REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS DE MOSTAGANEM

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET INFORMATIQUE

Département de mathématiques et informatique

Mémoire de fin d'étude

pour l'obtention du diplôme de Master en mathématiques

Option : Modélisation, Contrôle et Optimisation

Présenté par

Bensalem Sarra et Bendjebbar Zohra

THEME

Sur la croissance des solutions des équations différentielles linéaires dans le plan complexe

Soutenu le 29/06/2016 devant le Jury

Mr BELAIDI Benharrat	**Président**	**Pr**	**U. MOSTAGANEM**
Mme AZIZ Karima	**Examinateur**	**M.C.A**	**U. MOSTAGANEM**
Mr Hamouda Saâda	**Encadreur**	**Pr**	**U. MOSTAGANEM**

Année universitaire: 2015-2016

Résumé: Dans ce travail on essaye d'étudier la croissance des solutions des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions entières ou méromorphes en utilisant une nouvelles approche sur le type de la croissance que l'on appelle [n,p]-type et des nouvelles conditions sur les coefficients qui assurent que toute solution non nulle est d'ordre infini avec une estimation sur l'ordre itératif.

Remerciements

Table des Matières

Introduction **1**

1 Eléments de la théorie de R. Nevanlinna **3**

1.1 **Fonction caractéristique de R. Nevanlinna** 3

1.2 **Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna** 5

1.3 **Ordre d'une fonction méromorphe** 7

1.4 **Type d'une fonction méromorphe** 8

1.5 **Ordre itératif d'une fonction méromorphe** 8

1.6 **Type itératif d'une fonction méromorphe** 9

1.7 $[n, p]$ **−type de croissance** 9

1.8 **Indice de la croissance itératif d'une fonction méromorphe** . 10

2 Croissance des solutions des équations différentielles linéaires **11**

2.1 **Introduction et Résultats** 11

2.2 **Lemmes Préliminaires** 16

2.3 **Preuve des Théorèmes** 18

Conclusion **23**

Introduction

L'analyse complexe est un outil très efficace pour résoudre certains problèmes épineux en mathématiques comme le fameux théorème de Cauchy de calcul d'intégrales. Et avec l'établissement de la théorie de Nevanlinna de la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe, l'étude de propriétés des solutions des équations différentielles linéaires dans le domaine complexe a connu une avance considérable depuis les années trente du vingtième siècle.Il très connu que si les coefficients $A_i(z)$ $(i = 0, ..., n-1)$ de l'équation différentielle

$$f^{(n)} + A_{n-1}(z) f^{(n-1)} + ... + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0. \tag{1}$$

sont des fonctions entières, alors toute solution est une fonction entière aussi. Frei [7] a démontré que si p est le plus grand entier tel que $A_p(z)$ est transcendante, alors il existe au maximum p solutions indépendantes d'ordre fini de l'équation différentielle (1) (pour la définition de l'ordre d'une fonction entière f voir la page (7)). Un autre résultat classique du à Wittich [21] affirme que toutes les solutions de (1) sont d'ordre fini si et seulement si tous les coefficients de l'équation différentielle (1) sont des polynômes. Pour une analyse complète sur l'ordre des solutions dans le cas où tous les coefficients sont des polynômes, voir [11].

Il y a une question principale qui intéresse plusieurs chercheurs dans ce domaine, c'est la suivante: Quelles sont les conditions sur (1) les coefficients qui assurent que toutes les solutions sont d'ordre infini? Il y a pas mal de résultats concernant cette question (voir par exemple [3, 4, 5, 13]), mais la question qui se pose ici est: comment préciser plus la croissance des solutions d'ordre infini? A partir de là, la notion de l'hyper-ordre et d'une manière générale l'ordre itératif est introduite:(pour les définitions voir la page (9)), puis on a une autre notion qui est la notion de type de croissance qui fait la différence entre les fonctions de même ordre: (voir la page(9,10)).

Ce travail comporte une contribution dans ce sens pour les équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à coefficients des fonctions entières.

Ce mémoire contient deux chapitres. Le premier est consacré à quelques éléments de la théorie de Nevanlinna et quelques définitions nécessaire à ce travail. Dans le deuxième chapitre on étudie la croissance des solutions des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions entières ou méromorphes en utilisant une nouvelles approche sur le type de la croissance et les conditions sur les coefficients.

Chapitre 1

Eléments de la théorie de R. Nevanlinna

On va rappeler ici quelques notions et définitions qui nous seront utiles par la suite.

1.1 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Soit f une fonction méromorphe non constante, pour tout nombre complexe a on désigne par $n(t,a,f)$ le nombre des racines de l'equation $f(z)=a$ dans le disque $|z|\leq t$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité et par $\overline{n}(t,a,f)$ les racines distinctes dans $|z|\leq t$, on désigne par $n(t,\infty,f)$ le nombre des pôles de la fonction f dans $|z|\leq t$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité et par $\overline{n}(t,\infty,f)$ le nombre des pôles distincts de f dans le disque $|z|\leq t$.

Notons par:

$$\begin{aligned}
N(r,a,f) &= \int_0^r \frac{[n(t,a,f)-n(0,a,f)]}{t}dt + n(0,a,f)\log r \ \ (a\neq\infty). \\
N(r,\infty,f) &= N(r,f) = \int_0^r \frac{[n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)]}{t}dt + n(0,\infty,f)\log r. \\
\bar{N}(r,a,f) &= \int_0^r \frac{\left[\bar{n}(t,a,f)-\bar{n}(0,a,f)\right]}{t}dt + \bar{n}(0,a,f)\log r \ \ (a\neq\infty).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{N}(r,\infty,f) &= \overline{N}(r,f)=\int_0^r \frac{\left[\overline{n}(t,\infty,f)-\overline{n}(0,\infty,f)\right]}{t}dt+\overline{n}(0,\infty,f)\log r.\\ m(r,a,f) &= m(r,\frac{1}{f-a})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|}d\theta\ (a\neq\infty).\end{aligned}$$

et

$$m(r,\infty,f)=m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f(re^{i\theta})\right|d\theta.$$

où

$$\log^+ x=\max(\log x,0).$$

$N(r,a,f)$: est appelée fonction $a-$points de la fonction f dans le disque $|z|\leq t$.

$\overline{N}(r,a,f)$: est appelée fonction $a-$points distincts de la fonction f dans le disque $|z|\leq t$.

$m(r,a,f)$: est dit fonction de proximite de la fonction f au point a.

Définition 1.1.1 [14, 15] Soit f une fonction méromorphe, on définit la fonction caractéristique de Nevanlinna par

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f).$$

où

$$0<r<+\infty.$$

Cette fonction joue un rôle très important dans la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes.

Exemple 1.1.1 Pour la fonction $f(z)=e^z$, on a

$$N(r,f)\equiv 0.$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
m\,(r,\infty,f) &= m(r,f)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|e^{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\right| d\varphi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|e^{r\cos\varphi}\right| d\varphi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi d\varphi\\
&= \frac{r}{2\pi}2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi\\
&= \frac{r}{\pi}\left[\sin\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{r}{\pi}.
\end{aligned}$$

D'où

$$T(r,f) = \frac{r}{\pi}.$$

1.2 Premier théorème fondamental de R. Nevanlinna

Théorème 1.2.1 [14, 15] Soit $a \in \mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe avec le développement de laurant de $f-a$ autour de l'origine

$$f(z) - a = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j z^j, c_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}.$$

Alors

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r,f) - \ln|c_m| + \varphi(r,a).$$

où

$$|\varphi(r,a)| \leq \ln^+|a| + \ln 2.$$

et

$$\ln|c_m| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(r\exp(\varphi))|\,d\varphi + N(r,f) - N(r,\frac{1}{f}).$$

Proposition 1.2.1 Soient $f, f_1, ..., f_n$ des fonctions méromorphes et a, b, c, d des constantes complexes telle que $ad - cb \neq 0$, alors

(a)

$$m\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i) + \ln n.$$

(b)

$$m\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m(r, f_i).$$

(c)

$$N\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i).$$

(d)

$$N\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(r, f_i).$$

(e)

$$T\left(r, \sum_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i) + \ln n, n \geq 1.$$

(f)

$$T\left(r, \prod_{i=1}^{n} f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} T(r, f_i), n \geq 1.$$

(g)

$$T(r, f^n) = nT(r, f), n \in \mathbb{N}^*.$$

(h)

$$T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) = T(r, f) + O(1), f \not\equiv \frac{-d}{c}.$$

Parmi les résultats fondamentanx de la théorie de R. Nevanlinna le résultat suivant.

Lemme 1.2.1 (La dérivée logarithmique) Soit f une fonction méromorphe transcendante. Alors

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = S\left(r, f\right) = o\left(T\left(r, f\right)\right),$$

où $S\left(r, f\right) = O\left(\ln T\left(r, f\right) + \ln r\right)$ à l'extérieur d'un ensemble $E \subset]0, +\infty[$ de mesure linéaire finie.

1.3 Ordre d'une fonction méromorphe

Définition 1.3.1 [15] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe. Alors l'ordre de f noté $\sigma(f)$ est définie par :

$$\sigma(f) = \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

Pour f une fonction entière, alors l'ordre de f en utilisant $M(r, f)$ est défini aussi par :

$$\sigma_M(f) = \sigma(f) = \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{\log \log M(r, f)}{\log r}.$$

où

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Exemple 1.3.1 Soit $f(z) = \frac{1}{z-1} e^{z^n}$, et d'ordre $\sigma(f) = n$.

Exemple 1.3.2: Soit $f(z) = e^{e^z}$,

Alors

$$T(r, f) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}} \text{ quand } r \to \infty.$$

D'où

$$\sigma(f) = \infty.$$

1.4 Type d'une fonction méromorphe

Définition 1.4.1 [14, 15] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini σ. Alors le type de f noté $\tau(f)$ est définie par:

$$\tau(f) = \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{T(r, f)}{r^{\sigma}}.$$

Pour f une fonction entière, alors le type de f est défini par:

$$\tau_M(f) = \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{\log M(r, f)}{r^{\sigma_n}}.$$

Remarque: De l'inégalité remarquable $T(r, f) \leq \log M(r, f)$.

On déduit que $\tau(f) \leq \tau_{M,n}(f)$.

On a pas l'égalité comme le montre l'exemple suivant:

Pour $f(z) = e^z$, on a $\tau(f) = \frac{1}{\pi}$ et $\tau_{M,n}(f) = 1$.

Exemples 1.4.1:

1)Soit $f(z) = \frac{1}{z-1} e^{z^n}$ le type est

$$\tau(f) = 1.$$

2)Soit $f(z) = \frac{1}{z} e^{z^2}$.On a $\sigma(f) = 2$ et le type

$$\tau(f) = 0.$$

1.5 Ordre itératif d'une fonction méromorphe

Définition 1.5.1 Soit $f(z)$ une fonction méromorphe. Alors l'ordre itératif de f noté $\sigma_n(f)$ est définie par:

$$\sigma_n(f) = \lim_{r \to +\infty} \sup \frac{\log_n T(r, f)}{\log r}.$$

où

$$\log_1(r) = \log(r).$$

et

$$\log_{n+1}(r) = \log(\log_n(r)) \text{ (telle que } (n \in \mathbb{N})).$$

1.6 Type itératif d'une fonction méromorphe

Définition 1.6.1 Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini. Alors le type itératif de f noté $\tau_n(f)$ est définie par:

$$\tau_n(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log_{n-1} M(r,f)}{r^{\sigma_n}} (n \in \mathbb{N}^*).$$

Pour f une fonction entière, alors le type itératif de f est défini par:

$$\tau_{M,n}(f) = \lim_{r\to+\infty} \sup \frac{\log_n M(r,f)}{r^{\sigma_n}}$$

Maintenant, on introduit une nouvelle définition que l'on note par $[n,p]$ −type comme suivant:

1.7 $[n,p]$ −type de croissance

Définition 1.6.2 [12] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre $n-$itératif fini $(0 < \sigma_n(f) := \sigma_n < \infty)$ par récurrence comme suivant

$[n,n]$ −type est le type:

$$\tau_{n,n}(f) = \tau_n(f) := \tau_n.$$

Si $(0 < \tau_n < \infty)$, on peut définir $[n, n-1]$ $-$type par:

$$\tau_{n,n-1}(f) = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log_{n-2} T(r,f)}{\exp\{\tau_n \ r^{\sigma_n}\}} := \tau_{n,n-1}.$$

Si $(\ 0 < \tau_{n,n-1} < \infty)$, on peut définir $[n, n-2]$ $-$type par:

$$\tau_{n,n-2}(f) = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log_{n-3} T(r,f)}{\exp\left\{\tau_{n,n-1\exp\{\tau_n \ r^{\sigma_n}\}}\ \right\}} := \tau_{n,n-2}.$$

Après les calcules de $\tau_{n,p+1}(n-1 \geq p \geq 1)$,Si $(\ 0 < \tau_{n,p+1} < \infty)$, on peut définir $[n,p]$ $-$type i.e $(\tau_{n,p}(f))$ par:

$$\tau_{n,p}(f) = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log_{n-2} T(r,f)}{\exp\left\{\tau_{n,p+1\cdots\exp\{\tau_{n,n-1}\exp\{\tau_n \ r^{\sigma_n}\}\}}\ \ldots\right\}} := \tau_{n,p}.$$

Pour f est une fonction entière, de même méthode on peut définir $\tau_{M,n,p}(f)$ en remplaçant $T(r,f)$ par $\log M(r,f)$.

Exemple 1.6.1 Soit une fonction $f(z) = \exp\{4\exp\{2\exp\{3z^2\}\}\}$.

On a

$$\sigma(f) = +\infty \quad \sigma_2(f) = +\infty \quad \sigma_3(f) = 2 \quad \sigma_4(f) = 0.$$

et

$$\tau_{M[3,3]} = 3 \text{ où } (\tau_{M,3}(f) = 3) \quad \tau_{M[3,2]} = 2 \quad \tau_{M[3,1]} = 4.$$

1.8 Indice de la croissance itératif d'une fonction méromorphe

Définition 1.7.1 Soit $f(z)$ une fonction méromorphe, alors l'indice de la croissance itératif de f noté $i(f)$ est définie par:

$$i(f) = \begin{cases} 0 \text{ si } f \text{ est rational} \\ \min \ \{n \in \mathbb{N} : \sigma_n(f) < \infty\} \text{ si } f \text{ est transcendante} \\ \infty \text{ si } \sigma_n(f) = \infty \ \forall (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Chapitre 2

Croissance des solutions des équations différentielles linéaires

2.1 Introduction et Résultats

Il y a plusieures théorèmes et lemmes

Dans [**10**], Gundersen a prouvé les résultats suivants.

Théorème 2.1.1 [**10**] Soit $A_0(z) \not\equiv 0$ et $A_1(z)$ des fonctions entières telles que pour les constantes réelles α,β,θ_1,θ_2;

avec $(\alpha > 0,\beta > 0)$ et $(\theta_1 < \theta_2)$ on a:

$$|A_0(z)| \geq \exp\left\{(1 + o(1)\alpha\,|z|^{\beta})\right\}.$$

et

$$|A_1(z)| \leq \exp\left\{o(1)\alpha\,|z|^{\beta}\right\}.$$

Quand $z \to \infty$ avec $(\theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2)$ Alors, toute solution de l'équation différentielle

$$f'' + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0. \tag{2.1}$$

est d'ordre infini.

Ce résultat a été amelioré et généralizé par Belaidi and Hamouda dans **[3]** comme suivant:

Théorème 2.1.2 [3] Soit $A_0(z) \not\equiv 0$, $A_1(z)$,......, $A_{k-1}(z)$ des fonctions entières telles que pour les constantes réelles α,β,μ, θ_1,θ_2;

avec $(0 \leq \beta < \alpha,\ \mu > 0)$ et($\theta_1 < \theta_2$), on a :

$$|A_0(z)| \geq e^{\alpha|z|^\mu}.$$

et

$$|A_j(z)| \leq e^{\beta|z|^\mu}(j = 1, \dots, k-1).$$

Quand $z \to \infty$ avec $(\theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2)$. Alors, toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation différentielle

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \dots\dots + A_1(z)f' + A_0(z)f = 0. \tag{2.2}$$

est d'ordre infini.

Ensuite, Tu, Chen et Zhen ont étendu ce résultat en utilisant l'ordre itératif comme suivant.

Théorème 2.1.3 [18] Soit $A_0(z) \not\equiv 0$, $A_1(z)$,......, $A_{k-1}(z)$ des fonctions entières telles que pour les constantes réelles α,β,μ,θ_1,θ_2, et un entier positive n; avec $(0 \leq \beta < \alpha$, $\mu > 0$ et $\theta_1 < \theta_2$, $1 \leq n < \infty)$, on a :

$$|A_0(z)| \geq \exp_n \{\alpha |z|^\mu\}.$$

et

$$|A_j(z)| \leq \exp_n \{\beta |z|^\mu\}, (j = 1, \dots k-1).$$

Quand $z \to \infty$ avec $(\theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2)$, Alors $\sigma_{n+1}(f) \geq \mu$ pour toute solution f non triviale de (2.2).

Dans **[17]**,Tu et Yi ont introduit la notion de type pour prouver le résultat suivant:

Théorème 2.1.4 [17] Soit $A_j(z)$ telle que $(j = 0, \ldots k-1)$ des fonctions entières satisfaisant $\sigma(A_0) = \sigma$, $\tau(A_0) = \tau$, $0 < \sigma < \infty$, $0 < \tau < \infty$, $\sigma(A_j) \leq \sigma$ et $\tau(A_j) < \tau$ si $\sigma(A_j) = \sigma$ $(j = 1, \ldots, k-1)$. Alors, toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.2) satisfait $\sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.

Dans ce sens, ce document donne d'autre amélioration de ces résultats.

Théorème 2.1.5 [12] Soit $A_0(z) \not\equiv 0$, $A_1(z)$,......, $A_{k-1}(z)$ des fonctions méromorphes dans le plan complexe. s'il existe une courbe γ tendant ∞ et un ensemble $E \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique fini de telle sorte que pour $z \in \gamma$ et $|z| \notin E \cup [0, 1]$, on a:

$$\lim_{z \to +\infty} \frac{\left(\sum_{j=1}^{k-1} |A_j(z)| + 1 \right) |z|^{\mu}}{|A_0(z)|} = 0. \tag{2.3}$$

Pour tout $\mu > 0$. Alors toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.2) est d'ordre infinie .

Théorème 2.1.5 est également une amélioration du Théorème 2.1.1 en **[19]** et il est très pratique.

Exemple 2.1.6 D'après le Théorème 2.1.5, toute solution $f \not\equiv 0$ de l'équation différentiel

$$f'' + e^{z} \exp\left\{e^{iz}\right\} f' + e^{2z} \exp\left\{e^{iz}\right\} f = 0.$$

est d'ordre infinie.

Nous pouvons prendre la courbe $\sigma = \{z : \arg(z) = 0\}$.

Maintenant; nous donnons le cas de l'ordre itératif de cette étude comme suit .

Théorème 2.1.7 [12] Soit $A_0(z) \not\equiv 0$, $A_1(z)$,......, $A_{k-1}(z)$ des fonctions méromorphes dans le plan complexe. S'il existe une courbe γ tendant ∞ et un ensemble $E \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique fini de telle sorte que pour $z \in \gamma$ et $|z| \notin E \cup [0, 1]$, on a

$$\lim_{z\to+\infty}\frac{\sum_{j=1}^{k-1}|A_j(z)|+1}{|A_0(z)|}\exp_n\{\lambda|z|^\mu\}=0. \tag{2.4}$$

où $n\geq 1$, est un nombre entier $\lambda>0$, $\mu>0$. Sont des constantes réelles. Alors toutes solution $f\not\equiv 0$ de (2.2) satisfait $\sigma_n(f)=\infty$, et en plus $\sigma_{n+1}(f)\geq\mu$.

Remarque 2.1.8 Des résultats similaires du Théorème 2.1.5 et Théorème 2.1.7 sont obtenus récemment par M Hamouda dans **[20]** relative à certaines équations différentielles linéaires dans le disque unité.

Exemple 2.1.9 Considérons l'équation différentielle suivante :

$$f''+\exp_3\{e^z\}\exp_4\{e^z\}f'+\exp_3\left\{e^{2z}\right\}\exp_4\{e^z\}f=0.$$

D'après le théorème 2.1.7, toute solution $f\not\equiv 0$ de cette équation différentielle satisfait $\sigma_4(f)=\infty$ et en plus $\sigma_5(f)\geq 1$.

Corollaire 2.1.10 Soit $A_0(z)\not\equiv 0$, $A_1(z),\ldots\ldots,$ $A_{k-1}(z)$ des fonctions méromorphes dans le plan complexe. S'il existe une courbe γ tendant ∞ et un ensemble $E\subset(1,\infty)$ de mesure logarithmique finie telles que quand $z\to\infty$ sur γ avec $|z|\notin E\cup[0,1]$, on a

$$|A_0(z)|\geq\exp_n\{\alpha|z|^\mu\}. \tag{2.5}$$

et

$$|A_j(z)|\leq\exp_n\{\beta|z|^\mu\},\ (j=1,2\ldots,k-1). \tag{2.6}$$

où $n\geq 1$, est un entier et $(0<\beta<\alpha,\mu>0)$ sont des constantes réelles. Alors, toute solution $f\not\equiv 0$ de (2.2) satisfait $\sigma_n(f)=\infty$ et en plus $\sigma_{n+1}(f)\geq\mu$.

Récemment, dans **[1]** Cao a généralizé le Théorème 1.4 en introduisant l'ordre itératif comme suivant.

Théorème 2.1.11 [1] Soit $A_0(z) \not\equiv 0$, $A_1(z), \ldots\ldots, A_{k-1}(z)$ des fonctions méromorphes dans le plan complexe, et soit $i(A_0) = n$ $(0 < n < \infty)$.

Supposons que $i(\frac{1}{A_0}) < n$ ou $\lambda_n\left(\frac{1}{A_0}\right) < \sigma_n(A_0)$, et que

i/ $\max\{i(A_j) : j = 1, 2 \ldots\ldots, k-1\} < n$ ou

ii/ $\max\{\sigma_n(A_j) : j = 1, 2 \ldots\ldots, k-1\} \leq \sigma_n(A_0) := \sigma$ $(0 < \sigma < \infty)$,

$\max\{\tau_n(A_j) : \sigma_n(A_j) = \sigma_n(A_0)\} < \tau_n(A_0) := \sigma$ $(0 < \tau < \infty)$.

Alors toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$, dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de (2.2) satisfait et $i(f) = n+1$ et $\sigma_{n+1}(f) = \sigma_n(A_0)$.

En introduisant la nouvelle notion $[n,p]$-type on établir la résultat suivant.

Théorème 2.1.12 [12] Soit $A_0(z) \not\equiv 0$, $A_1(z), \ldots\ldots, A_{k-1}(z)$ des fonctions méromorphes dans le plan complexe, et soit $i(A_0) = n$ $(2 < n < \infty)$.

Supposons que $i_\lambda(\frac{1}{A_0}) < n$ ou $\lambda_n\left(\frac{1}{A_0}\right) < \sigma_n(A_0)$; et

(*) $\max\{\sigma_n(A_j) : j = 1, 2, \ldots\ldots, k-1\} \leq \sigma_n(A_0) := \sigma$, $(0 < \sigma < 1)$,

$\max\{\tau_n(A_j) : \sigma_n(A_j) = \sigma_n(A_0)\} \leq \tau_n(A_0) := \tau$, $(0 < \tau < \infty)$,

$\max\{\tau_{n,n-1}(A_j) : \sigma_n(A_j) = \sigma_n(A_0)$ et $\tau_n(A_j) = \tau_n(A_0)\} < \tau_{n,n-1}(A_0) := \tau^*$ $(0 < \tau^* < \infty)$

et $\tau^* = \liminf\limits_{r\to\infty} \frac{\log_{n-2} T(r,A_0)}{\exp\{\tau_n r^{\sigma_n}\}}$.

Alors toute solution méromorphe $f \not\equiv 0$ dont les pôles sont de multiplicité uniformément bornée, de (2.2) satisfait $i(f) = n+1$ et $\sigma_{n+1}(f) = \sigma_n(A_0)$.

Remarque 2.1.13 Nous avons utilisé seulement $\tau_{n,n-1}$ et nous pensons que cela reste valable pour l'autre $[n,p]$ $-$type $(n-2 \geq p \geq 1)$.

Corollaire 2.1.14 Soit $A_0(z) \not\equiv 0$, $A_1(z), \ldots\ldots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières, et soit $i(A_0) = n$ $(0 < n < \infty)$.Supposons que nous avons la condition (*) du théorème 2.1.12. Alors toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.2) satisfait $i(f) = n+1$

et $\sigma_{n+1}(f) = \sigma_n(A_0)$.

Remarque 2.1.15 Dans le cas des fonctions entières, nous pouvons remplaçer τ_n par $\tau_{M,n}$ et $\tau_{n,n-1}$ par $\tau_{M,n,n-1}$, mais nous ne pouvons pas les utiliser les deux en même temps.

2.2 Lemmes Préliminaires

Pour prouver ces résultats nous avons besoin des lemmes suivants:

Lemme 2.2.1 [9, Theoreme 3] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante et soit $\alpha > 1$ une constante réelle donnée.Alors il existe un ensemble $E \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie, et il existe une constante $A > 0$ qui depend seulement en α, telle que pour tout z satisfaisnte $|z| \notin E \cup [0, 1]$, et pour tout $k, j, 0 \leq j \leq k$, nous avons

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq A \left(\frac{T(\alpha r, f)}{r} \log^{\alpha} r \log T(\alpha r, f)\right)^{k-j}.$$

L'ensemble $E \subset (1, \infty)$ dans tout le présent document ne sont pas nécessairement les mêmes dans chaque cas, mais il est toujours de mesure logarithmique finie, qui est $\int_E \frac{dr}{r} < \infty$.

Le lemme suivant est une conséquence de Lemme 2.2.1.

Lemme 2.2.2 Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante,

avec $\sigma_n(f) := \sigma_n < \infty$ $(n \geq 1)$, et soit $\varepsilon > 0$ une constante donnée. Alors il existe un ensemble $E_1 \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie, telle que pour tout z satisfaisante $|z| \notin E \cup [0, 1]$ et pour tout $k, j, 0 \leq j \leq k$, nous avons

Si $n = 1$

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}.$$

et

Si $n \geq 2$

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq \left[\exp_{n-1}\left\{r^{\sigma_n+\varepsilon}\right\}\right]^{k-j}.$$

Lemme 2.2.3 [12] Soit $f(z)$ une fonction méromorphe telle que,

$0 < \sigma_n(f) := \sigma_n < 1$, $0 < \tau_n(f) := \tau < \infty$, $0 < \tau_{n,n-1}(f) := \tau_{n,n-1} < \infty$,

et

$$\tau_{n,n-1} = \lim_{r\to\infty} \inf \frac{\log_{n-2} T(r, f)}{\exp\{\tau_n r^{\sigma_n}\}}.$$

Alors pour tout $0 < \beta < \tau_{n,n-1}$ donnée, il existe un ensemble $F \subset (1, \infty)$ qui de mesure logarithmique infini $\int_E \frac{dr}{r} = \infty$ telle que pour tout $r \in F$ nous avons:

$$\log_{n-2} T(r, f) > \beta \exp\left\{\tau_n r^{\sigma_n}\right\}.$$

Preuve de Lemme 2 2.3:

D'après la définition de $\tau_{n,n-1}$ et depuis,

$$\tau_{n,n-1} = \lim_{r\to\infty} \inf \frac{\log_{n-2} T(r, f)}{\exp\left\{\tau_n \ r^{\sigma_n}\right\}}.$$

Il existe une suite croissance $\{r_m\}$ $(r_m \to \infty)$ satisfaisant $r_m = m^\alpha$ avec $\left(1 < \alpha < \frac{1}{\sigma_n}\right)$, et

$$\tau_{n,n-1} = \lim_{r_m\to\infty} \frac{\log_{n-2} T(r_m, f)}{\exp\left\{\tau_n \ r_m^{\sigma_n}\right\}}.$$

Alors, il existe m_0 telle que pour tout $m \geq m_0$ et pour un ε donnée, $0 < \varepsilon < \tau_{n,n-1}$, nous avons

$$\log_{n-2} T(r_m, f) > (\tau_{n,n-1} - \varepsilon) \exp\left\{\tau_n \ r_m^{\sigma_n}\right\}. \tag{2.7}$$

Pour $r \in \left[r_m, \frac{m+1}{m} r_m\right]$, on a:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\exp\left\{\tau_n \ \left(\frac{m}{m+1} r\right)^{\sigma_n}\right\}}{\exp\left\{\tau_n \ r^{\sigma_n}\right\}} = 1.$$

Alors, pour un β donnée $(0 < \beta < \tau_{n,n-1} - \varepsilon)$, il existe $m_1$tel que pour tout $m \geq m_1$ et pour $r \in \left[r_m, \frac{m+1}{m} r_m\right]$, nous avons

$$\frac{\exp\left\{\tau_n \ \left(\frac{m}{m+1} r\right)^{\sigma_n}\right\}}{\exp\left\{\tau_n \ r^{\sigma_n}\right\}} > \frac{\beta}{(\tau_{n,n-1} - \varepsilon)}. \tag{2.8}$$

En (2.7) et (2.8), pour tout $m \geq m_2 = \max\{m_0, m_1\}$ et pour tout $r \in \left[r_m, \frac{m+1}{m} r_m\right]$

nous avons

$$\begin{aligned}\log_{n-2} T(r,f) &> \log_{n-2} T(r_m,f) > (\tau_{n,n-1}-\varepsilon)\exp\left\{\tau_n\ r_m^{\sigma_n}\right\} \\ &> (\tau_{n,n-1}-\varepsilon)\exp\left\{\tau_n\ \left(\frac{m}{m+1}r\right)^{\sigma_n}\right\} > \beta\exp\left\{\tau_n\ r^{\sigma_n}\right\}.\end{aligned}$$

Posons $I_m = \left[r_m, \frac{m+1}{m}r_m\right]$ et $F = \cup_{m+m_2}^{\infty} I_m$. Alors,

$$m(F) = \sum_{m=m_2}^{\infty}\int_{I_m}\frac{dr}{r} = \sum_{m=m_2}^{\infty}\log(1+\frac{1}{m}) = \infty.$$

Lemme 2.2.4 [1, Theoreme3,2] Soit $A_0(z)$, $A_0(z)$,......, $A_{k-1}(z)$ des fonctions méromorphe telleque $\max\{\sigma_n(A_j) : j = 1, 2, \ldots\ldots, k-1\} \leq \sigma < \infty$; $(0 < n < \infty)$. Alors, toute solution méromorphe f dont les pôles sont de multiplicités uniformément bornée, de (2.2) satisfait $\sigma_{n+1}(f) \leq \sigma$.

2.3 Preuve des Théorèmes

Preuve du Théorème 2.1.5:

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution de (2.2) d'ordre fini $\sigma(f) := \sigma < \infty$.

D'après Lemme 2.2.2, il existe un ensemble $E_1 \subset (1,\infty)$ de mesure logarithmique finie, telle que pour tout z satisfaisant $|z| \notin E_1 \cup [0,1]$ et pour $1 \leq j \leq k$, on a

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \leq |z|^{j(\sigma-1+\varepsilon)}. \tag{2.9}$$

De (2.2), nous pouvons écrire

$$1 \leq \frac{1}{|A_0(z)|}\left|\frac{f^{(k)}}{f}\right| + \frac{|A_{k-1}(z)|}{|A_0(z)|}\left|\frac{f^{(k-1)}}{f}\right| + \ldots\ldots\ldots + \frac{|A_1(z)|}{|A_0(z)|}\left|\frac{f'}{f}\right|. \tag{2.10}$$

Par l' hypothèse (2.3) on a:

$$\lim_{z\to+\infty}\frac{|A_j(z)|}{|A_0(z)|}|z|^{\mu} = 0,\ (j = 1,\ \ldots\ldots k). \tag{2.11}$$

et

$$\lim_{z \to +\infty} \frac{1}{|A_0(z)|} |z|^{\mu} = 0. \tag{2.12}$$

Avec, $z \in \gamma$, $|z| \notin E \cup [0,1]$ et pour tout $\mu > 0$. Utilisation de (2.9) et (2.11), et (2.12) à (2.10), une contraduction suit quand $z \to \infty$ sur γ avec $|z| \notin E_1 \cup [0,1]$.

Preuve du Théorème 2.1.7:

Supposons que $f \not\equiv 0$ une solution de (2.2) avec $\sigma_n(f); = \sigma_n < \infty$ $(n \geq 1)$.

Si $n = 1$ on a (2.9) et si $n \geq 2$, D'après Lemme 2.2.2, il existe également un ensemble $E_1 \subset (1, \infty)$ de mesure logarithmique finie, telle que pour tout z satisfaisant $|z| \notin E_1 \cup [0,1]$ et pour $1 \leq j \leq k$,nous avons,

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq \left[\exp_{n-1} \left\{ \tau^{\sigma_n + \varepsilon} \right\} \right]^j. \tag{2.13}$$

Par l'hypothèse (2.4), on a :

$$\lim_{z \to +\infty} \frac{|A_j(z)|}{|A_0(z)|} \exp_n \{\lambda |z|^{\mu}\} = 0 \ , \ (j = 1, \ldots\ldots, k). \tag{2.14}$$

et

$$\lim_{z \to +\infty} \frac{1}{|A_0(z)|} \exp_n \{\lambda |z|^{\mu}\} = 0 \ , \ (j = 1, \ldots\ldots, k). \tag{2.15}$$

avec $z \in \gamma$ et $|z| \notin E \cup [0,1]$. Utilisation de (2.13) ou (2.9),(2.14) et (2.15) à (2.10), une contraduction suit quand $z \to \infty$ sur γ avec $|z| \notin E_1 \cup E\,[0,1]$.

Alors nous avons $\sigma_n(f) = \infty$ pour $n \geq 1$. Maintenant, d'après Lemme 2.1 et depuis $\sigma_n(f) = \infty$, on a:

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| \leq (T(\alpha r, f))^{k+\varepsilon}, (j = 1, \ldots\ldots, k). \tag{2.16}$$

Par l'hypothèse (2.4), pour $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, on a:

$$\frac{|A_j(z)|}{|A_0(z)|} \leq \frac{\varepsilon_1}{\exp_n \{\lambda |z|^{\mu}\}}, (j = 1, \ldots\ldots, k). \tag{2.17}$$

et

$$\frac{1}{|A_0(z)|} \leq \frac{\varepsilon_2}{\exp_n\{\lambda |z|^\mu\}}. \tag{2.18}$$

Quand $z \to \infty$ sur γ avec $|z| \notin E \cup [0,1]$.Utilisation de (2.16) et (2.18) à (2.10), Nous obtient pour $|z| = r \notin E \cup [0,1]$,

$$1 \leq \frac{B}{\exp_n\{\lambda |z|^\mu\}} \left(T\left(\alpha r, f\right)\right)^{k+\varepsilon}. \tag{2.19}$$

où $B > 0$ une constante réelle. posons $R = \alpha r$. Nous signalons que E est ici de mesure linéaire fini. Si et seulement si E est de mesure logarithmique finie. Donc, (2.19) devient:

$$\exp_n\left\{\frac{\lambda}{\alpha^\mu} R^\mu\right\} \leq B\left(T\left(\alpha r, f\right)\right)^{k+\varepsilon}, R \notin E. \tag{2.20}$$

De (2.20), nous obtenons :

$$\sigma_{n+1} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log_{n+1} T\left(r, f\right)}{\log r} \geq \mu.$$

Preuve théorème 2.1.12:

Nous allons complèter la preuve du théorème 2.1.11 en introduisant le cas lorsque nous avons $\sigma_n\left(A_j\right) = \sigma_n\left(A_0\right)$ et $\tau_n\left(A_j\right) = \tau_n\left(A_0\right)$.

Supposons que $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de (2.2). D'après (2.2) nous pouvons écrire:

$$-A_0(z) = \frac{f^{(k)}}{f} + A_{k-1}(z)\frac{f^{(k-1)}}{f} + \ldots + A_1(z)\frac{f'}{f}. \tag{2.21}$$

En utilisant le lemme de la dérivée logarithmique et (2.21), on a :

$$m\left(r, A_0\right) \leq \sum_{j=1}^{k-1} m\left(r, A_j\right) + \sum_{j=1}^{k-1} m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + O\left(1\right) = \sum_{j=1}^{k-1} m\left(r, A_j\right) + O\left\{\log(rT(r,f))\right\}.$$

Par conséquent

$$T(r,A_0)=m\left(r,A_0\right)+N\left(r,A_0\right)\leq N\left(r,A_0\right)+\sum_{j=1}^{k-1}m\left(r,A_j\right)+o\left\{\log(rT(r,f))\right\}. \tag{2.22}$$

Valable pour tout r suffisamment grand $r\in E$, où $E\subset(1,\infty)$ est de mesure logarithmique infini .

Supposons que

$\max\left\{\sigma_n(A_j):j=1,2,\ldots\ldots,k-1\right\}=\sigma_n(A_0):=\sigma(0<\sigma<1),$

$\max\left\{\tau_n\left(A_j\right):\sigma_n(A_j)=\sigma_n(A_0)\right\}=\tau_n(A_0):=\tau(0<\tau<\infty),$

et $\max\left\{\tau_{n,n-1}\left(A_j\right):\sigma_n(A_j)=\sigma_n(A_0)\text{ et }\tau_n\left(A_j\right)=\tau_n\left(A_0\right)\right\}<\tau_{n,n-1}\left(A_0\right):=\tau^*\left(0<\tau^*<\infty\right).$

Donc, il existe un sous-ensemble $J\subseteq\{1,\ldots\ldots,k-1\}$ telle que pour $j\in J$,

on a :$\sigma_n(A_j)=\sigma_n(A_0)$, $\tau_n\left(A_j\right)=\tau_n\left(A_0\right)$, $\tau_{n,n-1}\left(A_j\right)<\tau_{n,n-1}\left(A_0\right):=\tau^*$.

Par conséquent, il existe des constantes réelles β_1 et β avec

$\max\left\{\tau_{n,n-1}\left(A_j\right):j\in J\ \right\}<\beta_1\ <\beta<\tau^*.$

Alors, pour tout $j\in\{1,2,\ldots\ldots,k-1\}$ et suffisamment grand r,

On a

$$m\left(r,A_j\right)\leq T(r,A_j)\leq\exp_{n-2}\left\{\beta_1\ \exp\left\{\tau^*r^\sigma\right\}\right\}. \tag{2.23}$$

Par l'ypothèse $i_\lambda(\frac{1}{A_0})<n$ ou $\lambda_n(\frac{1}{A_0})<\sigma_n(A_0)$,

On a

$$N(r,A_0)\leq\exp_{n-1}\left\{r^{\sigma-\varepsilon}\right\}\ (\varepsilon>0).$$

Donc,

$$N\left(r,A_0\right)\leq\exp_{n-2}\left\{\beta_1\ \exp\left\{\tau^*r^\sigma\right\}\right\}. \tag{2.24}$$

Depuis A_0 satisfait aux condition du lemme 2.2.3, il existe un ensemble $F(1,\infty)$de mesure logarithmique infini telle que pour tout $r\in F$, On a

$$T\left(r,A_0\right)\geq \exp_{n-2}\left\{\beta\ \exp\left\{\tau^{*}r^{\sigma}\right\}\right\}. \tag{2.25}$$

De (2.22)-(2.25), pour r suffisamment grand et $r\in F-E$, on obtient:

$$\exp_{n-2}\left\{\beta\ \exp\left\{\tau^{*}r^{\sigma}\right\}\right\}\leq k\exp_{n-2}\left\{\beta_1\ \exp\left\{\tau^{*}r^{\sigma}\right\}\right\}+o\left\{\log(rT(r,f))\right\}. \tag{2.26}$$

Par (2.26), on a $\sigma_{n+1}\left(f\right)\geq\sigma$.D'autre par, par le lemme 2.2.4, on a $\sigma_{n+1}\left(f\right)\leq\sigma$, Par conséquent, nous concluons que $\sigma_{n+1}\left(f\right)=\sigma$.

Conclusion

L'étude de la croissance des solutions des équations différentielles linéaires dans le plan complexe se base, en générale, sur la domination d'un coefficient, souvent le coefficient de f, par rapport aux autres et donc plus les croissances des coefficients se rapprochent plus l'étude devient plus difficile, excepté le cas où les coefficients sont des polynômes qui a été étudié par Gundersen, Steinbart et Wang dans [11] où ils ont donné toutes les valeures possibles de l'ordre de la croissance des solutions. La plupart des cas étudiés est le cas où les coefficients sont de même ordre. Ce mémoire contient une contribution dans ce sens, c'est à dire le cas où les coefficients sont de même ordre et de même type pour certaines classes d'équations linéaires en utilisant une nouvelle approche sur la définition de type et les conditions sur les coefficients mais le problème dans sa généralité reste ouvert.

Bibliographie

[1] **B. Belaïdi**, *The Properties of Solutions of Some Linear Differential Equations*, Publicationes Mathematicae Debrecen, 78/2 (2011), 317-326.

[2] **B. Belaïdi and K. Hamani**, *Order and hyper-order of entire solutions of linear differential equations with entire coefficients*, Electron. J. Diff. Eqns, N° 17, Vol. 2003 (2003), 1-12.

[3] **B. Belaïdi and S. Hamouda**, *Orders of solutions of an n-th order linear differential equations with entire coefficients*, Electron. J. Diff. Eqns, N° 63, Vol. 2001 (2001), 1-5.

[4] **B. Belaïdi and S. Hamouda**, *Growth of solutions of an n-th order linear differential equations with entire coefficients*, Kodai Math. J. Vol. 25 (2002), N° 3, 240-245.

[5] **Z. X. Chen,** *The growth of solutions of a class of second order linear differential equations with entire coefficients,* Chin. Ann. of Math. 1999, 20A(1) 7-14.

[6] **Z. X. Chen and C.C. Yang**, *Some further results on the zeros and growths of entire solutions of second order linear differential equations*, Kodai Math. J., 22(1999), 273-285.

[7] **M. Frei**, *Sur l'ordre des solutions entières d'une équation différentielle linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris 236 (1953), 38-40.

[8] **S. A. Gao, Z. X. Chen and T. W. Chen**, *Oscillation theory of linear differential equations*, Huazhong University of Science and Technology Press, Wuhan, 1988. (in Chinese).

[9] **G. G. Gundersen**, *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, J. London Math. Soc. (2) 37 (1988), no. 1, 88-104.

[10] **G. Gundersen,** *Finite order solutions of second order linear di erential equations,* Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1988), pp. 415-429.

[11] **G. G. Gundersen, M. Steinbart and S. Wang**, *The possible orders of solutions of linear differential equations with polynomial coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), 1225-1247.

[12] **S. Hamouda**, On the Iterated Order of Solutions of Linear Differential Equations in the Complex Plane, Southeast Asian Bulletin of Mathematics (2015) 39: 45–55.

[13] **S. Hamouda and B. Belaïdi,** *On the growth of solutions of* $w^{(n)} + e^{-z}w' + Q(z)w = 0$ *and some related extensions,* Hokkaido. Math. J. Vol 35 (2006) N° 3, 573-586.

[14] **W. K. Hayman**, *Meromorphic functions*, Oxford Mathematical Monographs Clarendon Press, Oxford, 1964.

[15] **I. Laine**, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter Studies in Mathematics, 15. Walter de Gruyter &Co., Berlin, 1993.

[16] **A.Z. Mohon'ko**, *The Nevanlinna characteristics of certain meromorphic functions*, (Russian) Teor. Funkcional. Anal. i Priložen. No. 14(1971), 83-87.

[17] **J. Tu, C.F. Yi**, *On the growth of solutions of a class of higher order linear differential equations with entire coefficients having the same order,* J. Math. Anal. Appl. 340 (2008) 487–497.

[18] J. **Tu, Z-X Chen and X-M Zheng,** Growth of solutions of complex differential equations with coefficients od finite iterated order, Electron. J. Diff. Eqns, N° 54, Vol. 2006 (2006), 1-8.

[19] **G. Valiron**, *Sur la dérivée des fonctions algébroides*, Bull. Soc. Math. France 59 (1931), 17-39.

[20] **G.Valiron**, *Lectures on the General theory of Integral Functions*, translated by E. F. Collingwood, Chelsea, New York, 1949.

[21] **H. Wittich**, *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytishe Funktionen*, 2nd Edition, Springer-Verlag New York. Heidelberg Berlin, 1968.