UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Spécialité : Modélisation Contrôle et Optimisation

Thème

Contrôle à énergie minimale des systèmes L.T.I 1D et 2D

Présenté par

Aliane Hayet

Soutenu le 26 /05/2015

Devant le jury

Mansouria Saïdani.	**Président**	**M.A.A**	**U. MOSTAGANEM.**
Mohammed Amine Ghezzar.	**Examinateur**	**M.A.A**	**U. MOSTAGANEM.**
Djillali Bouagada	**Encadreur**	**Professeur**	**U. MOSTAGANEM.**

Table des matières

INTRODUCTION

Le monde industriel connait actuellement un énorme développement technologique sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus exigeants du point de vue qualité et performance. En grande partie, ce progrès est dû au développement qu'a connu la recherche fondamentale dans divers domaines tels que ceux de l'analyse numérique et de la théorie des systèmes .Tout ceci a permis de mettre en œuvre des méthodes et des approches très complexes pour l'identification et la commande des systèmes. Le développement des méthodes mathématiques en général a été et sera toujours nécessaire pour la résolution des problèmes de plus en plus complexes posés par la physique et les sciences de l'ingénieur.

Tout au long de ce mémoire, une analogie entre un système linéaire standard et un système linéaire singulier positif tous deux à temps continu a été faite, pour déduire que tous les résultats sur le contrôle des systèmes linéaires standards sont étendus au cas des systèmes positifs à différences de conditions.

La recherche d'un contrôle pour un minimum d'énergie dépensée est également traitée pour le cas des systèmes positifs bidimensionnels. On considère les systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI) standards ou singuliers unidimensionnels et le problème est comme suit : Trouver un vecteur de contrôle u (t) qui conduira le vecteur d'état x (t) d'un état initial à un état final en un temps final fixe t, en minimisant un coût fonctionnel.

La technique utilisée est l'application du Gramian. On procèdera à la recherche d'un indice de performance pour chercher le contrôle minimale. L'approche sera étendue aux systèmes 2D. Pour ce faire on se basera sur les quelques références suivantes [1] et [2] :

Le chapitre 1 est consacré aux notions de bases et préliminaires. Nous introduisons les deux concepts d'atteignabilité et de contrôlabilité pour les deux classes à temps continu et à temps discret. Nous nous s'intéresons dans notre étude aux cas continu ou ces deux notions coïncident. Le chapitre suivant traite les systèmes positifs, des définitions et des caractérisations seront données. Les difficultés pour cette classe de systèmes seront de même signalées. Dans le chapitre dernier, le calcul d'un contrôle à énergie minimale est considéré pour le cas unidimensionnel, les résultats seront ensuite étendus aux cas bidimensionnels.

0.1 Matrices particulières

Nous présentons dans ce premier chapitre la théorie générale des matrices non-négatives et des matrices de Metzler. Il existe un grand nombre de références sur cette classe de matrices ; nous nous basons principalement sur les références suivantes [3], [4], Nous commençons par les définitions ainsi que les propriétés générales de ces matrices. Nous étudions alors plus particulièrement les matrices non-négatives, les matrices positives et les matrices de Metzler qui permettent de caractériser la positivité des systèmes linéaires.

0.1.1 Matrices non-négatives

Définition 0.1.1 *A est une matrice non-négative si*

$$\forall\ i \in \overline{n}\ , \forall\ j \in \overline{m}\ : a_{ij} \geq 0$$

$\overline{n}$ l'ensemble des n premiers entiers naturels, $1, ..., n$.
autrement dit toutes ses entrées sont non-négatives.

Exemple 0.1.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice non-négative.

0.1.2 Matrices de Metzler

Définition 0.1.2 *A est une matrice de Metzler si*

$$\forall i \in \overline{n}, \forall j \in \overline{m}, i \neq j : a_{ij} \geq 0$$

i.e toutes ses entrées hors diagonales sont non négatives.

Exemple 0.1.2 *La matrice suivante A est de Metzler :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Le resultat suivant est immédiat.

Proposition 0.1.1 *A est une marice de Metzler si et seulement si*

$$\forall t \geq 0, e^{tA} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$$

Preuve. On se refère à [8] □

0.1.3 Matrices Monomiales

Dans cette section, nous présentons une autre classe de matrices : les matrices monomiales

Définition 0.1.3 *Soit A une matrice carrée réelle d'ordre n, A est une matrice monomiale si les entrées de A sont toutes nulles sauf une dans chaque ligne et chaque colonne, qui est strictement positive.*

Exemple 0.1.3 *La matrice A*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice monomiale.

Proposition 0.1.2 *Une matrice A non singulière est telle que*

$$A^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$$

si et seulement si A est une matrice monomiale.

0.2 Notions sur la Contrôlabilité

0.2.1 Notion de système

Un système est une combinaison d'éléments interconnectées, entre eux et qui sont constitué naturelement ou artificiellement afin d'accomplir une tache prédifinie. et sont affecté par une ou plusieurs variables, les entrées du système, le résultat de l'action des entrées est la réponse du système qui peut-être caractérisée par le comportement d'une ou plusieurs variables de sorties.

0.2.2 Définitions des systèmes linéaires invariants

Définition 0.2.1 *Un système dont le comportement dans le temps, peut-être décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.*

Remarque 0.2.1 *Un processus transformant un signal d'entrée en un signal de sortie (signaux éléctriques par exemple) est appelé système invariant (ou stationnaire) lorsqu'une translation du temps appliquée à l'entrée se retrouve à la sortie.*

Dans ce sens, la sortie ne dépend pas explicitement du temps.

0.2.3 Cas des systèmes L.T.I à temps discret

Les concepts d'états atteignable (dit aussi contrôlable à partir de l'origine) et contrôlable (contrôlable à l'origine) sont introduit et discutés dans cette section.
On s'intéresse à des systèmes L.T.I et on commence notre section par l'étude du cas L.T.I à temps discret.

Définition 0.2.2 *Un système L.T.I à temps discret est un système qui a la forme à espace d'état d'écrite par les équations :*

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= Ax_i + Bu_i \\ y_i &= Cx_i + Du_i \end{aligned} \tag{0.2.1}$$

où x_i sont les états du système, u_i les contrôles du système, y_i les sorties du système.

A la matrice d'évolution, B la matrice de contrôle, C la matrice de sortie et D la matrice de transmission.
La trajectoire d'état (0.2.1) est :

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-(i+1)} Bu_i \quad , \quad k > 0 \tag{0.2.2}$$

La sortie est :

$$y_k = CA^k x_0 + C \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-(i+1)} B u_i$$

Définition 0.2.3 *Un système de la forme* (0.2.1) *est atteignable s'il existe une suite de contrôle* u_i *transfèrant l'état du système à partir de* 0 *vers une cible finale notée* x_f *.*

Définition 0.2.4 *Le système* (0.2.1) *est dit contrôlable s'il existe une suite de contrôles* (u_i) *servant à transfèrer l'état de* x_0 *vers l'origine.*

On montre que [9] , [7] ces deux notions sont équivalentes que si la matrice de transition A est inversible

Remarque 0.2.2 *Une adaptation au cas continu est possible mais l'équivalence entre ces deux notions est vérifiée sans conditions.*

A partir de (0.2.2), le système (0.2.1) est atteignable équivant à

$$x_1 = C_n u_n \tag{0.2.3}$$

avec

$$\begin{aligned} C_n &= \left[B, AB, ..., A^{n-1}B\right] \\ u_n &= \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ . \\ . \\ . \\ u_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

qui possédera une solution que si la matrice de Kalman C_n est de rang plein.

Exemple 0.2.1 *Soit le système,*

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

où

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

qui de rang ,

$$rgC = 2$$

donc il est atteignable.

On peut cependant déterminer la suite de contrôle adéquate par une cible finale

$$x_f = x_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

qui est,

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta - \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

0.2.4 Cas des systèmes L.T.I à temps continu

Définition 0.2.5 *L'état x_0 est dit contrôlable s'il existe un contrôle transfèrant l'état $x(t)$ à partir de x_0 à l'état zéro en un temps fini T*

$$\exists U \quad / \; x(t_0, t_f, u) = x_f = 0$$

on prend $t_0 = 0$,

la solution du systéme L.T.I à temp continu

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^{t_f} e^{A\left(t_f - \tau\right)} Bu(\tau)\, d\tau$$

Dans ce cas, contrôlabilité équivant à l'existence d'un contrôle U tel que

$$e^{At}x_0 + \int_0^{t_f} e^{A\left(t_f - \tau\right)} Bu(\tau)\, d\tau = 0$$

$$e^{At}x_0 = -\int_0^{t_f} e^{A\left(t_f - \tau\right)} Bu(\tau)\, d\tau$$

$$x_0 = -\int_0^{t_f} e^{-\tau A_1} Bu(\tau)\, d\tau$$

où

$$e^{-\tau A_1} = \sum_{i \geq 0} A_1^i \frac{\tau^i}{i!} = \sum_{i \geq 0} A^i \frac{(-\tau)^i}{i!} = \sum_{i \geq 0} A^i \alpha_i(\tau) \quad / \alpha_i(\tau) = \frac{(-\tau)^i}{i!}$$

et d'après le théorème de Cayley-Hamitton on aurra :

$$x(0) = x_0 = \sum_{i \geq 0} A^i B \left[\int_0^{t_f} \alpha_i(\tau) u(\tau) d\tau \right]$$

$$x_0 = C\beta \tag{0.2.4}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ . \\ . \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

L'équation (0.2.4) posséde une solution si et seulement si C est de rang plein autrement si et seulement si :

$$rang\ C = n \Leftrightarrow C\ inversible$$

0.2.5 Critère de Kalman

Test de Kalman

Condition sans contrainte sur le contrôle.
Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t.

Théorème 0.2.1 *Le systéme*

$$x' = Ax + Bu \tag{0.2.5}$$

est contrôlable si et seulement si C est de rang plein .
On cite quelques exemples de systèmes de contrôle

Applications

1. Wagon : D'après le principe fondamental de la mécanique l'équation du système est

$$mx''(t) = u(t)$$

le contrôle u représente la force agissant sur le système.

2. Pendule oscillant (en robotique :bras articulé)

$$\theta^{''}(t) + mgl\sin\theta(t) = u(t)$$

Exemple 0.2.2

$$x' = Ax(t) + Bu(t)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ici $n = 2$

On calcule, alors la matrice de Kalman C correspondante

$$C = [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

qui est telle que

$$\det C = 0$$

C n'est pas de rang plein, donc pas de contrôlabilité.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ici $n = 2$

On calcule, alors la matrice de Kalman C correspondante

$$C = [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de déterminant

$$\det C = -1 \neq 0$$

C est de rang plein, le système est donc contrôlable.

Chapitre 1

Contrôle à énergie minimale pour les systémes (L.T.I)

Le contrôle à énergie minimale est un contrôle $u(t)$ qui sert à transfèrer un système linéaire à temps invariant vers un état désiré (la cible finale) avec un minimum de dépense d'énergie.
On considère le système L.T.I (0.2.5) :
où

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, u \in \mathbb{R}^m$$

Nous exposerons un autre critère pour tester la contrôlabilité.

1.1 Grammien

En théorie de contrôle le Grammien de contrôlabilité est un Grammien sevant à tester si oui ou non un système est contrôlable.

Définition 1.1.1 *Le Grammien d'atteignabilité d'un système L.T.I à temps continu noté W_r est définit par,*

$$W_r(0,T) = \int_0^T e^{A(T-\tau)}BB^T e^{A^T(T-\tau)}d\tau$$

$W_r(0,T)$ est une matrice symétrique et définie positive.
Une autre propriété reliant le Grammien et la matrice de Kalman issu de [9] est caractérisée par :

Lemme 1.1.1

$$\operatorname{Im} W_r(0,T) = \operatorname{Im} C$$

Exemple 1.1.1 *Soit le modèle* (0.2.5)

avec

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A^T &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ e^{At} &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e^{At}B = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ici,

$$W_r(0,T) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}T^3 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^2 & T \end{bmatrix}$$

$$\det W_r(0,T) = \frac{1}{12}T^4 \neq 0 \quad , \quad \forall T > 0$$

$$rgW_r(0,T) = 2$$

(A, B) est atteignable.

$$\begin{aligned} C &= [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \operatorname{Im} C &= \operatorname{Im} W_r(0,T) = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Quand le système est contrôlable, il est toujours possible de déterminer le contrôle agissant sur le système. Le théorème suivant donne une manière de calculer le contrôle estimé.

Théorème 1.1.1 *Soit le système* $L.T.I$ (0.2.5) *avec la donné de*

$$x(0) = 0$$

il existe donc un contrôle U transférant l'état x_0 vers x_1 en un temps fini si et seulement si :

$$\begin{aligned} x_1 &\in \operatorname{Im} C \quad ; \quad (x_1 \in \operatorname{Im} W_r(0,T)) \\ \operatorname{Im} C &= \operatorname{Im} W_r = R_r \end{aligned}$$

Cependant, le contrôle appropié est donné par :

$$u\,(t) = B^T e^{A^T(T-\tau)}\eta_1$$

où η_1 est solution de,

$$W_r\eta_1 = x_1 \quad ; t \in [0, T]$$

Corollaire 1.1.1 *La paire* (A, B) *est atteignable si et seulement si :*

$$rg\ C = n \Leftrightarrow rg\ W_r = n$$

on propose ici une autre maniére de calculer le contrôle estimé.

Théorème 1.1.2 *Pour le système* (0.2.5)

$$x\,(0) = 0$$

La paire (A, B) est atteignable s'il existe un contrôle $U\,(t)$ transfèrant l'état du système de x_0 vers x_1 (l'état final).
tel que :

$$x_1 - e^{AT}x_0 \in \operatorname{Im} C \Leftrightarrow x_1 - e^{AT}x_0 \in \operatorname{Im} W_r\,(0, T)$$

et le contrôle correspondant est :

$$u\,(t) = B^T e^{(T-\tau)A^T}\eta_1$$

où η_1 est solution de

$$W_r\eta_1 = x_1 - e^{AT}x_0$$

il s'ensuit alors,

Corollaire 1.1.2 *Si la paire* (A, B) *est atteignable alors :*

$\exists U\,(t)$ tel que x_0 se transfère vers x_1 en un temps fini T et

$$u\,(t) = B^T e^{(T-\tau)A^T} W_r^{-1}(x_1 - e^{AT}x_0)$$

1.2 Relation entre Atteignabilité et Contrôlabilité

L'état du système est :

$$x_1(t) - e^{tA}x_0 = \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

Rappelons que :

1. Un état x_0 est dit contrôlable s'il existe un contrôle $u(t)$ transférant l'état $x(t)$ du système de x_0 vers l'origine en un certain temps fini T.
2. L'ensemble noté R_c est dit sous espae de contrôlabilité ; R_c est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on dit aussi sous espace vectoriel des états contrôlable.
3. Le système(0.2.5) est complètement contrôlable si et seulement si toutes les états sont contrôlables c'est à dire :

$$R_c = \mathbb{R}^n$$

On veut prouver quel'atteignabilité équivant à la contrôlabilité.
Soit x_0 un état contrôlable tel que $u(t)$, $t \in [0,T]$ donc ,

$$\begin{aligned} -e^{tA}x_0 &= \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \\ e^{At}x_0 &\in \operatorname{Im} W_r(0,T) \Leftrightarrow e^{At}x_0 \in \operatorname{Im} C \end{aligned}$$

En vertu de l'égalité de

$$\operatorname{Im} C = \operatorname{Im} W_r$$

le resultat suivant assure l'équivalence des deux notions.

Théorème 1.2.1 *Soit le système*

$$x' = Ax + Bu$$

1. Si le système est atteignable alors il est contrôlable.
2. $$R_c = R_r$$
3. La paire (A,B) est atteignable complètement si et seulement si elle est contrôlable complètement.

Définition 1.2.1 *Le Gramian de contrôlabilité est la matrice notée* $W_c \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et est définie par :*

$$W_c\left(0,T\right) = \int_0^T e^{-A\tau}BB^T e^{-A^T\tau}d\tau$$

et on note :

$$W_r\left(0,T\right) = e^{AT}W_c\left(0,T\right)e^{A^T T}$$

Une autre caractérisation [9] *est rappelée par le théorème suivant*

Théorème 1.2.2 *La paire* (A, B) *est atteignable si et seulement si :*

1. $$rg\ W_r\left(0,T\right) = n \qquad T > 0$$

   tel que

   $$W_r\left(0,T\right) = \int_0^T e^{A(T-\tau)}BB^T e^{A^T(T-\tau)}d\tau$$

   est le grammien d'atteignabilité.

2. si et seulement si les n lignes de

   $$\left(sI - A\right)^{-1}B$$

   sont linéarement indépendantes.

3. si et seulement si

   $$rgC = n$$

   telque

   $$C = \begin{bmatrix} B & AB & \ldots A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

   est la matrice de contrôlabilité.

Chapitre 2

Les Systèmes positifs à une dimension

Dans de nombreux systèmes physiques, les variables sont par nature positifs or les modèles usuels en particulier linéaires n'intégrent en général pas cette contrainte.
Des modèles particuliers ont été developpés par nombreux scientifiques. on cite par exemple les circuits RLC et d'autres modèles comme les modèles à compartiments.
Considérons à présent les définitions et quelques résultats de positivité en temps continu.

2.0.1 Positivité externe

Tout d'abord, donnons la première définition de positivité de systèmes linéaires, la positivité externe.

Définition 2.0.2 *Un système linéaire standard est dit externement positif si la sortie correspondant à l'état initial nul est non-négative pour chaque entrée non-négative, c'est à dire. pour,* $x_0 = x(0) = 0$ *et pour tout* $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ *,pour* $t \geq 0$.

2.0.2 Positivité interne

A présent, nous pouvons donner la seconde définition de positivité, qui peut être appelée positivité interne

Définition 2.0.3 *Le système*

$$\begin{aligned} x' &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.0.1}$$

est dit internement positif si pour tout $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$*, pour* $t \geq 0$*, on a* $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ *et* $y(t) \in \mathbb{R}_+^n$ *avec* $t \geq 0$.

Cette définition indique que toutes les trajectoires émanant de n'importe quel point dans l'orthant non-négatif $\mathbb{R}_+^n$ (frontières incluses) de l'espace d'état $\mathbb{R}$, obtenues en appliquant une entrée non-négative au système, demeurent dans l'orthant non-négatif et mènent à une sortie non-négative.

La positivité interne implique la positivité externe mais l'inverse n'est pas vrai.

Nous allons alors caractériser la positivité interne des systèmes linéaires standards en temps continu.

Le système (2.0.1) est internement positif si et seulement si A est une matrice de Metzler et $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p\times n}, D \in \mathbb{R}_+^{p\times m}$.

2.0.3 Applications

Systèmes à variables physiques positives par nature (niveaux, débits, concentration,...)

Exemple 2.0.1 *Problème de bacs.*

- Modèles à compartiments : Applications en médecine, cinétique chimiques, ...
- Modèles économiques (leontiff, ...) .
- Modèles de Dynamiques de population.
- Circuits RLC.
- Sciences de la communication et de l'information.
- Processus industriels impliquant des réacteurs chimiques,...

2.0.4 Principales Propriétés

Si l'état initial est positif (ou au moins non négatif) alors, la trajectoire d'état se situe entièrement dans l'orthant non négatif.

Notons que les systèmes linéaires positifs sont définis dans des cônes et non pas dans des espaces vectoriels.

En conséquence, certains propiétés connues des systèmes linéaires ne peuvent être aplliquées pour les systèmes positifs.

Pour les systèmes linéaires classiques : Tests :

– Commandabilité :

$$rg\left[B, AB, , ..., A^{n-1}B\right] = n$$

– Commandable $\rightarrow$ stabilisable .

– Fonction de transfert avec dénominateur de dégrée n $\rightarrow$ réalisation d'ordre n .

– Existence de réalisations symétriques : Formes canoniques , Jordan ,...

– Résultats très similaires en continu et en discret.

– Vérification de propriétés des méthodes d'algèbre linéaire (Matlab) .

Les quelques difficultés

– L'atteignabilité, contrôlabilité.

– Stabilisation par retour d'état.

2.1 Atteignabilité et Contrôlabilité des Systèmes Positifs

La contrôlabilité a pour objet de caractériser la capacité d'un système à savoir ses caractéristiques dynamiques modifiées par les entrées (contrôle) .

Les concepts de contrôlabilité et d'observabilité des systèmes seront introduits de manière tant analytique qu'algèbrique. Ils étendent naturellement celles du cas standard dues à Kalman aux cas singuliers et à classe des systèmes positifs.

Calcul de contrôle à énergie minimale. Position du problème

On considère le système positif (0.2.5) c'est à dire tel que A de Metzler, $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$et Monomiale.

Notre objectif est de s'intéresser à un contrôle $u(t)$ satisfaisant

$$u(t) < U \in \mathbb{R}_+^n \tag{2.1.1}$$

pour $t \in [0, t_f]$

qui minimise l'indice de Performance :

$$I(u) = \int_0^{t_f} u^t(\tau)\, Qu(\tau)\, d\tau \tag{2.1.2}$$

où Q est une matrice de $\mathbb{R}_+^{n\times n}$ symétrique et définie positive et $Q^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$.

Le problème du contrôle à énergie minimale se traduit par :

Etant donné un système de la forme (2.1.1) où A est une matrice de Metzler et

$$B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, u \in \mathbb{R}_+^n, Q \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$$

d'indice de performance (2.1.2) , et soit $x_f \in \mathbb{R}_+^n, t_f > 0$

Question : Trouver $u(t) \in \mathbb{R}_+^n$ pour $t \in [0, t_f]$ satisfaisant (2.1.1)

et qui transfèrt le vecteur d'état de $x_0 = 0$ à $x_f \in \mathbb{R}_+^n$, en minimisant l'indice de performance

.

2.2 Solution du problème

Pour répondre à la question on définit la matrice

$$W = W(t_f, Q) = \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} BQ^{-1}B^T e^{(t_f-\tau)A^T} d\tau \tag{2.2.1}$$

Et nous caractérisons cela dans le résultat suivant,

Théorème 2.2.1 *Le système positif* (0.2.5) *est atteignable en temps* $t \in [0, t_f]$ *si et seulement si A est une matrice de Metzler (matrice dont les éléments hors diagonale sont non négatives) et diagonale et la matrice $B \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ est monomiale.*

A parir de ce résultat et de (2.2.1) , il s'ensuit que la matrice (2.2.1) est monomiale si et seulement si le système positif (0.2.5) est atteignable en temps $[0, t_f]$.

On définit maintenant le contrôle :

$$\hat{u}(t) = Q^{-1}B^t e^{(t_f-\tau)A^t} W^{-1} x_f \ d\tau \qquad \textit{pour } t \in [0, t_f] \tag{2.2.2}$$

Notons que (2.2.2) satisfait la condition :

$$\hat{u}(t) \in \mathbb{R}_+^n \qquad \textit{pour} \quad t \in [0, t_f]$$

telque $Q^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ et $W^{-1}x_f \in \mathbb{R}_+^n$.

En faisant référence à [4] , nous énonçons le résultat suivant assurant la minimisation de l'indice de performance.

Théorème 2.2.2 *Soit le système positif* (0.2.5) *atteignable en temps* $[0, t_f]$ *et soit* $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}_+^n$ *pour* $t \in [0, t_f]$ *un contrôle qui conduit l'état du système* (0.2.5) *de* $x_0 = 0$ *à* $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ *et satisfaisant la condition* (2.1.1) *. Alors le contrôle* (2.2.2) *conduit aussi l'état du système de* $x_0 = 0$ *à* $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ *et minimise l'indice de performance* (2.1.2) *i.e :*

$$I(\hat{u}) \leq I(\bar{u})$$

Définition 2.2.1 *Le système positif* (0.2.5) *est atteignable en temps* $t \in [0, t_f]$ *si pour un état final* $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ *donné, il existe un contrôle* $u(t) \in \mathbb{R}_+^n$ *pour* $t \in [0, t_f]$ *conduisant l'état du système de* $x_0 = 0$ *à l'état final* $x_f = x(f)$ *.*

qui se caractérise par,
Le système positif (0.2.5) est atteignable en temps $t \in [0, t_f]$ si et seulement si A est de Metzler diagonale et $B \in \mathbb{R}_{+,}^{n \times m}$ est monomiale .

Chapitre 3

Système positifs continu-discret de dimension 2

Dans ce chapitre, on s'intérese à une nouvelle classe de système qui est la classe des systèmes bidimensionels discret-continu et positifs .Introduite par [10] , [11] , Noter que dans les systèmes discret-continu à deux dimensions l'une des variables indépendante est continu, la seconde est discrète. Ce sont des systèmes dont l'information se propage en deux directions et qui trouvent leurs applications en biomathématiques, en économie, en électronique, en imagerie et traitement du signal, ainsi qu'en automatique.
On considère dans ce cas le système linéaire continu-discret 2D d'écrit par, :

$$x^{'}(t,i) = Ax(t,i) + Bu(t,i) \tag{3.0.1}$$

telle que :

$x(t,i) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système et $u(t,i) \in \mathbb{R}^m$ le contrôle.

avec

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m} \quad (n \geq m)$$

$t \in \mathbb{R}_+$ est la variable continu et $i \in \mathbb{Z}_+$ est variable discrete.
Nous présetons dans ce qui suit quelques définitions et propriétés des systèmes positifs.
dans l'obtique d'adapter les résultats du chapitre précédent au cas bidimensionnel positif.
Nous nous basons pour ce faire sur les références suivantes [6] , [12] .

Définition 3.0.2 *Le système* (3.0.1) *est dit internement positif si*

$$x(t,i) \in \mathbb{R}_+^n, \ t \in \mathbb{R}_+, \ i \in \mathbb{Z}_+$$

pour toute condition initiale

$$x_{0i} \in \mathbb{R}_{+,}^n \ , \ x_{t0} \in \mathbb{R}_+^n \ \ , \ x_{t0}^{'} \in \mathbb{R}_{+,}^n$$

et tout contrôle

$$u(t,i) \in \mathbb{R}_+^m, \ t \in \mathbb{R}_+, \ i \in \mathbb{Z}_+$$

l'une des caractérisations issu de [7] .assurrant la positivité est donnée par le résultat suivant,

Théorème 3.0.3 *Le système* (3.0.1) *est positif si et seulement si*

$$A \in M_n \ et \ B \in \mathbb{R}_+^{n\times m} \tag{3.0.2}$$

telle que M_n est une matrice de Metzler de dimension $n \times n$.

Preuve. Nécessité :

On prend

$$u(t,i) = 0, \ t \geq 0 \ et \ x(0,i) = e_i \quad ;i = 1...n.$$

(i sont les colonnes d'une matrice identité I_n), dans ce cas la trajetoire reste dans l'orthant positif que si la dérivée

$$x^{'}(0,i) = Ae_i \geq 0 \text{ qui équivaut } a_{ij} \geq 0; \ i \neq j$$

d'où la matrice A est de Metzler, le même raisonnement pour

$$x(0,i) = 0$$

on a

$$x^{'}(0,i) = Bu(0,i) \geq 0 \text{ qui implique } B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$$

puisque ;

$$u(0,i) \in \mathbb{R}_+^m, i \in \mathbb{Z}_+$$

Suffisance :

La solution de l'équation (3.0.1) est donnée par :

$$x(t,i) = e^{At}x(0,i) + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau,i)\,d\tau \tag{3.0.3}$$

sachant que

$$e^{At} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, t \in \mathbb{R}_+ \text{ si et seulement si } A \in M_n$$

à partir de la relation (3.0.3) ,ils′ensuit que

$$x(0,i) \in \mathbb{R}_+^n\ ,\ u(t,i) \in \mathbb{R}_+^m\ ,\ t \in \mathbb{R}_+\ ,\ i \in \mathbb{Z}_+$$

et

$$x(t,i) \in \mathbb{R}_+^n,\ t \in \mathbb{R}_+,\ i \in \mathbb{Z}_+.$$

soit donc le système (3.0.1) est positif. □

Définition 3.0.3 *Le système positif* (3.0.1) *est atteignable en temps* $\{[t_f,0],[t_f,q]\ \}$ *si pour un état final* $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ *donné, il existe un contrôle* $u(t,i) \in \mathbb{R}_+^m$ *pour* $t \in [0,t_f], i \in [0,q]$ *conduisant l'état du système de* $x(0,i) = 0$ $i = 0,1,...q$ *à l'état final* $x_f = x(t_f,0)+x(t_f,1)+ ... + x(t_f,q)$.

On teste par suite l'atteignabilité du système (3.0.1) par le théorème suivant,

Théorème 3.0.4 *Le système positive* (3.0.1)*est atteignable en temps* $\{[t_f,0],[t_f,q]\ \}$ *si et seulement si* A *est une matrice de Metzler et diagonale et la matrice* $B \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ *est monomiale.*

Preuve. On utilise (3.0.3) pour $t = t_f$, $i = 0,1,...,q$. $x(0,i) = 0, i = 0,1,...,q$. On obtient alors,

$$x_f = x(t_f,0) + x(t_f,1) + ... + x(t_f,q) = \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)}\overline{B}\,\overline{u}(\tau)\,d\tau \tag{3.0.4}$$

où

$$\overline{B} = [B\ B\ ...\ B] \in \mathbb{R}_+^{n\times\overline{m}}$$

$$\overline{u}(\tau) = \begin{bmatrix} u(\tau,0) \\ u(\tau,1) \\ . \\ . \\ . \\ u(\tau,q) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{\overline{m}}, \overline{m} = n(q+1). \tag{3.0.5}$$

Il est bien connu [10] que si $A \in M_n$ est diagonale, alors $e^{At} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ est aussi diagonale et si $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}$ est monomiale alors $\overline{B}\ \overline{B}^t \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ est aussi monomiale, dans ce cas la matrice

$$R\left(t_f, q\right) = \int_0^{t_f} e^{A\tau}\overline{B}\ \overline{B}^t e^{A^t\tau} d\tau \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \tag{3.0.6}$$

est aussi monomiale et $R^{-1}\left(t_f, q\right) \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$; on prend par suite,

$$\hat{u}\left(t\right) = \overline{B}^t e^{A^t\left(t_f-\tau\right)} R^{-1}\left(t_f, q\right) x_f \tag{3.0.7}$$

qui transfert l'état du système (3.0.1) à partir de $x\left(0, i\right) = 0, i = 0, 1, ..., q.$ vers un état final sur le segment de ligne $\{\left[t_f, 0\right], \left[t_f, q\right]\ \}$, On utilise (3.0.5), (3.0.6) et (3.0.3) , on obtient alors,

$$\begin{aligned}
x\left(t_f, q\right) &= \int_0^{t_f} e^{A\left(t_f-\tau\right)}\overline{B}\hat{u}\left(\tau\right) d\tau \\
&= \int_0^{t_f} e^{A\left(t_f-\tau\right)}\overline{B}\ \overline{B}^t e^{A^t\left(t_f-t\right)} d\tau R^{-1}\left(t_f, q\right) x_f \\
&= \int_0^{t_f} e^{A\tau}\overline{B}\ \overline{B}^t e^{A^t\tau} d\tau R^{-1}\left(t_f, q\right) x_f \\
&= x_f
\end{aligned}$$

Néccesité : Par le théorème da Cayley-Hamilton, on a

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\left(t\right) A^k \tag{3.0.8}$$

où $c_k\left(t\right), k = 0, 1, ..., n-1$ sont des fonctions non nulles dépendant de la matrice A, une substitution de (3.0.8) dans,

$$x_f = \int_0^{t_f} e^{\left(t_f-\tau\right)A}\overline{B}\overline{u}\left(\tau\right) d\tau \tag{3.0.9}$$

donne,

$$x_f = \left[\ \overline{B}\ A\ \overline{B}\ .\ .\ .\ A^{n-1}\overline{B}\right] \begin{bmatrix} v_0\left(t_f\right) \\ v_1\left(t_f\right) \\ . \\ . \\ . \\ v_{n-1}\left(t_f\right) \end{bmatrix} \tag{3.0.10}$$

où

$$v_k\left(t_f\right) = \int_0^{t_f} c_k\left(\tau\right) \overline{u}\left(t_f-\tau\right) d\tau, k = 0, 1, ..., n-1 \tag{3.0.11}$$

pour $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ donnée il est possible de calculer tout les

$$v_k\left(t_f\right), k = 0, 1, ..., n-1$$

non négatifs si et seulement si la matrice

$$\left[B\ AB\ ...\ A^{n-1}B\right] \tag{3.0.12}$$

posséde n colonnes monomiales linéairement indépendantes et cela n'a lieu que si la matrice$[A\ B]$ contient des colonnes linéairement indépendantes monomiales [10] ; notez que pour les $v_k\left(t_f\right)$, non négatifs $k = 0, 1, ..., n-1$, il est possible de trouver une entrée non négative $\overline{u}\left(t\right) \in \mathbb{R}_+^{\overline{m}}$ si et seulement si la matrice $B \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ est monômiale et la matrice $A \in M_n$ est diagonale $\square$

Si le système positif (3.0.1) est atteignable sur le segment de $\{[t_f, 0], [t_f, q]\ \}$ alors différents contrôles $\overline{u}\left(\tau\right) \in \mathbb{R}_+^{\overline{m}}$.

qui dirige l'état du système à partir $x\left(0, i\right) = 0, i = 0, 1, ..., q$ vers $x_f = x\left(t_f, 0\right) + x\left(t_f, 1\right) + ... + x\left(t_f, q\right)$ .Parmi ces contrôles nous cherchons une sortie $\hat{u}\left(t\right) \in \mathbb{R}_+^{\overline{m}}$ pour $t \in [0, t_f]$ qui minimise l'indice de performance (2.1.2) où Q est une matrice de $\mathbb{R}_+^{\overline{m}\times\overline{m}}$ symétrique et définie positive où $Q^{-1} \in \mathbb{R}_+^{\overline{m}\times\overline{m}}$.

Le problème du calcul d'un contrôle à l'énergie minimale est posé comme suit : Compte tenu des matrices $A \in M_n$, $B \in \mathbb{R}_+^{n\times m}, Q \in \mathbb{R}_+^{\overline{m}\times\overline{m}}$ et $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ trouver un contrôle $\overline{u}\left(t\right) \in \mathbb{R}_+^{\overline{m}}$ pour $t \in [0, t_f]$ qui dirige le vecteur d'état du système à partir $x\left(0, i\right) = 0\ i = 0, 1, ...q$ vers $x_f = x\left(t_f, 0\right) + x\left(t_f, 1\right) + ... + x\left(t_f, q\right) \in \mathbb{R}_+^n$. en minimisant l'indice de performance $(2.1.2)$.

3.1 Solution du problème

Pour cela on définit la matrice

$$W = W\left(t_f, Q\right) = \int_0^{t_f} e^{\left(t_f-\tau\right)A}\overline{B}Q^{-1}\overline{B}^t e^{\left(t_f-\tau\right)A^t} d\tau \tag{3.1.1}$$

où a partir du théorème précédent,il s'ensuit que la matrice (3.1.1) est monomiale et $W^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ si et seulement si le système positive (3.0.1) est atteignable en temps $\{[t_f, 0]\,[t_f, q]\ \}$

On définit maintenant le contrôle :

$$\hat{u}\left(t\right) = Q^{-1}\overline{B}^t e^{\left(t_f-\tau\right)A^t} W^{-1} x_f\ d\tau \qquad pour\ t \in [0, t_f] \tag{3.1.2}$$

Notons que :

$$\hat{u}(t) \in \mathbb{R}_+^{\overline{m}} \qquad pour \quad t \in [0, t_f]$$

si

$$Q^{-1} \in \mathbb{R}_+^{\overline{m}\times\overline{m}} et\ W^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \tag{3.1.3}$$

Théorème 3.1.1 *Soit* $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}_+^{\overline{m}}$ *pour* $t \in [0, t_f]$ *un contrôle qui conduit l'état du système positif* (3.0.1) *de* $x(0,i) = 0$, $i = 0, 1, ..., q$ *vers* $x_f = x(t_f, 0) + x(t_f, 1) + ... + x(t_f, q) \in \mathbb{R}_+^n$ *, alors le contrôle* (3.0.4) *conduit aussi l'état du système de* $x(0,i) = 0$, $i = 0, 1, ..., q$ *vers* $x_f = x(t_f, 0) + x(t_f, 1) + ... + x(t_f, q) \in \mathbb{R}_+^n$ *en minimisant l'indice de performance* (2.1.2) *i.e :*

$$I(\hat{u}) \leq I(\bar{u})$$

la valeure minimale de l'indice de performance (2.1.2) est alors,

$$I(\hat{u}) = x_f^t W^{-1} x_f \tag{3.1.4}$$

Preuve. Si la condition (3.1.3) est vérifiée alors $\hat{u}(t) \in \mathbb{R}_+^{\overline{m}}$ pour $t \in [0, t_f]$. on doit donc avoir un contrôle qui dirige l'état du système à partir $x(0,i) = 0$, $i = 0, 1, ..., q$ vers $x_f \in \mathbb{R}_+^n$. une substitution de (3.1.2) dans (3.0.4) pour $t = t_f$ .donne,
donc

$$x(t_f) = \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} \overline{B} \hat{u}(\tau)\, d\tau = \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} \overline{B} Q^{-1} \overline{B}^t e^{(t_f-\tau)A^t} d\tau W^{-1} x_f \ = x_f$$

du fait que (3.1.1).est satisfaite par hypothèse, $\overline{u}(t)$ et, $\hat{u}(t)$, $t \in [0, t_f]$,transfèrent l'état du système $x(0,i) = 0$, $i = 0, 1, ..., q$ pour $t \in [0, t_f]$ vers $x_f \in \mathbb{R}_+^n$. transfèrent

$$x_f = x(t_f) = \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} \overline{B} \overline{u}(\tau)\, d\tau = \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} \overline{B} \hat{u}(\tau)\, d\tau \tag{3.1.5}$$

où

$$\int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} \overline{B} \left[\overline{u}(\tau) - \hat{u}(\tau)\right] d\tau = 0 \tag{3.1.6}$$

Par transposition de (3.1.2) et suite à la multiplication par $W^{-1}x_f$ on obtient,

$$\int_0^{t_f} \left[\overline{u}(\tau) - \hat{u}(\tau)\right]^t \overline{B}^t e^{A^t(t_f-\tau)} d\tau W^{-1} x_f = 0 \tag{3.1.7}$$

On remplace alors (3.1.2) dans (3.1.7) , par suite,

$$\int_0^{t_f} [\overline{u}(\tau) - \hat{u}(\tau)]^t Q\hat{u}(\tau)\, d\tau = 0 \tag{3.1.8}$$

du fait que

$$Q\hat{u}(t) = \overline{B}^t e^{A^t(t_f-\tau)} W^{-1} x_f \ = x_f \tag{3.1.9}$$

on utilise alors (3.1.8) , il est facile de vérifier que,

$$\int_0^{t_f} \overline{u}(\tau)^t Q\overline{u}(\tau)\, d\tau = \int_0^{t_f} \hat{u}(\tau)^t Q\hat{u}(\tau)\, d\tau + \int_0^{t_f} [\overline{u}(\tau) - \hat{u}(\tau)]^t Q[\overline{u}(\tau) - \hat{u}(\tau)]\, d\tau.$$

A partir de la relation (3.1.9) , il s'ensuit que

$$I(\hat{u}) < I(\overline{u})$$

car le deuxième terme qui se repose dans le côté droit de l'inégalité est non négatif.

pour trouver la valeur minimale de l'indice de performance (2.1.2) nous substituons (2.1.2) dans (2.2.2) et

on obtient cependant,

$$\begin{aligned} I(\hat{u}) &= \int_0^{t_f} \hat{u}(\tau)^t Q\hat{u}(\tau)\, d\tau \\ &= x_f^t W^{-1} \int_0^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} \overline{B} Q^{-1} \overline{B}^t e^{A^t(t_f-\tau)} d\tau W^{-1} x_f \\ &= x_f^t W^{-1} x_f \end{aligned}$$

$\square$

Exemple 3.1.1 *On considère le système positif*

$$x'(t,i) = Ax(t,i) + Bu(t,i)$$

tel que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

on demande de Calculer le contrôle optimale $\hat{u}(t)$ pour $t \in [0,1]$ et $q = 1$; cela transfert l'état du système de l'état nul vers l'état final $x_f = (1 \quad 1)^t \in \mathbb{R}_+^2$; et minimise l'indice de performance. On prend pour cela $t_f = 1,\ q = 1$.

Etape 1 :

Dans ce cas nous avons :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Etape 2 :

On utilise (3.1.1) pour calculer la matrice W

$$\begin{aligned} W(t_f, q) &= \int_0^{t_f} \begin{pmatrix} e^{-\left(t_f-\tau\right)} & 0 \\ 0 & e^{-2\left(t_f-\tau\right)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\left(t_f-\tau\right)} & 0 \\ 0 & e^{-2\left(t_f-\tau\right)} \end{pmatrix} d\tau \\ &= \int_0^{t_f} \begin{pmatrix} e^{-2\tau} & 0 \\ 0 & e^{-4\tau} \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(1-e^{-2}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}\left(1-e^{-4}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Etape 3 :

Au moyen de (3.1.2) pour calculer $\hat{u}(t)$.

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{2(t-1)} \\ e^{(t-1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(1-e^{-2}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}\left(1-e^{-4}\right) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4e^{2(t-1)}}{(1-e^{-4})} \\ \\ \frac{2e^{(t-1)}}{(1-e^{-2})} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Etape 4 :

On applique (3.1.4) pour calculer la valeure minimale de l'indice de performance est égal à :

$$\begin{aligned} I(\hat{u}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(1-e^{-2}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}\left(1-e^{-4}\right) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{(1-e^{-2})} + \frac{8}{(1-e^{-4})}. \end{aligned}$$

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons introduit la notion de Contrôlabilité et de Gramian de contrôlabilité pour tester si oui ou non un système est contrôlable tout en garantissant un minimum de dissipation d'énergie.
Les conditions que nous avons développé sont des extension des resultats issu de [6] aux modèles d'état généralisés. Au moyen de ce Gramian et dans ce même contexte, nous avons caractérisé les resultats pour des cas de systèmes bidimentionnels (2D) discret-continu.
Le principe objectif dans ce mémoire est dufaire une analyse du calcul d'un contrôle à énergie minimale pour la classe des systèmes positifs.
On cite que certaines propriétés connues des sysèmes linéaires ne peuvent être appliquées pour les systèmes positifs du fait que la trajectoire d'état se situe entierement dans l'orthant non-négatif.
En perspectives, les resultats peuvent être généralisé aux cas des systèmes 1D et 2D de type Lyapunov.

Bibliographie

[1] T.Kaczorek." Positive 1D and 2D systems, Springer-Verlag, London

[2] . R.B.Bapat, T.E.S.Raghavan, Nonnégative matrices and applications, Encyclopédia of mathematics and its applications 64, Cambridge University press,1977.

[3] P.Lancaster, M.Tismenetsky, The theory of matrices, Second Edition with Applications, Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, 1985.

[4] T.Kaczorek "Minimum Energy control of positive conditions time linear systems with B inputs,Int.J.App.comput.Vol123-725-730.2003.

[5] L.Farina et S.Rinaldi, positive linear systems ,theory and applications, J.Wiley,New york .2000.

[6] T.Kaczorek.Minimum Enrgy Control of 2D Positive continuous-Discrete Linear systems, "acta mechanica, vol.8 no.3 (2014),DOI/10.2478/ama-2014-0030".

[7] D.BOUAGADA "à théorie de contrôle" cours pour les L3 :C.A.S

[8] D.BOUAGADA"Systèmes Différentiels Singuliers Positifs et LMIs",Thèse de Doctorat d'état.

[9] P.J.Ansaklis and A. N.Michel"A linear systems primer" 2007 Birkhauser-L.C.control.

[10] T.Kaczorek, Positive 1D and 2D systems, Springer Verlag, Berlin, Academy 2002. 431 pages

[11] J. Kurek, The General state-space model for a two-dimensional linear digital systems, IEEE, Trans. Autom. Contr., Vol AC-30 N°6, pp. 600-601

[12] J.Kalman "Minimum energy control of 2D systems in Hilbert spaces";system sciences.1983. V. 9. NO. 1-é. P. 33-42.