UNIVERSITÉ ABDELHAMID BEN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET L'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Spécialité : Modélisation, Optimisation et Contrôl

Thème

DÉRIVÉES DE CAPUTO ET APPLICATIONS AUX EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRE

Présenté par

BEKKOUCHE ZAKARIA

Soutenu le 26 /05/2015

Devant le Jury

M.	OULD ALI	**Président**	**U. MOSTAGANEM.**
A.	AMIR	**Examinateur**	**U. MOSTAGANEM.**
Z.	DAHMANI	**Encadreur**	**U. MOSTAGANEM.**

Remerciment

Avant tout, Louangea DIEU le Tout-Puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toutes ces années d'étude et que grâce a lui ce travail a pu être réalisé.

Je tiens à remercier le professeur Z. Dahmani d'avoir encadré ce travail, tout au long de ce mémoire, ses conseils m'ont été très précieux.

Je remercie également les membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail, et je remercie aussi tous les enseignants qui ont contribué à ma formation..

Il m'aurait été impossible de réaliser ce travail sans le soutien de ma famille.

J'adresse également mes remerciments envers mes amis pour leur soutient, et un grand merci pour toutes les personnes qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Table des matières

Résumé :

Dans ce mémoire, certains problèmes différentiels fractionnaires au sens de *Caputo* sont considérés. Ces problèmes peuvent porter sur l'existence et l'unicité des solutions sous certaines conditions sur les données initiales. Ils peuvent aussi porter sur l'existence d'une solution au moins en changeant, bien sûr, les données des problèmes.

Chapitre 0

0.1 Introduction générale

Quand on introduit la notion de dérivée, on se rend vite compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même, et de même introduire la dérivée seconde, puis les dérivées successives d'ordre entier. L'intégration l'opérateur inverse de la dérivée, peut être comme une dérivée d'ordre " moins un ". On peut aussi se demander si ces dérivées d'ordre successifs ont un équivalent d'ordre fractionnaire.

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet prèsque aussi ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui. Les origines du calcul fractionnaire remontaient à la fin du $17^{éme}$ siécle, partant de quelques spéculations de Leibniz concernant la question de l'Hôpital, posée en 1695, sur la signification de $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = (1/2)$. Depuis, de nombreux mathématiciens ont contribué au développement de cette théorie. Nous citons entre autres Laplace, Fourier, Liouville, ... ect.

Cependant, le calcul fractionnaire à été longuement considéré comme une simple théorie mathématique sans aucune explication réelle ou pratique. En effet, l'intérêt de ce concept dans la sciences fondamentales et en ingénierie ne s'est manifesté qu'à la seconde moitié du $20^{éme}$ siécle. Dès lors, beaucoup de contributions autant théoriques que pratiques ont montré l'importance des systèmes d'ordre fractionnaires et leur intérêt dans différentes disciplines telles que la mécanique, l'électricité, la biologie, la chimie, l'automatique,... ect.

Ce mémoire se compose d'une introduction, de trois chapitres et d'une conclusion.

Le Premier Chapitre comporte quelques notions de bases ainsi que toutes les notations et définitions qui nous serons utiles. Nous introduirons le calcul fractionnaires et nous insisterons sur les définitions et les propriétés des dérivées et intégrales fractionnaires.

Le Deuxième Chapitre est consacré pour les opérateurs et les théorèmes de point fixe de $Banach$, $Schaefer$ et le théorème de Ascoli-Arzila. Ils permettant de prouver l'existence et l'unicité ou au moins l'existence de la solution de notre problèmes.

Le troisième chapitre contient les deux problèmes fractionaires dans le cas de la dérivée fractionnaire au sens de *Caputo*.

1. Le premier problème est :

$$\begin{cases} {}_*D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t), y'(t)), t \in J = [0, T], 1 < \alpha < 2, \\ y(0) - y'(0) = \int_0^T g(s, y(s)), \\ y(T) - y'(T) = \int_0^T h(s, y(s)). \end{cases}$$

   Il sera résolu avec les deux théorèmes de point fixe.

2. Le deuxième problème considéré est le suivant :

$$\begin{cases} {}_*D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), t \in J = [0, T], 2 < \alpha < 3, \\ y(0) = y''(0) = 0, \\ y'(s) = ky''(T), 0 < s < T. \end{cases}$$

Chapitre 1

Calcul Fractionnaires

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on introduit quelques notions du calcul fractionnaire.

– Dans la première partie du chapitre, on rappelle quelques propriétés des fonctions spéciales utilisées dans le calcul fractionnaire.

– Dans la deuxième, on va s'intéresser aux intégrales fractionnaires au sens de Riemman-Liouville et quelques inégalités intégrale fractionnaires.

– Dans la troisième partie du chapitre on étudiera les dérivées fractionnaires au sens de :

1. Riemman-Liouville.
2. Caputo.

1.2 Généralités

Définition 1.2.1 *(Fonction Gamma d'Euler)*

la fonction Gamma d'Euler est une fonction complexe. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes.
Elle est donneé par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \ ; \ \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Elle peut aussi être définie pour des valeurs reelles $z > 0$ par la même expression

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \ ; \quad z > 0.$$

Propriétés

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\,; \qquad z > 0.$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!.$

   En particulier, $\Gamma(1) = 1.$

Preuves

1. Pour démontrer la première propriété, il suffit de passer par un intégrale par partie

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t}t^{-z}dt \\ &= \left[-e^{-t}t^{z}\right]_0^{\infty} + z\int_0^{\infty} e^{t}t^{z-1}dt \\ &= z\Gamma(z).\end{aligned}$$

2. En effet dans (1), on prend $z = n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &\vdots \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots\Gamma(1) \\ &= n!,\end{aligned}$$

   où $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^0dt = 1.$

Définition 1.2.2 *(Fonction Béta d'Euler)*

La fonction Béta d'Euler est définie pour tous nombres complexes x et y de parties réelles strictement positives par la formule :

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Propriétés

1. $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$; $\mathrm{Re}(x) > 0$, $\mathrm{Re}(y) > 0$.
2. $\beta(x,y) = \beta(y,x)$; $\mathrm{Re}(x) > 0$, $\mathrm{Re}(y) > 0$.

1.3 Integrales Fractionnaires (Riemann-Liouville)

Définition 1.3.1

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

On définit l'intégrale fractionnaire d'ordre α au sens de Riemman-Liouville de f notée $J_a^\alpha f(x)$, par :

$$\begin{cases} J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \alpha > 0, \\ J_a^0 f(x) = f(x). \end{cases}$$

Si f est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$, alors,

$$J_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \alpha > 0, x > 0.$$

1.3.1 Propriétés

Proposition 1.3.1

Soit la fonction continue $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Pour tout $\alpha > 0, \beta > 0$, on a :

$$(J^\alpha J^\beta) f(x) = (J^\beta J^\alpha) f(x) = J^{\alpha+\beta} f(x).$$

Preuve

On pose $J^{\beta}f(s) = k(s); s \in (0, x)$. Alors on a :

$$\begin{aligned}(J^{\alpha}J^{\beta})f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}k(s)ds\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-t)^{\beta-1}f(t)dt\right]ds\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x (x-s)^{\alpha-1}\left[\int_0^s (s-t)^{\beta-1}f(t)dt\right]ds.\end{aligned}$$

Puisque $0 \leq t \leq s \leq x$, on obtient :

$$(J^{\alpha}J^{\beta})f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(t)\left[\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}ds\right]dt.$$

On utilise le changement de variable suivant $\tau = \frac{s-t}{x-t}$,
puis on calcul $\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}ds$:

$$\begin{aligned}\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}ds &= \int_0^1 (x-\tau(x-t)+t)^{\alpha-1}(\tau(x-t)+t-t)^{\beta-1}(x-t)d\tau\\ &= \int_0^1 (x-t)^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}(x-t)^{\beta-1}(x-t)d\tau\\ &= (x-t)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}d\tau\\ &= (x-t)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}(J^{\alpha}J^{\beta})f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)dt\\ &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}dt\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1}dt\\ &= J_a^{\alpha+\beta}f(x).\end{aligned}$$

Proposition 1.3.2

L'application de l'opérateur d'intégrale fractionnaire d'ordre α de $Riemman - Liouville$ sur x^{β} est donnée par :

$$J^{\alpha}x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}x^{\beta+\alpha}, \alpha > 0, \beta \geq 0, x > 0. \tag{1.3.1}$$

Preuve

On a :

$$J^{\alpha}x^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}t^{\beta}dt.$$

On applique le changement de variable $\frac{t}{x} = \tau$, on obtient :

$$\begin{aligned}
J^{\alpha}x^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}(x-x\tau)^{\alpha-1}(x\tau)^{\beta}xd\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}x^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}x^{\beta}\tau^{\beta}xd\tau \\
&= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{1}(1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta}d\tau \\
&= \frac{x^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta+1) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)}x^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

1.4 Inégalité Intégrales Fractionnaires

La théorie des inégalités intégrales d'ordre fractionnaire joue un rôle important dans les équations différentielles fractionnaires.

Dans ce paragraphe nous intéressons à quelques inegalités intégrales au sens de Riemann-liouville.

1.4.1 Inégalité de Chebyshev

On considère la quantité :

$$T(f,g)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx.$$

On va supposer que f et g sont *synchrone* sur $[a,b]$:

$$\left(f(x)-f(y)\right)\left(g(x)-g(y)\right)\geq 0; x,y\in[a,b]\,. \tag{1.4.1}$$

Théorème 1.4.1 *Soient f et g deux fonctions continue sur $[a,b]$. Si f et g vérifient* (1.4.1), *alors on a :*

$$\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}J_a^{\alpha}f\left(t\right)g\left(t\right)\geq J_a^{\alpha}f\left(t\right)J_a^{\alpha}g\left(t\right),\alpha>0,t\in[a,b]\,.$$

Preuve. On développe (1.4.1), on a alors :

$$f(x)g(x)+f(y)g(y)-f(x)g(y)-f(y)g(x)\geq 0; x,y\in[a,b]\,. \tag{1.4.2}$$

Et on multiplie (1.4.2) par $\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, on obtient :

$$\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(x)g(x)+f(y)g(y)\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}-g(y)\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(x)-f(y)\frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}g(x)\geq 0; x,y\in[a,b]\,. \tag{1.4.3}$$

On intègre (1.4.3) par rapport à x sur $[a,t]$, on obtient donc :

$$J_a^{\alpha}fg(t)+f(y)g(y)J_a^{\alpha}\left(1\right)-g(y)J_a^{\alpha}f(t)-f(y)J_a^{\alpha}g(t)\geq 0. \tag{1.4.4}$$

Et pour éliminer la variable y, on vas multiplie (1.4.4) par $\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$. On va avoir :

$$\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}J_a^{\alpha}fg(t)+J_a^{\alpha}\left(1\right)\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(y)g(y)-J_a^{\alpha}f(t)\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}g(y)-J_a^{\alpha}g(t)\frac{(t-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}f(y)\geq 0. \tag{1.4.5}$$

Et on intègre cette dernière inégalité par rapport à y, on obtient donc :

$$\begin{aligned}J_a^{\alpha}\left(1\right)J_a^{\alpha}fg(t)+J_a^{\alpha}\left(1\right)J_a^{\alpha}f(y)g(y)-J_a^{\alpha}g(y)J_a^{\alpha}f(t)-J_a^{\alpha}f(y)J_a^{\alpha}g(t)&\geq 0\\2J_a^{\alpha}\left(1\right)J_a^{\alpha}fg(t)-2J_a^{\alpha}g(y)J_a^{\alpha}f(t)&\geq 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient le résultat :

$$J_a^\alpha (1)\, J_a^\alpha fg(t) \geq J_a^\alpha g(y) J_a^\alpha f(t). \tag{1.4.6}$$

D'où,

$$\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_a^\alpha fg(t) \geq J_a^\alpha g(y) J_a^\alpha f(t). \tag{1.4.7}$$

□

Remarque 1.4.1 *Si on prend $\alpha = 1$, $t = b$ dans le théorème*1.4.1, *on obtient :*

$$\begin{aligned}(b-a)\int_a^b fg(t)dt &\geq \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b g(t)dt\right)\\ \frac{1}{(b-a)}\int_a^b fg(t)dt &\geq \left(\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t)dt\right)\left(\frac{1}{(b-a)}\int_a^b g(t)dt\right).\end{aligned}$$

Cette derniere inégalité représente l'inégalité classique de Chebyshev. [4]

Théorème 1.4.2 *Soient f et g deux fonction synchrones sur $[a,b]$.*

Alors l'inégalité suivante :

$$\frac{(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} J_a^\alpha fg(t) + \frac{(t-a)^\beta}{\Gamma(\beta+1)} J_a^\beta fg(t) \geq J_a^\alpha f(t) J_a^\beta g(t) + J_a^\beta g(t) f(t) J_a^\alpha g(t), \tag{1.4.8}$$

est vérifiée pour tout $\alpha > 0, \beta > 0, t \in [a,b]$.

Preuve. Il suffit de multiplier l'inégalité (1.4.4) par $\frac{(t-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$, puis l'integrer par rapport à y sur $[a,t]$. □

Remarque 1.4.2 *Dans ce théorème, si on prend $\alpha = \beta$ et $t = b$ on obtient le théorème1.3.1, et si on prend $\alpha = \beta = 1$ et $t = b$, on obtient l'inégalité classique de Chebyshev.*

Théorème 1.4.3 *Soit $(f_i)_{i=1}^n$ une famille de fonctions croissantes et positives sur $[a,b]$.*

Alors l'inégalité suivante

$$\left[\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]^{n-1} J_a^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right) \geq \prod_{i=1}^{n} J_a^{\alpha} f_i,$$

est verifiée pour $\alpha > 0, t \in [a,b]$.

Preuve. On vas démontrer ce théorème par récurrence :

Le cas ou $n = 2$ correspond au théorème 1.4.1.

On suppose qu'elle est vrais pour $(n-1)$:

$$\left[\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]^{n-2} J_a^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\right) \geq \prod_{i=1}^{n-1} J_a^{\alpha} f_i,$$

et on démontre qu'elle est vrais pour (n).

On a donc :

$$\left[\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]^{n-1} J_a^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right) = \left[\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]^{n-2}\left[\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right] J_a^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i . f_n\right). \tag{1.4.9}$$

On pose $g = \prod_{i=1}^{n-1} f_i \quad f = f_n$.

Pour le second membre de (1.4.9) on applique le théorème 1.4.1

$$\left[\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right] J_a^{\alpha} fg \geq J_a^{\alpha} f . J_a^{\alpha} g = J_a^{\alpha} f_n J_a^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right),$$

donc (1.4.9) devient

$$\begin{aligned}\left[\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]^{n-1} J_a^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right) &\geq \left[\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]^{n-2} J_a^{\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n-1} f_i\right) J_a^{\alpha} f_n \\ &\geq \prod_{i=1}^{n-1} J_a^{\alpha} f_i J_a^{\alpha} f_n \\ &\geq \prod_{i=1}^{n} J_a^{\alpha} f_i.\end{aligned}$$

$\square$

1.4.2 Inégalité de *F. Qi*

Théorème 1.4.4 *Soient f et h deux fonctions continues définies de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}_{+}^{*}$ telles que*

$$f(x) \leq h(x), x \in [a,b].$$

Si $\frac{f}{h}$ est décroissante et f et h sont croissantes sur $[a,b]$, alors pour tout fonction Φ tellque $\frac{\Phi(x)}{x}$ soit croissante, on a :

$$\frac{J_a^{\alpha} f(t)}{J_a^{\alpha} h(t)} \geq \frac{J_a^{\alpha} \Phi(f(t))}{\Phi(h(t))}, t \in [a,b], \alpha > 0.$$

1.4.3 Inégalité de Grűss

Théorème 1.4.5 *Soient f et g deux fonctions continues définies de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ telles que $m \leq f \leq M, \quad q \leq g \leq Q$, $x \in [a,b]$.*
Alors on a

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right) \leq \frac{(M-m)(Q-q)}{4}.$$

Dons le théorème suivant, on propose une généralisation de l'inégalité de *Gruss*.

Théorème 1.4.6 *Soient f et g deux fonctions continues définies de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ telles que $m \leq f \leq M, \quad q \leq g \leq Q$, $x \in [a,b]$ et $\alpha > 0$.*
Alors on a

$$\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} J_a^{\alpha} fg(t) - (J_a^{\alpha} f(t))(J_a^{\alpha} g(t)) \leq \left[\frac{(t-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]^2 \frac{(M-m)(Q-q)}{4}, t \in [a,b].$$

Remarque 1.4.3 *Si on pose $\alpha = 1$ et $t = b$ on obtient l'inégalité classique de Gruss.*

1.5 Dérivées Fractionnaires

1.5.1 Opérateur de Dérivée $n^{ème}$

L'opérateur de la dérivée d'ordre n ; $n \in \mathbb{N}^*$, pour $f \in C^n([a,b])$, noté D^n, est défini par :

$$D^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t),$$

où D^n, vérifie les proprietés suivantes :

$$\begin{aligned} D^n J^n f &= f, \\ J^n D^n f &\neq f; \qquad f \in C^n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Plus précisément,

$$J^n D^n f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a) \frac{(t-a)^k}{k!}, \quad t > a. \tag{1.5.1}$$

Preuve : On vas démontrer (1.5.1) en utilisant le développement limités de f au point a :

$$f(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(t-a) + f^{(2)}(0)\frac{(t-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau,$$

d'où :

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)\frac{(t-a)^k}{k!}, \quad t > a.$$

1.5.2 Dérivée au Sens de Riemann-Liouville

Définition 1.5.1

Soient $0 < \alpha < 1$ *et* f *une fonction continue* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

On définit la dérivée d'ordre α *au sens de Riemann-Liouville de* f *par :*

$$D_a^\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau$$

Dons le cas général, on donne la définition suivante :

Définition 1.5.2

Soient $0 \leq n-1 < \alpha < n; n = [\alpha] + 1$ *et* f *une fonction continue* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

On définit la dérivée d'ordre α *au sens de Riemann-Liouville de* f *par :*

$$\begin{aligned} D_a^\alpha f(x) \quad &: \; = \frac{d^n}{dx^n} J^{n-\alpha} f(x) \\ &: \; = D_a^n J_a^{n-\alpha} f(x). \end{aligned}$$

Remarque 1.5.1

On peut alors dire que la dérivée au sens de Riemann-Liouville est la dérivée classique d'ordre n *de l'integrale de Riemann-Liouville d'ordre* $(n-\alpha)$, *avec* $0 < n-1 < \alpha < n$.

Calcul de $D^\alpha x^\beta$ Soient $0 < n-1 < \alpha < n$ et $\beta \in \mathbb{R}$ donc on a :

$$D^\alpha x^\beta = D^n J^{n-\alpha} x^\beta,$$

et utilisant (1.3.1) on obtient :

$$D^n J^{n-\alpha} x^\beta = D^n \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} x^{\beta+n-\alpha}.$$

D'où

$$D^n J^{n-\alpha} x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} D^n x^{\beta+n-\alpha}. \tag{1.5.2}$$

On calcule $D^n x^{\beta+n-\alpha}$ par récurrence :

$$\begin{aligned}
Dx^{\beta+n-\alpha} &= (\beta+n-\alpha)x^{(\beta+n-\alpha)-1} \\
D^2 x^{\beta+n-\alpha} &= (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)x^{(\beta+n-\alpha)-2} \\
&\vdots \\
D^n x^{\beta+n-\alpha} &= (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)(\beta+n-\alpha-2)\cdots\cdots(\beta+n-\alpha-(n-1))x^{(\beta+n-\alpha)-n} \\
&= \frac{(n-\alpha+\beta)!}{(\beta-\alpha)!} x^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

On remplace ce dernier résultat par sa valeur dans (1.5.2) :

$$\begin{aligned}
D^n J^{n-\alpha} x^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} D^n x^{\beta+n-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

Donc

$$D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}. \tag{1.5.3}$$

Remarque 1.5.2

La dérivée au sens de Riemann-Liouville de fonctions constantes n'est pas nulle.

Par exemple si on pose $\beta = 0$, alors

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(1) &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Propriétés

Soient la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et α, β deux réels positifs, on a :

1. $D_a^{\alpha} J_a^{\alpha} f(x) = f(x); \quad \alpha > 0.$
2. $J_a^{\alpha} D_a^{\alpha} f(x) \neq f(x); \quad \alpha > 0.$
3. $D_a^{\alpha} D_a^{\beta} f(x) \neq D_a^{\beta} D_a^{\alpha} f(x); \quad \alpha > 0, \beta > 0.$
4. $D_a^{\alpha+\beta} f(x) \neq D_a^{\alpha} D_a^{\beta} f(x); \quad \alpha > 0, \beta > 0.$
5. $D_a^{n} D_a^{\alpha} f(x) = D_a^{n+\alpha} f(x); \alpha > 0; n \in \mathbb{N}.$

Preuve

1. On demontre la première propriété :

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha} J_a^{\alpha} f(x) &= D_a^{n} J_a^{n-\alpha} J_a^{a} f(x) \\ &= D_a^{n} J_a^{n-\alpha+\alpha} f(x) \\ &= D_a^{n} J_a^{n} f(x) \\ &= f(x). \end{aligned} \tag{1.5.4}$$

2. Et pour la troisième, on peut citer comme exemple la fonction suivante :

Soient $f(x)=\sqrt{x}$ et $\alpha=1/2$, $\beta=3/2$ donc on a :

$$\begin{aligned}
D^{1/2}D^{3/2}x^{1/2} &= D^{1/2}\frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2-3/2)}x^{1/2-3/2}\\
&= D^{1/2}\frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(0)}x^{1/2-3/2}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
D^{3/2}D^{1/2}x^{1/2} &= D^{3/2}\frac{\Gamma(1+1/2)}{\Gamma(1+1/2-1/2)}x^{1/2-1/2}\\
&= D^{3/2}\Gamma(3/2)\\
&= \Gamma(3/2)D^{3/2}(1)\\
&= \Gamma(3/2)\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(0-3/2+1)}x^{-3/2}\\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

1.5.3 Dérivée au Sens de Caputo

Nous avons vu dans la partie précedente que la dérivé fractionnaire au sens de $Riemann-Liouville$ d'ordre $\alpha\in]n-1,n[;n\in\mathbb{N}^*$ s'obtient par une application de $J^{n-\alpha}$ suivie d'une dérivation classique d'ordre n.

La dérivée au sens de $Caputo$ est le résultat de la permutation de ces deux opérateurs.

Définition 1.5.3

La dérivée fractionaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha>0$ d'une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe $C^n(]a,b[)$, est donnée par :

$$
\begin{aligned}
{}_*D_a^\alpha f(x) \ :\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^n(t)dt; a < t < b \\
:\ &= J_a^{n-\alpha} D^n f(x),
\end{aligned}
\tag{1.5.5}
$$

avec

$$n = [\alpha] + 1.$$

Calcul de ${}_*D^\alpha x^\beta, x > 0$. Soient $0 < n-1 < \alpha < n$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Donc on a :

$${}_*D^\alpha x^\beta = J^{n-\alpha} D^n x^\beta.$$

En utilisant (1.5.3), on obtient :

$$
\begin{aligned}
{}_*D^\alpha x^\beta &= J^{n-\alpha} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} x^{\beta-n} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} J^{n-\alpha} x^{\beta-n}.
\end{aligned}
$$

Et d'aprés (1.3.1), on a

$${}_*D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}. \tag{1.5.6}$$

Remarque 1.5.3

Les deux formules (1.5.3) *et* (1.5.6) *sont identiques.*

Mais elles n'ont pas toujours les même résultats, car si on prend $\beta \in \mathbb{N}^*$ *inférieure à* n*, on trouve*

$$_*D^\alpha x^\beta = 0,$$

alors q'elle n'est pas nulle au sens de $Riemann - Liouville$.

Propriétés

Proposition 1.5.1

Soient $\alpha \in]n-1, n[, n \in \mathbb{N}^*$*, et* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *telles que* $f \in C^n\left(]a,b[\right)$*, on a alors :*

$$_*D_a^\alpha J_a^\alpha f(x) = f(x).$$

Preuve

Pour démontrer cette relation, on utilise la relation (1.5.8) citée dans le paragraphe **1.5.4** et on pose $J_a^\alpha f(x) = k(x)$. On obtient :

$$\begin{aligned}
_*D_a^\alpha J_a^\alpha f(x) &= {}_*D_a^n k(x) \\
&= D_a^\alpha \left[k(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} k^{(i)}(x)|_{x=a} \right] \\
&= D_a^\alpha \left[J_a^\alpha f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} D^i \left[J_a^\alpha f(x)\right]|_{x=a} \right] \\
&= D_a^\alpha J_a^\alpha f(x) - D_a^\alpha \left[\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} D^i \left[J_a^\alpha f(x)\right]|_{x=a} \right] \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Proposition 1.5.2

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue,* α,$\beta \in]0, 1[$ *tels que* $\alpha + \beta \leq 1$.
On a alors :

$$_*D_*^{\alpha} D^{\beta} f(x) =_* D_*^{\alpha} D^{\beta} f(x) =_* D^{\alpha+\beta} f(x).$$

Preuve D'après la définition (1.5.5), on a :

$$\begin{aligned} _*D_*^{\alpha} D^{\beta} f(x) &= J^{1-\alpha} D^1 J^{1-\beta} D^1 f(x) \\ &= J^{1-\alpha-\beta} J^{\beta} D^1 J^{1-\beta} D^1 f(x), \end{aligned}$$

Mais on remarque que : $J^{\beta} D^1 :=_* D^{1-\beta}$, donc le résultat sera

$$\begin{aligned} _*D_*^{\alpha} D^{\beta} f(x) &= J^{1-\alpha-\beta} D^{1-\beta} J^{1-\beta} D^1 f(x) \\ &= J^{1-(\alpha+\beta)} D^1 f(x) \\ &= {}_*D^{\alpha+\beta} f(x). \end{aligned}$$

Proposition 1.5.3

Soient $\alpha \in]n-1, n[, n \in \mathbb{N}^*$, *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *tels que* $f \in C^n\left(]a, b[\right)$.
Alors on a :

$$_*D_a^{\alpha} f(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i (x-a)^i, C_i \in \mathbb{R}.$$

Preuve

A partir de la relation (1.5.5), on a

$$_{*}D_a^{\alpha} f(x) = J^{n-\alpha} D^n f(x).$$

Et donc

$$J^{n-\alpha} D^n f(x) = 0. \tag{1.5.7}$$

On applique $D^{n-\alpha}$ sur les deux membres de (1.5.7), on obtient :

$$\begin{aligned} D^{n-\alpha} J^{n-\alpha}(D^n f(x)) &= D^{n-\alpha}(0) \\ D^n f(x) &= 0. \end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i (x-a)^i, C_i \in \mathbb{R}.$$

1.5.4 Lien Entre Caputo et Riemann-Liouville

Soient $\alpha \in]n-1, n[, n \in \mathbb{N}^*$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tels que $f \in C^n\left(]a,b[\right)$. On a :

$$_{*}D_a^{\alpha} f(x) = D_a^{\alpha} \left[f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(x) \right]. \tag{1.5.8}$$

Démonstration

Le développement de f au voisinage de a d'ordre n est donné par :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} D^n(t)dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + J_a^n D_a^n f(x).
\end{aligned}
$$

Par l'application de $J^{n-\alpha}$ aux deux membres de cette identité, on obtient donc :

$$
J^{n-\alpha} f(x) = J_a^{2n-\alpha} D_a^n f(x) + J^{n-\alpha} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right),
$$

puis, on applique une dérivation classique d'ordre n :

$$
\begin{aligned}
D^n J^{n-\alpha} f(x) &= D^n J^n J_a^{n-\alpha} D_a^n f(x) + D^n J^{n-\alpha} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right) \\
J_a^{n-\alpha} D_a^n f(x) &= D^n J^{n-\alpha} \left[f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right] \\
{}_* D_a^\alpha f(x) &= D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right].
\end{aligned}
$$

Chapitre 2

Quelque Théorèmes de Point Fixe

2.1 Introduction

Les théorèmes de point fixe sont des outils très utiles en mathématique et particulièrement dans la résolution des équations différentielles.
En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe, ainsi on assure l'existence de la solution d'un problème donné.

2.2 Définitions

Définition 2.2.1 *(Norme)*

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle norme sur l'espace E toute fonction notée $\|,\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \qquad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$.

Définition 2.2.2 *(Espace Vectoriel Normé)*

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|x\|$.

Définition 2.2.3 *(Suite de Cauchy)*

Soit $(x_n)_n$ une suit d'éléments d'un espace normé $(E, \|.\|)$. On dit que $(x_n)_n$ est de Cauchy si on a la relation suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon\ , \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Définition 2.2.4 *(Espace Complet)*

Un espace véctoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy $(x_n)_n$ d'éléments de E est une suite convergente dans E.

Définition 2.2.5 *(Espace de Banach)*

On appelle espace de Banach $(E, \|.\|)$ tout espace véctoriel normé complet.

Définition 2.2.6 *(Application Contractante)*

Soient E et *F deux espaces de Banach, l'application $f : E \to F$ est dite contractante si :*

$$\exists k, 0 < k < 1, \forall x, y \in X \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E .$$

Définition 2.2.7

Soient E une partie de $\mathbb{R}$, et $f : E \to \mathbb{R}$.

On dit que f est $k-$lipschitzienne si :

$$\exists k > 0, \forall (x,y) \in E^2, |f(x) - f(y)| \leq k\, |x - y|\,.$$

f est localement lipschitzienne si : $\forall x_0 \in E, \exists V(x_0)$, tel que f est $k-$lipschitzienne sur $V(x_0)$.

Définition 2.2.8

Soit $f : E \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction continue.On dit que f est $k-$lipschitzienne par rapport à la deuxiéme variable si

$$\exists k > 0, \forall (t,x),(t,y) \in E \times \mathbb{R}^d, \|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k\, \|x - y\|\,.$$

Définition 2.2.9

Pour tout élément x de E l'ensemble $A(x) = \{f(x), f \in A\}$ est équicontinue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V_{(x)}, \forall f \in A, \forall y \in V_{(x)}, \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Définition 2.2.10

On dit que G un ensemble uniformement borné s'il existe une constante $M > 0$ tel que

$$\|g\|_\infty \leq M, \forall g \in G.$$

Définition 2.2.11

Soient E et F deux espaces de Banach. L'opérateur $T : E \to F$ est complètement continu s'il transforme tout compact de E en une partie relativement compacte dans F.

Théorème 2.2.1 *(Ascoli-Arzila)*

Soient E et F deux espaces de Banach. Si E est compact, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

a. *L'ensemble A est relativement compacte dans $C(E,F)$.*

b. $\begin{cases} \text{L'ensemble } A \text{ est équicontinue en tout point de } E. \\ A(x) := \{f(x), f \in A\} \text{ est borné.} \end{cases}$

2.3 Opérateurs

Définition 2.3.1 *(Opérateur Continu)*

Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur U défini sur un sous ensemble $A \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de A, si on a la proprieté suivante :
Pour toute suite $(x_n)_n$ de A converge vers x_0 la suite $U(x_n)$ converge vers $U(x_0)$ c'est à dire :

$$\lim_{n\to\infty} U(x_n) = U(\lim_{n\to\infty} x_n) = U(x_0).$$

Définition 2.3.2

Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur linéaire U défini sur un sous ensemble $A \subset E$ dans F, est dit continu par tout sur A s'il est continu en tout point x_0 de A.

Définition 2.3.3 *(Opérateur Borné)*

Un opérateur linéaire U défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$ telle que :

$$\|U(x)\|_F \leq C\|x\|_E. \tag{2.3.1}$$

La plus petite des constantes C virifient la relation (2.3.1) est appelée norme de U notée $\|U\|$ et donnée par :

$$\|U\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|U(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|U(x)\|_F \, .$$

Définition 2.3.4 *(Opérateur Compact)*

Soient Eet F deux espace de Banach. Une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est dite compacte si l'image $T(\bar{B}_E)$ par l'application T de la boule unité fermée $\bar{B}_E$ de l'espace E est relativement compacte (en norme) dans F. On note $C(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F.

2.4 Théorèmes de Points Fixes

Dans cette section nous allons présenter quelques théorèmes de points fixe.
On commence par la définition d'un point fixe.

Définition 2.4.1 *Soit f une application d'un ensemble E dans lui même, on appelle point fixe de f tout point $x \in E$ tel que*

$$f(x) = x.$$

2.4.1 Théorème de Point Fixe de Banach

Théorème 2.4.1 *Soient E un espace de Banach et $f : X \subset E \to X$ (X est un fermé de E) une application contractante, alors f admet un point fixe unique :*

$$\exists! x_0 \in X \qquad f(x_0) = x_0.$$

2.4.2 Théorème de Point Fixe de Schaefer

Théorème 2.4.2

Soient E un espace de *Banach* et $\psi : E \to E$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble

$$\chi = \{u \in E : u = \lambda\psi u, 0 < \lambda < 1\}$$

est borné, alors ψ possède au moins un point fixe dans E.

Chapitre 3

Equations différentielles fractionnaires

3.1 Introduction

Les équations différentielles fractionnaires sont une généralisation des équations différentielles ordinaires. Elles peuvent décrire de nombreux phénomènes dans divers domaines de la science et de l'ingénierie tels que le contrôl, électrochimie,...ect. Il a été prouvé que dans des nombreux cas, ces modèles fournissent des résultats plus appropriés que les modèles analogues avec dérivées entières. En conséquence, l'étude des équations déffirentielles fractionnaires attire beaucoup d'importance et d'attention.

3.2 Problème 01

Cette partie du chapitre est consacré à l'étude de l'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites (avec des conditions intégrales) suivant :

$$\begin{cases} {}_*D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t), y'(t)), t \in J = [0,T], 1 < \alpha < 2, \\ y(0) - y'(0) = \int_0^T g(s, y(s)), \\ y(T) - y'(T) = \int_0^T h(s, y(s)), \end{cases} \tag{3.2.1}$$

où ${}_*D^{\alpha}$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type *Caputo*, g et $h : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données vérifiant certaines hypothèses qui seront précisées plus tard et $f \in C(J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Nous consacrons le premier paragraphe à l'existence et l'unicité du problème (3.2.1) qui est basé sur le théorème du point fixe de *Banach*, et le deuxième pour le théorème de point fixe de *Schaefer*.

Pour trouver la solution intégrale, on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 3.2.1 *Pour tout α positive, l'équation différentielle fractionnaire suivante :*

$$_{*}D^{\alpha}y\left(t\right)=0$$

admet comme solution la fonction $y\left(t\right)$:

$$y(t)=C_0+C_1t+C_2t^2+\cdots+C_{m-1}t^{m-1}, m=[\alpha]+1, C_i\in\mathbb{R}, i=0,1,..,m-1, m\in\mathbb{N}^*.$$

Lemme 3.2.2 *Soit $\alpha>0$. Alors*

$$J_{*}^{\alpha}D^{\alpha}y\left(t\right)=y(t)+C_0+C_1t+C_2t^2+\cdots+C_{m-1}t^{m-1}, m=[\alpha]+1, C_i\in\mathbb{R}0,1,..,m-1, m\in\mathbb{N}^*.$$

Preuve. D'aprés la définition du $_{*}D^{\alpha}$, on a

$$_{*}D^{\alpha}y\left(t\right)=J^{m-\alpha}D^{m}y(t).$$

Donc

$$\begin{aligned} J_{*}^{\alpha}D^{\alpha}y\left(t\right) &= J^{\alpha}J^{m-\alpha}D^{m}y(t) \\ &= J^{m}D^{m}y(t) \\ &= y(t)-\sum_{i=0}^{m-1}C_it^i, \text{où} \quad C_i=\frac{y^{(i)}\left(0\right)}{i!}. \end{aligned}$$

$\square$

Maintenant, on introduit l'espace :

$$\bar{C}\left(J,\mathbb{R}\right)=\left\{y\in C\left(J,\mathbb{R}\right),y'\in C\left(J,\mathbb{R}\right)\right\},$$

muni de la norme :

$$\|y\|=\max\left(\|y\|_{\infty},\|y'\|_{\infty}\right);\|y\|_{\infty}=\sup_{t\in J}\left|y\left(t\right)\right|,\|y'\|_{\infty}=\sup_{t\in J}\left|y'\left(t\right)\right|.$$

Il est clair que $\left(\bar{C}\left(J,\mathbb{R}\right),\|,\|\right)$ est un espace de *Banach.*

Lemme 3.2.3 *La solution intégrale du problème* (3.2.1) *est donnée par :*

$$\begin{aligned} y\left(t\right) &= J^{\alpha}f\left(t,y\left(t\right),y'\left(t\right)\right)-\frac{1+t}{T}J^{\alpha}f\left(t,y\left(t\right),y'\left(t\right)\right)|_{t=T} \\ &+\frac{1+t}{T}J^{\alpha-1}f\left(t,y\left(t\right),y'\left(t\right)\right)|_{t=T}+\frac{1+t}{T}\int_0^T h\left(s,y\left(s\right)\right)ds \\ &+\frac{T-1-t}{T}\int_0^T g\left(s,y\left(s\right)\right)ds. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Preuve.

□

1. On suppose que (3.2.2) est vérifié.

   Alors, on a :

$$\begin{aligned} {}_*D^{\alpha}y\left(t\right) &= {}_*D^{\alpha}[J^{\alpha}f\left(t,y\left(t\right),y'\left(t\right)\right)-\frac{1+t}{T}J^{\alpha}f\left(t,y\left(t\right),y'\left(t\right)\right)|_{t=T} \\ &+\frac{1+t}{T}J^{\alpha-1}f\left(t,y\left(t\right),y'\left(t\right)\right)|_{t=T}+\frac{1+t}{T}\int_0^T h\left(s,y\left(s\right)\right)ds \\ &+\frac{T-1-t}{T}\int_0^T g\left(s,y\left(s\right)\right)ds] \\ &= {}_*D^{\alpha}J^{\alpha}f\left(t,y\left(t\right),y'\left(t\right)\right) \\ &= J^{\alpha}f\left(t,y\left(t\right),y'\left(t\right)\right). \end{aligned}$$

2. D'autre part, l'application de lemme **3.1.2,** sur (3.2.1) nous donne :

$$\begin{aligned} J_*^{\alpha}D^{\alpha}y\left(t\right) &= y\left(t\right)+C_0+C_1t \\ &= J^{\alpha}f\left(t,y\left(t\right),y'\left(t\right)\right). \end{aligned}$$

   D'où

$$y\left(t\right)=J^{\alpha}f\left(t,y\left(t\right),y'\left(t\right)\right)-C_0-C_1t.$$

Donc on a :

$$y'(t) = J^{\alpha-1} f(t, y(t), y'(t)) - C_1.$$

On utilise les conditions initiales de problème (3.2.1), pour chercher C_0 et C_1.

Alors

$$\begin{aligned} y(0) &= J^{\alpha} f(t, y(t), y'(t))|_{t=0} - C_0 - C_1 0 \\ &= -C_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(0) &= J^{\alpha-1} f(t, y(t), y'(t))|_{t=0} - C_1 \\ &= -C_1, \end{aligned}$$

et

$$y(T) = J^{\alpha} f(t, y(t), y'(t))|_{t=T} - C_0 - C_1 T,$$

$$y'(T) = J^{\alpha-1} f(t, y(t), y'(t))|_{t=T} - C_1.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} y(0) - y'(0) &= -C_0 + C_1 \\ &= \int_0^T g(s, y(s))\, ds, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y(T) - y'(T) &= J^{\alpha} f(t, y(t), y'(t))|_{t=T} - J^{\alpha-1} f(t, y(t), y'(t))|_{t=T} - C_0 + (1-T) C_1 \\ &= \int_0^T h(s, y(s))\, ds. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^T g(s,y(s))\,ds &= -C_0+C_1 && (3.2.3)\\
\int_0^T h(s,y(s))\,ds &= J^\alpha f(t,y(t),y'(t))\,|_{t=T}-J^{\alpha-1}f(t,y(t),y'(t))\,|_{t=T} && (3.2.4)\\
&\quad -C_0+(1-T)\,C_1.
\end{aligned}$$

Par $(3.2.3)-(3.2.4)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{T}J^\alpha f(t,y(t),y'(t))\,|_{t=T}-\frac{1}{T}J^{\alpha-1}f(t,y(t),y'(t))\,|_{t=T}+\frac{1}{T}\int_0^T g(s,y(s))\,ds\\
&\quad -\frac{1}{T}\int_0^T h(s,y(s))\,ds.
\end{aligned}$$

On remplace C_1 dans l'équation $(3.2.3)$, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{T}J^\alpha f(t,y(t),y'(t))\,|_{t=T}-\frac{1}{T}J^{\alpha-1}f(t,y(t),y'(t))\,|_{t=T}+\frac{1}{T}\int_0^T g(s,y(s))\,ds\\
&\quad -\frac{1}{T}\int_0^T h(s,y(s))\,ds-\int_0^T g(s,y(s))\,ds\\
&= \frac{1}{T}J^\alpha f(t,y(t),y'(t))\,|_{t=T}-\frac{1}{T}J^{\alpha-1}f(t,y(t),y'(t))\,|_{t=T}+\frac{1-T}{T}\int_0^T g(s,y(s))\,ds\\
&\quad -\frac{1}{T}\int_0^T h(s,y(s))\,ds.
\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned}
y(t) &= J^\alpha f(t,y(t),y'(t))-\frac{1+t}{T}J^\alpha f(t,y(t),y'(t))\,|_{t=T}+\frac{1+t}{T}J^{\alpha-1}f(t,y(t),y'(t))\,|_{t=T}\\
&\quad +\frac{1+t}{T}\int_0^T h(s,y(s))\,ds+\frac{T-1-t}{T}\int_0^T g(s,y(s))\,ds.
\end{aligned}$$

3.2.1 Premier Résultat

Théorème 3.2.1 *Supposons que :*

$(H1)$ $\quad |f(t,y_1,y_2) - f(t,y_3,y_4)| \leq L\max(|y_1-y_3|, |y_2-y_4|)\,; y_i \in \mathbb{R}, t \in [0,T]\,,\,, i = 1\ldots4,$

$(H2)$ $\quad \int_0^T g(s,y(s))\,ds \leq k_1, k_1 \in \mathbb{R},$

$(H3)$ $\quad \int_0^T h(s,y(s))\,ds \leq k_2, k_2 \in \mathbb{R}$

et

$$A = \frac{2T^{\alpha} + (1+\alpha)T^{\alpha-1} + \alpha T^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Si $AL < 1$, le problème (3.2.1) *admet un unique point fixe sur J.*

Preuve. □

Soit l'pérateur $\phi : \bar{C}(J\times\mathbb{R}) \to \bar{C}(J\times\mathbb{R})$ défini par :

$$\begin{aligned}\phi y(t) &= J^{\alpha}f(t,y(t),y'(t)) - \frac{1+t}{T}J^{\alpha}f(t,y(t),y'(t))\,|_{t=T} + \frac{1+t}{T}J^{\alpha-1}f(t,y(t),y'(t))\,|_{t=T} \\ &\quad + \frac{1+t}{T}\int_0^T h(s,y(s))\,ds + \frac{T-1-t}{T}\int_0^T g(s,y(s))\,ds.\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}(\phi y)'(t) &= J^{\alpha-1}f(t,y(t),y'(t)) - \frac{1}{T}J^{\alpha}f(t,y(t),y'(t))\,|_{t=T} \\ &\quad + \frac{1}{T}J^{\alpha-1}f(t,y(t),y'(t))\,|_{t=T} + \frac{1}{T}\int_0^T h(s,y(s))\,ds \\ &\quad - \frac{1}{T}\int_0^T g(s,y(s))\,ds.\end{aligned}$$

Pour démontrer ce théorème on doit démontrer que l'opérateur ϕ est contractant.

Soient $x, y \in \bar{C}(J\times\mathbb{R})$. Donc pour tout $t \in J$ on a :

$$
\begin{aligned}
|\phi y(t)-\phi x(t)| &= |J^{\alpha}f(t,y(t),y'(t))-\frac{1+t}{T}J^{\alpha}f(t,y(t),y'(t))|_{t=T} \\
&+\frac{1+t}{T}J^{\alpha-1}f(t,y(t),y'(t))|_{t=T}+\frac{1+t}{T}\int_0^T h(s,y(s))\,ds \\
&+\frac{T-1-t}{T}\int_0^T g(s,y(s))\,ds-J^{\alpha}f(t,x(t),x'(t)) \\
&+\frac{1+t}{T}J^{\alpha}f(t,x(t),x'(t))|_{t=T}-\frac{1+t}{T}J^{\alpha-1}f(t,x(t),x'(t))|_{t=T} \\
&-\frac{1+t}{T}\int_0^T h(s,x(s))\,ds-\frac{T-1-t}{T}\int_0^T g(s,x(s))\,ds|.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
|\phi y(t)-\phi x(t)| &\leq |J^{\alpha}f(t,y(t),y'(t))-J^{\alpha}f(t,x(t),x'(t))| \\
&+\left|\frac{1+t}{T}\right||J^{\alpha}f(t,y(t),y'(t))|_{t=T}-J^{\alpha}f(t,x(t),x'(t))|_{t=T}| \\
&+\left|\frac{1+t}{T}\right|\left|J^{\alpha-1}f(t,y(t),y'(t))|_{t=T}-J^{\alpha-1}f(t,x(t),x'(t))|_{t=T}\right|
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
|\phi y(t)-\phi x(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}L\max(|y-x|,|y'-x'|) \\
&+\frac{1+t}{\Gamma(\alpha)T}\int_0^T (T-\tau)^{\alpha-1}L\max(|y-x|,|y'-x'|) \\
&+\frac{1+t}{\Gamma(\alpha-1)T}\int_0^T (T-\tau)^{\alpha-2}L\max(|y-x|,|y'-x'|) \\
&\leq \frac{L\max(|y-x|,|y'-x'|)}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{t^{\alpha}}{\alpha}+\frac{T^{\alpha}(1+t)}{T}+\frac{T^{\alpha-1}(1+t)}{T}\right].
\end{aligned}
$$

Par passage au sup sur J, on obtient

$$
\begin{aligned}
\|\phi y-\phi x\| &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\|y-x\|\left[\frac{T^{\alpha}}{\alpha}+\frac{T^{\alpha}(1+T)}{T}+\frac{T^{\alpha-1}(1+T)}{T}\right] \\
&\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha+1)}\|y-x\|\left[2T^{\alpha}+(1+\alpha)T^{\alpha-1}+\alpha T^{\alpha-2}\right].
\end{aligned}
$$

et

$$\left\|(\phi y)' - (\phi x)'\right\| \leq \frac{L}{\Gamma(\alpha+1)} \|y-x\| \left[(\alpha+1)T^{\alpha-1} + \alpha T^{\alpha-2}\right].$$

D'où, l'opérateur ϕ est contractant, et d'aprés le théorème de point fixe de Banach, ϕ admet un seul point fixe qui est la solution du problème (3.2.1) sur J.

3.2.2 Deuxiéme Résultat

Théorème 3.2.2

Supposons que

$(H1)$ *La fonction $f : J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.*

$(H2)$ *Il existe une constante $N > 0$ telle que :*

$$|f(t, y_1, y_2)| \leq N; y_1, y_2 \in \mathbb{R}, t \in J.$$

Alors, le problème (3.2.1) *admet au moins un point fixe sur J.*

Preuve. $\square$

On utilise le théorème de point fixe de *Schaefer* pour montrer que ϕ admet un point fixe sur $\bar{C}(J, \mathbb{R})$.

Alors, on pose :

$r \geq \max\left(\frac{\left(2T^{\alpha}+T^{\alpha-1}\right)N}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\left(T^{\alpha-2}+T^{\alpha-1}\right)N}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1+T)k_1+k_2}{T}, \frac{\left(T^{\alpha-2}+T^{\alpha-1}\right)N}{\Gamma(\alpha)} + \frac{T^{\alpha-1}N}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{k_1+k_2}{T}\right),$

et on considère

$$\bar{C}_r = \left\{y \in \bar{C}(J, \mathbb{R}), \|y\| \leq r\right\}.$$

Il est clair que $\bar{C}_r$ est un sous espace fermé convenxe de $\bar{C}(J, \mathbb{R})$.

On va montrer que ϕ est une application complètement continu.

Etape 1 (ϕ est continue) :

Soit $(y_n)_{n\in N}$ une suite convergente telle que $\underset{n\to\infty}{y_n} \to y$ dans $\bar{C}(J,\mathbb{R})$.

Alors, pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned} |\phi y_n(t) - \phi y(t)| &= |J^\alpha f(t, y_n(t), y_n'(t)) - \frac{1+t}{T} J^\alpha f(t, y_n(t), y_n'(t))|_{t=T} \\ &+ \frac{1+t}{T} J^{\alpha-1} f(t, y_n(t), y_n'(t))|_{t=T} + \frac{1+t}{T}\int_0^T h(s, y_n(s))\, ds \\ &+ \frac{T-1-t}{T}\int_0^T g(s, y_n(s))\, ds - J^\alpha f(t, y(t), y'(t)) \\ &+ \frac{1+t}{T} J^\alpha f(t, y(t), y'(t))|_{t=T} - \frac{1+t}{T} J^{\alpha-1} f(t, y(t), y'(t))|_{t=T} \\ &- \frac{1+t}{T}\int_0^T h(s, y(s))\, ds - \frac{T-1-t}{T}\int_0^T g(s, y(s))\, ds|. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |\phi y_n(t) - \phi y(t)| &\le |J^\alpha f(t, y_n(t), y_n'(t)) - J^\alpha f(t, y(t), y'(t))| \\ &+ \left|\frac{1+t}{T}\right| |J^\alpha f(t, y_n(t), y_n'(t))|_{t=T} - J^\alpha f(t, y(t), y'(t))|_{t=T}| \\ &\left|\frac{1+t}{T}\right| |J^{\alpha-1} f(t, y_n(t), y_n'(t))|_{t=T} - J^{\alpha-1} f(t, y(t), y'(t))|_{t=T}|. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} |\phi y_n(t) - \phi y(t)| &\le \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} |f(t, y_n(t), y_n'(t)) - f(t, y(t), y'(t))| \\ &+ \frac{(1+t)\, T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} |f(T, y_n(T), y_n'(T)) - f(T, y(T), y'(T))| \\ &+ \frac{(1+t)\, T^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)} |f(T, y_n(T), y_n'(T)) - f(T, y(T), y'(T))|. \end{aligned}$$

– On a aussi :

$$\begin{aligned}\left|(\phi y_n)'(t)-(\phi y)'(t)\right| &\leq \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}|f(t,y_n(t),y_n'(t))-f(t,y(t),y'(t))|\\ &+\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}|f(T,y_n(T),y_n'(T))-f(T,y(T),y'(T))|\\ &+\frac{T^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}|f(T,y_n(T),y_n'(T))-f(T,y(T),y'(T))|.\end{aligned}$$

Donc comme f est continue, on obtient :

$$|\phi y_n(t)-\phi y(t)| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Etape 2 (ϕ est borné) :

Soit $y\in\bar{C}_r$, alors pour tout $t\in J$ on a :

$$\begin{aligned}|\phi y(t)| &= |J^\alpha f(t,y(t),y'(t))-\frac{1+t}{T}J^\alpha f(t,y(t),y'(t))|_{t=T}\\ &+\frac{1+t}{T}J^{\alpha-1}f(t,y(t),y'(t))|_{t=T}+\frac{1+t}{T}\int_0^T h(s,y(s))\,ds\\ &-\frac{1+t-T}{T}\int_0^T g(s,y(s))\,ds|\\ &\leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{t\in J}|f(t,y(t),y'(t))|+\frac{(1+T)\,T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}|f(T,y(T),y'(T))|\\ &\frac{(1+T)\,T^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}|f(T,y(T),y'(T))|+\frac{(1+T)\,k_1+k_2}{T}.\end{aligned}$$

Et comme

$$|f(T,y(T),y'(T))|\leq\sup_{t\in J}|f(t,y(t),y'(t))|=N, \tag{3.2.5}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\|\phi y\|_\infty &\leq \frac{(2T^\alpha+T^{\alpha-1})}{\Gamma(\alpha+1)}N+\frac{(T^{\alpha-1}+T^{\alpha-2})}{\Gamma(\alpha)}N+\frac{(1+T)\,k_1+k_2}{T}\\ &\leq r.\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

De la même manière, on a :

$$\begin{aligned} \left\|(\phi y)'\right\|_{\infty} &\leq \frac{\left(T^{\alpha-1}+T^{\alpha-2}\right)}{\Gamma(\alpha)}N+\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}N+\frac{k_1+k_2}{T} \\ &\leq r. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Par conséquent,

$$\|\phi y\| \leq r.$$

Etape 3 (ϕ est équicontinue) :

Soient $t_1, t_2 \in [0,T]\,; t_1 < t_2$ et $y \in \bar{C}(J,\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} \left|\phi y(t_2)-\phi y(t_1)\right| &= |J^{\alpha} f\left(t_2, y(t_2), y'(t_2)\right)-\frac{1+t_2}{T} J^{\alpha} f\left(t, y(t), y'(t)\right)|_{t=T} \\ &+\frac{1+t_2}{T} J^{\alpha-1} f\left(t, y(t), y'(t)\right)|_{t=T}+\frac{1+t_2}{T}\int_0^T h\left(s, y(s)\right) ds \\ &-\frac{1+t_2-T}{T}\int_0^T g\left(s, y(s)\right) ds-J^{\alpha} f\left(t_1, x(t_1), x'(t_1)\right) \\ &+\frac{1+t_1}{T} J^{\alpha} f\left(t, x(t), x'(t)\right)|_{t=T}-\frac{1+t_1}{T} J^{\alpha-1} f\left(t, x(t), x'(t)\right)|_{t=T} \\ &-\frac{1+t_1}{T}\int_0^T h\left(s, x(s)\right) ds+\frac{1+t_1-T}{T}\int_0^T g\left(s, x(s)\right) ds|. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \left|\phi y(t_2)-\phi y(t_1)\right| &\leq |J^{\alpha} f\left(t_2, y(t_2), y'(t_2)\right)-J^{\alpha} f\left(t_1, x(t_1), x'(t_1)\right)| \\ &+|J^{\alpha} f\left(T, y(T), y'(T)\right)|\frac{(t_2-t_1)}{T} \\ &+|J^{\alpha-1} f\left(T, y(T), y'(T)\right)|\frac{(t_2-t_1)}{T}+\frac{(k_1+k_2)(t_2-t_1)}{T}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\left|\phi y\left(t_2\right)-\phi y\left(t_1\right)\right| &\leq \frac{\sup_{t\in J}\left|f\left(t,x\left(t\right),x'\left(t\right)\right)\right|}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\int_0^{t_2}\left(t_2-\tau\right)^{\alpha-1}d\tau-\int_0^{t_2}\left(t_2-\tau\right)^{\alpha-1}d\tau\\ &+\frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\left|f\left(T,x\left(T\right),x'\left(T\right)\right)\right|\left(t_2-t_1\right)\\ &+\frac{T^{\alpha-2}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\left|f\left(T,x\left(T\right),x'\left(T\right)\right)\right|\left(t_2-t_1\right)+\frac{\left(k_1+k_2\right)\left(t_2-t_1\right)}{T}.\end{aligned}$$

On utilise $(3.2.5)$, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\phi y\left(t_2\right)-\phi y\left(t_1\right)\right| &\leq \frac{N\left(t_2^{\alpha}-t_1^{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}+\frac{T^{\alpha-1}N\left(t_2-t_1\right)}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\\ &+\frac{T^{\alpha-2}N\left(t_2-t_1\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)}+\frac{\left(k_1+k_2\right)\left(t_2-t_1\right)}{T}.\end{aligned}$$

De la même manière, on a :

$$\left|\left(\phi y\right)'\left(t_2\right)-\left(\phi y\right)'\left(t_1\right)\right|\leq\frac{N\left(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1}\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)}.$$

Quand $t_1\rightarrow t_2$, les second membres de ces derniéres inégalités tendent vers Zéro. Donc, on a l'équicontinuité et la continuité de ϕ, et elle est borné dans $\bar{C}_r$. D'où, d'aprés le théorème d'Ascoli-Arzela ϕ est complètement continu.

Maintenant, on démontre que :

$$\chi=\left\{y\in\bar{C}\left(J,\mathbb{R}\right):y=\lambda\phi\left(y\right),0<\lambda<1\right\}$$

est borné.

Soit $y\in\chi$, alors $y=\lambda\phi\left(y\right)$ pour un certain $0<\lambda<1$. Pour tout $t\in J$, on a :

$$\begin{aligned}y\left(t\right) &= \lambda\phi y\left(t\right)\\ &= \lambda J^{\alpha}f\left(t,y\left(t\right),y'\left(t\right)\right)-\lambda\frac{1+t}{T}J^{\alpha}f\left(t,y\left(t\right),y'\left(t\right)\right)|_{t=T}+\lambda\frac{1+t}{T}J^{\alpha-1}f\left(t,y\left(t\right),y'\left(t\right)\right)|_{t=T}\\ &+\lambda\frac{1+t}{T}\int_0^T h\left(s,y\left(s\right)\right)ds+\lambda\frac{T-1-t}{T}\int_0^T g\left(s,y\left(s\right)\right)ds.\end{aligned}$$

D'où

$$
\begin{aligned}
|y(t)| &= \lambda\,|\phi y(t)| \\
&= \lambda|J^{\alpha} f(t, y(t), y'(t)) - \frac{1+t}{T} J^{\alpha} f(t, y(t), y'(t))\,|_{t=T} \\
&\quad + \frac{1+t}{T} J^{\alpha-1} f(t, y(t), y'(t))\,|_{t=T} + \frac{1+t}{T}\int_0^T h(s, y(s))\,ds \\
&\quad - \frac{1+t-T}{T}\int_0^T g(s, y(s))\,ds|.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$\|y\|_{\infty} \leq \frac{(2T^{\alpha} + T^{\alpha-1})}{\Gamma(\alpha+1)}\lambda N + \frac{(T^{\alpha-1} + T^{\alpha-2})}{\Gamma(\alpha)}\lambda N + \lambda\frac{(1+T)\,k_1 + k_2}{T},$$

et

$$\|y'\|_{\infty} \leq \frac{(T^{\alpha-1} + T^{\alpha-2})}{\Gamma(\alpha)}\lambda N + \frac{T^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\lambda N + \lambda\frac{k_1 + k_2}{T}.$$

Alors

$$\|y\| \leq \infty.$$

D'où, l'ensemble χ est borné. Donc d'après le théorème de point fixe de $Schaefer$, on conclut que ϕ admet au moins un point fixe qui représente une solution du problème (3.2.1).

3.3 Problème 02

Dans cette partie, on s'intéresse au résultat d'existence et d'unicité de solution pour le problème fractionnaire suvant :

$$
\begin{cases}
{}_{*}D^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), t \in J = [0, T], 2 < \alpha < 3, \\
y(0) = y''(0) = 0, \\
y'(s) = k y''(T), 0 < s < T,
\end{cases}
\tag{3.3.1}
$$

où ${}_{*}D^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de $Caputo$.

$f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

L'espace considéré est $C(J, \mathbb{R})$. Il sera muni de la norme $\|y\|_{\infty} = \sup_{t \in J} |y(t)|$.

Lemme 3.3.1

Le problème (3.3.1) admet comme solution intégrale :

$$y\,(t) = J^{\alpha} f(t, y(t)) + t \left[k J^{\alpha-2} f(T, y(T)) - J^{\alpha-1} f(s, y(s)) \right]. \tag{3.3.2}$$

Preuve. $\square$

On utilise les deux lemmes 3.1.1 et 3.1.2, on obtient :

$$\begin{aligned} J_*^{\alpha} D^{\alpha} y\,(t) &= y\,(t) + C_0 + C_1 t + C_2 t^2 \\ &= J^{\alpha} f(t, y(t)). \end{aligned}$$

D'où

$$y\,(t) = J^{\alpha} f(t, y(t)) - C_0 - C_1 t - C_2 t^2.$$

On a aussi

$$y'\,(t) = J^{\alpha-1} f(t, y(t)) - C_1 - 2C_2 t$$

et

$$y''\,(t) = J^{\alpha-2} f(t, y(t)) - 2C_2.$$

On utilise les conditions initiales de problème (3.3.1) pour chercher C_0, C_1 et C_2.

Alors, on va avoir :

$$\begin{aligned} y\,(0) &= 0 \\ &= J^{\alpha} f(t, y(t))|_{t=0} - C_0 - C_1 0 - C_2 0^2. \end{aligned}$$

D'où

$$C_0 = 0.$$

De

$$\begin{aligned} y''\,(t) &= 0 \\ &= J^{\alpha-2} f(t, y(t))|_{t=0} - 2C_2, \end{aligned}$$

on obtient

$$C_2 = 0.$$

On a aussi

$$y'(s) = J^{\alpha-1} f(s, y(s)) - C_1 \tag{3.3.3}$$

et

$$y''(T) = J^{\alpha-2} f(T, y(T)). \tag{3.3.4}$$

Donc de $(3.3.3)$, $(3.3.4)$ et la deuxième condition du problème $(3.3.1)$, on obtient :

$$-C_1 = kJ^{\alpha-2} f(T, y(T)) - J^{\alpha-1} f(s, y(s)).$$

D'où, on obtient comme solution intégrale l'expression :

$$y(t) = J^{\alpha} f(t, y(t)) + t\left[kJ^{\alpha-2} f(T, y(T)) - J^{\alpha-1} f(s, y(s))\right].$$

3.3.1 Troisièmes Résultat

Théorème 3.3.1 *Supposons que :*

$(B1)$ $\quad \exists H \in \mathbb{R}_+; |f(t, y) - f(t, x)| \leq H|y - x|; x, y \in \mathbb{R}, t \in J.$

$(B2)$ $\quad I = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{T^{\alpha}}{\alpha} + T^{\alpha-1} k(\alpha - 1) + Ts^{\alpha-1}\right].$

Si $IH < 1$, le problème $(3.3.1)$ admet une unique solution sur J.

Preuve. $\square$

Soit l'opérateur $\psi : C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R})$ définie par :

$$\psi y(t) = J^{\alpha} f(t, y(t)) + t\left[kJ^{\alpha-2} f(T, y(T)) - J^{\alpha-1} f(s, y(s))\right].$$

Pour démontrer ce théorème on démontre que l'opérateur ψ est une contraction.

Soient $x, y \in C(J, \mathbb{R})$, donc pour tout $t \in J$ on a :

$$\begin{aligned} |\psi y(t) - \psi x(t)| &= |J^{\alpha} f(t, y(t)) + t\left[kJ^{\alpha-2} f(T, y(T)) - J^{\alpha-1} f(s, y(s))\right] \\ &\quad - J^{\alpha} f(t, x(t)) - t\left[kJ^{\alpha-2} f(T, x(T)) - J^{\alpha-1} f(s, x(s))\right]|. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}|\psi y(t)-\psi x(t)| &\leq |J^{\alpha}f(t,y(t))-J^{\alpha}f(t,x(t))| \\ &+|tk||J^{\alpha-2}f(T,y(T))-J^{\alpha-2}f(T,x(T))| \\ &+|t||J^{\alpha-1}f(s,y(s))-J^{\alpha-1}f(s,x(s))|.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}|\psi y(t)-\psi x(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}H|y-x|\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\,d\tau \\ &+\frac{tk}{\Gamma(\alpha-2)}H|y-x|\int_0^T (T-\tau)^{\alpha-3}\,d\tau \\ &+\frac{t}{\Gamma(\alpha-1)}H|y-x|\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-2}\,d\tau \\ &\leq \frac{H}{\Gamma(\alpha)}|y-x|\left[\frac{t^{\alpha}}{\alpha}+tk(\alpha-1)T^{\alpha-2}+ts^{\alpha-1}\right].\end{aligned}$$

Par passage au sup sur J, on obtient :

$$\|\psi y-\psi x\| \leq \frac{H}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{T^{\alpha}}{\alpha}+k(\alpha-1)T^{\alpha-1}+Ts^{\alpha-1}\right].$$

Et grâce à l'hypothese $(B2)$, l'opérateur ψ est contractant, donc d'aprés le théorème de point fixe de *Banach*, ψ admet un seul point fixe.

D'où, l'existence et l'unicité de la solution de problème (3.3.1) sur J.

Exemple 3.3.1 *:*

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}_*D^{\frac{5}{2}}y(t)=\frac{y(t)}{25}e^{-t^2}, t\in J=[0,1] \\ y(0)=y''(0)=0 \\ y'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}y''(1). \end{cases} \tag{3.3.5}$$

Pour tout $t\in J$ et $y\in[0,+\infty[$, on a

$$f(t,y)=\frac{y}{25}e^{-t^2}.$$

Soient $x,y\in[0,+\infty[$ et $t\in J$. Alors, on a :

$$|f(t,y)-f(t,x)| \leq \frac{1}{25}|y-x|.$$

Donc, d'aprés le théorème3.2.1, la condition $(B1)$ est vérifiée avec T=1, s=$\frac{1}{2}$ et k=$\frac{1}{3}$ on a :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{T^{\alpha}}{\alpha}+k(\alpha-1)T^{\alpha-1}+Ts^{\alpha-1}\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\left[\frac{1}{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}-1\right)+\frac{1}{2}^{\frac{5}{2}-1}\right] \\ &\approx \frac{1.09}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}=0.82. \end{aligned}$$

D'où

$$HI=\frac{0.82}{25}=0.03<1.$$

Donc le problème (3.3.5) admet une solution unique sur $[0,1]$.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on s'est intéressés à la théorie de *Caputo* sur les dérivées fractionnaires. On a présenté quelques propriétés permettant d'abordée le chapitre clé de notre mémoire. Puis, par la suite, on a présenté quelques résultats sur l'existence et l'unicité des solutions de certains problèmes fractionnaires au sens de *Caputo*. D'autres résultats sur l'existence d'une solution au moins ont été aussi discutés.

Ces résultats ouvrent certains perspectives pour les lecteurs intéressés. On cite à titre d'exemple :

– Peut-on généraliser ces résultats à un paramètres α quelle quand de $\mathbb{R}_+$?

– Puis, quelle norme sera utilisée dans ce cas général ?

– Peut-on reprendre ces résultats en considèrant l'approche de *Riemann* $-$ *Liouville* ?

Voila quelques chemins à suivre.

Bibliographie

[1] S. Belarbi, Z. Dahmani : On some new fractional integral inequalities. JIPAM (2009), 1443-5756.

[2] Z. Dahmani, M. Abdellaoui : New existence and uniqueness results for an order boundary value problem. Malaya Journal of Matematik 4(1)(2013) 10–19.

[3] Z. Dahmani, L. Tabharit, S. Taf : New generalisations of Gruss inequatiy using Riemann-Liouville fractional integrals, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications 2(3)(2010), 93-99.

[4] R. Gorenflo and F. Mainardi : Fractional calculus : Integral and Differential Equations of W.Walter, Proc. Amer. Math. Soc 129(9) (2001), 2671-2498.

[5] A. Loverro : Fractional calculus history, definitions and applications for the ingineer. Department of Aerospace of Notre Dame (2004).

[6] I.Podlubni : Fractional Differential Equations. Academic Press, San Diego (1999).