Remerciments

A**vant tout, nous remercions **Allah

***N**ous tenons à remecier vivement notre encadreur **Ms. H.Bouzit** pour sa gentiellesse; son aide, ses conseils et sa disponibilité dans ce travail.*

***N**ous souhaiterons également remercier nos professeurs de la faculté département de mathématiques pour tout le savoir qu'il nous ont donné.*

***N**os profonds remerciements pour les membres de jury qui ont accepté d'évaluer ce travail.*

Dédicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.*

A *mes soeurs (****Solafa, Denia, Aicha, Zohra*** *)et mes frères(****mohamed, sofiane*** *).*

A *mes amies, mes camarades et ma binôme* ***Imene****.*

S*ans oublier touts les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

Fatima

Dédicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.*

A *mes soeurs(****Fatima. z, Sarah, Khouloud*** *et ma petite nièce* ***Anfel****).*

A *mes amies et mes camarades et ma binôme* ***Fatima****.*

S*ans oublier touts les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

Imene

Table des matières

Résumé

Ce travail démontre un grand nombre d'isomorphismes satisfaits par l'opérateur de Laplace dans des espaces de Sobolev à poids, semblables aux espaces $\mathbb{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, mais avec des poids qui controlent la croissance ou décroissance des fonctions à l'infini. Ces poids, qui apparaissent de façon naturelle dans des intégalités de Hardy, permettent de démontrer les inégalités fondamentales de poincaré à poids, reliant les normes des fonctions à celles de leurs dérivées. Cette approche permet de retrouver assez facilement plusieurs résultats déjà démontrés par d'autres auteurs et de les compléter par des résultats nouveaux.

Introduction

Le but de ce travail est l'étude du problème

$$\Delta u = f \text{ dans } \mathbb{R}^n,$$

avec une croissace ou décroissance de solutions presecrite à l'infini, exprimée au moyen de poids.
Le problème est posé dans des espaces simillaires aux espaces de Sobolev usuels $\mathbb{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, avec un poid qui contrôle le comportement des fonctions à l'infini [Définition (1.9)].
L'utilisation des poids permet d'obtenir l'inégalité du type poincarré qui n'est pas satisfaite dans les espaces de Sobolev usuel, si le domaine Ω n'est pas borné au moins dans une direction.
Les poids naturels pour ces problèmes sont de la forme $\rho = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$ lorsqu'on n'a pas de point critique; $\alpha + \frac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$.
Le poid logarithmique est utulisé par Amrouche-Girault et Giroire pour ces cas critique, que nous n'abordons par dans ce travail.
De nombreux auteus ont étudié ces espaces de Sobolev avec poids, parmi eux, on peut citer Kufner [8], la famille des espaces définis dans (1.9) a été largement étudiée par Hanouzet [7] et Cantor[**?**].
Ce mémoire est composé de trois chapitres.
Dans le chapitre (1), on rappelle les espaces de Sobolev usuels et les espaces de Sobolev avec poids avec quelques propriétés dont nous avons besoin dans la suite et des résultats préliminaires.
Dans le chapitre (2), on a donné une famille d'isomorphismes avec $\alpha = 0$.
Le chapitre (3) traite le cas où $\alpha \in \mathbb{Z}$ quelconque.

Ce travail est tiré de l'article

WEIGHTED SOBOLEV SPACES FOR LAPLACE'S EQUATIONS IN $\mathbb{R}^n$
Par C.AMROUCHE, V. GIRAULT et J. GIROIRE

Chapitre 1

Espaces fonctionnels et propriétés

1.1 Rappels sur les espaces de Sobolev classiques:

Dans ce chapitre nous définissons quelques espaces de Sobolev classiques et leurs principales propriétés.
On définit tout d'abord la dérivée faible dans $L^2(\Omega)$.

Définition 1.1 *Soit u une fonction définie sur Ω*
1. On dit que u est intégrable sur Ω si $\int_\Omega |u(x)|\, dx$ est finie.

2. On dit que u est localement intégrable sur Ω si elle est intégrable sur tout compact $K \subset \Omega$.

3. Le support de u est défini par

$$supp\ u = \overline{\{x \in \Omega,\ u(x) \neq 0\}}.$$

4. Si u est indéfiniment dérivable sur Ω et $supp\ u \subset K \subset \Omega$ avec K compact. On note $u \in D(\Omega)$ ou C_c^∞.

Définition 1.2 *Soit V et H deux espaces vectoriels normés par $\|.\|_V$ et $\|.\|_H$ respectivement:*
on dit que V s'injecte continement dans H si

1. $V \subset H$

2. *l'espace:*

$$Id : V \longrightarrow H$$
$$u \longmapsto u \tag{1.1}$$

est continue.

1.1.1 dérivée au sens faible:

Définition 1.3 Soit u une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$. On appelle dérivée au sens faible de u d'ordre α et on note $D^\alpha u$:

$$\langle D^\alpha u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha \varphi\rangle = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} u \;\; D^\alpha \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n).$$

avec

$$D^\alpha \varphi \;=\; \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_{x_1}^{\alpha_1},\; \partial x_{x_2}^{\alpha_2}, ...,\; \partial x_{x_n}^{\alpha_n}}$$

et φ est de classse $C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ et a support compact dans $\mathbb{R}^n$.

1.2 L'espace $\mathbb{H}^m(\mathbb{R}^n)$:

L'espace $L^p(\Omega)$:

$$L^p(\Omega) = \{u;\; mesurable;\; \int_\Omega |u(x)\; dx < \infty|\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |u(x)|^p \; dx)^{\frac{1}{p}},$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

De plus, si $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est reflixif.

Définition 1.4 *Pour $m \in \mathbb{N}$, l'espace*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \ ; D^\alpha u \in L^2(\Omega) \ |\alpha| \leq m \right\}$$

est appelé espace de Sobolev d'ordre m.

Proposition 1.1 *L'espace $H^m(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert l'orsqu'on le munit du produit scalaire*

$$< u, v >_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \ D^\alpha u, \ D^\alpha v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

et de la norme:

$$\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.3 L'espace $\mathbb{H}^s(\mathbb{R}^n)$:

Si $u \in \mathcal{S}'$, (espace de distribution tempérées), on définit sa transformée de Fourier $Fu = \widehat{u}$ par:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{e}^{-ix.\xi} \, u(x) \, dx.$$

Définition 1.5 *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ est défini comme suit:*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ ; \ (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

où $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.2 *Pour $s \in \mathbb{R}$, l'espace $H^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire :*

$$< u, v >_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\xi)| \ (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{v}(\xi)| d\xi$$

et de la norme

$$\| \ u \ \|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.4 L'espace $\mathbb{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$:

Définition 1.6 *Soit $p \in [1, +\infty[$ et $m \in \mathbb{N}$. L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ est défini par:*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n);\ D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^n),\ \forall \alpha,\ |\alpha| \leq m\}.$$

Proposition 1.3 *Muni de la norme suivante:*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty; \\ \max\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

L'espace $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach.
De plus, si $1 < p < +\infty$, alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ est reflexif.

Les injections de Sobolev:

Théorème 1.7 *Soit $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Alors*
1. *Si $mp < n$, alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p*}(\mathbb{R}^n)$* avec $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.

2. *Si $mp = n$, alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$* avec $q \in [p, +\infty[$.

3. *Si $mp > n$, alors $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_B^j(\mathbb{R}^n)$*

Où $C_B^j(\mathbb{R}^n) = \{u \in C^j(\mathbb{R}^n)$ et *supp u est borné dans $\mathbb{R}^n\}$ et $j = [m - n/p]$.*

Pour plus de détails, ou peut consulter R-Adams [1], ou H-Brezis [5].

1.5 Espaces de Sobolev avec poids

1.6 Motivations:

Nous considérons le problème aux limites suivant:

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f \quad dans \quad \Omega \qquad (a) \\ \quad u = 0 \quad\quad sur \quad \partial\Omega \quad (b) \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^2(\Omega)$.
L'approche variationnelle pour étudier (P) est constituée de deux étapes:
la formulation variationnelle associée au problème (P) est:

$$(FV) \qquad \begin{cases} trouver\ u \in V \ = \ H_0^1(\Omega)\ solution\ de \\ a(u,v) \ = \ \ell(v)\ pour\ tout\ \ v \in V, \end{cases}$$

où

$$a(u,v) \ = \ \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \quad et\ \ell(v) \ = \ \int_\Omega f\ v\ dx. \tag{1.2}$$

La forme bilinéaire $a(u,v)$ est continue car:

$$a(u,v) \leq \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)} \ \|\nabla v\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_V \ \|v\|_V.$$

La forme linéaire $\ell(v)$ est continue sur V.
De plus, on a l'inégalité de poincarré suivante:

Théorème 1.8 (inégalité de poincarré)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné au moins dans une direction. Alors il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\int_\Omega |v(x)|^2\ dx \ \leq \ \alpha \int_\Omega |\nabla v(x)|^2\ dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.3}$$

Donc, en vertu cette l'inégalité, la forme $a(u,v)$ est coercitive c'est à dire, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a(u,v) \;=\; \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx \;\geq\; \alpha \;\|\, u \,\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

Comme V est un espace de Hilbert, alors d'aprés le théorème de Lax-Milgram il existe une unique solution $u \in V$ de la formulation variasionnelle (FV).
En prenant $v = \varphi \in D(\Omega)$ dans (1.2) et en intégrant par parties, on obtient:

$$-\Delta u = f$$

au sens du distribution.
La condition aux limites (b) est obtenu du fait que $u \in H_0^1(\Omega)$.
Pour Ω non borné, par exemple $\Omega = \mathbb{R}^n$, l'inégalité de poincarré (1.3) n'est pas satisfaite. Pour cette raison, les espaces de sobolev avec poids sont plus appropriés pour l'étude de cette équation car, dans ces espaces, ou a une inégalité du type poincarré que nous donnerons ultérierement.

1.7 L'espace $\mathbb{W}_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, on pose $r \;=\; \|x\|$ et $\rho \;= (1 + r^2)^{\frac{1}{2}}$.

Définition 1.9 *Pour* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *avec* $1 < p < +\infty$, *on pose :*

$$W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n) \;=\; \left\{ u \in D^{'}(\mathbb{R}^n); \forall \lambda \in \mathbb{N}^n : 0 \leq |\lambda| \leq m,\; \rho^{\alpha-m+|\lambda|}\; D^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Proposition 1.10 *L'espace* $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ *est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme:*

$$\|u\|_{W_\alpha^{m,\,p}(\mathbb{R}^n)} \;=\; \left(\sum_{|\lambda| \leq m} \|\rho^{\alpha-m+|\lambda|}\; D^\lambda u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La semi-norme de $W_\alpha^{m,\,p}(\mathbb{R}^n)$ *est définie par:*

$$|u|_{W_\alpha^{m,\,p}(\mathbb{R}^n)} \;=\; \left(\sum_{|\lambda| = m} \|\rho^\alpha\; D^\lambda u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour la démonstration, on peut se reférer à Hanouzet[7] dans le cas où $n = 3$, Cantor[?] et Kudrjevcev [?] ou Avantaggiati. [?]

Exemple 1 On pose $\alpha = 1,\ m = 2$

$$\begin{aligned} W_1^{2,p}(\mathbb{R}^n) &= \left\{ u \in D^{'}(\mathbb{R}^n),\ \ \rho^{1-2+0}\ u,\ \ \rho^{1-2+1}\ \frac{\partial u}{\partial x_j},\ \ \rho^{1-2+2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^n) \right\} \\ &= \left\{ u \in D^{'}(\mathbb{R}^n),\ \ \rho^{-1}\ u,\ \ \frac{\partial u}{\partial x_j},\ \ \rho\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^n) \right\}. \end{aligned}$$

Exemple 2 On pose $\alpha = 0,\ m = 2$

$$W_0^{2,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in D^{'}(\mathbb{R}^n),\ \ \rho^{-2}\ u,\ \ \rho^{-1}\ \frac{\partial u}{\partial x_j},\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Quelques propriétés de l'espace $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

1. L'espace $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

2. De la propriété précedente, on déduit que le dual de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, noté $W_{-\alpha}^{-m,p'}(\mathbb{R}^n)$ avec $p^{'}$ est le conjugué de p, est un espace de distributions.

3. Si $\frac{n}{p} + \alpha \notin [1, ..., m]$, nous avons les inclusions suivantes:

$$W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n) \subset W_{\alpha-1}^{m-1,p}(\mathbb{R}^n) \subset ... \subset W_{\alpha-m}^{0,p}(\mathbb{R}^n) \tag{1.4}$$

avec injections continues.

4. Comme pour les espaces de Sobolev classiques, l'opérateur de dérivation est continu, plus précisement, on a:

$$\begin{aligned} D^\lambda\ :\ W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow W_\alpha^{m-|\lambda|}(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto D^\lambda u \end{aligned} \tag{1.5}$$

est linéaire et continue pour $\lambda \in \mathbb{N}^n$.

5. Pour $\lambda \in \mathbb{N}^n$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, on a:

$$|D^\lambda(\rho^\gamma)|\ \leq\ \mathcal{C}_{\lambda\,\gamma}\ \rho^{\gamma-|\lambda|}, \tag{1.6}$$

alors l'application définie par

$$\begin{aligned} W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow W_{\alpha-\gamma}^{m,p}(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto \rho^\gamma u \end{aligned} \tag{1.7}$$

est un isomrphisme pour tout $m \in \mathbb{N}$.
On note par $\mathcal{P}_q$ l'ensembe des polynômes de degré inférieur ou égale à q et on pose par convention $\mathcal{P}_q = \{0\}$ si $q < 0$.
6. L'espace $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ contient les polynômes de degré inférieur ou égale à q
avec

$$q = [m - \alpha - n/p].$$

où $[x]$ est la partie entiere de x.

<u>Exemples</u>

$W_1^{5,3}(\mathbb{R}^3)$ contient les polynômes de degrés $q \leq [5 - (1+1)] = 3$.
$W_1^{5,4}(\mathbb{R}^6)$ contient les polynômes de degrés $q \leq [5 - (1+3/2)] = 2$.
$W_2^{3,4}(\mathbb{R}^7)$, $q = \left[3 - (2 + \frac{7}{4})\right] = \frac{-3}{4} < 0$ alors $\mathcal{P}_q = \{0\}$.

Définition 1.11 *Pour $m \geq 0$, $\frac{n}{p} + \alpha \notin \{1, ..., m\}$, l'espace quotient $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[m-\alpha-n/p]}$ est muni de la norme*

$$\begin{aligned} [u]_{W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|u\|_{W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)}/P_{[m-\alpha-n/p]} \\ &= \inf_{Q \in \mathcal{P}_{[m-\alpha-n/p]}} \|u + Q\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Définition 1.12

Soit B un espace de Banach, B' son espace dual et X un sous espace fermé de B. On définit le sous espace $B' \perp X$ noté par :

$$X^\perp = \{f \in B' : \langle f, v \rangle_{B' \times B} = 0, \ \forall v \in X\}.$$

1.8 Inégalité de poincaré pour un espace de Sobolev avec poids

Lemme 1.13 (Inégalité de Hardy)
Soit β et p deux nombres réels avec $\beta \neq -1$ et $p \in]1, \infty[$ et soit f une fonction mesurable définie sur $[0, \infty[$ de sorte que :

$$\int_o^\infty |f(r)|^p \, r^{\beta+p} dr \; < \; +\infty.$$

Soit,

$$|F(r)| = \begin{cases} -\displaystyle\int_r^\infty f(t)dt \;\; si \;\; \beta > -1, \\ \displaystyle\int_0^r f(t)dt \;\; si \;\; \beta < -1. \end{cases}$$

Alors,

$$\int_o^\infty |F(r)|^p \, r^\beta dr \leq \left(\frac{p}{|\beta+1|}\right)^p \int_o^\infty |f(r)|^p \, r^{\beta+p} dr. \tag{1.8}$$

On peut trouver une démonstration plus simple, utilisant une intégration par parties dans la définition de $F(r)$ et l'inégalité de Holder, dans Bolley-Camus [?].

Lemme 1.14 *Soit $u \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ telle que:*

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n \; : 0 \leq |\lambda| \leq [m - n/p], \; D^\lambda u(0) = 0.$$

Alors pour $m \geq 1$ et $\frac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$, il existe une constante C indépendante de u telle que

$$\|u\|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \; |u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve :
La preuve se fait en trois étapes:
(i) Pour $j \in \mathbb{N}$ avec $j \leq [m - n/p]$, d'aprés les injections de Sobolev on a $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continument dans $C_B^j(\mathbb{R}^n)$, où $C_B^j(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des

fonctions de classe C^j et à support borné de $\mathbb{R}^n$, donc l'application :

$$u \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) \ \rightarrow \ (D^\lambda u(0))_{0\leq|\lambda|\leq[m-n/p]}, \tag{1.9}$$

est bien définie et continue.
(ii) On introduit un sous espace fermé de $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$:

$$U_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) \ = \ \left\{v \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n),\ \forall\lambda \in \mathbb{N}^n : 0 \leq |\lambda| \leq [m-n/p],\ D^\lambda v(0) = 0\right\}.$$

Montrons que $D(\mathbb{R}^n)\bigcap U_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $U_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.
Soit $u \in U_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Comme $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\exists(\varphi_v) \in D(\mathbb{R}^n) \ : \ \varphi_v \rightarrow u \text{ dans } W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n).$$

Mais, en générale, $(\varphi_v) \notin U_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. En effet d'aprés (1.9), on a seulement:

$$\forall\lambda \in \mathbb{N}^n : 0 \leq |\lambda| \leq [m-n/p],\ D^\lambda\varphi_v(0) \ \rightarrow \ 0.$$

On introduit donc une fonction $\rho_0 \in D(\mathbb{R}^n)$ telle que:

$$\rho_0(x) \ = \ 1 \text{ dans } B(0,1) \text{ et } \text{Supp } \rho_0 \subset \ B(0,2).$$

Soit $\mu \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\mu| \leq [m-n/p]$, il existe un unique polynôme $P_\mu \in \mathcal{P}_{[m-n/p]}$ tel que:

$$D^\mu P(0) \ = \ 1 \text{ et } \ \forall\lambda \in \mathbb{N}^n : \ \lambda \neq \mu,\ 0 \leq |\lambda| \leq [m-n/p],\ D^\lambda p_\mu(0) = 0.$$

Donc, pour $|\lambda| \leq [m-n/p]$: $0 \leq |\mu| \leq [m-n/p]$, on a:

$$D^\lambda(\rho_0 P_\mu)(0) = \rho_0(0) D^\lambda P_\mu(0) = D^\lambda P_\mu(0).$$

Donc:

$$D^\lambda(\rho_0 P_\mu)(0) = \begin{cases} 1 \text{ si } \ \mu = \lambda, \\ 0 \text{ si } \ \mu \neq \lambda. \end{cases}$$

Considérons maintenant la fonction:

$$\psi_\nu = \phi_\nu - \rho_0 \sum_{0\leq|\mu|\leq[m-n/p]} D^\mu \phi_\nu(0) P_\mu.$$

Alors la suite $\psi_\nu \in U_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) \bigcap D(\mathbb{R}^n)$. En effet, on a bien $\psi_\nu \in D(\mathbb{R}^n)$.
De plus d'aprés ce qui précède:

$$D^\lambda \psi_\nu(0) = D^\lambda \varphi_\nu(0) - D^\lambda \varphi_\nu(0) = 0, \ \forall \lambda : \ 0 \leq |\lambda| \leq [m - n/p].$$

(iii) Finalement, nous avons à montrer le lemme (1.14) pour $\varphi \in D(\mathbb{R}^n) \bigcap U_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.
On a:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \nabla \varphi . \frac{\overrightarrow{r}}{r},$$

alors, l'inégalité de Holder donne:

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|^p \leq n^{\frac{p}{p'}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|^p$$

et plus géneralement, on peut écrire

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n : \ 0 \leq |\lambda| \leq m-1, \quad \left| \frac{\partial}{\partial r}(D^\lambda \varphi) \right|^p \leq n^{\frac{p}{p'}} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i}(D^\lambda \varphi) \right|^p . \quad (1.10)$$

Ainsi, si θ représente la variabls angulaire, on peut écrire:

$$(D^\lambda \varphi)(r,\theta) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^r \frac{\partial}{\partial t}(D^\lambda \varphi)(t,\theta) dt, \ \forall \ \lambda \in \ \mathbb{N} : \ 0 \leq |\lambda| \leq [m - n/p] \\ \displaystyle -\int_r^\infty \frac{\partial}{\partial t}(D^\lambda \varphi)(t,\theta) dt, \ \forall \ \lambda \in \ \mathbb{N} : \ [m - n/p] < \lambda| \leq \ m-1 \end{cases}$$

On applique le lemme (1.13) sur $(D^\lambda \varphi)(r,\theta)$, on obtient:

$$\int_0^\infty (D^\lambda \varphi)(r,\theta) \ r^{(|\lambda|-m)p} r^{n-1} dr \leq \ (\frac{p}{\beta+1})^p \ \int_0^\infty |(D^\lambda \varphi))|^p r^{(|\lambda|-m)p+p} r^{n-1} dr,$$

avec

$$\beta \ = \ (|\lambda| - m) \, p \ + \ n \ - \ 1.$$

Notons que, pour $\frac{n}{p} \notin \{1, ..., m-1\}$, on a:

$$\beta < -1, \ \ \forall \lambda : 0 \ \leq \ |\lambda| \leq \ [m - n/p]$$
$$\beta > -1, \ \ \forall \lambda : \ [m - n/p] < \ \lambda| \leq \ m - 1.$$

On applique (1.10), on obtient:

$$\|r^{|\lambda|-m} D^{\lambda} \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \ \leq \ \alpha \ \|r^{|\lambda|+1-m} \frac{\partial}{\partial \, r} D^{\lambda} \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Ce qui termine la démonstation du Lemme . $\square$

A partir du lemme précedent nous obtenons l'inégalité de poincaré suivante:

Théorème 1.15 *Soit le nombre entier* $m \geq 1$ *et le nombre réel* $1 < p < +\infty$ *tels que*
$\frac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$. *Alors, il existe* $C \ > \ 0$, *telle que :*

$$\forall \ u \ \in \ W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n), \ \ [u]_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \ C \ |u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.11}$$

Remarque :
L'inégalité (1.11) est obtenue à partir du lemme (1.14) par ce que le lemme (1.14) prouver que les espaces $U_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[m-n/p]}$ sont isomorphes.

1.9 Résultats préliminaires sur les opérateurs gradient et divergence

Pour toute la suite, p répresente un nombre réel: $1 \ < \ p \ < \ \infty$. On a:

Proposition 1.16 *:*
Soit les deux espaces $\mathcal{V}$ *et* H_p *définis par :*

$$\mathcal{V} = \{v \in D(\mathbb{R}^n); \ div \ v \ = \ 0\}$$

et

$$H_p = \{v \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n);\ div\ v\ =\ 0\}.$$

L'espace $\mathcal{V}$ est dense dans H_p.

Proposition 1.17 *:*
Supposons que $\frac{n}{p} \neq\ 1$. Alors les opérateurs suivants définis par

$$g\ :\ W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-n/p]} \ \stackrel{grad}{\longrightarrow}\ \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n) \perp H_{p'} \tag{1.12}$$

et

$$L^{p'}(\mathbb{R}^n)\ /\ H_{p'} \ \stackrel{div}{\longrightarrow}\ W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[1-n/p]} \tag{1.13}$$

sont des isomorphismes.

Preuve :
L'opérateur gradient défini sur $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ est linéaire et continu, et son noyau $\operatorname{Ker} g$ est réduit aux constantes incluses dans $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, c'est à dire

$$\operatorname{Ker} g = \mathcal{P}_{[1-n/p]}.$$

Donc il est injectif.
De plus, nous savons que

$$[u]_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\ |u|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = C\ \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.14}$$

et donc, l'opérateur gradient est à image Rg fermée dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)$.
Par conséquent, l'opérateur:

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)\ \stackrel{grad}{\longrightarrow}\ Rg$$

est un isomorphisme.
De plus, on a

$$Rg = (ker(div))^{\circ},$$

où div est l'opérateur défini par :

$$\text{div} : L^{p'}(\mathbb{R}^n) \ \rightarrow \ \left(W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-\frac{n}{p}]}\right)'. \tag{1.15}$$

Ainsi,

$$Rg = (kerdiv)^{\perp} = \{v \in L^p \ : \ divv = 0\}.$$

Alors l'opérateur gradient défini par (1.12) est un isomorphisme .
Par conséquent, de la dualité et la transposition l'opérateur div défini par (1.13) est aussi un isomorphisme. □

Proposition 1.18 *Soit $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ tel que $\nabla u \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)$.*
(1.) *Si $1 < p < n$, alors $\exists k$ dépendant de u telle que:*

$$u + k \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

De plus; $\exists C > 0$ indépendente de u telle que

$$\|u + k\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \ \leq \ C \ \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

(2.) *Si $p \geq n$, alors $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et $\exists C > 0$ indépendente de u telle que :*

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_0} \ \leq \ C \ \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve :
Cette proposition est une conséquence directe des isomorphismes (1.17) et (1.16). En effet, soit $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ telle que $\nabla u \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)$.
Du fait que, $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n), \ \langle \nabla u, \varphi\rangle_{L^p \times L^{p'}} \ = \ -\langle u, \text{div}\varphi\rangle_{D' \times D},$$

alors ∇u est orthogonal à $\mathcal{V}$.
De plus $\mathcal{V}$ est dense dans H'_p, nous avons $\nabla u \in L^p \perp H_{p'}$. Alors, d'aprés (1.17), $\exists w \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\nabla w = \nabla u$ et

$$\|w\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)}/\mathcal{P}_{[1-n/p]} \leq C\ \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Comme $\nabla(w-u) = 0$ alors $u + k = w$ avec k constante.
(1.) Si $1 < p < n$, alors $u + k = w \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|u + k\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\ \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

(2.) Si $p \geq n$, comme $k \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, alors $u = w - k \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.
Et on a :

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)}/_{\mathcal{P}_0} \leq C\ \|\nabla u\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

D'où la démonstration du théorème. $\square$

Chapitre 2

Première famille d'isomorphismes

2.0.1 Première famille d'isomorphismes:

Le premier théorème ci- dessous est une conséquence immédiate du théorème de Lax-Milgram quand $p = 2$.
Pour $p \neq 2$, nous le démontrons au moyen de l'inégalité de Calderon-Zygmund .

Théorème 2.1 *Si $\frac{n}{p} \neq 1$ et $\frac{n}{p'} \neq 1$, l'opérateur de Laplace*

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-n/p']} \xrightarrow{\Delta} W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[1-n/p]} \tag{2.1}$$

est un isomorphisme.

Preuve : L'opérateur défini par (2.1) est linéaire et continu, il est injectif puisque $\Delta u = 0$ et $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ implique que u est un polynôme de $\mathcal{P}_{[1-n/p]}$. Il reste a montrer la surjectivité.
Nous prenons $f \in W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[1-n/p']}$, nous devons construire $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Delta u = f$.
Un candidat est $u = F * f$ avec F est la solution fondamental de l'opérateur de Laplace, c'est à dire $\Delta F = \delta$ où δ est la mesure de Dirac. Mais aucune des deux distributions n'est à support compact. Nous faisons la démonstration en trois étapes:
(i) Puisque $\frac{n}{p'} \neq 1$, d'aprés la proposition (1.17),

$$\exists v \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n) : \text{div } v = f \text{ et } \|v\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \, \|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

avec C ne depend pas de v.
Comme $\mathbb{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\exists v_m \in \mathbb{D}(\mathbb{R}^n) \ : \ v_m \ \to \ v \text{ dans } \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n).$$

(ii) On définit

$$f_m = \text{div } v_m \text{ et } \ \psi_m = F * f_m.$$

Pour tous $i = 1, ..., n$ et $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, on a:

$$\begin{aligned}
\langle \partial_i \ \psi_m, \varphi \rangle &= -\langle F * f_m, \partial_i \ \varphi \rangle \\
&= \langle \text{div} v_m, \check{F} * \partial_i \varphi \rangle \\
&= \langle \text{div} v_m, \partial_i (\check{F} * \varphi) \rangle \\
&= \langle v_m, \nabla \partial_i (\check{F} * \varphi) \rangle.
\end{aligned}$$

Ceci imlique, d'aprés l'inégalité de Calderon-Zygmund:

$$\begin{aligned}
|\langle \partial_i \ \psi_m, \varphi \rangle| \ &\leq \|v_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \ \|\nabla \partial_i (\check{F} * \varphi)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \ C_1 \ \|v_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \ \|\Delta (\check{F} * \varphi)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \ C_1 \ \|v_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \ \|(\Delta \check{F} * \varphi)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \ C_1 \ \|v_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \ \|\delta * \varphi)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \ C_1 \ \|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)} \ \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\nabla \psi_m \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n) \text{ et } \|\nabla \psi_m\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)} \ \leq \ C \ \|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

(iii) Finalement, puis que $\frac{n}{p} \neq 1$, on applique la proposition (1.18).
Pour tout m, $\exists \, C_m$ tele que :

$\psi_m + C_m \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|\psi_m + C_m\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \;\leq\; C\,\|\nabla\psi_m\|_{\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n)} \;\leq\; C\,\|f\|_{W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Donc, la suite $\psi_m + C_m$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, elle admet donc une sous suite notée encore $(\psi_m + C_m)$ telle que $\psi_m + C_m \;\rightarrow\; u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.
Montrons que u est solution de $-\Delta u = f$.
Pour tout $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ on a:

$$\langle\Delta(\psi_m + C_m), \varphi\rangle \;=\; \langle\psi_m + C_m, \Delta\varphi\rangle.$$

D'une part on a:

$$\begin{aligned}\langle\Delta(\psi_m + C_m), \varphi\rangle &= \langle\Delta\psi_m, \varphi\rangle\\ &= \langle f_m, \varphi\rangle\\ &\rightarrow \langle f, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

D'autre parte ,

$$\begin{aligned}\langle(\psi_m + C_m), \Delta\varphi\rangle &\rightarrow \langle u, \Delta\varphi\rangle\\ &= \langle\Delta u, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Ceci implique que:

$$\langle\Delta u, \varphi\rangle \;= \langle f, \varphi\rangle,\ \forall\varphi \in D(\mathbb{R}^n),\ \text{alors}\ \Delta u = f,$$

d'ou la surjectivité.
Maintenant, nous allons donner une famille d'isomorphismes, qu'on peut obtenir par l'inégalité de Hardy et de Calderon-Zygmund. Nous commençons par le lemme suivant:

Lemme 2.2 *Pour* $m \in \mathbb{N},\ m \geq 2$ *et* $\frac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$
l'opérateur défini par:

$$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[m-n/p]} \;\xrightarrow{\Delta}\; W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[m-2-n/p]}, \tag{2.2}$$

est un isomorphisme .

Preuve : L'opérateur défini par (2.2) est linéaire et continue. Il est aussi injectif car, si $u \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\Delta u = 0$ alors u est un polynôme contenu dans $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et donc $u \in \mathcal{P}_{[m-n/p]}$.
Maintenant, utilisant l'inégalité de Calderon-Zygmund, on peut écrire:

$$\forall u \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n),\ \forall \lambda \in \mathbb{N}^n,\ |\lambda| = m-2,\ \forall i,j = 1...n,$$

$$\|\partial_i\ \partial_j\ D^\lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\ \leq\ C\ \|\Delta D^\lambda u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\ = C\ |\ D^\lambda(\Delta u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

et donc,

$$|u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}\ \leq\ C\ |\Delta u|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

De plus, comme $\frac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$, le théorème (1.15) implique que

$$[u]_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}\ \leq\ C\ |u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

On a alors:

$$[u]_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}\ \leq\ C\ |u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}\ \leq\ C\ |\Delta u|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Comme $|\Delta u|_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)}\ \leq\ [\Delta u]_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)}$, On a alors :

$$\|u\|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[m-n/p]}}\ \leq\ C\ [\Delta u]_{W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[m-n/p]}}.$$

Cette inégalité prouve que le rang de l'opérateur de Laplace (2.2) est fermé dans $W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[m-2-n/p]}$.
Donc, d'aprés le théorème de banach sur les opérateurs de rang fermés on a:

$$R(\Delta)^\perp = \mathrm{Ker}\,(\Delta^*),$$

où

$$\Delta^* : W_0^{2-m,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[m-2-n/p]} \rightarrow W_0^{-m,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[m-n/p]}.$$

Remarquons que $\Delta^* u = 0 \Rightarrow u \in \mathcal{P}_{[2-m-n/p]} = \{0\}$.
Donc $R(\Delta)$ est dense dans $W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)$, on a déja montré que l'opérateur est de rang fermé, alors

$$R(\Delta) = W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[m-2-n/p]}.$$

Ce qui achève la démonstration. □

Théorème 2.3 *Pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ et $\frac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$, l'opérateur défini par:*

$$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[m-n/p]}^{\Delta} \xrightarrow{\Delta} W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n), \tag{2.3}$$

est un isomorphisme.

Preuve : Cet opérateur est évidemment linéaire, continue et injectif.
Pour montrer la surjectivité, prenons $f \in W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)$, du lemme précédent, il existe $\dot{u} \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[m-n/p]}$ tel que $\Delta\dot{u} = \dot{f}$, ceci veut dire que pour tout $r \in \mathcal{P}_{[m-2-n/p]}$, il existe $u \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ et $q \in \mathcal{P}_{[m-n/p]}$ tels que

$$\Delta(u + q) = f + r.$$

Mais, comme pour tout $r \in \mathcal{P}_{[m-2-n/p]}$, il existe $s \in \mathcal{P}_{[m-n/p]}$ tel que $\Delta s = r$; (cf.par exemple Neri [?]).
On déduit alors que

$$\Delta(u + q - s) = f.$$

Comme

$$\Delta(q-s) \in \mathcal{P}_{[m-2-n/p]} \Rightarrow \exists R \in \mathcal{P}_{[m-n/p]} \;:\; \Delta R = \Delta(s-q)$$
$$\Rightarrow \Delta(R+q-s) = 0 \text{ et } Q = r+q-s \in \mathcal{P}_{[m-n/p]}.$$

On a bien : $\Delta(u+Q) = f$ et $Q \in \mathcal{P}^{\Delta}_{[m-n/p]}$

Corollaire 2.4 *Soit $m \geq 1$ un nombre entier et suppossons que $\frac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$. Soit $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ telle que*

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n \;:\; |\lambda| = m,\; D^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Alors il existe un polynôme $Q \in \mathcal{P}_{m-1}$, dépendant de u tel que:

$$u + Q \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

et

$$[u+Q]_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\; |u|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve : Notons qu'il suffit de prouver que $u + Q \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Parce que, dans ce cas, d'aprés le degrés de Q, l'inégalité précédent est déduit du théorème (1.15).

La preuve se fait par récurrence.

(i) Pour $m = 1$, ce corollaire n'est autre que la proposition (1.18).

(ii) Supposons que ce corollaire est prouvé pour $|\lambda| = m-1$ et montrons qu'il est reste vrais pour $\lambda = m$.

Soit $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}^n \;:\; |\lambda| = m, \quad D^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Ceci s'écrit comme suit:

$$\forall \mu \in \mathbb{N}^n \;:\; |\mu| = m-1 \quad D^\mu(\nabla u) \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n).$$

Alors, utilisant l'hypothèse de récurrence, il existe un polynôme $P \in \mathcal{P}_{m-2}$ tel que

$$v = \nabla u + P \in W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Comme $\mathrm{div} v \in W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n)$ alors, d'aprés le théorème (2.3), il existe $Z \in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\Delta Z = \mathrm{div} v.$$

Mais, observons que $\mathrm{div} v$ est de la forme :

$$\mathrm{div} v = \Delta u + \Delta R, \; R \in \mathcal{P}_{m-1}$$

donc:

$$\begin{aligned} \Delta Z = \Delta(u+R) \;&\Rightarrow\; \Delta(\nabla Z) = \Delta\nabla(u+R) \\ &\Rightarrow\; \Delta(\nabla Z - \nabla u - \nabla R) = 0. \end{aligned}$$

Alors, les composantes du vecteur $\nabla(Z - u - R)$ sont toutes harmoniques. Comme ce sont les distributions tempérées, alors il existe un polynôme tel que :

$$\nabla(Z - u - R) = \nabla T.$$

Le fait que $\nabla Z \in W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)$ et ∇u est de la forme $v - P$, avec $v \in W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)$ et $P \in \mathcal{P}_{m-2}$ et que $m-2$ est précisement le plus haut degré des polynômes contenus dans $W_0^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)$.
Donc $\nabla T \in \mathcal{P}_{[m-1-n/p]} = \mathcal{P}_{m-2}$, alors on déduit que $T \in \mathcal{P}_{m-1}$.

Finalement, on a:

$$\nabla(Z-u-R-T)=0 \Rightarrow Z-u-R-T=K,\ K\in\mathcal{P}_0,$$

et donc, $u+R+T-K=Z\in W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, avec $Q=R+T-K\in\mathcal{P}_{m-1}$ est le polynôme souhaité.

Théorème 2.5 *Soit* $m\ \geq\ 2$ *et supposons que* $\frac{n}{p}$ *et* $\frac{n}{p'}\notin\{1,...,m\}$. *L'operateur polyharmonique défini par :*

$$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[m-n/p]}\xrightarrow{\Delta^m}W_0^{-m,p}(\mathbb{R}^n)\perp\mathcal{P}_{[m-n/p']}$$

est un isomorphisme.

Preuve : Ce resultat est une conséquence du lemme (2.2).
(i) Quand $m=2\ell$, on applique le lemme (2.2), l'opérateur Δ^ℓ défini par:

$$W_0^{2\ell,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[2\ell-n/p]}\xrightarrow{\Delta^\ell}L^p(\mathbb{R}^n) \tag{2.4}$$

est un isomorphisme pour $\frac{n}{p}\notin\ \{1,...,2\ell\}$, puis on utilise la dualité et la transposition, on obtient :

$$L^{p'}(\mathbb{R}^n)\xrightarrow{\Delta^\ell}W_0^{-2\ell,p'}(\mathbb{R}^n)\perp\mathcal{P}_{[2\ell-n/p]}$$

est un isomorphisme. En échangeant p par p', on aura:

$$L^p(\mathbb{R}^n)\xrightarrow{\Delta^\ell}W_0^{-2\ell,p}(\mathbb{R}^n)\perp\mathcal{P}_{[2\ell-n/p']} \tag{2.5}$$

est un isomorphisme pour $\frac{n}{p'}\notin\ \{1,...,2\ell\}$.
De la composition des opérateurs (2.4) et (2.5), on a:
pour $m=2\ell$,

$$W_0^{2\ell,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[2\ell-n/p]}\xrightarrow{\Delta^{2\ell}}W_0^{-2\ell,p}(\mathbb{R}^n)\perp\mathcal{P}_{[2\ell-n/p']}.$$

(ii) Quand $m=2\ell+1$, on applique aussi le lemme (2.2), on obtient :

Pour $\frac{n}{p} \notin \{1, ..., 2\ell+1\}$

$$W_0^{2\ell+1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[2\ell+1-n/p]} \xrightarrow{\Delta^\ell} W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-n/p]}. \tag{2.6}$$

D'aprés la dualité et la transposition, on a:

$$W_0^{-1,p'}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-n/p]} \xrightarrow{\Delta^\ell} W_0^{-2\ell-1,p'}(\mathbb{R}^n)\perp\mathcal{P}_{[2\ell+1-n/p]}. \tag{2.7}$$

est un isomorphisme.
En échangeant p par p', pour $\frac{n}{p'} \notin \{1, 2, ..., 2\ell+1\}$ on obtient que l'opérateur

$$W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[1-n/p']} \xrightarrow{\Delta^\ell} W_0^{-2\ell-1,p}(\mathbb{R}^n)\perp\mathcal{P}_{[2\ell+1-n/p']} \tag{2.8}$$

est un isomorphisme. Nous utilisons le théorème (**??**) avec $\frac{n}{p} \neq 1$et $\frac{n}{p'} \neq 1$.
On a :

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-n/p]} \xrightarrow{\Delta} W_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)\perp\mathcal{P}_{[1-n/p']} \tag{2.9}$$

est aussi un isomorphisme.
De la composée des opérateurs définis par (2.6),(2.8),(2.9) on obtient que pour $m = 2\ell+1$,

$$W_0^{2\ell+1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[2\ell+1-n/p]} \xrightarrow{\Delta^{2\ell+1}} W_0^{-2\ell-1,p}(\mathbb{R}^n)\perp\mathcal{P}_{[2\ell+1-n/p']}$$

est un isomorphisme.
Ce qui termine la démonstration du théorème. $\square$

Chapitre 3

Seconde famille d'isomorphismes

Le théorème suivant est déduit du théorème (2.5) via un argument de B.Hanouzet [7], que nous utiliserons souvent dans ce travail.

Théorème 3.1 *Soit* $m \geq 2$ *et* ℓ *deux nombres natureles et supposons que* $\frac{n}{p}$ *et* $\frac{n}{p'}$ *n'appartiennent pas à* $\{1, ..., m\}$. *Alor l'opérateur polyharmonique défini par:*

$$W_\ell^{m+\ell,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[m-n/p]} \xrightarrow{\Delta^m} W_\ell^{-m+\ell,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[m-n/p']} \tag{3.1}$$

est un isomorphisme.

Preuve : D'apré le théorème (2.5), ce théorème est évidement vrai pour $\ell = 0$.
La démonstration sera faite par récurrence sur ℓ.
Supposons que le résultat est vrai pour $\ell = k$ et montrons qu'il est vrai pour $\ell = k + 1$.
L'opérateur (3.1) est linéaire continue et injectif. Il reste à montrer qu'il est surjectif.
Soit $f \in W_{k+1}^{-m+k+1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[m-n/p']}$ alors, d'aprés les injection (1.4), $f \in W_k^{-m+k,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[m-n/p']}$.
Donc, d'aprés l'hypothèse de récurrence, il existe $u \in W_k^{m+k,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\Delta^m u \;=\; f.$$

Nous devons maintenant montrer que $u \in W_{k+1}^{m+k+1,p}(\mathbb{R}^n)$, pour cela, considérons:

$$\Delta^m(\rho\,\partial_i u) = \rho\,\partial_i f \;+ \sum_{\substack{0\leq|\lambda|,|\mu|\leq 2m \\ \lambda\neq 0, |\lambda|+|\mu|=2m}} C_{\lambda_i\mu}(D^\lambda\rho)(D^\mu\partial_i u).$$

D'aprés la propriété (1.6),

$$|(D^\lambda\rho)| \;\leq\; C_\lambda\,\rho^{1-|\lambda|},$$

et de la propriété (1.5)

$$D^\mu(\partial_i\;u) \in W_k^{m+k-|\mu|-1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Utilisant la propriété (1.7), on a:

$$\rho^{1-|\lambda|}D^\mu(\partial_i\;u) \in W_{k-1+|\lambda|}^{m+k-|\mu|-1,p}(\mathbb{R}^n),$$

et d'aprés la propriété (1.4)

$$W_{k-1+|\lambda|}^{m+k-|\mu|-1,p}(\mathbb{R}^n) \;\hookrightarrow\; W_k^{m+k-|\mu|-|\lambda|,p}(\mathbb{R}^n) = \; W_k^{-m+k,p}(\mathbb{R}^n)$$

car $|\lambda|+|\mu| = 2m$. D'autre part $f \in W_{k+1}^{-m+k+1,p}(\mathbb{R}^n)$ alors $\rho\,\partial_i f \in W_k^{-m+k,p}(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\Delta^m(\rho\,\partial_i u) \in W_k^{-m+k,p}(\mathbb{R}^n) \;\hookrightarrow\; W_{-1}^{-m-1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Donc, pour $\varphi \in W_1^{m+1,p'}(\mathbb{R}^n)$ (dual de $W_{-1}^{-m-1,p'}(\mathbb{R}^n)$), utilisant la formule de Green, on a:

$$\langle\Delta^m(\rho\,\partial_i u),\varphi\rangle_{W_{-1}^{-m-1,p}(\mathbb{R}^n)\times W_1^{m+1,p'}(\mathbb{R}^n)} = \langle\rho\,\partial_i u, \Delta^m\varphi\rangle_{W_{-1}^{m-1,p}(\mathbb{R}^n)\times W_1^{-m+1,p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

De plus, si $\varphi = Q \in \mathcal{P}_{[m-n/p']}$, alors $\Delta^m\varphi = 0$.
On déduit que

$$\langle \Delta^m(\rho\, \partial_i u), Q\rangle = 0, \ \ \forall Q \in \mathcal{P}_{[m-n/p']}.$$

Ce qui donne:

$$\Delta^m(\rho\, \partial_i u) \in W_k^{-m+k,p}(\mathbb{R}^n) \ \perp \ \mathcal{P}_{[m-n/p']}$$

Donc, d'aprés l'hypothèse de récurrence, il existe $v \in W_k^{m+k,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que:

$$\Delta^m v = \Delta^m(\rho\, \partial_i u) \Rightarrow \Delta^m(v - \rho\, \partial_i u) = 0.$$

Alors, $v-\rho\, \partial_i u$ est une fonction polyharmonique de $W_k^{m+k,p}(\mathbb{R}^n)$ ce qui prouve que $v - \rho\, \partial_i u = q \in \mathcal{P}_{[m-n/p]}$.
Ainsi,

$$\rho\, \partial_i u = v - q \in W_k^{m+k,p}(\mathbb{R}^n)$$

et donc ,

$$\nabla u \in W_{k+1}^{m+k,p}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \ u \in W_k^{m+k+1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Comme il est mentionné dans l'intoduction, le but de ce traivail est obtenir un ensemble complet de théorèmes d'isomorphismes pour l'opérateur de Laplace, lorsque le second membre présente differentes régularités et comportement à l'infini. Le théorème (3.1), atteint partielement cet objectif par ce que la régularité et le comportements à l'infini sont couplés du fait que $f \in W_\ell^{-m+l,p}(\mathbb{R}^n)$. Dans ce qui suit, nous allons séparer ces deux aspects. Commençons par la proposition suivant.

Proposition 3.2 *Soit le nombre entier $l \geq 1$ tel que $\frac{n}{p} \notin \{1, ..., \ell\}$, alors, l'opérateur de Laplace défini par:*

$$W_{-\ell}^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1+\ell-n/p]}^{\Delta} \xrightarrow{\Delta} W_{-\ell}^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \tag{3.2}$$

est un isomorphisme.

Preuve : D'aprés le théorème (2.3), on sait que pour $m \geq 2$ tel que $\frac{n}{p} \notin \{1, ..., m\}$, l'opérateur défini par:

$$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[m-n/p]}^{\Delta} \xrightarrow{\Delta} W_0^{m-2,p}(\mathbb{R}^n) \tag{3.3}$$

est un isomorphisme. Utilisant la dualité et transposition, ou voit que l'opérateur défini par:

$$W_0^{-m+2,p'}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\Delta} W_0^{-m,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[m-n/p]}^{\Delta} \tag{3.4}$$

est un isomorphisme. Alors, l'argument utilisé dans la preuve du théorème (3.1) permet d'obtenir, pour tout entier $\ell \geq 1$:

$$W_\ell^{-m+2+\ell,p'}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\Delta} W_\ell^{-m+\ell,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[m-n/p]}^{\Delta} \tag{3.5}$$

est un isomorphisme. En choisissant $m = \ell + 1$, on obtient

$$W_\ell^{\ell,p'}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\Delta} W_\ell^{-1,p'}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[\ell+1-n/p]}^{\Delta} \tag{3.6}$$

par dualité et transposition on déduit que

$$W_{-\ell}^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[\ell+1-n/p]}^{\Delta} \xrightarrow{\Delta} W_{-\ell}^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \tag{3.7}$$

est un isomorphisme.

Théorème 3.3 *Soit $m \geq 1$et $\ell \geq 1$ deux nombres entiers tels que $\frac{n}{p} \notin \{1, ..., \ell + 1\}$. Alors l'opérateur de Laplace défini par:*

$$W_{-\ell+m}^{1+m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[\ell+1-n/p]}^{\Delta} \xrightarrow{\Delta} W_{-\ell+m}^{-1+m,p}(\mathbb{R}^n) \tag{3.8}$$

est un isomorphisme.

Preuve : Ce théorème est une conséquence de la proposition (3.2) et la régularité des solutions du Laplacien.
Le corollaire suivant est obtenu de la proposition (3.2) par dualité et transposition.

Corollaire 3.4 *soit $\ell \geq 1$, un nombres entier tel que $\frac{n}{p'} \notin \{1, ..., \ell+1\}$. Alors, l'opérateur de Laplace défini par:*

$$W_{\ell}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\Delta} W_{\ell}^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[\ell+1-n/p']}^{\Delta} \tag{3.9}$$

est un isomorphisme.

La régularité des solutions de l'opérateur de Laplace permet d'obtenir le résultat suivant:

Proposition 3.5 *Soit $m \geq 0$ et $\ell \geq 1$ deux nombres entiers avec $\frac{n}{p'} \notin \{1, ..., \ell+1\}$. Alors; l'operateur de Laplace défini par:*

$$W_{\ell+m}^{1+m,p}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\Delta} W_{\ell+m}^{-1+m,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[\ell+1-n/p']}^{\Delta} \tag{3.10}$$

est un isomorphisme .

Finalement, on peut changer le signe de m par dualité. Alors, en resumant tous les résultats obtenus précédemment,on obtient:

Proposition 3.6 *Soit $m \in \mathbb{Z}$ et soit p un nombre réel dans $]1, +\infty[$. Alors*
(i) *Pour tout entier ℓ strictement positif tel que $\frac{n}{p} \notin \{1, ..., \ell+1\}$. Les opérateurs de Laplace suinants sont des isomorphismes*

$$\Delta : W_{-\ell+m}^{1+m,\,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[\ell+1-n/p]}^{\Delta} \longrightarrow W_{-\ell+m}^{-1+m,\,p}(\mathbb{R}^n) \tag{3.11}$$

$$\Delta : W_{\ell+m}^{1+m,\,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W_{\ell+m}^{-1+m,\,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[\ell+1-n/p]}^{\Delta}. \tag{3.12}$$

(i) *Si $\frac{n}{p} \neq$ 1et $\frac{n}{p'} \neq 1$ alors*

$$\Delta : W_{m}^{1+m,\,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-n/p]}^{\Delta} \longrightarrow W_{m}^{-1+m,\,p}(\mathbb{R}^n) \tag{3.13}$$

est un isomorphisme.

Références bibliographiques

[1] R. A. Adams; Sobolev Spaces *Academic press*, New York, 1975.

[2] C. Amrouche, H. Bouzit; L^p-Inequalities for the scalar Oseen Potential, à paraître dans *J.M.A.A.*

[3] C. Amrouche, V. Girault, J. Giroire; Weighted Sobolev spaces for Laplace's equation in $\mathbb{R}^n$, *J. Math. Pures Appl.*, Vol. **73-6**, 579-606, 1994.

[4] K.I. Babenko; On stationary solutions of the problem of flow past a body of a viscous incompressible fluid. *Journal Math. USSR Sb.*, Vol. **20**, 1-25, 1973.

[5] H. Analyse fonctionelle. Théorie et applications. *Collection Mathématiques Appliquées pour la maitrise. Paris etc. Masson.* XIV, 233 p. FF 125. 00, 1983.

[6] J. Giroire; Etude de quelques problèmes aux limites extérieurs et résolution par équations intégrales *PhD Thesis*, Université Paris VI, 1987.

[7] B. Hanouzet; Espaces de Sobolev avec poids application au problème de Dirichlet dans un demi espace. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova,* Vol. **46**, 227–272, 1971.

[8] A. Kufner; Weighted Sobolev spaces, *A Wiley-Interscience Publication*, New York, 1985,