varphi$, où U^2_j $(j = 0, 1, ..., k-1)$ sont donnés dans le lemme 2.3.3. Si $F_2 \equiv 0$, par lemme 2.3.7 et lemme 2.3.8, on a $\sigma_2(\varphi) \geq \sigma(A_0)$, une contradiction avec $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$. Donc $F_2 \not\equiv 0$. Par lemme 2.3.15, on obtient $\overline{\lambda}_2(f''-\varphi) = \lambda_2(f''-\varphi) = \sigma_2(f)$.

(iv) Posons $g_3 = f''' - \varphi$. Des lemmes 2.3.4, 2.3.7, 2.3.8, 2.3.15, en utilisons le même raisonnement que dans le cas1 (iii), on obtient

$\overline{\lambda}_2(f'''-\varphi) = \lambda_2(f'''-\varphi) = \sigma_2(f)$.

(v) On prouve que $\overline{\lambda}_2\left(f^{(i)}-\varphi\right) = \sigma_2(f)$ $(i \geq 3,\, i \in \mathbb{N})$. Posons $g_i = f^{(i)} - \varphi$, alors $\sigma_2(g_i) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0)$. Par le lemme 2.3.5, nous avons g_i satisfait l'équation (2.9). Posons $F_i = \varphi^{(k)} + U^i_{k-1}\varphi^{(k-1)} + ... + U^i_0\varphi$, où $U^i_j\,(j = 0, 1, ..., k-1; i \in \mathbb{N})$ sont donnés dans le lemme 2.3.5. Si $F_i \equiv 0$, par le lemme 2.3.7 et lemme 2.3.8, on a $\sigma_2(\varphi) \geq \sigma(A_0)$, une contradiction avec $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$. Donc $F_i \not\equiv 0$. Par lemme 2.3.15, on obtient $\overline{\lambda}_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_2(f)$.

Cas 2. Supposons que $0 < \sigma(A_{k-1}) = \cdots = \sigma(A_1) = \sigma(A_0) < \infty$ et $\max\{\tau(A_j) : j = 0, 1, ..., k-1\} = \tau_1 < \tau(A_0) = \tau$.

(i) Montrons que $\overline{\lambda}_2(f - \varphi) = \sigma_2(f)$. Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de (2.3), Du lemme 2.3.16, $\sigma_2(f) = \sigma(A_0) > 0$. Posons $g = f - \varphi$. Comme $\varphi \not\equiv 0$ est une fonction entière satisfait $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$, alors on a $\sigma_2(g) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0)$ et $\overline{\lambda}_2(g) = \overline{\lambda}_2(f - \varphi)$.

Par le lemme 2.3.1, on obtient que g satisfait l'équation (2.5). Si $F \equiv 0$, par le lemme 2.3.16, on a $\sigma_2(\varphi) = \sigma_2(A_0)$, une contradiction. Donc $F \not\equiv 0$.

Des hypothèses du théorème 2.2.1, on obtient

$$\max\{\sigma_2(F), \sigma_2(A_j) : j = 0, 1, ..., k-1\} < \sigma_2(g) = \sigma(A_0).$$

Du lemme 2.3.15(ii), on a

$$\overline{\lambda}_2(f - \varphi) = \lambda_2(f - \varphi) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0).$$

(ii) Maintenant on prouve que $\overline{\lambda}_2(f' - \varphi) = \sigma_2(f)$. Posons $g_1 = f' - \varphi$. Comme $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$, alors on a $\sigma_2(g_1) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.

Par le lemme 2.3.2, on obtient que g_1 satisfait l'équation (2.6). Si $F_1 \equiv 0$, par le lemme 2.3.11 et lemme 2.3.14, on a $\sigma_2(\varphi) \geq \sigma(A_0)$, alors on a une contradiction avec $\sigma_2(\varphi) < \sigma(A_0)$. Donc, on a $F_1 \not\equiv 0$.

De (2.6) et le lemme 2.3.15, on obtient

$$\overline{\lambda}_2(f' - \varphi) = \lambda_2(f' - \varphi) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0).$$

Similaire aux arguments du Cas1(iii)-(v) et en utilisant les lemmes 2.3.3-2.3.5, 2.3.11 et le lemme 2.3.14, on obtient

$$\overline{\lambda}_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_2\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_2(f) = \sigma(A_0) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

2.4.2 Preuve du théorème 2.2.2

Comme $A_j(z)$ ($j = 1, 2, ..., k-1$) sont des polynômes et $A_0(z)$ est une fonction entière transcendante, alors nous avons que $A_j(z)$ ($j = 1, 2, ..., k-1$) satisfaient la condition du théorème 2.2.1. En utilisant la même méthode de la preuve du théorème 2.2.1 et le lemme 2.3.15(i), on obtient facilement la conclusion de théorème 2.2.2.

2.4.3 Preuve du théorème 2.2.3

Selon les conditions du théorème 2.2.3, on peut trouver facilement la conclusion de théorème 2.2.3 en utilisant la même méthode de la preuve du théorème 2.2.1 et le lemme 2.3.15.

Chapitre 3

Sur l'exposant itératif de la convergence des zéros de $f^{(j)}(z) - \varphi(z)$

Dans ce chapitre, On va voir l'étude de l'exposant itératif de convergence des zéros de $f^{(j)}(z) - \varphi(z)$ des solutions des équations différentielles linéaires, en généralisant les résultats précédants de Chen [10], Chen et Shon [12] et Tu [27].

3.1 Introduction

Dans [10], Chen a étudié les points fixes des solutions des équations (3.1) et (3.2) avec des coefficients polynômials et des coefficients entières transcendantes d'ordre fini et a obtenu les résultats suivants.

Théorème 3.1.1 [10] Soit $P(z)$ un polynôme de degree $n\,(\geq 1)$. Alors chaque solution non triviale de

$$f'' + P(z)\,f = 0 \tag{3.1}$$

a infiniment plusieurs points fixes et satisfait
$\overline{\lambda}(f - z) = \lambda(f - z) = \sigma(f) = \frac{n+1}{2}$.

Théorème 3.1.2 [10] Soit $A(z)$ une fonction entière transcendante avec

$\sigma(A) = \sigma < \infty$. Alors chaque solution non-triviale de

$$f'' + A(z) f = 0 \tag{3.2}$$

a infiniment plusieurs points fixes et satisfait

$\overline{\lambda}_2(f - z) = \lambda_2(f - z) = \sigma_2(f) = \sigma$.

Deux anneé aprés, dans [12], Chen a étudié les zéros de $f^{(j)}(z) - \varphi(z)$ $(j = 0, 1, 2)$ et a prouvé les théorèmes 2.1.2 et 2.1.3 (voir le chapitre précèdent). En 2012, Xu, Tu et Zheng ont prouvé les résultats principaux de notre deuxième chapitre qui généralisent les résultats précédents.

Dans la suite on voir une généralisations dans un autre sens: c'est pour l'étude de l'exposant itératif comme suivant.

3.2 Résultats principaux

Le but de ce chapitre est de voir l'amélioration du théorème E concernant les équations différentielles linéaires de coefficients entières d'ordre fini dans (2.3) à coefficients entières d'ordre itératif fini faite par Tu, Xuan et Xu [28] en realisant les résultats suivants.

Théorème 3.2.1 Soient $A(z)$ et $B(z)$ des fonctions entières d'ordre itératif fini satisfaire $\sigma_p(A) < \sigma_p(B) < \infty$ ou $0 < \sigma_p(A) = \sigma_p(B) < \infty$

et $0 \leq \tau_p(A) < \tau_p(B) < \infty$. Alors pour toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.1) et pour toute fonction entière $\varphi(z) \not\equiv 0$ satisfaire $\sigma_{p+1}(\varphi) < \sigma_p(B)$, on a

(i) $\overline{\lambda}_{p+1}(f - \varphi) = \overline{\lambda}_{p+1}(f' - \varphi) = \overline{\lambda}_{p+1}(f'' - \varphi) = \overline{\lambda}_{p+1}(f''' - \varphi) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(B)$;

(ii) $\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(B)\,(j > 3,\ j \in \mathbb{N})$.

Corollaire 3.2.1 Sous les hypothèses du théorème 3.2.1, si $\varphi(z) = z$, on obtient

(i) $\overline{\lambda}_{p+1}(f - z) = \overline{\lambda}_{p+1}(f' - z) = \overline{\lambda}_{p+1}(f'' - z) = \overline{\lambda}_{p+1}(f''' - z) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(B)$;

(ii) $\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(i)} - z\right) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(B)$ $(j > 3,\ j \in \mathbb{N})$.

Théorème 3.2.2 Soient $A(z)$ et $B(z)$ des fonctions entières satisfaire $i(A) < i(B) = 1$. Alors pour toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.1) et pour toute fonction entière $\varphi(z) \not\equiv 0$ satisfaire $i(\varphi) \leq p$, on a

(i) $i_{\overline{\lambda}}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = i_{\lambda}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = i\left(f^{(i)} - \varphi\right) = p + 1\,(j = 0, 1, 2, ...)$;

(ii) $\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_{p+1}\left(f^{(i)} - \varphi\right) = \sigma_p(B)\,(j = 0, 1, 2, ...)$.

Corollaire 3.2.2 Sous les hypothèses du théorème 3.2.2, si $\varphi(z) = z$, on a

(i) $i_{\overline{\lambda}}\left(f^{(i)} - z\right) = i_{\lambda}\left(f^{(i)} - z\right) = i\left(f^{(i)} - z\right) = p + 1\,(j = 0, 1, 2, ...)$;

(ii) $\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(i)} - z\right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(i)} - z\right) = \sigma_{p+1}\left(f^{(i)} - z\right) = \sigma_p(B)\,(j = 0, 1, 2, ...)$.

Théorème 3.2.3 Sous les hypothèses du théorème 3.2.1, soit

$$L(f) = a_k f^{(k)} + a_{k-1} f^{(k-1)} + \cdots + a_0 f,$$

où $a_j \not\equiv 0\,(j = 0, 1, 2, ..., k)$ sont des fonctions entières satisfaire $\sigma_p(a_j) < \sigma_p(B)$. Alors pour toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.1), on a $\sigma_{p+1}(L(f)) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(B)$.

Remarque 3.2.1 Le théorème 3.2.1 est un extension et amélioration du théorème 3.1.3. Par le théorème 3.1.3, pour toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.1) et pour toute fonction entière $\varphi(z) \not\equiv 0$ satisfaire $\sigma_p(\varphi) < 1$, on a

$$\overline{\lambda}_2(f - \varphi) = \overline{\lambda}_2(f' - \varphi) = \overline{\lambda}_2(f'' - \varphi) = 1.$$

3.3 Lemmes

Lemme 3.3.1[8, 24] Soit $f(z)$ est une fonction entière avec $\sigma_p(f) = \sigma$, et $\nu_f(r)$ est l'indice central de $f(z)$. Alors

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{\ln_p \nu_f(r)}{\ln r} = \sigma. \tag{3.3}$$

Lemme 3.3.2 [28] Soit $f(z)$ une fonction entière avec $\sigma_p(f) = \sigma$, alors il existe un ensemble $E_1 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E_1$, nous avons

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln_p T(r,f)}{\ln r}=\sigma,\qquad r\in E_1. \tag{3.4}$$

Preuve Par la définition 1.4.5 on a $\limsup_{r\to+\infty}\frac{\ln_p T(r,f)}{\ln r}=\sigma$, il existe une suite $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers $+\infty$ et qui satisfait $\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n<r_{n+1}$ et

$$\lim_{r_n\to+\infty}\frac{\ln_p T(r_n,f)}{\ln r_n}=\sigma. \tag{3.5}$$

Il existe n_1 tel que pour tout $n\geq n_1$ et pour tout $r\in\left[r_n,\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n\right]$, on a

$$\frac{\ln_p T(r_n,f)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n}\leq\frac{\ln_p T(r,f)}{\ln r}. \tag{3.6}$$

Posons $E_1=\cup_{n=n_1}^{\infty}\left[r_n,\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n\right]$, de (3.6) et la définition 1.4.5, alors pour tout $r\in E_1$, on a

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln_p T(r,f)}{\ln r}=\lim_{r_n\to+\infty}\frac{\ln_p T(r_n,f)}{\ln r_n}=\sigma,$$

et

$$m_l E_1=\sum_{n=n_1}^{\infty}\int_{r_n}^{\left(1+\frac{1}{n}\right)r_n}\frac{dt}{t}=\sum_{n=n_1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=+\infty.$$

Lemme 3.3.3 [8, 24] Soit $f(z)$ est une fonction entière avec $\sigma_p(f)=\sigma$ et $\nu_f(r)$ est l'indice central de $f(z)$. Alors il existe un ensemble $E_1\subset[1,+\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r\in E_1$, nous avons

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln_p \nu_f(r)}{\ln r}=\sigma,\qquad r\in E_1. \tag{3.7}$$

Lemme 3.3.4 [8, 24] Soient $A_0,\ A_1,\ldots,A_{k-1},\ F\not\equiv 0$ des fonctions méromorphes. Si f est une solution méromorphe de l'équation

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0 f=F, \tag{3.8}$$

alors nous avons

(i) Si $\max\{i(A_j), j=0,1,...,k-1, i(F)\} < i(f)$, *alors* $i_{\overline{\lambda}}(f) = i_\lambda(f) = i(f)$;

(ii) Si $\max\{\sigma_p(A_j), j=0,1,...,k-1, \sigma_p(F)\} < \sigma_p(f)$, *alors* $\overline{\lambda}_p(f) = \lambda_p(f) = \sigma_p(f)$.

Lemme 3.3.5 [32] Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre itératif fini avec $i(f) = p$. Alors ils existent des fonctions entières $\beta(z)$ et $D(z)$ tel que

$$\begin{aligned} f(z) &= \beta(z)\, e^{D(z)}, \\ \sigma_p(f) &= \max\left\{\sigma_p(\beta), \sigma_p\left(e^{D(z)}\right)\right\} \end{aligned}$$

et

$$\sigma_p(\beta) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\ln_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\ln r}.$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\ln|\beta(z)| \geq -\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(\beta)+\varepsilon}\right\}, \; r \notin E_2, \tag{3.9}$$

où $E_2 \subset [1, +\infty)$ est un ensemble de r de mesure liméaire finie.

Lemme 3.3.6 [28] Soit $f(z)$ est une fonction entière d'ordre itératif fini avec $\sigma_p(f) = \sigma < +\infty$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un ensemble $E_3 \subset [1, +\infty)$ de mesure linéaire finie tel que pour tout z satisfaire $|z| = r \notin [0,1] \cup E_3$, on a

$$\exp\left\{-\exp_{p-1} r^{\sigma+\varepsilon}\right\} \leq |f(z)| \leq \exp_p\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\}. \tag{3.10}$$

Preuve Soit $f(z)$ est une fonction entière d'ordre itératif fini avec $\sigma_p(f) = \sigma$. De la définition 1.4.5, c'est facile d'obtenir que $|f(z)| \leq \exp_p\{r^{\sigma+\varepsilon}\}$ vérifié pour tout $|z| = r$ assez grand. Du lemme 3.3.5, ils existent des fonctions entières $\beta(z)$ et $D(z)$ tel que

$$f(z) = \beta(z)\, e^{D(z)}, \qquad \sigma_p(f) = \max\left\{\sigma_p(\beta), \sigma_p\left(e^{D(z)}\right)\right\}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$|\beta(z)| \geq \exp\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(\beta)+\varepsilon}\right\}\right\} \geq \exp\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(f)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}\right\}, r \notin E_3, \quad (3.11)$$

est vérifié à l'extérieur d'un ensemble $E_3 \subset [1, +\infty)$ de mesure linéaire finie. Comme $\sigma_{p-1}(D(z)) = \sigma_p\left(e^{D(z)}\right) \leq \sigma_p(f)$, de la définition 1.4.5, nous avons que $|D(z)| \leq \exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(f)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}$ est vérifié pour tout r assez grand.

De $\left|e^{D(z)}\right| \geq e^{-|D(z)|} \geq \exp\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(f)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}\right\}$ et (3.11), on a

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |\beta(z)|\, e^{-|D(z)|} \geq \exp\left\{-2\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(f)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}\right\} \qquad (3.12) \\ &\geq \exp\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(f)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}\right\}, r \notin E_3, \end{aligned}$$

où E_3 est un ensemble de r de mesure linéaire finie. De la définition1.4.5 et (3.12), on obtient la conclusion du lemme 3.3.6.

Remarque 3.3.1 Le lemme 3.3.6 donne l'estimation du module de la fonction entière d'ordre itératif et étend la conclusion de [20, p. 84, lemme 4].

Lemme 3.3.7 [28] Soit $f(z)$ est une fonction entière d'ordre itératif fini avec $\sigma_p(f) = \sigma > 0$ $(p \geq 2)$, et soit $L(f) = a_2 f'' + a_1 f' + a_0 f$, où $a_j \not\equiv 0$ $(j = 0, 1, 2)$ sont des fonctions entières d'ordre itératif fini qui satisfaient $b = \max\{\sigma_{p-1}(a_j), j = 0, 1, 2\} < \sigma$, alors $\sigma_p(L(f)) = \sigma_p(f) = \sigma$.

Preuve On peut écrire $L(f)$ comme suit

$$L(f) = f\left(a_2 \frac{f''}{f} + a_1 \frac{f'}{f} + a_0\right) \qquad (3.13)$$

Du lemme de Wiman-Valiron (voir[20, 18]), pour tout z satisfait $|z| = r$ et $|f(z)| = M(r, f)$, on a

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_f(r)}{z}\right)^k (1 + o(1)), \qquad k \in \mathbb{N}, r \notin E_4, \qquad (3.14)$$

où E_4 est un ensemble de mesure logarithmique finie.

De (1.4.5) dans [21], pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on a

$$\nu_f(r) < \left[\ln \mu_f(r)\right]^{1+\varepsilon} \tag{3.15}$$

à l'extérieur de l'ensemble E_5 mesure logarithmique finie, où $\mu_f(r)$ est le terme maximal de f. De l'inégalité de Cauchy, on a $\mu_f(r) \leq M(r,f)$. Le remplacer dans (3.15), on obtient

$$\nu_f(r) < [\ln M(r,f)]^{1+\varepsilon}, \qquad r \notin E_5. \tag{3.16}$$

D'après le lemme 3.3.3, il existe un ensemble E_1 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in E_1$, on a

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\ln_p \nu_f(r)}{\ln r} = \sigma, \qquad r \in E_1. \tag{3.17}$$

De (3.17) et le lemme 3.3.6, pour tout $r \in E_1 - E_3$ et pour tout $\varepsilon\,(0 < 2\varepsilon < \sigma - b)$, on a

$$\begin{aligned} \exp\left\{-\exp_{p-2} r^{b+\varepsilon}\right\} &< |a_j(z)| < \exp_{p-1}\left\{r^{b+\varepsilon}\right\} < \exp_{p-1}\left\{r^{\sigma-\varepsilon}\right\} \\ &< \nu_f(r) < \exp_{p-1}\left\{r^{\sigma+\varepsilon}\right\} \quad (j = 0,1,2). \end{aligned} \tag{3.18}$$

En remplaçant (3.18) dans (3.16), on obtient

$$\exp_p\left\{r^{\sigma-2\varepsilon}\right\} < M(r,f) \qquad (r \in E_1 - (E_3 \cup E_5)). \tag{3.19}$$

De (3.13), on a

$$|L(f)| = |f| \left| a_2 \frac{f''}{f} + a_1 \frac{f'}{f} + a_0 \right| \geq |f| \left[\left| a_2 \frac{f''}{f} + a_1 \frac{f'}{f} \right| - |a_0| \right]. \tag{3.20}$$

En remplaçant (3.14), (3.18), (3.19) dans (3.20), pour tout z satisfait

$|f(z)| = M(r,f)$ et $|z| = r \in E_1 - (E_3 \cup E_4 \cup E_5)$, on trouve

$$\begin{aligned} |L(f)| &\geq |f| \left[\left| \frac{\nu_f(r)}{z} \left(a_2 \frac{\nu_f(r)}{z} + a_1 \right) \right| - |a_0| \right] \\ &\geq |f| \left[\left| \frac{\nu_f(r)}{z} \right| \left| \left| a_2 \frac{\nu_f(r)}{z} \right| - |a_1| \right| - |a_0| \right] \\ &\leq \exp_p \left\{ r^{\sigma - 2\varepsilon} \right\} \left[\exp_{p-1} \left\{ r^{\sigma-\varepsilon} \right\} - \exp_{p-1} \left\{ r^{b+\varepsilon} \right\} \right]. \end{aligned} \tag{3.21}$$

De (3.21), on obtient que $\sigma_p(L(f)) \geq \sigma_p(f)$. D'autre part, il est facile de trouver $\sigma_p(L(f)) \leq \sigma_p(f)$. Donc $\sigma_p(L(f)) = \sigma_p(f)$.

Remarque 3.3.2 L'hypothèse $\sigma_{p-1}(a_j) < \sigma_p(f)$ dans le lemme 3.3.7 est nécessaire. Par exemple, si $a(z)$ est une fonction entière satisfaire $\sigma_{p-1}(a) > 0\,(p \geq 2)$, posons $f(z) = e^{a(z)}$, $L(f) = f'' - a'f - a''f$, alors on a $\sigma_p(f) = \sigma_{p-1}(a) > 0$ et $L(f) \equiv 0$, c-à-d, $\sigma_p(L(f)) = 0 < \sigma_p(f)$.

Par le même preuve du lemme 3.3.7, on peut obtenir le lemme suivant.

Lemme 3.3.8 [28] Soit $f(z)$ est une fonction entière avec $\sigma_p(f) = \sigma > 0$ $(p \geq 2)$ et soit $L(f) = a_k f^{(k)} + a_{k-1} f^{(k-1)} + \cdots + a_0 f$, où $a_j \not\equiv 0\,(j = 0,1,2,...,k)$ sont des fonctions entières satisfaire $b = \max\{\sigma_{p-1}(a_j),\ j = 0,1,...,k\} < \sigma$. Alors $\sigma_p(L(f)) = \sigma_p(f) = \sigma$.

Lemme 3.3.9 [4] Soit $f(z)$ est une fonction entière satisfaire $0 < \sigma_p(f) = \sigma < \infty$, $0 < \tau_p(f) = \tau \leq \infty$, alors pour tout donné $\beta < \tau$, il existe un ensemble $E_6 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $r \in E_6$, nous avons

$$\ln_p M(r,f) > \beta r^{\sigma}. \tag{3.22}$$

Preuve On concidère deux cas: pour $p = 1$ voir [29]

Dans le cas où $p \geq 2$, d'après la définition d'ordre itératif 1.4.5 et de type itératif 1.4.6, il existe une suite croissante $\{r_n\}$, $r_n \to +\infty$ satisfait $\left(1 + \frac{1}{n}\right) r_n < r_{n+1}$ et

$$\lim_{r_n \to +\infty} \frac{\ln_p M(r_n, f)}{r_n^{\sigma_p(f)}} = \tau_p(f) > \beta. \tag{3.23}$$

Alors, il existe un entier positif n_0 tel que pour tout $n > n_0$ et pour tout ε donné $(0 < \varepsilon < \tau_p(f) - \beta)$, on a

$$\ln_p M(r_n, f) > (\tau_p(f) - \varepsilon) r_n^{\sigma_p(f)}. \tag{3.24}$$

Pour tout $\beta < \tau_p(f)$ donné, il existe un entier positif n_1 tel que pour tout $n > n_1$, on a

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\sigma_p(f)} > \frac{\beta}{\tau_p(f) - \varepsilon}. \tag{3.25}$$

Prenons $n \geq n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. De (3.24) et (3.25) pour tout $r \in \left[r_n, \left(1 + \frac{1}{n}\right) r_n\right]$, on obtient

$$\begin{aligned} \ln_p M(r, f) &\geq \ln_p M(r_n, f) \\ &> (\tau_p(f) - \varepsilon) r_n^{\sigma_p(f)} \\ &\geq (\tau_p(f) - \varepsilon) \left(\frac{n}{n+1} r\right)^{\sigma_p(f)} \\ &> \beta r_n^{\sigma_p(f)}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Posons $E_2 = \cup_{n=n_2}^{\infty} \left[r_n, \left(1 + \frac{1}{n}\right) r_n\right]$, alors il vérifie

$$\begin{aligned} m_l(E_2) &= \sum_{n=n_2}^{\infty} \int_{r_n}^{\left(1+\frac{1}{n}\right) r_n} \frac{dt}{t} \\ &= \sum_{n=n_2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty. \end{aligned}$$

Lemme 3.3.10 [19] Soient $A_j(z)\,(j = 0, 1, ..., k-1)$ des fonctions entières d'ordre itératif fini satisfaire $\max\{\sigma_p(A_j) : j \neq 0\} \leq \sigma_p(A_0)$. alors toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \cdots + A_1 f' + A_0 f = 0 \tag{3.27}$$

satisfait $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)$.

Lemme 3.3.11 [4, 25] Soient $A_j(z)\,(j = 0, 1, ..., k-1)$ des fonctions entières d'ordre itératif fini satisfaire $\max\{\sigma_p(A_j) : j \neq 0\} \leq \sigma_p(A_0)$ $(0 < \sigma_p(A_0) < \infty)$ et $\max\{\tau_p(A_j), \sigma_p(A_j) = \sigma_p(A_0) : j \neq 0\} < \tau_p(A_0) < \infty$. Alors toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation (3.27) satisfait $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)$.

Remarque 3.3.3 La conclusion de lemme 3.3.11 est aussi valide pour $\tau_p(A_0) = \infty$.

Lemme 3.3.12 [28] Soient $A(z)$, $B(z)$ des fonctions entières d'ordre itératif fini satisfaisant $\sigma_p(A) < \sigma_p(B)$. Soient $G(z)$, $H(z)$ des fonctions méromorphes avec $\sigma_p(H) \leq \sigma_p(A)$ $\sigma_p(G) \leq \sigma_p(B)$, si $f(z)$ est une solution entière de

$$f'' + \left(A + \frac{G'}{G}\right) f' + \left(B + H' + \frac{HG'}{G}\right) f = 0, \tag{3.28}$$

alors $\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_p(B)$.

Peuve De (3.28), on a

$$m\left(r, B + H' + \frac{HG'}{G}\right) \leq m\left(r, \frac{f''}{f}\right) + m\left(r, A + \frac{G'}{G}\right). \tag{3.29}$$

Par le lemme de dérivée logarithmique et (3.29), on trouve

$$m(r, B) \leq O\{\ln rT(r, f)\} + m(r, A) + 2T(r, H) + O\{\ln rT(r, G)\}, \quad r \notin E_0 \tag{3.30}$$

où E_0 est un ensemble de mesure linéaire finie. Du lemme 3.3.2, il existe un ensemble E_1 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z| = r \in E_1 - E_0$, nous avons

$$\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(B)-\varepsilon}\right\} \leq O\{\ln rT(r, f)\} + 4\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(A)+\varepsilon}\right\}, \tag{3.31}$$

où $0 < 2\varepsilon < \sigma(B) - \sigma(A)$. De (3.31), on obtient $\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_p(B)$.

Lemme 3.3.13 [28] Soient $A(z)$, $B(z)$ des fonctions entières satisfaisant $0 < \sigma_p(A) = \sigma_p(B) = \sigma_2 < \infty$ et $\tau_p(A) < \tau_p(B) \leq \infty$ et soient $G(z)$, $H(z)$ des fonctions méromorphes satisfaisant $\sigma_p(H) \leq \sigma_2$, $\sigma_p(G) \leq \sigma_2$

et $\left|H^{(j)}(z)\right| \leq \exp_p\{(\tau(A)+\varepsilon) r^{\sigma_2}\}$ $(j=0,1)$ à l'extérieur de l'ensemble E_8 mesure logarithmique finie, où $0<2\varepsilon<\tau_p(B)-\tau_p(A)$. Si $f(z)$ est une solution entière de (3.28), alors $\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_2$.

Preuve Supposons que $\tau_p(A)<\tau_p(B)<\infty$ (Sans perdre la généralité). De (3.28), on a

$$|B(z)| \leq \left|\frac{f''}{f}\right| + \left[|A| + \left|\frac{G'}{G}\right|\right] \left|\frac{f'}{f}\right| + |H'| + |H| \left|\frac{G'}{G}\right|. \tag{3.32}$$

Par le lemme 3.3.9, pour tout donné β $(\tau_p(A)+2\varepsilon<\beta<\tau_p(B))$, il existe un ensemble E_6 de mesure logarithmique infinie tel que pour tout $|z|=r \in E_6$, nous avons

$$M(r,B) > \exp_p\{\beta r^{\sigma_2}\}. \tag{3.33}$$

Par le lemme 2.3.13, il existe un ensemble E_7 de mesure logarithmique finie tel que pour tout $|z|=r \notin E_6$, nous avons

$$\begin{aligned} \left|\frac{f''}{f}\right| &\leq M[T(2r,f)]^2, \quad \left|\frac{f'}{f}\right| \leq M[T(2r,f)], \\ \left|\frac{G'}{G}\right| &\leq M[T(2r,G)] < \exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_2+\varepsilon}\right\}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

où $M>0$ est une constante. D'après les hypothèses, pour tout $|z|=r \notin E_8$, nous avons

$$|H'| \leq \exp_p\{(\tau(A)+\varepsilon) r^{\sigma_2}\}, \quad |H| \leq \exp_p\{(\tau(A)+\varepsilon) r^{\sigma_2}\}. \tag{3.35}$$

De (3.32)-(3.35), pour tout z satisfaire $|B(z)|=M(r,B)$
et $|z|=r \in E_6-(E_7 \cup E_8)$, on a

$$\exp_p\{\beta r^{\sigma_2}\} \leq 4 \exp_p\{(\tau_p(A)+\varepsilon) r^{\sigma_2}\} [T(2r,f)]^2. \tag{3.36}$$

Par (3.36), on obtient $\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_2$.

3.4 Preuves des théorèmes

3.4.1 Preuve du théorème 3.2.1

On divise la preuve du théorème 3.2.1 en deux cas:

Cas (i): (1) On prouve que $\overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi) = \sigma_{p+1}(f)$. supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de (2.1), alors $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(B)$ par le lemme 3.3.10. Posons $g = f - \varphi$, comme $\sigma_{p+1}(\varphi) < \sigma_p(B)$, alors

$\sigma_{p+1}(g) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(B)$, $\overline{\lambda}_{p+1}(g) = \overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi)$.

En remplaçant $f = g + \varphi$, $f' = g' + \varphi'$, $f'' = g'' + \varphi''$ dans (2.1), on obtient

$$g'' + Ag' + Bg = -(\varphi'' + A\varphi' + B\varphi). \tag{3.37}$$

Si $\varphi'' + A\varphi' + B\varphi \equiv 0$, du lemme 3.3.11, on a $\sigma_{p+1}(\varphi) = \sigma_p(B)$, qui est une contradiction.

Puisque $\varphi'' + A\varphi' + B\varphi \not\equiv 0$ et $\sigma_{p+1}(\varphi'' + A\varphi' + B\varphi) < \sigma_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(g)$, du lemme 3.3.4 et (3.37), on trouve

$$\overline{\lambda}_{p+1}(g) = \lambda_{p+1}(g) = \sigma_p(B),$$

donc

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi) = \lambda_{p+1}(f-\varphi) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(B).$$

(2) On montre que $\overline{\lambda}_{p+1}(f'-\varphi) = \sigma_{p+1}(f)$.

Posons $g_1 = f' - \varphi$, alors $\sigma_{p+1}(g_1) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(B)$ et

$$f' = g_1 + \varphi \qquad f'' = g_1' + \varphi' \qquad f''' = g_1'' + \varphi''. \tag{3.38}$$

De (2.1), on obtient

$$f = -\frac{1}{B}(f'' + Af'). \tag{3.39}$$

La dérivation de (2.1) est

$$f''' + Af'' + (A + B) f' + B'f = 0. \tag{3.40}$$

On remplaçons (3.38), (3.39) dans (3.40), on obtient

$$\begin{aligned} &g_1'' + \left(A - \tfrac{B'}{B}\right) g_1' + \left(A' + B - \tfrac{AB'}{B}\right) g_1 \\ &\quad = -\left(\varphi'' + \left(A - \tfrac{B'}{B}\right) \varphi' + \left(A' + B - \tfrac{AB'}{B}\right) \varphi\right) \end{aligned} \tag{3.41}$$

Soit $F_1 = \varphi'' + \left(A - \frac{B'}{B}\right) \varphi' + \left(A' + B - \frac{AB'}{B}\right) \varphi$. On affirme que $F_1 \not\equiv 0$. Si $F_1 \equiv 0$, du lemme 3.3.12, on a $\sigma_{p+1}(\varphi) \geq \sigma_p(B)$, qui est une contradiction, donc $F_1 \not\equiv 0$. Comme $\sigma_{p+1}(F_1) < \sigma_p(B) = \sigma_{p+1}(g_1)$, par le lemme 3.3.4 et (3.41), on obtient

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f' - \varphi) = \lambda_{p+1}(f' - \varphi) = \sigma_{p+1}(f).$$

(3) On prouve que $\overline{\lambda}_{p+1}(f'' - \varphi) = \sigma_{p+1}(f)$. Posons $g_2 = f'' - \varphi$, alors $\sigma_{p+1}(g_2) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(B)$ et

$$f'' = g_2 + \varphi \qquad f''' = g_2' + \varphi' \qquad f^{(4)} = g_2'' + \varphi''. \tag{3.42}$$

On remplace (3.39) dans (3.40), on trouve

$$f''' + \left(A - \frac{B'}{B}\right) f'' + \left(A' + B - \frac{AB'}{B}\right) f' = 0. \tag{3.43}$$

La dérivation de (3.43) est

$$\begin{aligned} &f^{(4)} + \left(A - \tfrac{B'}{B}\right) f''' + \left[\left(A - \tfrac{B'}{B}\right)' + \left(A' + B - \tfrac{AB'}{B}\right)\right] f'' \\ &\quad - \frac{\left(A' + B - \frac{AB'}{B}\right)'}{\left(A' + B - \frac{AB'}{B}\right)} \left[f''' + \left(A - \tfrac{B'}{B}\right) f''\right] = 0. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Posons $Q(z) = A' + B - \frac{AB'}{B}$, $S(z) = A - \frac{B'}{B}$, c'est facile de voir que

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{\ln_p m(r, Q)}{\ln r} = \sigma_p(B) \quad \text{et} \quad \limsup_{r \to +\infty} \frac{\ln_p m(r, S)}{\ln r} = \sigma_p(A),$$

alors de (3.44), on obtient

$$f^{(4)}+\left(S-\frac{Q'}{Q}\right)f'''+\left(S'+Q-\frac{SQ'}{Q}\right)f''=0. \tag{3.45}$$

En remplaçant (3.42) dans (3.45), on a

$$\begin{aligned}&g_2''+\left(S-\tfrac{Q'}{Q}\right)g_2'+\left(S'+Q-\tfrac{SQ'}{Q}\right)g_2\\&\quad=-\left(\varphi''+\left(S-\tfrac{Q'}{Q}\right)\varphi'+\left(S'+Q-\tfrac{SQ'}{Q}\right)\varphi\right).\end{aligned} \tag{3.46}$$

Si $F_2(z)=\varphi''+\left(S-\frac{Q'}{Q}\right)\varphi'+\left(S'+Q-\frac{SQ'}{Q}\right)\varphi\equiv 0$, par le lemme 3.3.12, on a $\sigma_{p+1}(\varphi)\geq\sigma_p(B)$, qui est une contradiction, alors $F_2\not\equiv 0$.

Puisque $\sigma_{p+1}(F_2)<\sigma_p(B)=\sigma_{p+1}(g_2)$, par le lemme 3.3.4 et (3.46), on obtient $\overline{\lambda}_{p+1}(f''-\varphi)=\lambda_{p+1}(f''-\varphi)=\sigma_{p+1}(f)$.

(4) On prouve que $\overline{\lambda}_{p+1}(f'''-\varphi)=\sigma_{p+1}(f)$. Posons $g_3=f'''-\varphi$, alors $\sigma_{p+1}(g_3)=\sigma_{p+1}(f)=\sigma_p(B)$ et

$$g_3'=f^{(4)}-\varphi',\qquad g_3''=f^{(5)}-\varphi''. \tag{3.47}$$

La dérivation de (3.45) est

$$\begin{aligned}&f^{(5)}+\left(S-\tfrac{Q'}{Q}\right)f^{(4)}+\left[\left(S-\tfrac{Q'}{Q}\right)'+\left(S'+Q-\tfrac{SQ'}{Q}\right)\right]f'''\\&\quad+\left(S'+Q-\tfrac{SQ'}{Q}\right)'f''=0.\end{aligned} \tag{3.48}$$

De (3.45), on a

$$f''=-\frac{1}{S'+Q-\frac{SQ'}{Q}}\left[f^{(4)}+\left(S-\frac{Q'}{Q}\right)f'''\right]. \tag{3.49}$$

En remplaçant (3.49) dans (3.48), on obtient

$$\begin{aligned}&f^{(5)}+\left(S-\tfrac{Q'}{Q}\right)f^{(4)}+\left[\left(S-\tfrac{Q'}{Q}\right)'+\left(S'+Q-\tfrac{SQ'}{Q}\right)\right]f'''\\&\quad-\frac{\left(S'+Q-\frac{SQ'}{Q}\right)'}{S'+Q-\frac{SQ'}{Q}}\left[f^{(4)}+\left(S-\tfrac{Q'}{Q}\right)f'''\right]=0.\end{aligned} \tag{3.50}$$

Soit $U(z) = S' + Q - \frac{SQ'}{Q}$, $V(z) = S - \frac{Q'}{Q}$, c'est facile de voir que

$$\limsup_{r \to +\infty} \frac{\ln_p m(r, U)}{\ln r} = \sigma_p(B) \quad \text{et} \quad \limsup_{r \to +\infty} \frac{\ln_p m(r, V)}{\ln r} = \sigma_p(A),$$

De (3.50), on a

$$f^{(5)} + \left(V - \frac{U'}{U}\right) f^{(4)} + \left(V' + U - \frac{VU'}{U}\right) f''' = 0. \tag{3.51}$$

En substituant (3.47) dans (3.51), on a

$$\begin{aligned} & g_3'' + \left(V - \tfrac{U'}{U}\right) g_3' + \left(V' + U - \tfrac{VU'}{U}\right) g_3 \\ & \quad = -\left(\varphi'' + \left(V - \tfrac{U'}{U}\right) \varphi' + \left(V' + U - \tfrac{VU'}{U}\right) \varphi\right). \end{aligned} \tag{3.52}$$

Soit $F_3(z) = \varphi'' + \left(V - \frac{U'}{U}\right) \varphi' + \left(V' + U - \frac{VU'}{U}\right) \varphi$. D'après le lemme 3.3.12, on a $F_3 \not\equiv 0$. Puisque $\sigma_{p+1}(F_3) < \sigma_p(B) = \sigma_{p+1}(g_2)$, d'après le lemme 3.3.4 et (3.52), on obtient $\overline{\lambda}_{p+1}(f''' - \varphi) = \lambda_{p+1}(f''' - \varphi) = \sigma_{p+1}(f)$.

(5) On prouve que $\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(j)} - \varphi\right) = \sigma_{p+1}(f)$ $(j > 3)$.

Posons que $f^{(j)} = g_j + \varphi$ $(j > 3)$, alors $f^{(j+1)} = g_j' + \varphi'$, $f^{(j+2)} = g_j'' + \varphi''$ $(j > 3)$ et $\sigma_{p+1}(g_j) = \sigma_{p+1}\left(f^{(j)}\right) = \sigma_p(B)$. Par la dérivation successive sur (3.50), on peut obtenir aussi l'équation suivante qui a une forme analogue à l'équation (3.52):

$$\begin{aligned} & g_j'' + \left(A + \tfrac{G'}{G}\right) g_j' + \left(B + H' + \tfrac{HG'}{G}\right) g_j \\ & \quad = -\left(\varphi'' + \left(A + \tfrac{G'}{G}\right) \varphi' + \left(B + H' + \tfrac{HG'}{G}\right) \varphi\right). \end{aligned} \tag{3.53}$$

où G, H sont des fonctions méromorphes qui ont le même forme que $U(z)$, $V(z)$ et vérifient $\sigma_p(G) \leq \sigma_p(B)$ et $\sigma_p(H) \leq \sigma_p(A)$. D'après le lemme 3.3.12,

on a $F_j = \varphi'' + \left(A + \frac{G'}{G}\right) \varphi' + \left(B + H' + \frac{HG'}{G}\right) \varphi \not\equiv 0$. Puisque $\sigma_{p+1}(F_j) < \sigma_{p+1}(g_j) = \sigma_p(B)$, d'après le lemme 3.3.4, on obtient

$\overline{\lambda}_{p+1}\left(f^{(j)} - \varphi\right) = \lambda_{p+1}\left(f^{(j)} - \varphi\right) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(B)$ $(j > 3)$.

Cas (ii): (1) On prouve que $\overline{\lambda}_{p+1}(f - \varphi) = \sigma_{p+1}(f)$. Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de (2.1), par le lemme 3.3.11, on sait que $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(B) > 0$. Posons $g = f - \varphi$, $\varphi \not\equiv 0$ est une fonction entière avec $\sigma_{p+1}(\varphi) < \sigma_p(B)$, alors on a $\sigma_{p+1}(g) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(B)$, $\overline{\lambda}_{p+1}(g) = \overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi)$. En remplaçant $f = g+\varphi$, $f' = g'+\varphi'$, $f'' = g''+\varphi''$ dans (2.1), on obtient (3.37). On affirme que $\varphi''+A\varphi'+B\varphi \not\equiv 0$. Si $\varphi''+A\varphi'+B\varphi \equiv 0$, du lemme 3.3.11, on a $\sigma_{p+1}(\varphi) = \sigma_p(B)$, qui est une contradiction. Puisque $\varphi''+A\varphi'+B\varphi \not\equiv 0$

et $\sigma_{p+1}(\varphi''+A\varphi'+B\varphi) < \sigma_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(g)$, du lemme 3.3.4 et (3.37), on trouve $\overline{\lambda}_{p+1}(g) = \lambda_{p+1}(g) = \sigma_{p+1}(g) = \sigma_p(B)$, donc

$\overline{\lambda}_{p+1}(f-\varphi) = \lambda_{p+1}(f-\varphi) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(B)$.

(2) On montre que $\overline{\lambda}_{p+1}(f'-\varphi) = \sigma_{p+1}(f)$.

Posons $g_1 = f'-\varphi$, alors $\sigma_{p+1}(g_1) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(B)$.

Par la même preuve que cela de (2) dans le cas (i), on a (3.41). Posons

$F_1 = \varphi'' + \left(A - \frac{B'}{B}\right)\varphi' + \left(A'+B-\frac{AB'}{B}\right)\varphi$. On affirme que $F_1 \not\equiv 0$,

si $F_1 \equiv 0$, alors du lemme 3.3.13, on a $\sigma_{p+1}(\varphi) \geq \sigma_p(B)$, qui est une contradiction avec $\sigma_{p+1}(\varphi) < \sigma_p(B)$, donc $F_1 \not\equiv 0$. Comme

$\sigma_{p+1}(F_1) < \sigma_p(B) = \sigma_{p+1}(g_1)$, d'après le lemme 3.3.4 et (3.41), on obtient

$\overline{\lambda}_{p+1}(f'-\varphi) = \lambda_{p+1}(f'-\varphi) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(B)$.

(3) On prouve que $\overline{\lambda}_{p+1}(f''-\varphi) = \sigma_{p+1}(f)$.

Posons $g_2 = f''-\varphi$, alors $\sigma_{p+1}(g_2) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(B)$

et $f'' = g_2+\varphi$, $f''' = g_2'+\varphi'$, $f^{(4)} = g_2''+\varphi''$. Par la même preuve que cela de (3) dans le cas (i), on obtient (3.46). Posons $F_2 = \varphi'' + \left(S - \frac{Q'}{Q}\right)\varphi' + \left(S'+Q-\frac{SQ'}{Q}\right)\varphi$, où $Q(z) = A'+B-\frac{AB'}{B}$, $S(z) = A - \frac{B'}{B}$. Dans le suivant on prouve que $F_2 \not\equiv 0$. D'après la définition 1.4.6 et le lemme 2.3.13, pour tout r assez grand tel que

$|z| = r \notin E_7$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$|S(z)| \leq \exp_p\left\{(\tau_p(A)+\varepsilon)\, r^{\sigma_p(A)}\right\}, \quad |S'(z)| \leq \exp_p\left\{(\tau_p(A)+\varepsilon)\, r^{\sigma_p(A)}\right\}. \tag{3.54}$$

D'après le lemme 3.3.9 et le lemme 2.3.13, pour tout r assez grand tel que $|z| = r \in E_6 - E_7$ et pour tout ε $(0 < 2\varepsilon < \tau_p(B) - \tau_p(A))$, on a

$$M(r,Q) \geq \exp_p\left\{(\tau_p(B)-\varepsilon)\, r^{\sigma_p(B)}\right\}. \tag{3.55}$$

D'après (3.54)-(3.55) et le lemme 2.3.13, c'est facile d'obtenir

$$\begin{aligned} &\left| S - \tfrac{Q'}{Q} \right| \leq 2 \exp_p \left\{ \left(\tau_p \left(A \right) + \varepsilon \right) r^{\sigma_p(A)} \right\}, \\ &\left| S' + Q - \tfrac{SQ'}{Q} \right| \geq \tfrac{1}{2} \exp_p \left\{ \left(\tau_p \left(B \right) - \varepsilon \right) r^{\sigma_p(B)} \right\}, \quad r \in E_6 - E_7. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Si $F_2 \equiv 0$, de (3.56) et par la même preuve que cela du lemme 3.3.13, on a $\sigma_{p+1} \left(\varphi \right) \geq \sigma_p \left(B \right)$, qui est une contradiction. Donc $F_2 \not\equiv 0$, alors par le lemme 3.3.4 et $\sigma_{p+1} \left(F_2 \right) < \sigma_{p+1} \left(g_2 \right) = \sigma_p \left(B \right)$, on obtient

$\overline{\lambda}_{p+1} \left(f'' - \varphi \right) = \lambda_{p+1} \left(f'' - \varphi \right) = \sigma_{p+1} \left(f \right) = \sigma_p \left(B \right)$.

En suivant la preuve de $(4) - (5)$ dans le cas (i) et la preuve de (3) dans le cas (ii), on obtient

$\overline{\lambda}_{p+1} \left(f^{(j)} - \varphi \right) = \lambda_{p+1} \left(f^{(j)} - \varphi \right) = \sigma_{p+1} \left(f \right) = \sigma_p \left(B \right) \ \ (j \geq 3)$.

3.4.2 Preuves des théorèmes 3.2.2-3.2.3

En utilisant la même preuve que celle dans le cas (i) du théorème 3.2.1 et d'après le lemme 3.3.4, on peut obtenir facilement le théorème 3.2.2. Le théorème 3.2.3 est un résultat direct du théorème 3.2.1 et le lemme 3.3.8.

Bibliographie

[1] **Amemmiya**, **I**, **Ozawa, M.**: *Non-existence of finite order solutions of* $w'' + e^{-z}w' + Q(z)w = 0$, HokkaidoMath. J. 10, 1-17 (1981).

[2] **Bank, S, Laine, I.**: *On the oscillation theory of* $f'' + Af = 0$*, where* A *is entire,* Trans, Am, Math, Soc, 273, 351-363 (1982).

[3] **Bank, S, Laine, I.**: *On the zeros of meromorphic solutions of second order linear differential equations,* Comment Math, Helv, 58, 656-677 (1983).

[4] **Belaïdi, B.**: *Growth and oscillation of solutions to linear differential equations with entire coefficients having the same order,* Electron, J, Differ, Equ, 70, 1-10 (2009).

[5] **Belaïdi, B.**: *Growth and oscillation theory of solutions of some linear differential equations,* Mat, Vesn, 60(4), 233-246 (2008).

[6] **Bernal, LG.**: *On growth k-order of solutions of a complex homogeneous linear differential equations,* Proc, Am, Math, Soc, 101, 317-322 (1987).

[7] **Cao, SA, Chen, ZX, Chen, TW.**: *Oscillation Theory on Linear Differential Equations,* Press in Central China Institute of Technology, Wuhan (1997).

[8] **Cao, TB, Chen, ZX, Zheng, XM, Tu, J.**: *On the iterated order of meromorphic solutions of higher order linear differential equations,* Ann, Differ, Equ, 21(2), 111-122 (2005).

[9] **Chen, ZX.** : *On the hyper order of solutions of some second order linear differential equations,* Acta Math, Sin, Engl, Ser,18(1), 79-88 (2002).

[10] **Chen, ZX.** : *The fixed points and hyper order of solutions of second order complex differential equations,* Acta Math, Sci, Ser, A 20(3), 425-432 (2000) (in Chinese).

[11] **Chen, ZX.** : *The growth of solutions of the differential equation* $f + e^{-z}f + Q(z)f = 0$*,* Sci, China Ser, A 31, 775-784(2001) (in Chinese).

[12] **Chen, ZX, Shon, KH.** : *The relation between solutions of a class of second order differential equation with functions of small growth,* Chin, Ann, Math, Ser, A 27(A4), 431-442 (2006) (Chinese).

[13] **Chen, ZX, Yang, CC.** : *Quantitative estimations on the zeros and growths of entire solutions of linear differential equations,* Complex Var, Elliptic Equ, 42, 119-133 (2000).

[14] **Frei, M.** : *Uber die subnormalen losungen der differentialgeichung* $w''+e^{-z}w'+(konst.)w = 0$, Comment, Math, Helv,36, 1-8 (1962).

[15] **Gundersen, GG.** : *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates,* J. Lond, Math, Soc, 305(2), 88-104 (1988).

[16] **Gundersen, GG.** : *On the question of whether* $f'' + e^{-z}\ f\prime + B(z)f = 0$ *can admit a solution* $f \neq 0$ *of finite order,* Proc, R. Soc, Edinb., Sect. A, Math. 102, 9-17 (1986).

[17] **Hayman, W.** : *Meromorphic Functions,* Clarendon, Oxford (1964).

[18] **He, YZ, Xiao, XZ.** *: Algebroid Functions and Ordinary Equations,* Science Press, Beijing (1988) (in Chinese).

[19] **Kinnunen, L.** : *Linear differential equations with solutions of finite iterated order,* Southeast Asian Bull, Math, 22(4), 385-405 (1998).

[20] **Laine, I.** : *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations,* de Gruyter, Berlin (1993).

[21] **Laine, I.** : *Complex differential equations,* In: Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations, vol. 4, pp. 269-363, North-Holland, Amsterdam (2008).

[22] **Liu, MS, Zhang, XM.** : *Fixed points of meromorphic solutions of higher order linear differential equations,* Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser, A 1 Math, 31, 191-211 (2006).

[23] **Shon, KH.** : *On the growth of entire functions satisfying second order linear differential equation*, Bull, Korean Math, Soc, 3, 487-496 (1996).

[24] **Tu, J, Chen, ZX.** : *Growth of solution of complex differential equations with meromorphic coefficients of finite iterated order*, Southeast Asian Bull, Math, 33, 153-164 (2009).

[25] **Tu, J, Deng, GT.** : *Growth of solutions of higher order linear differential equations with coefficient A_0 being dominant*, Acta Math, Sci, Ser, A Chin, Ed, 30(4), 945-952 (2010) (in Chinese).

[26] **Tu, J, Long, T.** : *Oscillation of complex high order linear differential equations with coefficients of finite iterated order*, Electron, J, Qual, Theory Differ, Equ, 66, 1-13 (2009).

[27] **Tu, J, Xu, HY, Zhang, CY.** : *On the zeros of solutions of any order of derivative of second order linear differential equations taking small functions*, Electron, J, Qual, Theory Differ, Equ, 23, 1-17 (2011).

[28] **Tu, J., Z-X Xuan, H-Y Xu. :** *On the iterated exponent of convergence of zeros of $f^{(j)} - \varphi$*, Adv, Differ, Equ, 2013, 1-15 (2013).

[29] **Tu, J, Yi, CF.** : *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with coefficients having the same order*, J, Math, Anal, Appl, 340, 487-497 (2008).

[30] **Xu, HY, Tu, J, Zheng, XM.** : *On the hyper exponent of convergence of zeros of higher order linear differential equations*, Adv, Differ, Equ, 2012, 114 (2012).

[31] **Yi, HX, Yang, CC.** : *Uniqueness Theory of Meromorphic Functions*, Science Press/Kluwer Academic, Beijing/New York (1995/2003).

[32] **Zheng, JH, Yang, CC.** : *Estimate on the number of fix-points of composite entire functions*, Complex Var, Elliptic Equ, 24, 301-309 (1994).