UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LAVIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Spécialité : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Thème

Existence de maximum et de minimum de deux opérateurs auto-adjoints

Présenté par

YAHYA BEY Sabrina

MEDJAHED Hafsa

Soutenu le 30 /05/2016

Devant le jury

Dr BOUAGADA	**Président**	**U. MOSTAGANEM.**
Mme S.BELMOUHOUB OULD ALI	**Examinatrice**	**U. MOSTAGANEM.**
Mr Mohand OULD ALI	**Encadreur**	**U. MOSTAGANEM.**

Résumé

On s'intéresse dans ce mémoire à démontrer l'existence du majorant minimal de deux opérateurs auto-adjoint et particulièrement au cas de deux opérateurs positifs.

Dédicaces

Nous dédions ce mémoire :

A nos parents pour leur amour inestimable, leur confiance, leur soutien, leur sacrifices et toutes les valeurs qu'il ont su nous inculquer.

A nos sœurs et nos frères pour leur tendresse, leur complicité et leur présence.
A toute nos familles ainsi nos ami(e)s.

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux,qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce travail. En second lieu, nous saluons notre encadreur Mohand Ould Ali .Nous le remercie de nous avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Nous adressons nos sincères remerciments à tous les professeurs intervenants,citons en particulier :Sidi Mohamed Bahri, Belaidi Benharrat, Abdelhalim Azzouz, Mostefa Nadir. Et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé nos réflexions et ont accepté à nous recontrer et répondre à nos questions durant nos recherches .

Nous remercions nos chers parents, qui ont toujours été la pour nous, "Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n'épargnant ni santé ni efforts. Vous nous avez donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Nous sommes redevable d'une éducation dont nous somme fiers".

Nos vifs remerciments vont également aux membres du jury pour l'intéret qu'ils ont porté a notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin nous remercions tous nos ami(e)s pour leurs sincère amitié et confiance et à qui nous devons nos reconnaissance et nos attachements.

Nos remerciments, nos respect et nos gratitude vont à toute personne qui a contribué de prés ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Table des matières

INTRODUCTION

La théorie des opérateurs positifs intervient énormément dans différents types de problèmes concrets en Théorie des Equations aux Dérivées Partielles, nous citerons en particulier les travaux de :

- **(R.G. Douglas [8])** qui a montré l'existence d'une étroite relation entre les notions de majoration, factorisation et l'inclusion des images.

- (**R. Bellman, R Kalaba [6]**) qui ont donnés le lien entre les opérateurs positifs ; la programation dynamique et la thèorie du contrôle.

La notion d'opérateurs positifs est définie par une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des opérateurs bornés, ce qui nous ramène à l'étude du concept du majorant.

- (**G. Cassier, M. Ould Ali [7]**) qui consiste à caractériser l'ensemble des majorants minimaux de deux opérateurs positifs.

Dans ce travail, on s'interresse à la recherche de l'existence du majorant minimal et du minorant maximal de deux opérateurs auto-adjoints. Pour celà, on commence à répondre à la problématique pour des opérateurs A et B positifs, puis on étend le resultat aux opérateurs auto-adjoints.

Notre manuscrit se compose de trois chapitres :

-Le premier est constitué d'un rappel de quelques notions et compléments mathématiques en relation avec ce travail. On citera en particulier, les éléments de la théorie des espaces de Hilbert qui correspond à ce cadre, notamment, les notions de produit scalaire et de norme.

-Dans le deuxième chapitre, on donne quelques notions sur les opérateurs linéaires.

-Dans le dernier chapitre, on donne l'essentiel de notre travail qui consiste à démontrer l'existence du majorant minimal de deux opérateurs auto-adjoints.

Chapitre 1

Rappel

1.1 Espace de Hilbert, produit scalaire, norme

Définition 1.1.1 *[5] Un espace préhilbertien est la donnée d'un espace vectoriel E sur le corps $\Bbbk$ (des nombres complexes $\mathbb{C}$ ou réels $\mathbb{R}$) et d'une application de $E \times E$ dans $\Bbbk$ notée $\langle .,. \rangle$, appelée produit scalaire, vérifiant les propriétés suivantes :*

$$\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle} \quad \forall x,y \in E \qquad (le \;\; produit \; est \; Hermitien \;) \tag{1.1.1}$$

$$\langle x+y,z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle y,z \rangle \, \forall x,y,z \in E \tag{1.1.2}$$

$$\langle ax,y \rangle = a \cdot \langle x,y \rangle \, \forall x,y \in E \;\; et \;\; \forall \alpha \in \mathbb{C} \tag{1.1.3}$$

$$\langle x,x \rangle \geq 0 \qquad \forall x \in E \tag{1.1.4}$$

$$\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; \forall x \in E \tag{1.1.5}$$

Remarque 1.1.1 *1. Une application qui vérifie les conditions* 1.1.1 *et* 1.1.3 *est appelée forme sesquilinéaire.*
2. Une application qui vérifie les conditions 1.1.1, 1.1.2 *et* 1.1.3 *est appelée forme hermitienne, si de plus elle vérifie* 1.1.4 *est on dit que c'est une forme hermitienne positive.*

Définition 1.1.2 *On appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}$ telle que :*
1) $\forall x \in E,\; N(x) \geq 0$ *(Positivité)*
2) $\forall x \in E,\; N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *(Séparation)*

3) $\forall\,(x,\lambda)\in E\times\mathbb{C},\ N\,(\lambda x)=|\lambda|\,N(x)$ *(Homogénéité)*

4) $\forall(x,y)\in E\times E,\ N\,(x+y)\leq N\,(x)+N\,(y)$ *(Inégalité triangulaire)*

Remarque 1.1.2 *On note* $N(x)=\|x\|_E$.

Définition 1.1.3 *On appelle espace vectoriel normé, tout couple* $(E,\|.\|)$ *où* $\|.\|$ *est la norme sur* E *.*

Définition 1.1.4 *Soient* E *un* $\mathbb{C}$ *espace vectoriel muni de la norme* $\|.\|$ *et* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de vecteurs dans* E*.*

On dit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall\varepsilon>0;\exists N\in\mathbb{N}:\forall n,m\geq N\qquad \|U_n-U_m\|_E<\varepsilon$$

Si toute suite de Cauchy $(U_n)_{n\in N}\subset E$ *converge dans* E*, alors* E *est un espace de Banach.*

Définition 1.1.5 *Soit* (E,N) *un espace vectoriel normé.*

Un sous ensemble F *de* E *est dit fermé si et seulement si son complémentaire est ouvert, ou bien, de façon équivalente, si et seulement si toute valeur d'adhérence de* F *est contenu dans* F*.*

Exemple 1.1.1 *Tout sous-ensemble fini* $\{a_{1,\ldots\ldots,}a_p\}$ *d'un espace vectoriel normé est un fermé.*

Définition 1.1.6 *Un espace de Hilbert* H *est un espace préhilbertien complet.*

Définition 1.1.7 *Une partie* G *de* H *est dite dense dans* H *si*

$$\forall z\in H,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists y\in G;\quad \|y-z\|<\varepsilon$$

ou de manière équivalente si tout z *de* H *est limite d'une suite d'éléments* y_n *de* G :
$\|y_n-z\|\to 0$

Définition 1.1.8 *Une partie* F *de* H *est dite totale si l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de* F *est dense dans* H*.*

Définition 1.1.9 *Une famille $\{e_i,\ i \in I\}$ d'éléments de H est dite orthonormée si :*

$$\forall i \in I,\ \forall j \in I, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases}$$

Définition 1.1.10 *Une base hilbertienne de H est une famille orthonormée totale dans H.*

Définition 1.1.11 *soit $H_1 \subset H_2$ un sous espace préhilbertien.on dit que H_2 la completion de H_1 si pour $x \in H_2/$ il existe $\{x_n\} \subset H_1$ qui converge vers x c'est à dire H_1 dense dans H_2.*

Lemme 1.1.1 *Soient H un espace de Hilbert et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de vecteurs telles que :*
$x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y_0$. Alors :

$$1. \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n \right\rangle = \langle x_0, y_0 \rangle \tag{1.1.6}$$

$$2. \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_H = \left\| \lim_{n\to\infty} x_n \right\|_H = \|x_0\| \tag{1.1.7}$$

Preuve. 1.D'après l'inégalité de Cauchy-Shwartz on a :

$$|\langle x_n - x_0, y_n - y_0 \rangle| \leq \|x_n - x_0\|_H \|y_n - y_0\|_H \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad car \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0,\ y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y_0$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n - x_0, y_n - y_0 \rangle = 0$$

d'ou

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n - x_0, y_n - y_0 \rangle = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} [\langle x_n - x_0 \rangle, \langle y_n - y_0 \rangle] = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x_0, y_0 \rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n \right\rangle$$

2.On a :

$$\|x_n\|_H^2 = \langle x_n, x_n \rangle$$

Alors d'aprés 1.1.6 si on remplace y_n par x_n on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x_n \rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} x_n \right\rangle = \langle x_0, x_0 \rangle = \|x_0\|_H^2$$

□

Chapitre 2

Concepts généraux de la théorie des opérateurs

2.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 2.1.1 *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, on appelle un opérateur T toute relation définie sur un sous ensemble $D(T)$ de X qui envoie chaque élément $x \in D(T)$ à un élément $y \in Y$ définie par :*

$$\forall x \in X/\ y = Tx$$

Notation : *On considère les notations suivantes :*

•)$D(T)$: *domaine de T*

•) $\mathrm{Im}(T) = \{x \in D(T) : Tx = y\}$ *image de T*

•) $\ker(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0_Y\}$ *noyau de T*

•)$T^{-1}(S) = \{x \in D(T)/Tx \in S\}$ *l'image réciproque de S ou bien pré-image de S où $S \subset Y$*

Définition 2.1.2 *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, un opérateur T de X dans Y est dit linéaire si et seulement si :* $\forall x, y \in X : T(x+y) = T(x) + T(y)$ *et* $\forall \alpha \in \mathbb{C} : T(\alpha x) = \alpha T(x)$

L'ensemble des opérateurs linéaires de X dans Y est noté $\mathcal{L}(X, Y)$.

Définition 2.1.3 *T est dit continu en $x_0 \in D(T)$si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists s > 0,\ \forall x : \|x - x_0\| \leq s \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon$$

Lemme 2.1.1 *T est dit continu en $x_0 \in D(T)$ si et seulement si la pré-image de tout ouvert de Y est un ouvert de X*

Remarque 2.1.1 *θ est dit ouvert de X si et seulement s'il est voisinage de tous ses points c'est à dire :*

$$\forall x \in X,\ \exists B(x,\varepsilon) \subset \theta$$

Définition 2.1.4 *Un opérateur linéaire T est dit borné si et seulement si*

$$\exists M > 0 : \|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X \quad \forall x \in X$$

Définition 2.1.5 *L'ensemble des opérateurs bornées de X dans Y est noté $B(X,Y)$ ou $B(X)$ si $X = Y$.*

Théorème 2.1.1 *L'ensemble $B(X,Y)$ muni de la relation*

$$\|T\|_{B(X,Y)} = \sup_{x \in X_{x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|}$$

$\sup_{x\in S_1} \|Tx\|$ *avec $S_1 = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ est un espace vectoriel normé.*

2.1.1 Types de convergences

Soient X et Y deux espaces de Hilbert et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs dans $B(X,Y)$, on définit les trois types de convergence suivants :

1)Convergence en norme

On dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norme vers l'opérateur A si et seulement si :

$$\|A_n - A\|_{B(X,Y)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{et on écrit} \ \ A_n \rightrightarrows A$$

2)Convergence forte

On dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers l'opérateur A si et seulement si :

$$\|A_n(x) - A(x)\|_Y \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ ,\forall x \in X \quad \textit{et on écrit } A_n \underset{\longrightarrow}{s} A$$

3)Convergence faible

On dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers l'opérateur A si et seulement si :

$$\langle A_n(x), y\rangle \to \langle A(x), y\rangle \quad ,\forall x \in X \ ,\forall y \in Y. \qquad \textit{et on écrit } A_n \underset{\longrightarrow}{w} A$$

2.2 Opérateur non borné

Définition 2.2.1 *Un opérateur linéaire Tnon borné dans un espace de Hilbert H définie sur un sous-espace vectoriel propre $D(T) \subset H$ à valeurs dans H.*

2.3 Opérateur fermé

Définition 2.3.1 *Le graphe d'un opérateur $A : D(A) \to H$ est un sous-espace vectoriel dans $H \times H$ défini par*

$$G(A) = [u, f] \in H \times H : u \in D(A), \ f = Au$$

L'opérateur A est dit fermé si $G(A)$ est fermé dans l'espace $H \times H$.

Définition 2.3.2 *[1] Soient $A : E \longrightarrow G$ et $\tilde{A} : F \longrightarrow G$ avec $E \subset F$. On dit que $\tilde{A}$ est une extension de A si et seulement si*

$$\tilde{A}x = Ax, \forall x \in E$$

Définition 2.3.3 *On dit que $\tilde{A}$ est la fermeture de A si est seulement si :*

$$\begin{cases} \tilde{A}x = Ax \qquad si \qquad \forall x \in D(A) \\ \qquad\qquad et \\ \lim_{n\to\infty} Ax_n = \tilde{A}x_0 \quad si \quad x_0 \notin E \end{cases}$$

2.4 Opérateur Adjoint

Définition 2.4.1 *[7] Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$. Il existe un unique opérateur continu de H dans H, noté A^* appelé adjoint de A, tel que :*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \quad \forall x, y \in H \qquad \text{(la relation d'adjonction)}$$

En outre, on a :

$$\begin{aligned} (A^*)^* &= A \\ & \quad et \\ \|A^*\| &= \|A\| = \|A^*A\|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2.4.1 Propriétés de l'adjoint

Soient A et B deux éléments de $\mathcal{L}(H)$ alors on a :

(**a**) Pour α et β dans $\mathbb{C}$ on a : $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha}A^* + \bar{\beta}B^*$

(**b**) L'adjoint de AB est B^*A^* : $(AB)^* = B^*A^*$

(**c**) Si A est inversible, A^* l'est aussi et on a : $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Théorème 2.4.1 *Soit H un espace de Hilbert alors l'application*

$$\begin{aligned} \Psi \quad &: \quad B(H) \longrightarrow B(H) \\ A \quad &\longmapsto \quad \Psi(A) = A^* \end{aligned}$$

est une isométrie anti-linéaire et de plus $\begin{cases} A^{**} = A \\ \|A^*A\| = \|A\|^2 \\ (AB)^* = B^*A^* \end{cases}$

Preuve. Soit

$$\begin{aligned} \Psi \quad &: \quad B(H) \longrightarrow B(H) \\ A \quad &\longmapsto \quad \Psi(A) = A^* \end{aligned}$$

Soient $x, y \in H$

$$\begin{aligned}
\langle (A+\lambda B)\,x,y\rangle &= \langle Ax+\lambda Bx,y\rangle \\
&= \langle Ax,y\rangle+\lambda\,\langle Bx,y\rangle \\
&= \langle x,A^{*}y\rangle+\lambda\,\langle x,B^{*}y\rangle \\
&= \langle x,A^{*}y\rangle+\left\langle x,\bar{\lambda}B^{*}y\right\rangle \\
&= \left\langle x,(A^{*}+\bar{\lambda}B^{*})y\right\rangle
\end{aligned}$$

D'ou

$$(A+\lambda B)^{*}\,y=(A^{*}+\bar{\lambda}B^{*})y \qquad \forall y\in H$$

Donc

$$(A+\lambda B)^{*}=(A^{*}+\bar{\lambda}B^{*})$$

$$\Psi\,(A+\lambda B)=\Psi\,(A)+\bar{\lambda}\Psi\,(B)$$

□

2.5 Opérateur auto-adjoint

Définition 2.5.1 *[?] Un opérateur $A\in\mathcal{L}(H)$ est dit auto-adjoint s'il est égal à son adjoint, c'est-à-dire si, $\forall$ x et y dans H alors*

$$\langle Ax,y\rangle=\langle x,Ay\rangle$$

Exemple 2.5.1 *Soit H un espace de Hilbert et I est l'opérateur identité*
si $x,y\in H$ alors
$\langle Ix,y\rangle=\langle x,y\rangle$ par conséquent $I=I^{*}$, d'où I est opérateur auto-adjoint.

2.6 Opérateur positif

Définition 2.6.1 *[3] Soit A un opérateur linéaire auto-adjoint défini sur un espace de Hilbert dans lui même, on dit que A est un opérateur positif et que l'on note $A\geq 0$, si pour tout $x\in H$, on a :*

$$(Ax,x)\geq 0 \ \ \textit{pour tout} \ \ x\in H$$

Remarque 2.6.1 *Pour tout opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$, les opérateurs AA^* et A^*A sont auto-adjoints positifs car, pour tout x dans H alors :*

$$\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 \geq 0$$

Théorème 2.6.1 *[5] (**Inégalité de Cauchy-Schwartz)***
Soit A un opérateur linéaire positif défini sur un espace de Hilbert H dans lui même alors, pour tout $\varphi, \psi \in H$, on a la relation suivante :

$$|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2 \leq \langle A\varphi, \varphi\rangle \quad \langle A\psi, \psi\rangle .$$

Preuve. En effet, pour tout $\varphi, \psi \in H$ et pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\langle A(\varphi - \lambda\psi), \varphi - \lambda\psi\rangle \geq 0$$

De plus ,il vient

$$\langle A(\varphi - \lambda\psi), \varphi - \lambda\psi\rangle = \langle A\varphi, \varphi\rangle - \bar{\lambda}\langle A\varphi, \psi\rangle - \lambda\langle A\psi, \varphi\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle A\psi, \psi\rangle$$

D'ou, avec A auto-adjoint, on écrit :

$$\langle A(\varphi - \lambda\psi), \varphi - \lambda\psi\rangle = \langle A\varphi, \varphi\rangle - \bar{\lambda}\langle A\varphi, \psi\rangle - \lambda\langle \psi, A\varphi\rangle + \lambda\bar{\lambda}\langle A\psi, \psi\rangle$$

Ou encore

$$\langle A(\varphi - \lambda\psi), \varphi - \lambda\psi\rangle = \langle A\varphi, \varphi\rangle - \bar{\lambda}\langle A\varphi, \psi\rangle - \lambda\overline{\langle A\varphi, \psi\rangle} + \lambda\bar{\lambda}\langle A\psi, \psi\rangle$$

Prenons

$$\lambda = \frac{\langle A\varphi, \psi\rangle}{\langle A\psi, \psi\rangle}$$

on obtient :

$$\langle A\varphi, \varphi\rangle - \frac{|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2}{\langle A\psi, \psi\rangle} - \frac{|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2}{\langle A\psi, \psi\rangle} + \frac{|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2}{(\langle A\psi, \psi\rangle)^2}\langle A\psi, \psi\rangle \geq 0$$

Ou encore

$$\langle A\varphi, \varphi\rangle - \frac{|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2}{\langle A\psi, \psi\rangle} \geq 0$$

D'ou le resultat voulu

$$|\langle A\varphi, \psi\rangle|^2 \leq \langle A\varphi, \varphi\rangle \langle A\psi, \psi\rangle$$

□

Définition 2.6.2 *Soit E un ensemble. Une relation sur E est un ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Remarque 2.6.2 • *Réflexive quand $\forall x \in E,\ xRx$*

- *Symétrique quand $\forall x, y \in E,\ xRy \Longrightarrow yRx$*
- *Antisymétrique quand $\forall x, y \in E,\ xRy$ et $yRx \Longrightarrow x = y$*
- *Transitive quand $\forall x, y, z \in E,\ xRy$ et $yRz \Longrightarrow xRz$.*

Définition 2.6.3 *Un ordre $(\leq)$ sur E est dit total si deux éléments sont toujours comparables :*
$\forall x, y \in E,\ x \leq y$ ou $y \leq x$. Un ordre qui n'est pas total est dit partiel.

Proposition 2.6.1 *Soient A et B deux opérateurs positifs sur H, on dit que B est un majorant de A si et seulement si :*

$$\langle (B - A)(x), x\rangle \geqslant 0 \ \forall x \in H$$

On note $A \leq B$

Remarque 2.6.3 *La relation $(\leq)$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathcal{L}(H)$.*

Définition 2.6.4 *Soient T et B deux opérateurs positifs tels que $T \leq B$*
B est dit majorant minimal de T si et seulement si :

$$\forall C \in B(H) \quad si \ \ 0 \leq T \leq C : C \leq B \ alors \ C = B$$

2.6.1 Propriétés

Soient A, B et C trois opérateurs positifs sur H. Alors on a les propriétés suivantes :

(1) $A \geq 0,\ B \geq 0 \Rightarrow A - B \leq A$

(2) $B \geq 0 \Rightarrow B^n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

(3) $\forall n \in \mathbb{N}^* :\ C \leq Id \Rightarrow C^n \leq Id$

2.6.2 Racine carrée d'un opérateur positif

Proposition 2.6.2 *Soit A un opérateur positif sur un espace de Hilbert H, alors il existe un unique opérateur positif X noté $\sqrt{A}$ tel que :*

$$X^2 = A$$

2.7 Orthogonalité

Définition 2.7.1 *Soit H un espace de Hilbert complexe, une projection orthogonale sur H est un opérateur P telle que :*

$$P^2 = P^* = P.$$

2.7.1 Propriétés d'orthogonalité

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, pour que A soit injectif, il faut et il suffit que l'image de A^* soit dense dans H, ce qui se traduit par l'égalités suivantes :

– $(\operatorname{Im} A)^{\perp} = \ker A^*$ En effet :

$$\forall x \in H,\ x \in \ker A^* \Longleftrightarrow \forall y \in H : \langle A^*(x), y\rangle = 0 \Longleftrightarrow \forall y \in H : \langle x, A(y)\rangle = 0$$
$$\Longleftrightarrow x \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}$$

– $(\ker A^*)^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} A}$

2.8 Théorie spectrale des opérateurs bornés

2.8.1 Opérateur inversible

Définition 2.8.1 *Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur borné. On dit que T est inversible s'il existe $S \in B(X,Y) \quad /TS = I,\ ST = I$*

2.8.2 Spectre

Définition 2.8.2 *On appelle spectre de l'opérateur borné T, l'ensemble*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ \ / \ \ (T - \lambda I) \qquad non\ inversible\} \subset \mathbb{C}.$$

Exemple 2.8.1 *Soit $\mu \in \mathbb{C}$, trouver $\sigma(\mu I) \quad (I = I_H)$*

On a :
$$\begin{aligned}\sigma(\mu I) &= \{\lambda \in \mathbb{C} \ \ / \ \ (\mu I - \lambda I) \quad \text{non inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} \ \ / \ \ (\mu - \lambda) I \quad \text{non inversible}\} \\ &= \{\mu\}.\end{aligned}$$

2.8.3 Ensemble résolvant

Définition 2.8.3 *On appelle ensemble résolvant d'un opérateur T le complémentaire du spectre de T dans $\mathbb{C}$. c'est à dire :*

$$\rho(T) = \mathbb{C} \backslash \sigma(T)$$

Remarque 2.8.1 ***1)*** *Il découle de la définition que $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.*
2) *Les éléments de $\rho(T)$ sont appelés points réguliers.*
3) $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ \ / \ \ (T - \lambda I) \qquad inversible\}$.

2.8.4 Résolvante

Définition 2.8.4 *On appelle résolvant de l'opérateur T l'opérateur $R_\lambda(T)$ defini par :*

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1} \qquad pour \lambda \in \rho(T)$$

2.9 Résolution de l'identité

Pour décrire la décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint, on introduit la notion de résolution de l'identité.
Pour celà, on considère la tribu $\mathbf{M}$ des boréliens sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.9.1 *On appelle résolution de l'identité une application* $E : \mathbf{M} \to \mathcal{L}(H)$ *vérifiant :*
1) $\forall m \in \mathbf{M},\ E(m)$ *est une projection orthogonale qui vérifie en plus* $E(\emptyset) = 0$ *et* $E(\mathbb{R}) = I_d$
2) $\forall m, m' \in \mathbf{M}\ , E(m \cap m') = E(m)E(m')$
3) *Si* $m \cap m' = \emptyset$ *alors* $E(m \cup m') = E(m) + E(m')$
4) *Pour tout* x *et* $y \in H$ *l'application* $E_{x,y} : \mathbf{M} \to \mathbb{C}$ *définie par* $E_{x,y}(m) = \langle E(m)(x), y \rangle$ *est une mesure complexe régulière.*

Théorème 2.9.1 *[1] Soit* T *un opérateur auto-adjoint sur* H *s'il existe une résolution de l'identité* E *uniquement déterminée par* T *est vérifiant :*

$$\forall (x, y) \in D(T) \times H, \langle T(x), y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{x,y}(\lambda)$$

En outre, E *est supportée par* $\sigma(T)$ *le spectre de* T*, au sens où* $E\left(\sigma\left(T\right)\right) = I_d$*.*

Théorème 2.9.2 *Pour tout opérateur auto-adjoint* T *sur un espace de Hilbert* H*,de domaine* $D\left(T\right)$ *dense dans* H*, il existe une famille spectrale* $\left(E_\lambda\right)_{\lambda \in \mathbb{R}}$*sur* H*, telle que pour toute fonction* $f \in \mathbf{M}\left(\mathbb{R}\right)$ *, on ait :*

$$f\left(T\right) = \int_{\mathbb{R}} f\left(\lambda\right) dE_\lambda$$

de domaine

$$D\left(f\left(A\right)\right) = \left\{ x \in H / \int_{\mathbb{R}} \left| f\left(\lambda\right) \right|^2 d\left(\left\| E_\lambda x \right\|^2 \right) < +\infty \right\}$$

Chapitre 3

Existence de minimum et de maximum de deux opérateurs auto-adjoints

Introduction :

Dans ce chapitre, nous discuterons l'existence du majorant minimal de deux opérateurs positifs dans le sens qu'il existe un opérateur $T \geq A,\ T \geq B$ tel qu'il soit minimal.

Comme application à ce résultat, nous donnerons un résultat concernant les opérateurs auto-adjoints. Au fait pour une paire des opérateur auto-adjoints (A, B) qui commutent, on démontre l'existence des opérateurs auto-adjoints $T,\ A_1,\ B_1$ tels que :

$$\begin{cases} A = T + A_1 \\ B = T + B_1 \end{cases}$$

où $T,\ A_1,\ B_1$ commutent avec A et vérifient : $A_1 B_2 = B_2 A_1 = 0$

Théorème 3.0.3 *Soient A, B deux opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H tels que*

$$A \geq B \geq 0,\ A > 0$$

et soit H_A le complété de H pour le produit scalaire $\langle x, x \rangle_A = \langle x, Ax \rangle$. Alors on a :

a)-*$\tilde{A}^{-1}\tilde{B}$ est borné et auto-adjoint sur H_A,où $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ sont les fermetures de A et B respectivement (sur H_A).*

b)-*Si B est définie positive, alors :*

$$\tilde{A}^{-1}\tilde{B} : B > 0 \Rightarrow \tilde{A}^{-1}\tilde{B} > 0$$

Preuve. **a)**-Pour simplifier On suppose $A \leq I$, sinon on peut remplacer A par $\|A\|^{-1} A$ et B par $\|A\|^{-1} B$.

D'abord on note que $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ sont des opérateurs bornés dans H_A et $\tilde{A}$ est auto-adjoint. En effet pour $x \in H$ on a :

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{A}x, x \right\rangle_{H_A} &= \langle Ax, Ax \rangle \leq \langle Ax, x \rangle \\ & \quad et \\ \langle Ax, x \rangle_{H_A} &\geq 0 \end{aligned}$$

et

$$\langle Bx, Bx \rangle = \langle Bx, ABx \rangle \leq \langle Bx, Bx \rangle \leq \langle Bx, x \rangle \leq \langle Ax, x \rangle = \langle x, x \rangle_{H_A}$$

Alors ces inégalités sont vraies pour tout $x \in H_A$.

Il est évident que $\tilde{A}$ est positif sur H_A (car on a si $\tilde{A}$ est la fermeture de A alors $(\tilde{A})^* = A^*$ de plus A est auto adjoint sur H_A(c'est a dire $A^* = A$) donc $\tilde{A}$ est positif).

Si $\tilde{A}x = 0$ pour un certain $x \in H$, il en résulte que $\operatorname{Im} A$ est $A - dense$ dans H_A et donc $\ker \tilde{A} = \{0\}$

On montre que $D(A^{-1}) \subset H$: supposons $y \in \tilde{A}H_A$, soit $y = \tilde{A}x$ pour un certain $x \in H_A$.

Comme H est $A - dense$ dans H_A, il existe une suite $\{x_n\} \subset H$ telle que $\|x_n - x\|_A \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ .Soit $y_n = Ax_n \in H$. Alors,

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|_{H_A}^2 &= \|Ax_n - Ax_m\|_{H_A}^2 = \|A(x_n - x_m)\|_{H_A}^2 \\ &= \langle A(x_n - x_m)(x_n - x_m) \rangle_{H_A} \\ &\leq \|A\|_{H_A} \left(\|x_n - x_m\|_{H_A}\right)^2 \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et pour $n,\ m$ suffissamment grands. Ainsi $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy dans H et comme H est complet, $\exists y \in H : y_n \longrightarrow y$ lorsque $n \to \infty$ d'ou :

$$\|y_n - y\|_{H_A}^2 = \langle y_n - y, A(y_n - y)\rangle \leq \|A\|^2 \|y_n - y\|^2$$

d'ou $y_n \xrightarrow{A} y$ .Or $y_n = Ax_n \xrightarrow{A} \tilde{A}\ x = y$, ainsi $y \in H$. Ceci montre que $D(A^{-1}) \subset H$.
Soit la forme bilinéaire $q\,(x, y)$ définie dans H_A par la formule suivante :

$$q\,(x,y) = \begin{cases} (Bx, y) & si \quad x,\ y\ \in H \\ \lim\ (Bx_n, y_n) & si \quad x,\ y \in H_A \end{cases}$$

et pour $x_n \xrightarrow{A} x,\ y_n \xrightarrow{A} y$ comme

$$\begin{aligned} |B\,(x_n, y_n) - B\,(x_m, y_m)| &= |(Bx_n, y_n) + (Bx_m, y_n) - (Bx_m, y_n) - B\,(x_m, y_m)| \\ &\leq |(B(x_n - x_m), y_n) + (Bx_m, (y_n - y_m))| \\ &\leq \left|(B^{\frac{1}{2}}(x_n - x_m), B^{\frac{1}{2}}y_n) + (B^{\frac{1}{2}}x_m, B^{\frac{1}{2}}(y_n - y_m))\right| \end{aligned}$$

Et d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz on a :

$$|B\,(x_n, y_n) - B\,(x_m, y_m)| \leq \left\|B^{\frac{1}{2}}(x_n - x_m)\right\| \cdot \left\|B^{\frac{1}{2}}y_n\right\| + \left\|B^{\frac{1}{2}}x_m\right\| \cdot \left\|B^{\frac{1}{2}}(y_n - y_m)\right\|$$

avec

$$\begin{aligned} \left\|B^{\frac{1}{2}}(x_n - x_m)\right\| &= \left\langle B^{\frac{1}{2}}(x_n - x_m), B^{\frac{1}{2}}(x_n - x_m)\right\rangle \\ &\leq \left\langle A^{\frac{1}{2}}(x_n - x_m), A^{\frac{1}{2}}(x_n - x_m)\right\rangle \to 0 \qquad (car\ B \leq A) \end{aligned}$$

De la même manière on a :

$$\left\|B^{\frac{1}{2}}(y_n - y_m)\right\| \to 0$$

On conclut l'existence de la $\lim(Bx_n, y_n)$. Ainsi $q(x, y)$ est correctement définie pour tout $x, y \in H_A$. D'autre part, pour $x, y \in H$ on obtient :

$$|q(x, y)| = |(Bx, y)|$$

et d'aprés **théorème 2.6.1** on a :

$$\begin{aligned} |q(x,y)| &\le \sqrt{(Bx,x)(By,y)} \\ &\le \sqrt{(Ax,x)(Ay,y)} \\ &= \sqrt{(x,x)(y,y)} = \|x\|_{H_A} \cdot \|y\|_{H_A} \end{aligned}$$

Alors $q(x, y)$ est borné pour tout $x, y \in H_A$:

$$\begin{aligned} |q(x,y)| &= |\lim(Bx_n, y_n)| \\ &\le |\lim(Ax_n, y_n)| \\ &\le |\lim(Ax_n, x_n)(Ay_n, y_n)| \\ &\le |\lim(x_n, x_n)(y_n, y_n)| \\ &\le \lim |(x_n, x_n)(y_n, y_n)| \\ &\le \lim \|x_n\|_{H_A} \cdot \|y_n\|_{H_A} \\ &= \|x_n\|_{H_A} \cdot \|y_n\|_{H_A} \end{aligned}$$

Il résulte qu'il existe un opérateur auto adjoint $\tilde{T}$ borné tel que :

$$\left\langle \tilde{T}x, y \right\rangle_{H_A} = q(x,y) = \langle x', y \rangle_{H_A}$$

pour tout $y \in H_A$ et $\tilde{T}\ x = x'$ [1]
Prouvons que $\tilde{A}x' = Bx$ pour tout $x \in H$. En effet soit $\{x_n\} \subset H$ une suite tel que $x_n \xrightarrow{A} x'$, alors $Ax_n \xrightarrow{A} \tilde{A}x'$ (est A-borné) et alors pour $y \in H$ on a :

$$\langle Bx, y \rangle = \left\langle \tilde{T}\ x, y \right\rangle_{H_A} = \langle x', y \rangle_{H_A} = \lim_{n\to\infty} (x_n, y)_{H_A} = \lim_{n\to\infty} (Ax_n, y)$$

Celà montre que $Ax_n \xrightarrow{w} Bx$ faiblement dans H alors $Ax_n \xrightarrow{w,A} Bx$ faiblement dans H_A .En effet pour $y \in H$.

$$\langle Ax_n, y \rangle_{H_A} = \langle Ax_n, Ay \rangle \longrightarrow \langle Bx, Ay \rangle = \langle Bx, y \rangle_{H_A}$$

mais H est dense dans H_A, ainsi $Ax_n \xrightarrow{w,A} Bx$, en même temps on a $Ax_n \xrightarrow{A} \tilde{A}x'$ fortement. Ainsi, $Bx = \tilde{A}x'$.Maintenant pour un $x \in H$ arbitaire, il existe x' tel que $Bx = \tilde{A}x'$. Alors

$x' = \tilde{A}^{-1}Bx$ et ce qui signifie que l'opérateur $T = \tilde{A}^{-1}B$ est défini dans H. Il est facile de voir que $\tilde{A}^{-1}B$ est borné dans H_A :

$$\left\langle \tilde{A}^{-1}Bx, x \right\rangle_{H_A} = \langle Bx, x\rangle \leq \langle Ax, x\rangle \quad et \quad \left\langle \; \tilde{A}^{-1}Bx, x \right\rangle_{H_A} \geq 0 \;\; \text{pour } x \in H$$

Alors $\tilde{A}^{-1}B$ peut être définie pour tout $x \in H_A$ et sa fermeture sera un opérateur auto-adjoint sur H_A.

b) Si $B > 0 \Rightarrow \ker B = \{0\}$ alors $\operatorname{Im} B$ est dense dans H , or H est dense dans H_{A+B}.
donc $\tilde{A}^{-1}(\operatorname{Im} B)$ est dense dans H_{A+B} d'ou $\ker \left\{ \tilde{A}^{-1}B \right\} = \{0\}$ et donc $\tilde{A}^{-1}B > 0$ car :
On a : $\tilde{A}^{-1} (\operatorname{Im} B) = H_{A+B}$, si $\tilde{A}^{-1}Bx = 0$ pour un certain x
$\Rightarrow \ker \tilde{A}^{-1}B \neq 0$
$\Rightarrow \tilde{A}^{-1}(\operatorname{Im} B) \neq H_{A+B}$ (*contradiction*)
D'oŭ $\tilde{A}^{-1}B > 0$. □

Théorème 3.0.4 *Soient A, B deux opérateurs positifs, bornés sur l'espace de Hilbert H tel que*
$A > 0,\; B > 0$, *alors il existe un opérateur $F > 0$ tel que $A \geq F$ et $B \geq F$.*

Preuve. Pour simplifier, on suppose : $A + B \leq I$.
Soit H_{A+B} le complété de H pour le produit scalaire

$$\langle x, y\rangle_{H_{A+B}} = \langle x, (A+B)y\rangle$$

et d'aprés 3.0.5, on a :
$(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}\tilde{A}$ et $(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}\tilde{B}$ sont bornés et auto-adjoints sur H_{A+B}, où $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont les fermutures de A et B respectivement dans H_{A+B}.
D'autre part on a :

$$I = (\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}(\tilde{A} + \tilde{B}) = (\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}\tilde{A} + (\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}\tilde{B}$$

Et ainsi $(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A}$ commute avec $(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}$. Considérons

$$\begin{aligned}
G &= (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B} \\
&= \left[I-(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}\right]\left[I-(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A}\right] \\
&= I-\left[(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}+(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A}\right]+(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A} \\
&= (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A}
\end{aligned}$$

alors $G-(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A}\geq 0$ et $G-(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}\geq 0$ dans H_{A+B} car :

$$\begin{aligned}
G-(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A} &= (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A}-(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A} \\
&= (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}\left[(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A}-I\ \right] \\
&= (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}\left[I-(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}-I\ \right] \\
&= \left[-\left((\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}\right)\right]^2\geq 0
\end{aligned}$$

Et de même

$$\begin{aligned}
G-(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B} &= (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}-(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B} \\
&= (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}\left[(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A}-I\right] \\
&= (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}\left[I-(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}-I\right] \\
&= \left[(-(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B})\right]^2\geq 0
\end{aligned}$$

On prend l'opérateur $F=\tilde{A}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}B$ dans H.

D'abord on note que F peut- être considéré comme un opérateur sur H. En effet, montrons que $\forall x\in H_{A+B},\ \tilde{A}x\in H$, comme H est $(A+B)-dense$ dans H_{A+B} alors il existe une suite $\{x_n\}\subset H$ tel que

$$\|x_n-x\|\longrightarrow 0\quad \text{quand } n\to\infty$$

Soit $y = Ax_n \in H$ alors

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &= \|A(x_n - x_m)\|^2 = \langle A(x_n - x_m), A(x_n - x_m)\rangle \\
&\leq \langle x_n - x_m, A(x_n - x_m)\rangle \qquad\qquad (car \;\; A \leq I) \\
&\leq \langle x_n - x_m, (A+B)\,(x_n - x_m)\rangle \qquad (car \; A \leq A+B \leq I) \\
&\leq \langle x_n - x_m, x_n - x_m\rangle_{H_{A+B}} \\
&= \|x_n - x_m\|^2_{H_{A+B}} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Pour n et m suffisamment grand, alors $\{y_n\}$ est une suite de cauchy dans H qui est complet donc $\exists y \in H, y_n \to y$.

Ainsi F un opérateur bien défini sur H. De plus, $\forall x \in H$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle Fx, x\rangle &= \left\langle \left(\tilde{A}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}B\right) x, x \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\tilde{A}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}B\right) x, (A+B) \right\rangle_{H_{A+B}} \\
&= \left\langle (A+B)^* \left(\tilde{A}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}B\right) x, x \right\rangle_{H_{A+B}} \\
&= \left\langle (A+B)^{-1} \left(\tilde{A}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}B\right) x, x \right\rangle_{H_{A+B}} \\
&= \langle Gx, x\rangle_{H_{A+B}} \geq 0
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
\langle Fx, x\rangle &= \langle Gx, x\rangle_{H_{A+B}} \\
&\leq \langle x, x\rangle_{H_{A+B}} \\
&\leq \langle x, x\rangle
\end{aligned}$$

Donc F est borné et $F \geq 0$. Montrons que $F > 0$. On suppose qu'il existe x tel que $Fx = 0$ $\Rightarrow Gx = 0$

$$\begin{aligned}
\ker(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A} &\neq \{0\} \;\; ou \\
\ker(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B} &\neq \{0\}
\end{aligned}$$

ce qui contredit **le théorème 3.0.3**.

Ainsi $F > 0$.

Il est clair que $A - F \geq 0$ et $B - F \geq 0$ car :

$$\langle (A - F)\, x, x \rangle = \left\langle \left(\left(\tilde{A} + \tilde{B} \right)^{-1} \tilde{A} - G \right) x, x \right\rangle_{H_{A+B}} \geq 0$$

Pour tout $x \in H$, montrons que $(A - F) > 0$ et $(B - F) > 0$

$$\begin{aligned} B - F &= B - \tilde{A}(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1} B \\ &= B - \left(\tilde{A} + \tilde{B} - \tilde{B} \right) (\tilde{A} + \tilde{B})^{-1} B \\ &= B - (\tilde{A} + \tilde{B})(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1} B + \tilde{B}(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1} B \\ &= \tilde{B}(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1} B \end{aligned}$$

Celà signifie que l'égalité

$$\begin{aligned} (B - F)\, x &= 0 \Rightarrow \tilde{B}(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1} B x = 0 \\ &\Rightarrow Bx = 0 \text{ car } (\tilde{A} + \tilde{B}) \text{ est injectif} \\ &\Rightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du **théorème** 3.0.4 $\square$

Théorème 3.0.5 *Soient A, B deux opérateurs bornés dans l'espace de Hilbert H, $A \geq 0,\ B \geq 0,\ A + B > 0$. Il existe alors un opérateur $F \geq 0$ tel que $A \geq F$ et $B \geq F$ de plus :*

$$\ker F = \{\ker \tilde{A} + \ker \tilde{B}\} \cap H \tag{3.0.1}$$

où

$$\{\ker \tilde{A} + \ker \tilde{B}\} = \{x : x = x_1 + x_2,\ \textit{où}\ \ x_1 \in \ker \tilde{A},\ x_2 \in \ker \tilde{B}\}$$

$\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont les fermetures de A et B, respectivement dans H_{A+B} pour le produit scalaire :

$$\langle x, y \rangle_{A+B} = \langle x, (A + B) y \rangle$$

Preuve. Supposons $A+B>0$, alors l'opérateur $F=\tilde{A}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}B$ satisfait de nouveau les inégalités $A\geq F$, $B\geq F$.

Pour montrer que 3.0.1. Soit $x\in\ker F\Rightarrow Fx=0$, alors :

$$(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}Ax=(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}Bx=0$$

On pose :

$S=(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}$ et $T=(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A}$

alors : S et T sont des opérateurs positifs (non négatifs) sur l'espace de Hilbert H_{A+B} pour le produit scalaire

$$\langle x,y\rangle_{A+B}=\langle x,(A+B)y\rangle$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S+T &= (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}+(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A} \\ &= (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}(\tilde{A}+\tilde{B}) \\ &= I \end{aligned}$$

Alors

$$Fx=0\Longrightarrow\left[(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{B}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A}\right]x=0$$

car :

$$Fx=Gx=0\ \Longrightarrow STx=0\Longrightarrow S(I-S)x=0$$

d'où :

$$(I-S)x\in\ker S$$

c'est à dire :

$$x-Sx=x_1$$

avec $x_1\in\ker S$

De même, on a :

$$Sx\in Ker(I-S)$$

et alors

$$x_2 = Sx$$

avec

$$\begin{aligned} x_2 &\in \ker(I - S) \\ x_2 &\in \ker T \end{aligned}$$

Alors :

$$\forall x /\ x = x - Sx + Sx = x_1 + x_2$$

avec

$$x_1 = x - Sx \quad et \quad x_2 = Sx \quad x_1 \in \ker S, x_2 \in \ker T$$

Montrons que

$$\ker \tilde{B} = \ker S \ \ et \ \ker \tilde{A} = \ker T$$

pour $x \in \ker \tilde{B}$,on a $alors$, $Sx = \left(\tilde{A} + \tilde{B}\right)^{-1} \tilde{B}x = 0$, donc $x \in \ker S$
On a $\left(\tilde{A} + \tilde{B}\right)^{-1}$ existe, alors $\left(\tilde{A} + \tilde{B}\right)$ inversible
$(\Longrightarrow)$

$$\ker\left(\tilde{A} + \tilde{B}\right) = \{0\} \tag{3.0.2}$$

c'est à dire on a :

$$\left(\tilde{A} + \tilde{B}\right) S = \tilde{B}$$

Montrons que :

$$\ker\left(\tilde{A} + \tilde{B}\right) S = \ker \tilde{B}$$

En effet :
si $x \in \ker \tilde{B}$ alors $x \in \ker\left(\tilde{A} + \tilde{B}\right) S$
En utilisant 3.0.2 ,on aura : $\left(\tilde{A} + \tilde{B}\right) Sx = 0\ avec\, Sx \in \ker\left(\tilde{A} + \tilde{B}\right)\ \left(injectivit\acute{e}\ de\ \left(\tilde{A} + \tilde{B}\right)\right)$
d'ou $Sx = 0$ alors $x \in \ker S$
$(\Longleftarrow)$ si

$$x \in \ker S \Longrightarrow x \in \ker \tilde{B} \Longrightarrow Sx = 0 \quad et \quad \left[\ \left(\tilde{A} + \tilde{B}\right) inversible\right]$$

Alors :

$$\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)Sx=0$$

d'où

$$x\in\ker\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)S\ \ et\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)S=\tilde{B}$$

d'où

$$\ker\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)S=\ker\tilde{B}/x\in\ker\tilde{B}$$

d'ou le resultat.

Même chose pour

$$\ker\tilde{A}=\ker T\qquad comme\ \ \ker\tilde{B}=\ker S\ \ et\ \ \ker\tilde{A}=\ker T$$

On conclut que :

$$F=ST$$

si $x\in\ker F$ alors $x\in\ker S\ \ et\ \ x\in\ker T$

où

$$x_1\in\ker S\quad et\quad\ker S=\ker\tilde{B}\quad et\quad x_2\in\ker T\quad et\quad\ker T=\ker\tilde{A}$$

avec

$$x=x_1+x_2$$

alors

$$\ker F\subset\{\ker\tilde{A}+\ker\tilde{B}\}\cap H$$

La relation inverse($\supset$)

$$\ker F\supset\{\ker\tilde{A}+\ker\tilde{B}\}\cap H$$

est évidente puisque

$$x\in\{\ker\tilde{A}+\ker B\}\cap H$$

alors $(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}Bx=0$

donc $Fx=\tilde{A}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}Bx=0$

d'ou $x \in \ker F$

Ceci termine la démonstration du **théorème 3.0.5**

Remarque : Le théorème est vérifié si $\ker(A+B) \neq \{0\}$.

Dans ce cas, nous avons besoin de définir A et B dans l'espace de Hilbert $\bar{R}(A+B) \oplus \ker(A+B)$, pour le produit scalaire

$$\langle x, y \rangle_{H_{A+B}} = \langle x, (A+B)y \rangle$$

pour $x, y \in \bar{R}(A+B)$ et $\langle x, y \rangle_{H_{A+B}} = \langle x, y \rangle$

si $x \in \ker(A+B),\ y \in \ker(A+B)$

Ainsi, pour les deux opérateurs positifs A et B , nous pouvons trouver un certain opérateur F tel que $A \geq F$ et $B \geq F$ et

$$F = \tilde{A}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}B = \tilde{B}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}A$$

Maintenant nous essayons de trouver un opérateur maximal avec cette propriété. En d'autres termes nous allons trouver un certain «minimum naturel» de deux opérateur.

□

Théorème 3.0.6 *Soient A, B deux opérateurs bornés dans un espace de Hilbert H, $A \geq 0,\ B \geq 0$*

Alors il existe un opérateur $M \geq 0$ tel que :

$A \geq M,\ B \geq M$ et M est maximal dans le sens s'il existe un opérateur N tel que : $A \geq N$, $B \geq N$ et $M \geq N$, alors :

$$M = N$$

Preuve. Considérons $A + B = I$.

Soit f, g deux fonctions tels que $f(\lambda) = \lambda$ et $g(\lambda) = 1 - \lambda$

figure 1

D'aprés **la figure1** on voit que le minimum de deux fonctions $f(\lambda) = \lambda$ et $g(\lambda) = 1 - \lambda$ est la fonction

$$m(\lambda) = \frac{1 - |1 - 2\lambda|}{2} = \begin{cases} \lambda & si \quad \lambda < \frac{1}{2} \\ 1 - \lambda & si \quad \lambda \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

soit l'opérateur M définie par :

$$M = \frac{I - |I - 2A|}{2} = \int_{1}^{-1} m(\lambda) dE$$

λ est un minimum de A et B, E_λ est la résolution de l'identité de A.

En effet, comme $f(\lambda) \geq m(\lambda)$ et $g(\lambda) \geq m(\lambda)$.

On a $A \geq M$, $B \geq M$.

Si $A \geq N$, $B \geq N$ et $N \geq M$ alors :

$$A - M = A - N + N - M \geq N - M \tag{3.0.3}$$

et

$$B - M = B - N + N - M \geq N - M$$

Cela montre que

$$Ker(N - M) \supset Ker(A - M)$$

En effet si :

$x \in \ker A - M$ alors $A - Mx = 0$ ce qui donne $(A - M)\,x \geq 0$ et d'aprés 3.0.3 on a : $A - M \geq N - M$

donc $(N - M)\,x \geq 0$ alors $(N - M)\,x = 0$ implique que $x \in \ker(N - M)$

d'où $Ker(A - M) \subset Ker(N - M)$

et même chose pour :

$$Ker(N - M) \supset Ker(B - M)$$

Si on considère

$$Ker(A - M) + Ker(B - M) \supset Ker(E[0, \frac{1}{2}]) + Ker(E(\frac{1}{2}, 1]) = H$$

où

$$\begin{aligned} E[0, \frac{1}{2}] &= E_{\frac{1}{2}} - E_0 \\ & et \\ E[\frac{1}{2}, 1] &= E_1 - E_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On conclut que

$$Ker(N - M) = H$$

ou

$$N = M$$

Maintenant , On a A et B deux opérateurs positifs bornés arbitraires.

D'abord on a $A + B > 0$. Au lieu de A et B on considère les opérateurs $(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}A$ et $(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}B$. puis

$$(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}A + (\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}B = I$$

dans H_{A+B}, il existe $M\prime \geq 0$ tel que $M\prime$ est maximale et

$$(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}A \geq M\prime \quad et \quad (\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}B \geq M\prime$$

Alors $(A+B)M\prime$ est l' opérateur positif maximal sur H de telle sorte que

$$(A+B)M\prime \leq A \qquad et \qquad (A+B)M\prime \leq B$$

En effet, pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned}
\langle (A+B)M\prime x, x\rangle &= \langle M\prime x, x\rangle_{A+B} \\
&\leq \left\langle (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}Ax, x\right\rangle_{A+B} \\
&= \langle Ax, x\rangle
\end{aligned}$$

et de façon similaire

$$\begin{aligned}
\langle (A+B)M\prime x, x\rangle &\leq \langle M\prime x, x\rangle_{A+B} \\
&\leq \left\langle (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}Bx, x\right\rangle_{A+B} \\
&= \langle Bx, x\rangle
\end{aligned}$$

Supposons que $A \geq N$, $B \geq N$, et $N \geq M$, puis

$$\left\langle (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}Ax, x\right\rangle_{A+B} \geq \left\langle (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}Nx, x\right\rangle_{A+B} \geq \left\langle (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}Mx, x\right\rangle_{A+B}$$

De même

$$\left\langle (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}Bx, x\right\rangle_{A+B} \geq \left\langle (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}Nx, x\right\rangle_{A+B} \geq \left\langle (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}Mx, x\right\rangle_{A+B}$$

donc $M\prime$ est maximale qu'on a

$$(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}N = M\prime = (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}M$$

Cela veut dire que $(\tilde{A}+\tilde{B})(N-M) = 0$ et $M = N$.

dans le cas ou $\ker(A+B) = \{0\}$, On a besoin de prendre en compte **la note** 3 à la fin de **théorème 3.0.5** $\square$

3.1 Existence du minorant et du majorant de deux opérateurs auto-adjoints

Théorème 3.1.1 *Soient A et B deux opérateurs bornés auto-adjoints dans un espace de Hilbert H, alors il existe un opérateur auto-adjoint T tel que : $A - T \geq 0,\ B - T \geq 0$*
et T est le minorant maximal dans le sens s'il existe un opérateur S tel que : $A - S \geq 0,\ B - S \geq 0$ et
$S \geq T$ alors :

$$T = S$$

Preuve. On note les opérateurs $A + cI$ et $B + cI$ vérifient les conditions du **théorème 3.0.6** , où

$$c = \inf_{||X||=1} \{\langle Ax, x\rangle , \langle Bx, x\rangle\}.$$

En effet, d'aprés le **théorème** 3.0.6, il existe $S \geq 0$ tel que $A+cI \geq S$ et $B+cI \geq S$. Alors l'opérateur $S - cI$ satisfait les conditions du **théorème** 3.1.1. Par conséquent le **théorème** 3.1.1 est prouvé.

Note : On peut passer du minorant maximal aux majorant minimal a partir de la relation suivante :

$$Max(A, B) = -Min(-A, -B)$$

On considère $A - T \geq 0$ et $B - T \geq 0$ .ils sont orthogonal par certains produit scalaire tel que :

$$(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}(\tilde{A} - \tilde{T})(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}(\tilde{B} - \tilde{T}) = 0$$

où $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{T}$ sont les fermuture dans l'espace de Hilbert H_{A+B}, avec le produit scalaire

$$\langle x, y\rangle_{A+B} = \langle (A + B)x, y\rangle$$

(Sinon, nous pouvons trouver un opérateur $\tilde{T}_1 \geq 0$ et $\tilde{T}_1 \neq 0$, tel que $A - \tilde{T} - \tilde{T}_1 \geq 0$ et $\tilde{B} - \tilde{T} - \tilde{T}_1 \geq 0$, ce qui contredit la majoration de T). Maintenant, en utilisant cette note 3.1, nous pouvons prouver le théorème suivant 3.1.2. □

Théorème 3.1.2 *Soient A et B deux opérateurs bornés auto-adjoints dans l'espace de Hilbert H tel que A commute avec B. Alors, il existe un opérateur T auto-adjoint tel que $A - T \geq 0$ et $B - T \geq 0$ avec T est le minorant. A et B peuvent être représentés sous la forme :*

$$A = T + A_1, B = T + B_1 \tag{3.1.1}$$

où $A_1 B_1 = B_1 A_1 = 0$ et A et B commutent avec T, A_1 et B_1.

Preuve. Soit $A \geq 0$, $B \geq 0$. (Sinon, on prend $A + cI$ et $B + cI$ au lieu de A et B). De plus, soit $A + B > 0$: Si $\ker(A + B) \neq \{0\}$, on considère l'espace $\overline{R(A + B)}$ -fermuture de l'image de l'opérateur $(A + B)$ au lieu de H. Soit $A - T \geq 0$ et $B - T \geq 0$ et T est le minorant en termes de produit scalaire $\langle x, y \rangle_{A+B} = \langle (A + B)x, y \rangle$. Celà donne :

$$(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}(\tilde{A} - \tilde{T})(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}(\tilde{B} - \tilde{T}) = 0 \tag{3.1.2}$$

On Montre que T commute avec A et B. Puisque A commute avec l'opérateur B, on a A et B sont $(A + B)$ auto-adjoints dans l'espace de Hilbert H_{A+B}. Soit E_λ^+ est la résolution de l'identité $(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}\tilde{A}$ telle que :

$$(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}\tilde{A} = \int_{-1}^{1} \lambda dE_\lambda^+$$

alors

$$(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}\tilde{T} = \int_{-1}^{1} m(\lambda)\, dE_\lambda^+ = (\tilde{A} + \tilde{B})^{-1} \int_{1}^{-1} m(\lambda)\, dE_\lambda$$

où

$$m(\lambda) = \frac{1 - |1 - 2\lambda|}{2} = \begin{cases} \lambda & si \quad \lambda < \dfrac{1}{2} \\ 1 - \lambda & si \quad \lambda \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Montrons que $(\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}\tilde{A}$ est la fermeture de $(A + B)^{-1}A$ dans H_{A+B}. Comme A commute avec B, l'opérateur $(A + B)^{-1}A$ est densèment défini sur H : $(A + B)^{-1}A \supset A(A + B)^{-1}$ *[10]*, ce qui signifie que pour $\forall x \in D(A + B)^{-1}$, $Ax \in D(A + B)^{-1}$ et de même, $Bx \in D(A + B)^{-1}$.

Celà donne

$$\begin{aligned}\big\langle (A+B)^{-1}Ax, x\big\rangle &= \big\langle (A+B)^{-1}(A+B-B)x, x\big\rangle \\ &= \big\langle (A+B)^{-1}(A+B)x, x\big\rangle - \big\langle (A+B)^{-1}Bx, x\big\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - \big\langle (A+B)^{-1}Bx, x\big\rangle \\ &\leq \langle x, x\rangle\end{aligned}$$

Pour $\forall x \in D(A+B)^{-1}$et donc $(A+B)^{-1}A$ est un operateur borné, positif dans H. alors

$$(A+B)^{-1}Ax = (A+B)^{-1}Ax \qquad \textit{pour tout } x \in D(A+B)^{-1}$$

Et pour

$$\begin{aligned}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A} &= \tilde{A}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1} = \overline{(A+B)^{-1}A} \\ &= (\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{T}\ \tilde{A}\ x \\ &= (A+B)-1TAx\end{aligned}$$

On conclue que A commute avec $(A+B)^{-1}A = \displaystyle\int \lambda dE_\lambda^+$ Ce qui signifie que A commute avec E_λ^+ et

$$(A+B)^{-1}T = \int m(\lambda)dE_\lambda^+$$

[1]. Puisque$A$ et $(A+B)^{-1}T$ sont des opérateurs bornées et $(A+B)$-bornée, on a

$$\begin{aligned}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{A}\ \tilde{T}\ x &= \tilde{A}(\tilde{A}+\tilde{B})^{-1}\tilde{T}\ x = A(A+B)^{-1}Tx \\ &= (A+B)^{-1}TAx = (A+B)^{-1}TAx.\end{aligned}$$

Celà montre que $ATx = TAx$. De même, on peut montrer que $BTx = TBx$, à partir de l'équation suivante 3.1.2.

$$(A+B)^{-1}(A-T)(A+B)^{-1}(B-T) = (A+B)^{-2}(A-T)(B-T) = 0$$

et $(A-T)(B-T) = 0$,

ce qui signifie que la représentation 3.1.1 est vraie,

où $A_1 = A - T$ *et* $B_1 = B - T$. □

CONCLUSION

Dans ce mémoire, on a démontré l'existense du majorant minimal et du minorant maximal de deux opérateurs auto-adjoints par la méthode établie par **A.Aslanov** [**4**].

Nous remarquons que ce travail a été fait récemment d'une manière différente par **G. Cassier, M. Ould Ali** et qui fournit de plus une relation entre le majorant minimal T de deux opérateurs positifs A et B et les images des opérateurs $\sqrt{T-A}$ et $\sqrt{T-B}$ tel que :

$$T \text{ est un majorant minimal } \Longleftrightarrow \operatorname{Im}\sqrt{T-A} \cap \operatorname{Im}\sqrt{T-B} = \{0\} \tag{3.1.3}$$

Bibliographie

[1] N. I .Akhiezer and I.M. Glazman, "Theory of Linear Operators in Hilbert Space", Vol. 1, Pitman Press, London, 1981

[2] C. Akmann and N. Weaver, « Minimal upper bounds of commuting operators », Proc. Amer. Math. Soc., 124, (1996), 3469-3476.

[3] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw, « Positive operators », Springer,(2006), iv-58.

[4] A. Aslanov, « Existence of the Minimum and Maximum of Two Self-Adjoint Operators», Mathematica Balkanica, New series, Vol.19, 2005, Fasc 3-4, 255-265.

[5] F. Bayen, « Espaces de Hilbert et opérateurs », Edition marketing, Tome 2, (1985), 136-153.

[6] R. Bellman, R. Kalaba, « Dynamic programming and modern control theory », One-hour reports, (1965), 65-82.

[7] G. Cassier, M. Ould Ali, « On the set of upper bounds for a finite family of self-adjoint operators ». prépublication hal-00980617, (2014), 1-12.

[8] R.G. Douglas, « On majorization, factorization and rang inclusion of operators in Hilbert space », Proc. Amer. Math. Soc., 17, (1966), 413-416.

[9] F. Kubo, T. Ando, « Means of positif linear operators », Mathh. Ann., 246, (1980), 205-224. 38

[10] Tosio Ka t o, "Perturbation Theory for Linear Operators", 2-nd Edition,Springer-Verlag, New York, 1980