**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM**
**FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET DE L'INFORMATIQUE**

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE**

# Mémoire de fin d'étude

*Intitulé*

problème a deux points pour une équation différentielle du second ordre cas constant

***OPTION : ANALYSE FONCTIONNELLE***

**Présenté par**

TEBANI Abdelhak
OTHMANE CHERIF Abdel illah
*Soutenu le 30 Mai 2016*

**Devant le Jury**

Président : M$^r$ LATREUCH Zineelaabidine
Encadrant : M$^{me}$ DIALA Houria
Examinateur : M$^r$ FATOUCH Elhouari

Année universitaire 2015/2016

**Résumé :**

L'objectif de ce travail est l'étude de l'équation différentielle opérationnelle abstraite du second ordre de type élliptique à coefficients opérateurs constants.Les techniques utilisées reposent sur la théorie du semi-groupe et l'integrale de Dunford.

Mots clés : l'équation differentielle opèrationnelle abstraite du second ordre de type elliptique,puissance fractionnaires, conditions au limites, conditions nécessaires et suffisantes, semi-groupe analytique, integrale de Dunford.

# Table des matières

# Introduction

L'objectif de ce mémoire est de faire une étude de l'équation différentielle opérationnelle abstraite du second ordre de type élliptique :

$$u''(t) + Au(t) = f(t), t \in [0,1]$$

sous les conditions :

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(1) = h \end{cases}$$

où $h \in E$ et $A$ est un opérateur constant.

On suppose dans tout le travail que la résolvante admet la majoration uniforme :

$$(H_0) : \left\| (A-\lambda)^{-1} \right\|_{L(E)} \leqslant \frac{K}{\lambda}; \forall \lambda \succ 0.$$

On s'intéresse ici à l'existence, l'unicité des solutions strictes dans l'espace $C([0,1];E)$ lorsque le second membre est assez régulier.

On construit alors la solution sous la forme d'integrale de Dunford. Cette technique est inspirées des travaux de **DAPARTO-GRIS VARD** [1] et **R.ABBAS** [6].

L'originalité de ce travail est l'utilisation des espaces fractionnaires.

De nombreux auteurs ont étudie l'équation élliptique du second ordre avec différentes conditions aux limites.

On cite **S.G.KREIN** [5], cet auteur traite le problème

avec des conditions aux limites de type

$$u"(t) - \beta^2 u(t) = 0, 0 \leqslant t \leqslant T \quad (D_\beta \ \ dense)$$

avec des conditions aux limites de $u(0) = \varphi; u'(0) = h$.

et $\beta$ un opérateur constant ; et ceci en décomposant le problème en deux problème du premier ordre.

Dans le **premier chapitre** : on a fait un rappelle qui contient les semi-groups , calcul de Dunford, puissances fractionnaires.

**deuxiem chapitre** : on a étudie l'équation homogène et non homogène , on fait l'hypothèse $(H_0)$ qui permet de définir $(-A)^{\frac{1}{2}}$ (voir **A.V.BALAKRISHNAN** [3]).

Ce chapitre est divisée en deux parties, dans la première on a étudie l'équation homogène.Grace à la réduction de l'ordre comme dans **S.G.KREIN** [5], on décompose notre équation en deux problèmes du premier ordre et on utilise la racine carrée de l'opérateur $(-A)$ et les semi-groupes direct.

Au **troixième chapitre** : on illustre le chapitre précédent par un exemple concret.

# Chapitre 1

# RAPELLES :

## 1.1 SEMI-GROUPE FORTEMENT CONTINUS

**Définition 1.1** *on appelle semi-groupe fortement continu une application :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & L(E) \\ t & \rightarrow & G(t) \end{array}$$

*telle que :*

1. $G(0) = I$
2. $G(t+s) = G(t).G(s) \qquad \forall t, s \geq 0$
3. $\forall \varphi \in E$ l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & L(E) \\ t & \rightarrow & G(t)\varphi \end{array}$$

   est fortement continue au point 0

   i.e $\forall \varphi \in E$

$$\lim_{t \to 0^+} \|G(t)\varphi - \varphi\| = 0$$
$$\Rightarrow$$
$$\lim_{t \to 0^+} \|G(t) - I\| = 0$$

**Définition 1.2** *on appelle générateur infinitésimal du semi-groupe $G(t)$ ,l´opérateur*

linéaire non borné $A$ défini par :

$$D_A = \left\{ \varphi \in E \diagup \lim_{t \to 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t} \text{ existe} \right\}$$

$$A\varphi = \lim_{t \to 0^+} \frac{G(t)\varphi - \varphi}{t}$$

**Théorème 1.1** *Soit $A$ un générateur infinitésimal du semi-groupe fortement continue $G(t)$ alors :*

1. $A$ est fermé
2. $D_A$ est dense dans $E$
3. $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} \diagup \operatorname{Re}\lambda \succ \omega\}$ et $\forall K \geq 1$

$$\left\| (A - \lambda I)^{-K} \right\|_{L(E)} \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^k}$$

## 1.2 SEMI-GROUPE ANALYTIQUE

**Théorème 1.2** ***.T.KATO*** [4]

Soit $\Lambda : D_\Lambda \subset E \to E$ un opérateur linéaire non borne verifiant :

1. $\Lambda$ fermé
2. $D_\Lambda$ dense
3. $\rho_\Lambda \supset \{\lambda \in \mathbb{C}^* \diagup \operatorname{Re}\lambda \geq 0\}$ et $\exists\ L \succ 0 \diagup \forall \lambda \in \rho_A$ on ait :

$$\left\| (\lambda - A)^{-1} \right\|_{L(E)} \leq \frac{L}{|\lambda|}$$

alors $\Lambda$ est générateur infinitisimal d'un semi-groupe $G(t)$ tel que :

1. $\exists\ M \succ 0 \diagup \forall\ t \succ 0$ , $\|G(t)\|_{L_{(E)}} \leq M$
2. $\forall\ t \succ 0$ , $G(t) \in L(E; D_\Lambda)$ et $\|\Lambda G(t)\|_{L(E)} \leq \frac{M}{t}$

**Lemme 1.1** $\exists \delta \succ 0 \diagup \rho_\Lambda \supset \left\{ \lambda \in \mathbb{C}^* \diagup |\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \delta \right\}$

## 1.3 INTERPOLATION DES OPÉRATEURS LINÉAIRES

**Définition 1.3** *soit $F$ un espace de banach*

$$f \in L_*^p(\mathbb{R}_+, F) \Leftrightarrow \begin{cases} i. & f \text{ est fortement mesurable} \\ ii. & \left( \int_0^\infty \|f(t)\|_F^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+;F)} \prec +\infty \end{cases}$$

***Notation 1.1*** $\forall k \geq 0 : D_A(\theta; +\infty) = (D_A; E) = \left\{ \varphi \in E : \sup \left\| t^\theta A (A - t)^{-1} \varphi \right\|_E \leq k \right\}.$

## 1.4 ESPACE DE HOLDÉRIENS

Soit E un espace de banach complexe :
$C([0,1],E) = \{f : [0,1] \to E\,;\ f \ \text{ continue}\} = C(E)$.
$C^{\theta}([0,1],E) = \left\{ f : C(E) \to \|f\|_{C^{\theta}(E)} \prec +\infty \right\} \ \ 0 \prec \theta \prec 1.$
$\|f\|_{C^{\theta}(E)} = \max \|f(t)\|_E + \max \frac{\|f(t)-f(s)\|_E}{|t-s|^{\theta}} \ \diagdown \ t,s \in [0,1]$ et $t \neq s$.
On définit aussi les espaces :
$D_A(\theta) = \left\{ \varphi \in E : \lim_{t \to +\infty} \sup \left\| t^{\theta} A (A-t)^{-1} \varphi \right\|_E = 0 \right\}.$

## 1.5 CACUL ET INTÉGRALE DE DUNFORD :

### 1.5.1 Formule de cauchy :

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(\lambda)}{\lambda - Z_0} d\lambda$$

$c$ courbe entourant $z_0$

**Définition 1.4** *soit $\digamma(T)$ l'espace des fonctions à variables complexes qui son analytique*

dans un ensemble fermé contenant $\sigma(T)$ *son spectre* $.T.$étant un opérateur linéaire fermé

### 1.5.2 L´integrale de Dunford :

$$f(T) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(\lambda) (\lambda - TI)^{-1} d\lambda$$

où $f \in \digamma(T)$ et $\gamma$ entourant $\sigma(T)$
$f(t)$ dépand seulement de $f$ et pas du contour $\gamma$

### 1.5.3 Proppriété de l´integrale de Dunford :

Soient $f$ et $g \in \digamma(T)$ alors :
$f.g \in \digamma(T)$ et $f(T)\,g(T) = (f.g)(T)$
i.e.

$$f(T)\,g(T) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(\lambda)\,g(\lambda) (\lambda - T)^{-1} d\lambda.$$

## 1.6 PUISSANCE FRACTIONNAIRES

### 1.6.1 Construction des puissances fractionnaires :

Soit $A$ un opérateur linéaire fermé a domaine non dense dans $E$ et soit $\lambda \succ 0$
$\forall \lambda \in \rho(A)$ et $\left\| \lambda (A - \lambda I)^{-1} \right\| \prec M$ ........................................ $(H_0)$
Soit $\varphi \in D_A$ alor $0 \leq \operatorname{Re}\beta \leq 1$ on définie l'operateur $J^{\beta}$ par :

$$J^{\beta}\varphi = \frac{\sin \pi\beta}{\pi}\int_0^{+\infty} \lambda^{\beta-1}(A-\lambda I)^{-1}(-A)\varphi d\lambda$$

plus généralement pour $\beta$ : $n-1 \leq \operatorname{Re}\beta \leq n$ on définie pour :
$\varphi \in D_{A^n}$

$$J^{\beta}\varphi = J^{\beta-n+1}(-A)^{n-1}\varphi$$

**Lemme 1.2** *les opérateur $j^{\beta}$ admettent des extensions fermées.*

**Lemme 1.3** $\varphi \in D_{A^2}$ *alors pour tout* $0 \leq \operatorname{Re}(\beta+\alpha) \leq 1$

$$J^{\beta+\alpha}\varphi = J^{\beta}J^{\alpha}\varphi$$

**Définition 1.5** $(-A)^{\beta}$ *est la plus petite extension de* $J^{\beta}$

**Théorème 1.3** *Soit $D_A$ dense et $A$ verifiant $(H_0)$ alors : pour* $0 \prec \beta \prec \frac{1}{2}$

$-(-A)^{\beta}$ definie précedement génère un semi-groupe $S_{\beta}(t)$ fortement continue pour $t \geq 0$ uniformément continue pour $t \succ 0$.
Pour $\beta = \frac{1}{2}$ $\quad S_{\frac{1}{2}}(t) = \int_0^{+\infty}(A-\lambda I)^{-1}\sin\sqrt{\lambda}d\lambda$

# 1.7 SEMI-GROUPE ANALYTIQUE GÉNÉRALISÉS :

Soit $A : D_A \subset E \to E$ un opérateure linéare dans un espace de banach $E$
vérifiant la propriété suivante :
$\exists\varphi \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ et $M \succ 0$ tel que :
$\sigma(A) \supset S_{\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C}/ \neq 0 \text{ et } |\arg\lambda| \leq \varphi\}$
et $\forall\lambda \in S_{\varphi}$ ona : $\|\lambda(\lambda-A)\|_{L(E)}^{-1} \leq M$................ $(\omega)$
Où : $\rho(A)$ est l'ensemble résoulvante de $A$
On sait que si $\overline{D_A} = E$, $A$ est générateur d'un semi-groupe analytique.
(*voir* **T.KATO** [4] et **K.YOSIDA** [12])
Mais si on suppose $\overline{D_A} \neq E$ , il est possible de définir une fonction $t \to \exp(At)$
ce qu'on va appeler semi-groupe analytique généralisé.

**Proposition 1.1** *Soit $A$ verifiant $(\omega)$ alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

**1**.si $\varphi \in \overline{D_A}$ , on a : $\lim\limits_{t\to 0}\exp(At)\varphi = \varphi$
inversement :
si $\lim\limits_{t\to 0}\exp(At)x = y$ et $x \in \overline{D_A}$ alors : $y = x$
**2**.$\forall\varphi \in E$ et $\forall t \succ 0$ ona : $\int_0^t \exp(As)\varphi ds \in D_A$ et $\int_0^t \exp(As)\varphi ds = \exp(At)\varphi - \varphi$.
**3**.si $\varphi \in D_A$ et $A\varphi \in \overline{D_A}$ alors : $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\exp(At)\varphi-\varphi}{t} = A\varphi$
inversement : $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\exp(At)\varphi-\varphi}{t} = y$ existe alors :

$$\varphi \in D_A ;\ A\varphi \in \overline{D_A} \text{ et } A\varphi = y$$

**Preuve** : voir (**E.SINESTRARI** [8])

## 1.8 EQUATION PARABOLIQUE DU PREMIER ORDRE :

Beaucoup d'auteurs se sont intéressés au probleme de Cauchy :

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(0) = \varphi \end{cases}$$

On cite **H.TANABE** [10] **,P.E.SOBOLEVSKII** [9] , **A.YAGI** [11] ,et tout récement **E.SINESTRARI** [8] pour le cas constant.

**Définition 1.6** *Cas constant*

On vas donner quelques conditions nécessaire pour que $u$ soit solution stricte de :

$$(0;1) \begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & & 0 \leq t \leq T \\ u(0) = \varphi & f \in C([0,1];E) & E \text{ espace de Banach} \end{cases}$$

**Proposition 1.2** *Si $u$ est une solution stricte de $(0;1)$ ona :*

$u(0) \in D_A$ et $u'(0) = Au(0) + f(0) \in \overline{D_A}$

**Proposition 1.3** *Si $u$ est une solusion stricte de $(0;1)$ alors :*

$\forall t \in [0:T]$

$$u(t) = \exp(At)\varphi + \int_0^t \exp(A(t-s)) f(s)\, ds$$

# Chapitre 2

# EQUATION DU SECOND ORDRE AVEC A CONSTANT

## 2.1 *POSITION DU PROBLÈME ET HYPOTHESES :*

Soit $A$ un opérateur lineaire fermé de domaine $D_A$ non nécéssairement dense dans un espace de Banach $E$ , on considere alors le probleme abstrait suivant :

$$(1.0)\begin{cases} u''(t) + Au(t) = f(t) \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = h \end{cases}$$

Ou $h \in E, f \in C([0,1];E)$ .on suppose que A verifie l'hypothese suivante :

$$(H_0)\begin{cases} \exists \varepsilon \in \mathbb{R}, M > 0 \text{ tels que : } \rho(A) \supset [-\varepsilon^2, +\infty[ \\ \|(\lambda - A)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{M}{1+|\lambda|}+, \forall \lambda \in [-\varepsilon^2, +\infty[ \end{cases}$$

En particulier $\rho(A)$ contient un secteur de la forme $\{\lambda \subset \mathbb{C}\diagup |\arg \lambda| \leq \delta_0\}$ ou $\delta_0 \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On se propose dans ce chapitre d'étudier l'existence, l'unicité de la solution stricte de (1.0) lorsque $f$ est assez réguliere et $h$ vérifie certaines conditions de compatibilité liées a l'équation (1.0) on remarque que l'hypothese $(H_0)$n'implique pas que A est générateur infinitésimale de semi-groupe analytique mais que $-(-A)^{1/2}$ l'est.(*voir* **A.V.BALAKRISHNAN** [3]) .

La méthode utilisée ici pour l'étude du problème $(1,0)$ est basée sur une construction explicite de la solution sous la forme d'intégrale de Dunford comme dans **DAPRATO-GRISVARD** [1] ,**R.LABBAS** [6] , et sur l'utilisation des espaces fractionaires , et la réduction de l'ordre de l'équation par la transformation de **S.G.KREIN** [5]

## 2.2 *ETUDE DE L'EQUATION HOMOGENE :*

On considere :

$$(1.1)\begin{cases} u''(t) + Au(t) = 0 \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = h \end{cases}$$

### 2.2.1 Construction de la solution :

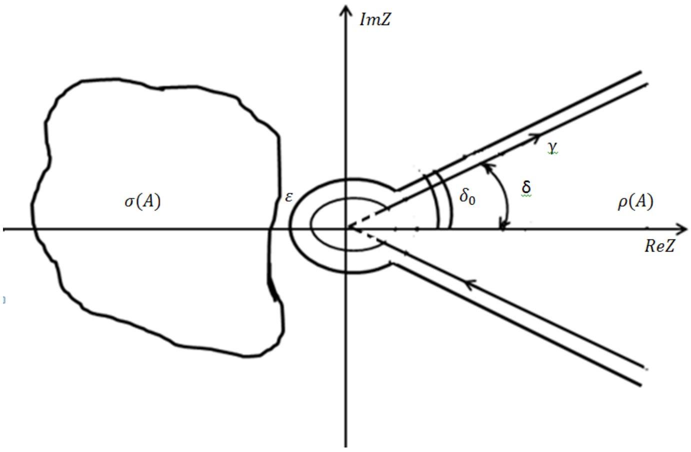
considérons le probleme :

$$(1.2)\begin{cases} v''(t)+zv(t)=0 \\ v(0)=0 \\ v'(1)=h \end{cases}$$

ou $h \in E$ et $z \in \mathbb{C}-\mathbb{R}_+$.un calcul simple montre que :

$$v_z(t)=h\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}$$

Soit $\gamma$ une courbe simple joignant $+\infty\exp(-i\delta)$ à $-\infty\exp(i\delta)$ $(\delta\in]0,\delta_0[)$
telle que : $\gamma\subset\rho(A)-\mathbb{R}_+$
la racine carrée de $-z$ est la démonstration analytique définie sur $\mathbb{C}$ par $\operatorname{Re}\sqrt{-z}>0$




la soulution de (1.1) est donnée formellement par :

$$u(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}h.dz$$

il est facile de voir que cette intégrale est absolument convergent pour chaque $t\in[0,1]$
car $\exists K>0$ ne dépend que de $\delta$ telle que :$\left|\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}\right|\leq K(\delta)\frac{\exp(-|z|^{\frac{1}{2}}(1-t)\cos\frac{\delta}{2})}{|z|^{\frac{1}{2}}}$ $\quad\forall z\in\gamma$
pour $h\in E$ on pose :$H(t,A)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\cosh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}h.dz$
Il est fondamental pour la suite de donner toutes les propriétés de la fonction $H(t,A)\,h$

1. $\exists K$ ne dépend pas de $\gamma$ tel que $\forall h\in E,\forall t\in[0,1[$ , $\|H(t,A)h\|_E\leq K(\delta)$.
2. $H(t,A)h-h\to 0$ qd $t\overset{<}{\to}1$ si et seulement si $h\in\overline{D_A}$

**Preuve**
**1**.Soit $t\in[0,1[$

$$\begin{aligned} H(t,A) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\cosh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}h.dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+}\frac{\cosh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}h.dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_-}\frac{\cosh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}hdz. \end{aligned}$$

$$\text{où } \gamma_+ = \left\{ z \in \gamma / \left| z \right| \geq \tfrac{1}{(1-t)^2} \right\}$$

$$\text{et } \gamma_- = \left\{ z \in \gamma / \left| z \right| \leq \tfrac{1}{(1-t)^2} \right\}$$

En désignant par $I_1$ et $I_2$ ces deux intégrales on a :

$$\begin{aligned} \|I_1\| &\leq K \int_{\gamma+} \tfrac{\exp(-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t))}{|z|} \|h\|_E \, dz \\ &\leq K \int_{\gamma+} \tfrac{\exp(-\sqrt{z}(1-t)\cos\frac{\delta}{2})}{|z|} \|h\|_E \, d\left| z \right| \end{aligned}$$

On a posé : $\alpha = \left| z \right|^{\frac{1}{2}} (1-t)$ Alors :

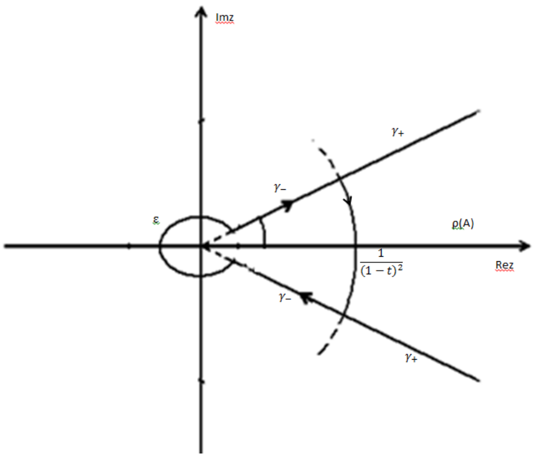
$$\|I_1\| \leq K \int_1^{+\infty} \tfrac{\exp(-\alpha\cos\frac{\delta}{2})}{\alpha^2} 2\alpha.d\alpha. \|h\|_E \leq K(\delta) \|h\|_E$$

pour $I_2$ on écrit que :

$$\begin{aligned} I_2 &= \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} \tfrac{\cosh\sqrt{-z}t - \cosh\sqrt{-z}}{\cosh\sqrt{-z}} (z-A)^{-1} h dz + \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} (z-A)^{-1} h dz \\ &= \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} \tfrac{\cosh\sqrt{-z}t - \cosh\sqrt{-z}}{\cosh\sqrt{-z}} (z-A)^{-1} h.dz \\ &+ \tfrac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} (z-A)^{-1} h.dz - \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C_t} (z-A)^{-1} h.dz \end{aligned}$$

où $\gamma_t = \gamma_- \cup C_t$

$$C_t = \left\{ z \in C \ / \ \left| \arg z \right| \leq \delta \quad \text{et} \quad \left| z \right| = \tfrac{1}{(1-t)^2} \right\}$$




Il est claire que l'intégrale sur $\gamma_t$ est nulle pour les autres intégrales on a :

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma_-} \tfrac{\cosh\sqrt{-z}t - \cosh\sqrt{-z}}{\cosh\sqrt{-z}} (z-A)^{-1} h.dz \right\|_E &\leq K \int_{\gamma_-} \tfrac{1}{|z|} \int_1^t \left| \tfrac{\sqrt{-z}\sinh\sqrt{-z}s}{\cosh\sqrt{-z}} \right| ds \ d\left| z \right| \|h\|_E \\ &\leq K \int_{\varepsilon_0}^{\frac{1}{(1-t)^2}} \int_1^t \tfrac{|z|^{\frac{1}{2}}}{|z|} \exp\left( -\left| z \right|^{\frac{1}{2}} (1-s) \cos\tfrac{\delta}{2} \right) dsd\left| z \right| \|h\|_E \\ &\leq K(1-t) \int_{\varepsilon_0}^{\frac{1}{(1-t)^2}} \tfrac{dz}{|z|^{\frac{1}{2}}} \|h\|_E \\ &\leq K(\delta) \|h\|_E \end{aligned}$$

$$L = \left\| \int_{C_t} (z-A)^{-1} h.dz \right\|_E$$

On pose $z = r\exp(i\theta) = \frac{1}{(1-t)^2}\exp(i\theta) \Longrightarrow dz = \frac{1}{(1-t)^2}\exp(i\theta)\, d\theta$

$$\begin{aligned} L = \left\| \int_{C_t} (z-A)^{-1} h.dz \right\|_E &\leq K \int_{-\delta}^{\delta} \left\| \left( \tfrac{1}{(1-t)^2}\exp(i\theta) - A \right)^{-1} \right\|_E \tfrac{1}{(1-t)^2}\exp(i\theta)\, d\theta \, \|h\|_E \\ &\leq K(\delta) \|h\|_E \end{aligned}$$

D'ou
$\|H(t,A)h\|_E \leq K(\delta).\|h\|_E \quad \forall h \in E \ et \ \forall t \in [0,1[$
**2.c'est une conséquence de 1**.
En effet :
si $h \in \overline{D_A}$ , $\exists y \in D_A$ tq : $\|h-y\| \leq \varepsilon$

$$H(t,A)h - h = (H(t,A)h - H(t,A)y) + (H(t,A)y - y) + (y-h)$$

montrons d'abord que : $H(t,A)y - y \underset{t \overset{<}{\to} 1}{\to} 0$ pour $y \in D_A$
utilisons l'identité :

$$\frac{zy}{z(z-A)} = \frac{zy - Ay + Ay}{z(z-A)} = \frac{y}{z} + \frac{Ay}{z}(z-A)^{-1} \quad ; y \in D_A$$

Donc :

$$\begin{aligned} H(t,A)\,y &= \tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma \tfrac{\cosh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}\,(z-A)^{-1}\,ydz \\ &= \tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma \tfrac{\cosh\sqrt{-z}t}{z\ \cosh\sqrt{-z}} ydz + \tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma \tfrac{\cosh\sqrt{-z}t}{z\ \cosh\sqrt{-z}}\,(z-A)^{-1}\,Aydz \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

On montre que $I_1 = 0$ , en intégrant à gauche de $\gamma$ et que
$I_2 \to y$ qd $t \overset{<}{\to} 1$ pour $y \in D_A$
On a aussi :

$$\|H(t,A)h - H(t,A)y\|_E \leq K(\delta)\,\|h-y\|_E \leq \varepsilon$$

donc $H(t,A)h - h \to 0$ qd $t \overset{<}{\to} 1$ si $y \in \overline{D_A}$
**Reciproquement** :
$\lim\limits_{t\to 1} H(t,A)h = h$ Or $H(t,A)h \in D_A, \forall t > 0$ alors $h \in \overline{D_A}$

### 2.2.2 Conditions nécéssaires et suffisantes

**Définition 2.1** *On dira que* $u \in C([0,1];E)$ *est une solution stricte du probleme* (1.0)

si $u \in C^2([0,1];E) \cup C([0,1];D_A)$ et vérifie l'équation(1.0).

**Proposition 2.1** *$u$ est donnée par :*

$$u\,(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}\,(z-A)^{-1}\,h\ dz$$

est solution strict de$(1;1)$ si et seulement si

1. h$\in \overline{D_A}$
2. h$\in D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}$
3. $(-A)^{\frac{1}{2}}h \in \overline{D_A}$

**Définition de la racine carrée d´un opérateur**

(voir **A.V.BALAKRISHNAN** [3])
Soit $\varphi \in D_A$, on définit l´operateure $J^{\frac{1}{2}}$ par :

$$J^{\frac{1}{2}}\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \lambda^{-\frac{1}{2}} (\lambda - A)^{-1} (-A)\, \varphi \, d\lambda$$

**Lemme 2.1** $J^{\frac{1}{2}}$ *admet une extension fermée*

**Lemme 2.2** $(A)^{\frac{1}{2}}$ *est la plus petite extension fermée de* $J^{\frac{1}{2}}$ $\left(D_{J^{\frac{1}{2}}} \subset D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}\right)$

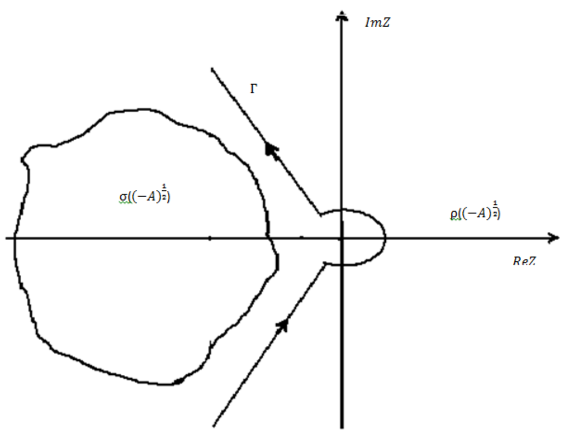
**propriétés :**

1. $(-A)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (-\lambda)^{\frac{-1}{2}} (\lambda - A)^{-1}\, d\lambda$ est borné
2. $(-A)^{-\frac{1}{2}}$ est fermé
3. -$(-A)^{-\frac{1}{2}}$ génère un semi-groupe analytique généralisé $\left(\overline{D_A} \neq E\right)$ noté par :

$\left\{\exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\, t\right)\right\}_{t \succ 0}$ telle que :

$$\exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\, t\right) = \frac{1}{2i\pi}\int_\tau \exp(\lambda t)\left(-(-A)^{\frac{1}{2}} - \lambda\right)^{-1} d\lambda$$

où,Γest une courbe entourant le spectre de l´operateur $(-A)^{-\frac{1}{2}}$




**Démonstrations de la proposition 2.1 :**

Supposons que $u$ est solution stricte du problème $(1;1)$
**Montrons** 1 :h$\in \overline{D_A}$ ?
$h = u'(1) = \lim\limits_{t \to 1} = \frac{u(t)-u(1)}{t-1}$ or $u(t) \in D_A \; \forall t \in [0,1]$
Donc :
$h \in \overline{D_A}$
**montrons** 2 :h$\in D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}$ ?
pour la suite des conditions sur h, on fait une réduction de l´ordre du problème $(1;1)$

à deux problème du premier ordre ceci grâce à la **transformations de S.G.KREIN** [5]
On pose :

$$v(t) = (-A)^{\frac{-1}{2}}\ u'(t) \qquad et \qquad \begin{cases} z(t) = \frac{1}{2}[u(t) - v(t)] \\ w(t) = \frac{1}{2}[u(t) + v(t)] \end{cases}$$

$$v(t) = (-A)^{-\frac{1}{2}} u'(t) \in C^1(E) \qquad et \qquad (-A)^{-\frac{1}{2}} \in L(E)$$

Donc : $v'(t) = (-A)^{-\frac{1}{2}} u''(t)$
De plus ona : $(-A)^{-\frac{1}{2}}[u''(t) + Au(t)] = 0$
ce qui donne $(-A)^{-\frac{1}{2}}\ u'(t) = (-A)^{\frac{1}{2}} u(t)$
d´où : $v'(t) = (-A)^{\frac{1}{2}} u(t)$

$$z(t) = \frac{1}{2}[u(t) - v(t)]$$

Donc :

$$\begin{aligned} z'(t) &= \tfrac{1}{2}[u'(t) - v'(t)] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(-A)^{\frac{1}{2}} v(t) - (-A)^{\frac{1}{2}} u(t)\right] \end{aligned}$$

Alors : $z'(t) = -(-A)^{\frac{1}{2}} z(t)$
De la même manière on a :

$$w'(t) = (-A)^{\frac{1}{2}} w(t)$$

On obtient alors deux problèmes du premier ordre l´un en 0 (**directe**) et l´autre 1 (**rétrograde**)

$$(i)\ \begin{cases} z'(t) = -(-A)^{\frac{1}{2}} z(t) \\ z(0) = -(-A)^{-\frac{1}{2}} u'(0) \end{cases} \quad et \quad (ii) \begin{cases} w'(t) = (-A)^{\frac{1}{2}} w(t) \\ w(1) = \frac{1}{2}\left[u(1) + (-A)^{-\frac{1}{2}} h\right] \end{cases}$$

Les solutions de ces deux proplèmes sont donnès par :

$$\begin{cases} z(t) = \exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}} t\right) z(0) \\ w(t) = \exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}} (1-t)\right) w(1) \end{cases}$$

Où $\left\{\exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}} t\right)\right\}_{t\geq 0}$ est le semi-groupe analytique généralisé généré par l´opérateur $-(-A)^{-\frac{1}{2}}$
D´autre part :

$$\begin{aligned} u(t) &= z(t) + w(t) \\ &= \exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}} t\right) z(0) + \exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}} (1-t)\right) w(1) \end{aligned}$$

Donc :

$$u'(t) = -(-A)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\, t\right) z(0) \; + (-A)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}(1-t)\right) w(1)$$

$$\begin{aligned} h = u'(1) &= \tfrac{1}{2}(-A)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\, t\right)(-A)^{-\frac{1}{2}}\, u'(0) + \tfrac{1}{2}(-A)^{\frac{1}{2}}\left[u(1) + (-A)^{-\frac{1}{2}}\, h\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right) u'(0) + \tfrac{1}{2}\left[(-A)^{\frac{1}{2}}\, u(1) + h\right] \end{aligned}$$

Alors

$$h = \exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right) u'(0) + (-A)^{\frac{1}{2}}\, u(1)$$

**Remarque 2.1** $\exp(\beta t)\ \ \varphi \to \varphi\left(\underset{t \succeq 0}{\to}\right) \Leftrightarrow \varphi \in \overline{D_\beta}$ *On obtient alors* (***E.SINSTRARI*** [8])

$$h = \exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right) u'(0) + (-A)^{\frac{1}{2}}\, u(1)$$

$$(-A)^{\frac{1}{2}}\, u(1) = (-A)^{-\frac{1}{2}}\left[(-A)\, u(1)\right] \qquad car \quad u(1) \in D_A$$

$$(-A)^{\frac{1}{2}}\, u(1) \in D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}$$

De plus :

$$\exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right)\ \varphi \in D_{A^K}, \forall K \succ 0 \ et \ \forall \varphi \in E$$

Donc : $\exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right) u'(0) \in D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}$

Alors

$$h \in D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}$$

Montrons 3 :$(-A)^{\frac{1}{2}}\, h \in \overline{D_A}$

$$\begin{aligned} (-A)^{\frac{1}{2}}\, h &= (-A)\, u(1) + (-A)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right) u'(0) \\ &= u'(1) + (-A)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right) u'(0) \end{aligned}$$

Il est immédiat que :

$$u''(1) \in \overline{D_A}$$

et

$$\begin{aligned} (-A)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right) u'(0) &= \tfrac{1}{2i\pi}\int_\Gamma (-A)^{\frac{1}{2}} \exp(\lambda)\left(-(-A)^{\frac{1}{2}} - \lambda\right)^{-1} u'(0)\, d\lambda \\ &= \tfrac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \exp(\lambda)\, u'(0)\, d\lambda - \tfrac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \lambda \exp(\lambda)\left(-(-A)^{\frac{1}{2}} - \lambda\right)^{-1} u'(0)\, d\lambda \end{aligned}$$

Le premier intégrale est nulle en intégrant à gauche de $\gamma$

Et la deuxième :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \lambda \exp(\lambda)\left(-(-A)^{\frac{1}{2}} - \lambda\right)^{-1} u'(0)\, d\lambda \in \overline{D_A}$$

Car $\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}-\lambda^{-1}u\acute{}(0)\right)\in D_A$
Donc :

$$(-A)^{\frac{1}{2}}\,h\in\overline{D_A}$$

**Montrons la réciproque** :
supposons que :

$$h\in\overline{D_A},\ h\in D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}\ et\quad (-A)^{\frac{1}{2}}\,h\in\overline{D_A}$$

Et montrons que :
$u\in C^2([0{,}1];E)\cap([0,1];D_A)$ et verifie (1; 1)

$$u''(t)\ =-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\sqrt{-z}\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}\,hdz\qquad\qquad pourt\in[0,1[$$

$$\begin{aligned}\|u''(t)\|_E\ &\leq\ K\int_\gamma\tfrac{|Z|^{\frac{1}{2}}}{|Z|}\exp\left(-|z|^{\frac{1}{2}}(1-t)\cos\tfrac{\delta}{2}\right)\|h\|_E\,dz\\ &\leq\ k\int_{\gamma+}\frac{\exp\left(-|z|^{\frac{1}{2}}(1-t)\cos\frac{\delta}{2}\right)}{|z|^{\frac{1}{2}}}\ \|h\|_E\ d|z|+\int_{\gamma-}\frac{\exp\left(-|z|^{\frac{1}{2}}(1-t)\cos\frac{\delta}{2}\right)}{|z|^{\frac{1}{2}}}\ \|h\|_E\ d|z|\\ &\leq\ k(\delta)\|h\|\ pour\ \ t\in[0;1[\end{aligned}$$

Montrons que $u^{''}(1)$ existe

$$u^{''}(t)\ =-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\sqrt{-z}\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}\,hdz$$

vérifions d´abord que :
Si $h\in D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}$ alors

$$u''(t)\ =\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}(-A)^{\frac{1}{2}}\,hdz$$

Cette égalité est une propriété des **intégrales de Dunford** (*voir* **DUNFORD-J.T.SCHWARZ** [2] ) En effet :

$$f(A)\,g(A)=(f.g)(A)$$

On pose :

$$\begin{aligned}f(A)\ &=\ (-A)^{-\frac{1}{2}}\\ g(A)\ &=\ A\left(\sinh(-A)^{\frac{1}{2}}\,t\right)\left(\cosh(-A)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\end{aligned}$$

comme $(-A)^{-\frac{1}{2}}$ et borné de $E$ dans $E$ on a :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma z\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{ch\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}(-A)^{-\frac{1}{2}}\,h\ dz=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma z\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}ch\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}\,h\ dz$$

Or :

$$\begin{aligned} u''(t) &= \tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}\tfrac{\sinh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}hdz \\ &= -\tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma \tfrac{z}{\sqrt{-z}}\tfrac{\sinh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}hdz \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} u''(t) &= -\tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma z\tfrac{\sinh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}(-A)^{\frac{-1}{2}}h \\ &= -\tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma z\tfrac{\sinh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}(-A)^{-\frac{1}{2}}(-A)^{-\frac{1}{2}}(-A)^{\frac{1}{2}}h\ dz \end{aligned}$$

on pose :$y=(-A)^{\frac{1}{2}}h$

$$\begin{aligned} u''(t) &= \tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma z\tfrac{\sinh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}A^{-1}\left[\tfrac{A(z-A)^{-1}y}{z}-\tfrac{y}{z}\right]dz \\ &= \tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma \tfrac{\sinh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}y\ dz-\tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma \tfrac{\sinh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}A^{-1}y\ dz \\ &= \tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma \tfrac{\sinh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}(-A)^{\frac{1}{2}}h\ dz \end{aligned}$$

D´autre part on a :

$$\begin{aligned} u''(t) &= \tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma \tfrac{\sinh\sqrt{-z}t-\cosh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}(-A)^{\frac{1}{2}}h\ dz \\ &+ \tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma \tfrac{\cosh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}(-A)^{\frac{1}{2}}h\ dz \\ &= I_1+I_2 \end{aligned}$$

$$I_1=-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{\exp\left(-(-z)^{\frac{1}{2}}t\right)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}(-A)^{\frac{1}{2}}h\ dz\in C([0;];E)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma \tfrac{\cosh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}(-A)^{\frac{1}{2}}h\ dz \\ &= H(t;A)\,y\to y\ qd\ \underset{\to}{t\preceq 1}\ avec\ \ y=(-A)^{\frac{1}{2}}h\in\overline{D_A} \end{aligned}$$

Donc :

$$u(t)\in C^2([0,1],E)$$

$u(t)\in D_A$ car :

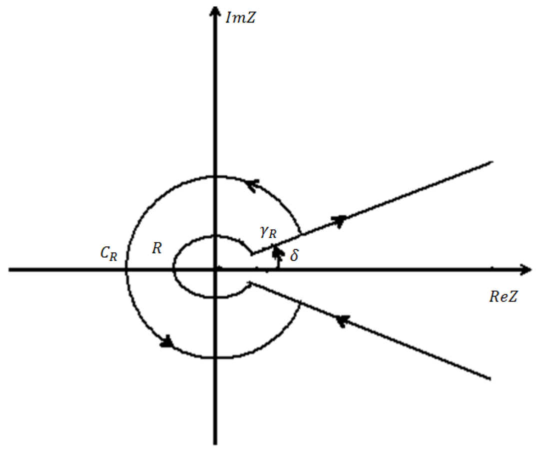
$$\begin{aligned} Au(t) &= \tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma \tfrac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}A(z-A)^{-1}hdz \\ &= -\tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma \tfrac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}hdz-\tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}\tfrac{\sinh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}h\ dz \\ &= J_1+J_2 \end{aligned}$$

$$J_1=0$$

En effet :

$$J_1=\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}hdz$$

Soit : $\Gamma_R=\gamma_R\cup C_R$




$$J_1 = \lim_{R\to+\infty}\left[\int_{\Gamma_R} \frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}} h\ dz - \int_{C_R} \frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}} h\ dz\right]$$

La première intégrale est nulle car l´intégrale est une fonction analytique à l´intérieur de la courbe fermée $\tau_R$
Donc :

$$\begin{aligned} J_1 &= -\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} \tfrac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}} hdz \qquad\qquad z = Re^{i\theta} sur C_R \\ &= -\lim_{R\to+\infty} \int_{-\delta}^{+\delta} \tfrac{\sinh\sqrt{R}e^{\frac{i\theta}{2}}t}{\sqrt{R}e^{\frac{i\theta}{2}}\cosh\sqrt{R}e^{\frac{i\theta}{2}}} iRe^{i\theta} d\theta \\ &\leq K\lim_{R\to+\infty} \int_{-\delta}^{+\delta} \sqrt{R}e^{-\sqrt{R}e^{\frac{i\theta}{2}(1-t)\cos\frac{\delta}{2}}} d\theta = 0 \end{aligned}$$

Et alors :

$$J_2 = Au(t) = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1} h\ dz = -u''(t)$$

$$\Rightarrow J_2 = -u''(t)$$

Donc

$$Au(t) + u''(t) = 0 \qquad \forall t \in [0;1]$$

$u(0) = 0$ que verifieé
En utilisant le lemme (2.1) ona :
$u'(t) = H(t;A)\ h \to h$ qd $t \overset{\prec}{\to} 1$car $h \in \overline{D_A}$
Donc :

$$u'(1) = h$$

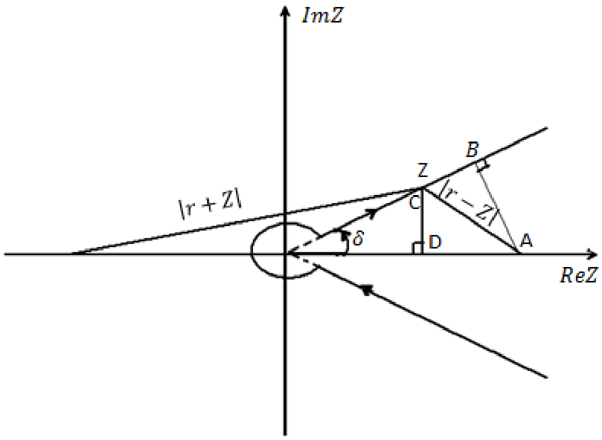
Ce qui montre que $u$ est solution stricte du problème (1.1)
on utilisera constamment les deux lemmes techniques suivants :

**Lemme 2.3** *il existe une constante $K \succ 0$ ne dépendant que de $\gamma$ telle que :*

$\forall z \in \gamma$ , $\forall r \succ 0$

1. $|z \pm r| \geq K\ |z|$
2. $|z \pm r| \geq Kr$

**Preuve** :




1.$|z \pm r| \geq A\ B = r \sin \delta \geq K\ |z|$
2.$|z \pm r| \geq C\ D = |z| \sin \delta \geq Kr$

**Lemme 2.4** *il existe une constante $K$ ne dépendant pas que de $\gamma$ telle que :*

$$\int_\gamma \frac{d\,|z|}{|z \pm r|\,|z|^\alpha} \leq \frac{K}{r^\alpha} \qquad \forall \alpha \in ]0;1[$$

**Preuve** :
C'est une conséquence du lemme précédent

$$\gamma = \gamma_r \cup (\gamma - \gamma_r)$$

Avec $\gamma_r = \{z \in \gamma \diagup |z| \leq r\}$ et $\gamma - \gamma_r = \{z \in \gamma \diagup |z| \geq r\}$

$$\int_\gamma \frac{d|z|}{|z \pm r||z|^\alpha} = \int_{\gamma_r} \frac{d|z|}{|z \pm r||z|^\alpha} + \int_{\gamma - \gamma_r} \frac{d|z|}{|z \pm r||z|^\alpha}$$

$$\int_{\gamma_r} \frac{d|z|}{|z \pm r||z|^\alpha} = \int_{\substack{z \in \gamma \\ |z| \leq r}} \frac{d|z|}{|z \pm r||z|^\alpha} \leq \frac{k}{r} \int_0^r \frac{d|z|}{|z|^\alpha} \leq \frac{k}{r} |z|^{1-\alpha} \quad |_0^r = \frac{k}{r^\alpha}$$

$$\int_{\gamma - \gamma_r} \frac{d|z|}{|z \pm r||z|^\alpha} = \int_r^{+\infty} \frac{d|z|}{|z \pm r||z|^\alpha} \leq k \int_0^{+\infty} \frac{d|z|}{|z|^{1+\alpha}} \leq \frac{k}{|z|^\alpha} \quad |_r^{+\infty} = \frac{k}{r^\alpha}$$

On aura besion d'un lemme qui donne la caractération des espace $D_A\,(\theta; +\infty)$

**Lemme 2.5**

$$\forall r \succ 0, r^\theta \leq \left\| A\,(A - z)^{-1}\,\varphi \right\|_E \leq K \qquad (1)$$

Si et seulement si :

$$\forall z \in \gamma \ , |z|^{\theta} \leq \left\| A\left(A-z\right)^{-1}\varphi \right\|_{E} \leq K \qquad (2)$$

soit $\varphi \in E$ on suppose (1)

$$A\left(A-z\right)^{-1}\varphi = \left[\left(A-z\right)^{-1} - \left(A-|z|\right)^{-1}\right]\varphi + \left(A-|z|\right)^{-1}\varphi$$

$$\left[\left(A-z\right)^{-1} - \left(A-|z|\right)^{-1}\right]\varphi = \left(z-|z|\right)\left(A-z\right)^{-1}\left(A-|z|\right)^{-1}\varphi$$

Donc

$$|z|^{\theta}\left\|\left(A-|z|\right)^{-1}\varphi\right\|_{E} \leq k \quad car \ \ (|z| \succ 0)$$

$$\begin{aligned} |z|^{\theta}\left\|\left[\left(A-z\right)^{-1} - \left(A-|z|\right)^{-1}\right]\varphi\right\|_{E} &\leq |z|^{\theta}\left(z-|z|\right)\left\|\left(A-z\right)^{-1}\left(A-|z|\right)^{-1}\varphi\right\|_{E} \\ &\leq K\,|z|^{\theta}\,\tfrac{z-|z|}{z}\left\|\left(A-|z|\right)^{-1}\varphi\right\|_{E} \\ &\leq K\,|z|^{\theta}\left\|\left(A-|z|\right)^{-1}\varphi\right\|_{E} \\ &\leq K \end{aligned}$$

Pour la réciproque voir **DAPRATO-GRISVARD** [1]
En conséqeunce on aura :

$$D_A\left(\theta,+\infty\right) = \left\{\varphi \in E \diagup \sup |z|^{\theta}\left\|A\left(A-z\right)^{-1}\varphi\right\|_{E} \prec +\infty\right\}$$

## 2.3 EQUATION NON HOMOGÈNE :

Consisérons le problème :

$$(1.0)\begin{cases} u''(t) + Au\left(t\right) = f\left(t\right) & t \in [0,1] \\ u(0) = 0 & f \in C\left([0,1]\,,E\right) \\ u'(1) = h & h \in E \end{cases}$$

La solution éventuelle de cette équation est :

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}hdz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\int_{0}^{1}K_{\sqrt{-Z}}\left(t,s\right)\left(z-A\right)^{-1}f\left(s\right)dsdz$$

Avec

$$K_{\sqrt{-Z}}\left(t,s\right) = \begin{cases} \frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}} & \text{si} \quad 0 \leq s \leq t \\ \frac{\sinh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-s)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}} & \text{si} \quad t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

On a montré précédement que la première intégrale converge , faissons le pour la deuxieme integrale

$$\left\|\int_{0}^{1}K_{\sqrt{-Z}}\left(t,s\right)\left(z-A\right)^{-1}f\left(s\right)\ ds\ dz\right\|_{E} \leq \frac{K}{|z|}\left|\int_{0}^{1}K_{\sqrt{-Z}}\left(t,s\right)ds\right|\left\|f\left(s\right)\right\|_{C([0;1],E)}$$

Avec :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 K_{\sqrt{-Z}}(t,s)\,ds\right| &\leq \left|\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}\right|\int_0^t\left|\sinh\sqrt{-z}s\right|\ ds\\ &+\left|\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}\right|\ \int_t^1\left|\cosh\sqrt{-z}\,(1-s)\right|ds\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 K_{\sqrt{-Z}}(t,s)\,ds\right| &\leq \frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}{\left|\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\right|}\int_0^t\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}sds\\ &+\frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}t}{\left|\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\right|}\ \int_t^1\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-s)\,ds\\ &\leq \frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}{\left|\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\right|}\ \frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}s}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\Big|_0^t-\frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}t}{\left|\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\right|}\ \frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-s)}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\Big|_t^1\\ :\quad &\leq \frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}t\ +\ \cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}t\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}{|z|\cos\frac{\delta}{2}\left|\cosh\sqrt{-z}\right|}\\ &\leq \frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}}{|z|\cos\frac{\delta}{2}\left|\cosh\sqrt{-z}\right|}\\ &\leq \frac{1}{|z|\cos\frac{\delta}{2}}\end{aligned}$$

$$\left\|\int_0^1 K_{\sqrt{-Z}}(t,s)\,(z-A)^{-1}f(s)\,dsdz\right\|_E\leq K\int_\gamma\frac{d\,|z|}{|z|^2}\,\|f\|_{C([0,1],E)}$$

Ce que prouve que cette intégrale converge.

### 2.3.1 Conditions nécessaires

On cherche des conditions nécessaires sur les données $f$ et $h$ pour avoir une unique solution stricte du problème$(1,0)$.

**Proposition 2.2** *Soit* $0\leq\theta\leq\frac{1}{2}$,*on suppse* $f\in C^{2\theta}([0,1],E)$ *tell que :*

$f(1)=0$ et soit $u$ la solution stricte du problème $(1,0)$ alors :

1. $h\in\overline{D_A}$
2. $h\in D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}$
3. $(-A)^{\frac{1}{2}}h\in\overline{D_A}$
4. $f(0)\in\overline{D_A}$

**Preuve :**
**Montrons** $1 : h\in\overline{D_A}$
soit $u$ la solution stricte du problème $(1,0)$

$$h=u'(1)=_t\lim_{\longrightarrow 1}\frac{u(t)-u(1)}{t-1}\in\overline{D_A}\ \ car\ u(t)\in D_A$$

**Montrons** $4 : f(0)\in\overline{D_A}$

$$u''(0)=Au(0)+f(0)=f(0)\qquad donc\ f(0)\in\overline{D_A}$$

**Montrons** 2 : $h \in D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}$
Pour obtenir la suit des conditions on fait la réduction de l'ordre du problème $(1,0)$
En posant :

$$v(t) = (-A)^{\frac{-1}{2}}\ u'(t) \qquad et \qquad \begin{cases} z(t) = \frac{1}{2}[u(t) - v(t)] \\ w(t) = \frac{1}{2}[u(t) + v(t)] \end{cases}$$

$$v(t) = (-A)^{\frac{-1}{2}}\ u'(t)\, Or\, (-A)^{\frac{-1}{2}} \quad \in L(E)\ \ et\ v(t) \in C^1(E)$$

Donc

$$v'(t) = (-A)^{\frac{-1}{2}}\ u''(t)$$

Et on a :

$$(-A)^{\frac{-1}{2}}\ (u''(t) + Au(t)) = (-A)^{\frac{-1}{2}}\ f(t)$$

$$\Rightarrow (-A)^{\frac{-1}{2}}\ u''(t) - (-A)^{\frac{1}{2}}\ u(t) = (-A)^{\frac{-1}{2}}\ f(t)$$

$$\Rightarrow (-A)^{\frac{-1}{2}}\ u''(t) = (-A)^{\frac{1}{2}}\ u(t) + (-A)^{\frac{-1}{2}}\ f(t)$$

Alors

$$v'(t) = (-A)^{\frac{1}{2}}\ u(t) + (-A)^{\frac{-1}{2}}\ f(t)$$

En derivant $z(t)$ et $w(t)$ :

$$\begin{aligned} z'(t) &= \tfrac{1}{2}[u'(t) - v'(t)] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(-A)^{\frac{1}{2}}\ v'(t) - (-A)^{\frac{1}{2}}\ u(t) - (-A)^{\frac{-1}{2}}\ f(t)\right] \\ &= -(-A)^{\frac{1}{2}}\ z(t) - \tfrac{1}{2}(-A)^{\frac{-1}{2}}\ f(t) \\ w'(t) &= \tfrac{1}{2}[u'(t) + v'(t)] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(-A)^{\frac{1}{2}}\ v'(t) + (-A)^{\frac{1}{2}}\ u(t) + (-A)^{\frac{-1}{2}}\ f(t)\right] \\ &= (-A)^{\frac{1}{2}}\ w(t) + \tfrac{1}{2}(-A)^{\frac{-1}{2}}\ f(t) \end{aligned}$$

Le problème $(1,0)$ se transforme alors en deux problèmes du premier ordre :

$$(i)\begin{cases} z'(t) = -(-A)^{\frac{1}{2}}\ z(t) - \frac{1}{2}(-A)^{\frac{-1}{2}}\ f(t) \\ z(0) = -\frac{1}{2}(-A)^{\frac{-1}{2}}\ u'(0) \end{cases}$$

$$(ii)\begin{cases} w'(t) = (-A)^{\frac{1}{2}}\ w(t) + \frac{1}{2}(-A)^{\frac{-1}{2}}\ f(t) \\ w(0) = \frac{1}{2}\left[u(1) + (-A)^{\frac{-1}{2}}\ h\right] \end{cases}$$

Les solutions de ces deux problèmes sont donné par :
$z(t) = \exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}\ t}\right) z(0) - \frac{1}{2}\int_0^t \exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\ (t-s)\right)(-A)^{-\frac{1}{2}}\ f(s)\,ds$
$w(t) = \exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\ (1-t)\right) w(1) - \frac{1}{2}\int_t^1 \exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\ (s-t)\right)(-A)^{-\frac{1}{2}}\ f(s)\,ds$
De plus on a :
$u(t) = z(t) + w(t)$
$\quad = \exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}\ t}\right) z(0) - \frac{1}{2}\int_0^t \exp\left(\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\ \right)(t-s)\right)(-A)^{-\frac{1}{2}}\ f(s)\,ds$

$$+\exp\left(\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right)(1-t)\right)w(1)-\frac{1}{2}\int_t^1\exp\left(\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right)(s-t)\right)\left(-A^{-\frac{1}{2}}\right)f(s)\,ds$$

**On derive** $u(t)$

$$\begin{aligned}
u'(t) &= -(-A)^{\frac{1}{2}\,t}\exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}\,t}\right)z(0)\\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t(-A)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right)(t-s)\right)(-A)^{-\frac{1}{2}}f(s)\,ds\\
&+ (-A)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right)(1-t)\right)w(1)\\
&- \frac{1}{2}\int_t^1(-A)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right)(s-t)\right)(-A)^{-\frac{1}{2}}f(s)\,ds
\end{aligned}$$

On sait que $h=u'(1)$

Donc :

$$\begin{aligned}
h &= u'(1)\\
&= -(-A)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}\,t}\right)z(0)+\frac{1}{2}\int_0^1(-A)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right)(1-s)\right)(-A)^{-\frac{1}{2}}f(s)\,ds\\
&+ (-A)^{\frac{1}{2}}w(1)\\
&= -\frac{1}{2}(-A)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}\,t}\right)(-A)^{\frac{-1}{2}}u'(0)+\frac{1}{2}\int_0^1\exp\left(\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right)(1-s)\right)f(s)\,ds\\
&+ \frac{1}{2}(-A)^{\frac{1}{2}}\left[u(1)+(-A)^{\frac{-1}{2}}h\right]\\
&= -\frac{1}{2}\exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}\,t}\right)u'(0)+\frac{1}{2}\int_0^1\exp\left(\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right)(1-s)\right)f(s)\,ds\\
&+ \frac{1}{2}(-A)^{\frac{1}{2}}u(1)+\frac{1}{2}h\\
&= \exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}\,t}\right)u'(0)+(-A)^{\frac{1}{2}}u(1)+\int_0^1\exp\left(\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right)(1-s)\right)[f(s)-f(1)]\,ds
\end{aligned}$$

L'integrale converge car $f\in C^{2\theta}([0,1],E)$

et $\exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}\,t}\right)u'(0)\in D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}$ $[car\ \ \exp(^{\alpha t})\varphi\in D_{\alpha^k}\ \ \forall k\succ 0]$ (voir **E.SINESTRARI** [8])

$(-A)^{\frac{1}{2}}u(1)=(-A)^{\frac{-1}{2}}[(-A)u(t)]\in D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}$

$$\left\|\int_0^1\exp\left(\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right)(1-s)\right)[f(s)-f(1)]\,ds\right\|_E\le k\int_0^1\frac{1}{1-s}(1-s)^{2\theta}\,ds\le k$$

Donc :

$\int_0^1\exp\left(\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right)(1-s)\right)[f(s)-f(1)]\,ds\in D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}$

et alors :

$$h\in D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}$$

**Montrons** 3 : $(-A)^{\frac{1}{2}}h\in\overline{D_A}$

On a $\quad h=\exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}\,t}\right)u'(0)+(-A)^{\frac{1}{2}}u(1)$

$\qquad +\int_0^1\exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}(1-s)\right)[f(s)-f(1)]\,ds$

Donc :

$$\begin{aligned}(-A)^{\frac{1}{2}}\ h &= (-A)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}\ t}\right)\ u'(0)+(-A)\ u(1)\\ &+ \int_0^1 (-A)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\ \right)(1-s)\right)[f(s)-f(1)]\,ds\end{aligned}$$

$$(-A)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}\ t}\right)\ u'(0)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}(-A)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right)(z-A)^{-1}u'(0)\,dz\in\overline{D_A}$$

et
$(-A)\ u(1)=u''(1)-f(1)=u''(1)\in\overline{D_A}$
et
$\int_0^1 (-A)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\ (1-s)\right)[f(s)-f(1)]\,ds.........M$

$$M=\frac{1}{2i\pi}\int_0^1\int_{\gamma}(-A)^{\frac{1}{2}}\exp\left((-A)^{\frac{1}{2}}(1-s)\right)(z-A)^{-1}[f(s)-f(1)]\,dzds\in\overline{D_A}$$

On obtient alors :

$$(-A)^{\frac{1}{2}}\ h\in\overline{D_A}$$

et la proposition est complètement démontrée

## 2.3.2 Existence et unicité de la solution stricte

**Proposition 2.3**

Soit $0\prec\theta\prec\frac{1}{2}$,on suppose $f\in C^{2\theta}([0,1];E)$ tell que $f(1)=0$ si :

1. $h\in\overline{D_A}$
2. $h\in D_{-(-A)^{\frac{1}{2}}}$
3. $(-A)^{\frac{1}{2}}\,h\in\overline{D_A}$
4. $f(0)\in\overline{D_A}$

Alors :
$u$ donnée par :
$u(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}h.dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\int_0^1 K_{\sqrt{-Z}}(t,s)\,(z-A)^{-1}f(s)\,dsdz$
est une solution stricte du problème $(1,0)$
**Preuve :**

$$\begin{aligned}u(t) &= \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\tfrac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}hdz\\ &- \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\int_0^1 K_{\sqrt{-Z}}(t,s)\,(z-A)^{-1}[f(s)-f(t)]\,dsdz\\ &- \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\tfrac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{z\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}f(t)\,dz+\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\tfrac{(z-A)^{-1}}{z}f(t)\,.dz\end{aligned}$$

pour montre que $u(t) \in D_A$ , il suffit de montrer que les integralles $J_1$ et $J_2$ et $J_3$ sont convergentes

$$\left\{\begin{array}{l} J_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}A(z-A)^{-1}h.dz \\ \\ J_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{z\cosh\sqrt{-z}}A(z-A)^{-1}f(t)\,dz \\ \\ J_3 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^1 K_{\sqrt{-Z}}(t,s)\,A(z-A)^{-1}\left[f(s)-f(t)\right]dsdz \end{array}\right.$$

$J_1$ est absolument convergente (voir le cas homogène)

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}\left[f(t)-f(0)\right]dz \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}f(0)\,dz \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

$I_2$ converge absolument car $f(0) \in \overline{D_A}$ , on montre de la même manière qu'on l'a fait dans (*lemme* 2.1)

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+} \frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}\left[f(t)-f(0)\right]dz \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_-} \frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)-\cosh\sqrt{-z}}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}\left[f(t)-f(0)\right]dz \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_-}(z-A)^{-1}\left[f(t)-f(0)\right]dz \\ &= Y_1 + Y_2 + Y_3 \end{aligned}$$

Où

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_+ = \left\{z \in \gamma \diagup |z| \geq \frac{1}{t^2}\right\} \\ \gamma_- = \left\{z \in \gamma \diagup |z| \leq \frac{1}{t^2}\right\} \end{array}\right.$$

$$Y_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+} \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(1-t)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}\left[f(t)-f(0)\right]dz$$

$$\|Y_1\|_E \leq K\int_1^{+\infty} \frac{\exp\left(-|z|^{\frac{1}{2}}\,t\cos\frac{\delta}{2}\right)}{|z|}t^{2\theta}d\,|z|\,\|f\|_{C^{2\theta}(E)}$$

on pose :$\sigma = |z|^{\frac{1}{2}}\,t$

$$\begin{aligned} \|Y_1\|_E &\leq K\int_1^{+\infty} \frac{\exp\left(-\sigma\cos\frac{\delta}{2}\right)}{\frac{\sigma^2}{t^2}}\frac{2\sigma}{t^2}d\sigma\,\|f\|_{C^{2\theta}(E)} \\ &\leq K\int_1^{+\infty} \frac{\exp\left(-\sigma\cos\frac{\delta}{2}\right)}{\sigma}d\sigma\,\|f\|_{C^{2\theta}(E)} \\ &\leq K\,\|f\|_{C^{2\theta}(E)} \end{aligned}$$

$$\|Y_2\|_E = \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_-} \frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)-\cosh\sqrt{-z}}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}\left[f(t)-f(0)\right]dz\right\|_E$$

$$\leq K \int_{\gamma_-} \frac{1}{|z|} \left| \int_0^t \frac{\sqrt{-z}\sinh(1-s)}{\cosh\sqrt{-z}} ds \right| t^{2\theta} dz \, \|f(t)\|_{C^{2\theta}(E)}$$

$$\leq K \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{t^2}} t^{1+2\theta} \frac{d|z|}{|z|^{\frac{1}{2}}} \|f(t)\|_{C^{2\theta}(E)}$$

$$\leq K \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{t^2}} t^{1+2\theta} |z|^{\frac{1}{2}} = k\left(\frac{1}{t} - \varepsilon\right) t^{1+2\theta}$$

$$\leq K t^{2\theta}$$

$$Y_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_-} (z - A)^{-1} [f(t) - f(0)] \, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_t} (z - A)^{-1} [f(t) - f(0)] \, dz$$

$$-\frac{1}{2i\pi} \lim_{R\to+\infty} \int_{C_t} (z - A)^{-1} [f(t) - f(0)] \, dz$$

avec : $\gamma_t = \ \gamma_- \cup C_t$ et $C_t = \left\{ z \diagup |\arg z| \leq \delta \ \text{ et } \ |z| = \frac{1}{t^2} \right\}$

Pour la troisième intégrale on a :

$$\begin{aligned}
\|J_3\| &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left\| \int_0^1 K_{\sqrt{-Z}}(t,s) \, A(z-A)^{-1} [f(s) - f(t)] \, ds \right\|_E d|z| \\
&\leq K \int_{\gamma} \int_0^1 \sup_{0\leq t\leq 1} \left| K_{\sqrt{-Z}}(t,s) \right| \|f(s) - f(t)\|_E \, dsd\,|z| \\
&\leq K \int_{\gamma} \sup_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 \left| K_{\sqrt{-Z}}(t,s) \right| |s-t|^{2\theta} \, dsd\,|z|
\end{aligned}$$

Majorons et utilisons l'integrale de Holder :

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left|K_{\sqrt{-Z}}(t,s)(s-t)^{2\theta}\right| ds &\leq \int_0^t \left|\frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh(1-t)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}\right|(t-s)^{2\theta}ds+\int_t^1\left|\frac{\sinh\sqrt{-z}s\cosh(1-t)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}\right|(s-t)^{2\theta}ds \\
&\leq \frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}{\left|\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\right|}\left(\int_0^t\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}sds\right)^{1-2\theta} \\
&\quad .\left(\int_0^t\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}s\,(t-s)\,ds\right)^{2\theta} \\
&+ \frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}t}{\left|\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\right|}\left(\int_t^1\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-s)\,ds\right)^{1-2\theta} \\
&\quad .\left(\int_t^1\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}\,(1-s)\,(s-t)\,ds\right)^{2\theta} \\
&\leq \frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}{\left|\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\right|}\left(\frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}t}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right)^{1-2\theta}\left(\frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}t-1}{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^2}\right)^{2\theta} \\
&+ \frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}t}{\left|\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\right|}\left(\frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}{\operatorname{Re}\sqrt{-z}}\right)^{1-2\theta}\left(\frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)-1}{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^2}\right)^{2\theta} \\
&\leq \frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}{\left|\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\right|}\frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}t}{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^{1+2\theta}}\left(\frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)-1}{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}t}\right)^{2\theta} \\
&+ \frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}t}{\left|\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}\right|}\frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}{\left(\operatorname{Re}\sqrt{-z}\right)^{1+2\theta}}\left(\frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)-1}{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}\right)^{2\theta} \\
&\leq k\frac{\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}t+\cosh\operatorname{Re}\sqrt{-z}t\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}(1-t)}{|z|^{\frac{1}{2}}|z|^{\frac{1}{2}(1+2\theta)}\cos\frac{\delta}{2}\left|\cosh\sqrt{-z}\right|} \\
&\leq k\frac{\sinh\operatorname{Re}\sqrt{-z}}{\cosh\sqrt{-z}}\frac{1}{|z|^{1+\theta}} \\
&\leq k\frac{1}{|z|^{1+\theta}}
\end{aligned}
$$

On a par la suite :

$$\|J_3\| \leq k\int_\gamma \frac{d|z|}{|z|^{1+\theta}}$$

Ce que prouve que $J_3$ est abseuloment convergente

Donc :

$u(t)\in D_A$

et

$$
\begin{aligned}
Au(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}A(z-A)^{-1}h.dz \\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^1 K_{\sqrt{-Z}}(t,s)\,A(z-A)^{-1}\left[f(s)-f(t)\right]dsdz \\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{z\cosh\sqrt{-z}}A(z-A)^{-1}f(t)\,dz+f(t)
\end{aligned}
$$

Il reste à montre que :$u''(.)+Au(.)=f(.)$

$$\begin{aligned}
u\,(t) &= \tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tfrac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}hdz \\
&- \tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tfrac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}\left(\int_0^t \sinh\sqrt{-z}s(z-A)^{-1}f\,(s)\,ds\right)dz \\
&- \tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tfrac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}\left(\int_t^1 \cosh\sqrt{-z}\,(1-s)\,(z-A)^{-1}f\,(s)\,ds\right)dz \\
u'\,(t) &= \tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tfrac{\cosh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}hdz \\
&+ \tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tfrac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)}{\cosh\sqrt{-z}}\int_0^t \sinh\sqrt{-z}s(z-A)^{-1}f\,(s)\,dsdz \\
&- \tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tfrac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}\sinh\sqrt{-z}t(z-A)^{-1}f\,(t)\,dz \\
&- \tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tfrac{\cosh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}\int_t^1 \cosh\sqrt{-z}\,(1-s)\,(z-A)^{-1}f\,(s)\,dsdz \\
&+ \tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tfrac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}\cosh\sqrt{-z}\,(1-t)\,(z-A)^{-1}f\,(t)\,dz \\
&= \tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \tfrac{\cosh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}h\ dz \\
&+ \tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\int\limits_0^t \tfrac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}f(s)ds\ dz \\
&- \tfrac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\int\limits_t^1 \tfrac{\cosh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-s)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}f(s)ds\ dz
\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$ ,on pose alors :

$$\begin{aligned}
V\prime_\epsilon\,(t) = {} & \tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma \tfrac{\sinh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}\,(z-A)^{-1}\,hdz \\
& + \tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^{t-\epsilon} \tfrac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}t}{\sinh\sqrt{-z}}\,(z-A)^{-1}\,f\,(s)\,dsdz \\
& - \tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{t+\epsilon}^1 \tfrac{\cosh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}}{\cosh\sqrt{-z}}\,(1-s)\,(z-A)^{-1}\,f\,(s)\,dsdz
\end{aligned}$$

par la siut on calculera $V_\epsilon\,(t)$ et on fera tendre $\epsilon$ vers 0 pour montrer que :

$$V_\epsilon'(t) \to -Au(t) + f(t)\ qd\ \epsilon \to 0$$

$$\begin{aligned}
V\prime_\epsilon\,(t) = {} & \tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sqrt{-z}\tfrac{\sinh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}\,(z-A)^{-1}\,hdz \\
& - \tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_0^{t-\epsilon} \sqrt{-z}\tfrac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\cosh\sqrt{-z}}\,(z-A)^{-1}\,f\,(s)\,dsdz \\
& + \tfrac{1}{2i\pi}\int_\gamma \tfrac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-z}}\,(z-A)^{-1}\,f\,(t-\epsilon)\,dsdz
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\int_{t+\epsilon}^{1}\sqrt{-z}\frac{\sinh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-s)}{\cosh\sqrt{-z}}\left(z-A\right)^{-1}f\left(s\right)dsdz$$

$$+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{\cosh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-t-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-z}}\left(z-A\right)^{-1}f\left(t+\epsilon\right)dz$$

$$V\prime_\epsilon\left(t\right)=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\sqrt{-z}\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}\left(z-A\right)^{-1}hdz$$

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\sqrt{-z}\int_0^{t-\epsilon}\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\cosh\sqrt{-z}}\left(z-A\right)^{-1}\left[f\left(s\right)-f\left(t\right)\right]dsdz$$

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\sqrt{-z}\int_0^{t-\epsilon}\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\cosh\sqrt{-z}}\left(z-A\right)^{-1}f\left(t\right)dsdz$$

$$+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-z}}\left(z-A\right)^{-1}f\left(t-\epsilon\right)dz$$

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\sqrt{-z}\int_{t+\epsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-s)}{\cosh\sqrt{-z}}\left(z-A\right)^{-1}\left[f\left(s\right)-f\left(t\right)\right]dsdz$$

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\sqrt{-z}\int_{t+\epsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-s)}{\cosh\sqrt{-z}}\left(z-A\right)^{-1}f\left(t\right)dsdz$$

$$+\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{\cosh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-t-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-z}}\left(z-A\right)^{-1}f\left(t+\epsilon\right)dz$$

$$\begin{aligned}
V_\epsilon'(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\sqrt{-z}\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}h\ dz\\
&- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\sqrt{-z}\int\limits_0^{t-\epsilon}\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}\left[f(s)-f(t)\right]ds\ dz\\
&- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\cosh\sqrt{-z}(t-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-Z}}(z-A)^{-1}f(t)dz\\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\cosh\sqrt{-Z}}(z-A)^{-1}f(t)dz\\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{\sinh\sqrt{-Z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-Z}}(z-A)^{-1}f(t-\epsilon)\ dz\\
&- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\sqrt{-z}\int\limits_{t+\epsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-s)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}\left[f(s)-f\left(t\right)\right]dsdz\\
&- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{\sinh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-t-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}f(t+\epsilon)dz\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{\cosh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-t-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}f(t+\epsilon)dz
\end{aligned}$$

$$V'_\epsilon(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sqrt{-z}\frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}hdz$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z\int_0^{t-\epsilon}\frac{\cosh\sqrt{-Z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-Z}}(z-A)^{-1}\left[f(s)-f(t)\right]ds\ dz$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z\int_{t+\epsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-Z}t\cosh\sqrt{-z}(1-s)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-Z}}(z-A)^{-1}\left[f(s)-f(t)\right]ds\ dz$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}\left[f(t)-f(0)\right]dz$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}f(0)dz$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\cosh\sqrt{-z}(t-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}f(t)dz$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-t-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}f(t+\epsilon)dz$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}f(t-\epsilon)dz$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}t\sinh\sqrt{-z}(1-t-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}f(t)dz$$

$$=\sum_{i=0}^{9}L_i$$

L'integrale $L_1$ est absolument convergente pour $t\in[0,1]$

(montré dans le cas homogène sous les hypothèses $h\in D_{(-A)^{\frac{1}{2}}}$ et $(-A)^{\frac{1}{2}}h\in\overline{D_A}$).

les integrales $L_2$ et $L_3$ convergent pour $t\in[0,1]$ et $f\epsilon C^{2\theta}([0,1];E)$ , de même pour $L_4$

$L_5$ converge sous l'hypothèse $f(0)\in\overline{D_A}$.

Par la suite on va montrer que $L_i, i=\overline{6,9}$ sont convergentes $\forall\ t\ \ /\ \ 0\le t\le 1$ et que :

$L_6+L_7\to 0$ et $L_8+L_9\to 0$ qd $\epsilon\to 0$.

$$\begin{aligned}
L_6+L_7 &= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\cosh\sqrt{-z}(t-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}f(t)dz \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\cosh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-t-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}f(t+\epsilon)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\cosh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}(1-t-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}\left[f(t+\epsilon)-f(t)\right]dz \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\cosh\sqrt{-z}t\ \cosh\sqrt{-z}(1-t-\epsilon)-\cosh\sqrt{-z}(1-t)\cosh\sqrt{-z}(t-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}f(t)dz
\end{aligned}$$

En développant ces intégrales on a :

$$\begin{aligned}
L_6+L_7 &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-\epsilon)}{2\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}\left[f(t+\epsilon)-f(t)\right]dz \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-2t-\epsilon)}{2\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}\left[f(t+\epsilon)-f(t)\right]dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-2t-\epsilon)-\cosh\sqrt{-z}(1-2t+\epsilon)}{2\cosh\sqrt{-Z}}(z-A)^{-1}f(t)dz
\end{aligned}$$

Montrons que chacune de ces intégrale tend vers 0 quand $\varepsilon$ tend vers 0

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}\left[f(t+\varepsilon)-f(t)\right]dz\right\|_E &\leq K\left\|f(t+\varepsilon)-f(t)\right\|_E \\
&\leq K\exp(2\theta)\left\|f\right\|_{C^{2\theta}(E)}
\end{aligned}$$

(voir démonstration *lemme* (2.1))

Donc la première intégrale tend vers 0 qd $\varepsilon\to 0$

On fait de même pour la deuxième intégrale et pour la troisième

$\left\|\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma}\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-2t-\varepsilon)-\cosh\sqrt{-z}(1-2t-\varepsilon)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}f(t)\,dz\right\|_E$

$=\left\|\frac{1}{2i\pi}\int_{2t-\varepsilon}^{2t+\varepsilon}\int_{\gamma}\sqrt{-z}\frac{\sinh\sqrt{-z}(1-\sigma)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}f(t)\,dz\,d\sigma\right\|_E$

$\leq K\int_{2t-\varepsilon}^{2t+\varepsilon}\left(\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\exp\left(-|z|^{\frac{1}{2}}\sigma\cos\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right)}{|z|^{\frac{1}{2}}}d|z|\right)\|f\|_{C([0,1];E)}$

$\leq K\int_{2t-\varepsilon}^{2t+\varepsilon}\left(\int_{\sqrt{\varepsilon}\sigma}^{+\infty}\frac{\exp\left(-s\ \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right)}{\sigma}ds\right)d\sigma\,\|f\|_{C(E)}$

$\leq K\int_{2t-\varepsilon}^{2t+\varepsilon}\frac{1}{\sigma}\left(\int_{0}^{+\infty}\exp\left(-s\ \cos\left(\frac{\sigma}{2}\right)\right)ds\right)d\sigma\,\|f\|_{C(E)}$

$\leq K\int_{2t-\varepsilon}^{2t+\varepsilon}\frac{d\sigma}{\sigma}\|f\|_{C(E)}=K\log\left(\frac{2t+\varepsilon}{2t-\varepsilon}\right)\to 0\quad\text{qd}\quad\varepsilon\to 0$

Ce qui implique que $I_6+I_7\to 0$ qd $\epsilon\to 0$

$$
\begin{aligned}
L_8+L_9 &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-Z}}(z-A)^{-1}\left[f(t-\epsilon)-f(t)\right]dz \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}(t-\epsilon)-\sinh\sqrt{-z}t\ \sinh\sqrt{-z}(1-t-\epsilon)}{\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}f(t)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(1-\epsilon)}{2\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}\left[f(t-\epsilon)-f(t)\right]dz \\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(1-2t-\epsilon)}{2\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}\left[f(t-\epsilon)-f(t)\right]dz \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}(1-2t-\epsilon)-\cosh\sqrt{-z}(1-2t+\epsilon)}{2\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}f(t)dz
\end{aligned}
$$

et de la même maniere on montre que $I_8+I_9\to 0 \quad \text{qd} \quad \epsilon\to 0$

$$
\begin{aligned}
-Au(t)+f(t) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}\ t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}A(z-A)^{-1}hdz \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^1 K_{\sqrt{-z}}(t,s)A(z-A)^{-1}\left[f(s)-f(t)\right]dsdz \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\ (1-t)}{z\cosh\sqrt{-z}}A(z-A)^{-1}\left[f(t)-f(0)\right]dz \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\ (1-t)}{z\cosh ch\sqrt{-z}}A(z-A)^{-1}f(0)dz
\end{aligned}
$$

Retournons à $V_\epsilon'(t)$ :

On a déja montré dans le cas homogéne que :

$$L_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sinh\sqrt{-z}t}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}A(z-A)^{-1}hdz$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (z-A+A)\int_0^{t-\epsilon}\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}(z-A)^{-1}\left[f(s)-f(t)\right]dsdz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^{t-\epsilon}\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}\left[f(s)-f(t)\right]dsdz \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^{t-\epsilon}\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}A(z-A)^{-1}\left[f(s)-f(t)\right]dsdz \end{aligned}$$

La première intégrale est nulle en intégrant à gauche de $\gamma$ car la fonction à intégrer se comporte comme :
$0(\exp(-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(t-s)/\left|z\right|^{1/2})$ pour $t-s>0$
Donc :

$$L_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_0^{t-\epsilon}\frac{\cosh\sqrt{-z}(1-t)\sinh\sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}A(z-A)^{-1}\left[f(s)-f(t)\right]dsdz$$

De la même manière on montre que :

$$L_3 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_{t+\epsilon}^{1}\frac{\sinh\sqrt{-z}t\cosh\sqrt{-z}\,(1-s)}{\sqrt{-z}\cosh\sqrt{-z}}A(z-A)^{-1}\left[f(s)-f(t)\right]dsdz$$

$$\begin{aligned} L_4+L_5 &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(1-t)}{z\cosh\sqrt{-z}}A(z-A)^{-1}\left[f(t)-f(0)\right]dz \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cosh\sqrt{-z}\,(1-t)}{z\cosh\sqrt{-z}}A(z-A)^{-1}f(0)dz \end{aligned}$$

on a alors montreé que :
$\sum_{i=1}^{5} L_i \to -Au(t)+f(t)$ qd $\epsilon\to 0$
en conséquence il vient : qd $\epsilon\to 0$

$$\left.\begin{array}{c} V_\epsilon'(t)\to -Au(t)+f(t) \\ Or \\ V_\epsilon'(t)\to u'(t) \end{array}\right\}\to u''(t) = -Au(t)+f(t)$$

Pour achever la démonstration de la (*proposition* 2.3) on montre que :
$u'(t)\to h$ qd $t\overset{<}{\to}1$
et ceci est vrai grâce au (*lemme* 2.1)

# Chapitre 3

# Exemple :

## 3.1 Exemple concret :

$E = L^2(\mathbb{R})$, on définit un opérateur $A$ par :

$$\begin{cases} D_A = H^2(\mathbb{R}) \\ Au = u'' \end{cases}$$

L'espace $E$ étant un Hilbert et $(-A)$ auto-adjoint positif, on sait alors d'aprés un résultat dans **J.L.LIONS-E.MAGENES** [7] que :

$$\begin{aligned} D_{(-A)^{\frac{1}{2}}} &= D_A\left(\tfrac{1}{2};2\right) \\ &= \left(H^2(\mathbb{R});L^2(\mathbb{R})\right)_{\frac{1}{2};2} \end{aligned}$$

Et ce dernier espace est exactement $H^1(\mathbb{R})$

$$(-A)^{\frac{1}{2}}u = iu$$

**Lemme 3.1** *L'opérateur $A$ ainsi défini vérifie $(H_0)$ et est à domaine dense*

On considére donc le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x) \qquad t \in [0,1].x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(1,x) = h(x) \end{cases}$$

qui équivalent à :

$$\begin{cases} \Delta u = f \qquad sur \ \ \Omega \\ u\diagup_{\Gamma_0} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}\diagup_{\Gamma_1} = h \end{cases}$$

qui est un opérateur mêlé (**NEWMANI-DIRICHLET**)
ou $\Omega = ]0,1[\times\mathbb{R}$ et :

Si on applique les propositions $(2,2)$ et $(2,3)$ on obtient :

**Proposition 3.1** *Soit $f \in C^{2\theta}([0;1], L^2(\mathbb{R}))$ $(0 \leq 2\theta \leq +\infty)$ tel que :*

$f(1,x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ alors il existe une unique solution

$$u \in C^{2\theta}\left([0;1], L^2(\mathbb{R})\right) \cap C\left([0,1], H^2(\mathbb{R})\right)$$

du probléme$(3,0)$ si seulement si :

$$h \in H^2(\mathbb{R})$$

Pour ennonce un résultat de régularité concrete ,on utilise la proposition $(2,3)$ et les résultats d'interpolation suivants,donne dans **DAPRATO-GRISVARD** $[1]$.

Soit $x = L^P(]0,1[, E)$ , $1 \leq p \leq +\infty$

$Au = u''$ et $D_A = \{u \in L^p(]0,1[, E)/u', u'' \in L^p(]0,1[, E)$ et $u(0) = u(1) = 0\}$

alors : pour $0 \prec \theta \prec 1$

$D_A(\theta, p) = (D_A, x)_{1-\theta,p}$

Donc :

$$D_A(\theta,p) = \begin{cases} W^{2\theta,p}(]0,1[;E) & si \;\; 2\theta \prec \frac{1}{p} \\ \\ \left\{u \in L^p(]0,1[;E) \,/\, \int_0^1 \|u(t)\|_E^p \frac{dt}{t(1-t)} \prec +\infty\right\} & si \;\; 2\theta = \frac{1}{p} \\ \\ \{u \in W^p(]0,1[;E)/u(0) = u(1) = 0\} & 2\theta \succ \frac{1}{p} \end{cases}$$

**Proposition 3.2** *Soient $f \in C^{2\theta}(]0,1[; L^2(\mathbb{R}))$ $(0 \prec 2\theta \prec 1)$ telle que :*

$f(1,x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ et $h \in H^1(\mathbb{R})$ alors le probléme $(3.0)$ admet une unique solution .

$u \in C^2(]0,1[; L^2(\mathbb{R})) \cap C(]0,1[; H^2(\mathbb{R}))$ verifiant :

$u'' - f \in C\left(]0,1[; H^{2\theta}(\mathbb{R})\right)$ si et seulment si :

$h \in H^{1+2\theta}(\mathbb{R})$ et $f(0,x) \in H^{2\theta}(\mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}$ pour tout $\theta \succ 0$