Résumé

Ce travail est consacré à l'étude d'une équation différntielle abstaite de second ordre de type elliptique de la forme

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \text{ a.e.} \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

avec les conditions aux limites de type Sturm Liouville abstrait

$$u'(0) - Hu(0) = d_0, \; u(1) = u_1, \tag{2}$$

où A et H sont deux opérateurs linéaires fermés sur X un espace de Banach complexe, f est une fonction définie de $[0,1]$ à valeurs dans X et d_0, u_1 sont donnés dans X.

On s'interesse, sous certaines hypothèses sur les opérateurs A, H et lorsque le second membre f appartient à l'espace de Hölder $C^{\theta}([0,1], X)$, avec $0 < \theta < 1$, à l'existence, l'unicité et la régularité maximale d'une solution stricte u, c'est-à-dire

$$u \in C^2([0,1]; X) \cap C([0,1]; D(A)),$$

avec $u(0) \in D(H)$ et satisfaisant (1)-(2).

Mots clés :

Semi-groupes, espaces d'interpolation, les espaces de Hölder, solution stricte, équation elliptique, les conditions aux limites.

Dédicace

Merci allah(mon dieu) de nos avoir donné la capacité et la réfléchir, la patience d'aller jusqu'au bout du rêve et le bonheur de lever nos mains vers le ciel pour nous dirons « Ya Allah»

Nous dédions ce modeste travail à , à nos mères et nos pères,

A nos sœurs, toutes nos familles, nos amies, nos professeurs et A tous ceux que nous aimons.

Nous dédions ce travail

Remerciements

Ce mémoire a été effectuée au sein du Laboratoire de Mathématiques pures et appliquées à l'université de Mostaganem Abdelhamid Ibn Badis.

Avant tout, louange à **ALLAH** le tout puissant de m'avoir aidé à réaliser ce travail. Mes premiers remerciements vont à mon président de jury. J'ai le plaisir de remercier infiniment le Professeur **Ahmed MEDEGHRI** qui a bien voulu présider le jury de ce mémoire. Je le remercie pour ses informations, ainsi que pour ses conseils.

Monsieur **Abdallah MENAD**, Maître d'assistance classe à l'université de Mostaganem Abdelhamid Ibn Badis a accepté de faire partie du jury de ce mémoire ; je lui exprime ma gratitude et mes remerciements pour son aide précieuse, son encouragement permanent et son conseil judicieux.

J'exprime ma profonde reconnaissance à mon encadreur, monsieur **Mohammed KAID**. Je n'oublie pas les nombreuses séances de travail, sa relecture attentive, ses corrections forts utiles à l'élaboration de ce mémoire et guidé mes premiers pas dans le recherche. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude.

Je remercie également l'ensemble de mes collègues et je voudrai aussi exprimer ma grande affection à toute ma famille, en particulier, mes parents, mes soeurs et mon frère, pour leur présence continue et leur soutien indéfectible. Que Dieu les garde et protège et qu'il trouvent ici ma profonde reconnaissance.

Enfin, je remercie infiniment toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail et qui m'ont soutenu.

Table des matières

Introduction générale

Historique

De nombreux auteurs ont étudié les **E**quations **D**ifférentielles **A**bstraites (en abrégé EDA) ; citons en premier les travaux de E. Hille et B. Sz. Nagy (1938) dans le cadre hilbertien. En 1948, E. Hille et K. Yosida, ont pour la première fois, résolus le problème de Cauchy abstrait

$$\begin{cases} u'(t) - Au(t) = 0, \quad t \in [0, +\infty), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où A est un opérateur linéaire fermé sur un espace de Banach complexe, $u_0 \in X$. la résolution de ce problème à donné naissance à la théorie des semi-groupes, qui s'est intensivement développée des années 1930 à 1960 avec les travaux fondateurs de M. H. Stone, E. Hille, K. Yosida, W. Feller, G. Lumer, I. Miyadera et R. S. Phillips.

A partir 2004 dans une séries d'articles, les auteurs A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe et A. Yagi traitent le problème

$$\begin{cases} u''(t) + Au(t) = f(t), \\ u(0) = u_0, \\ u(1) = u_1, \end{cases} \tag{3}$$

en utilisant les techniques de semi-groupes et les puissances fractionnaires d'opérateurs. L'étude est réaliser dans deux type d'espaces : les cadres holderienne et $f \in L^p(0,1,X)$, $1 < p < \infty$, où X est de type UMD (Unconditional Martingale Différences). Ils ont étudié cette équation sur l'intervalle borné $[0,1]$ et sous l'hypothèse de majoration de la résolvante en $C/(1+\lambda)$ pour λ dans l'ensemble résolvante de l'opérateur A avec constante C. Ils donnent une condition nécessaire et suffisante de compatibilité entre les données pour avoir une solution stricte et on détaille ci-dessous les résultats obtenus dans cadre holderien

Theorème 0.1 *Pour*

$$f \in C^\theta([0,1]; X), \theta \in]0,1[$$

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) Le problème

$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = u_0, \; u(1) = u_1, \end{cases}$$

admet une unique solution u satisfaisant

$$u \in C^2([0,1]; X) \cap C([0,1]; D(A)),$$

tel que cette solution sera appelée la solution stricte de (3).

ii) $u_0,\ u_1 \in D(A)$ et
$$f\left(i\right) - Au_i \in \overline{D(A)}, \quad i = 0,\ 1.$$

Theoreme 0.2 *Pour*
$$f \in C^{\theta}\left([0,1], X\right),\ \theta \in \left]0,1\right[.$$
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) Le problème (3) admet une solution stricte et unique vérifiant la propriété de régularité maximale
$$u'',\ Au \in C^{\theta}\left([0,1]; X\right),\ \theta \in \left]0,1\right[.$$
ii) $f \in C^{\theta}\left([0,1]; X\right),\ u_0,\ u_1 \in D(A)$ *et*
$$f\left(i\right) - Au_i \in D_A(\theta/2, \infty),\ i = 0,\ 1.$$

Ces travaux ont été généralisés par la suite par M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, A. Medeghri, en supposant dans ce cas des conditions aux limites de type Sturm-Liouville absrait de type
$$\begin{cases} u''(x) + Au(x) = f(x), & x \in (0,1), \\ u'(0) - Hu(0) = d_0,\ u(1) = u_1, \end{cases}$$
où A et H sont deux opérateurs linéaires fermés sur X un espace de Banach complexe et f est une fonction définie de $[0,1]$ à valeurs dans X.

Présentation du mémoire

L'objectif de ce mémoire est de faire une synthèse sur le travail de M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, A. Medeghri "*Abstract differential equation of elliptic type with general Robin boundary conditions in Holder spaces" [3]* concernant l'étude de l'équation différentielle abstraite simple, du second ordre de type elliptique dans un cadre commutatif, suivante
$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{4}$$
avec les conditions aux limites de type Sturm Liouville abstrait
$$u'(0) - Hu(0) = d_0,\ u(1) = u_1, \tag{5}$$
où A et H sont deux opérateurs linéaires fermés sur X un espace de Banach complexe , $(X, \|.\|)$ étant un espace de Banach complexe, f est une fonction définie de $[0,1]$ à valeurs dans X
$$f \in C^{\theta}\left([0,1], X\right), \quad 0 < \theta < 1,$$
d_0, u_1 sont donnés dans X.

On cherche une solution stricte du problème (4)-(5), c'est-à-dire une solution u telle que
$$u \in C^2\left([0,1]; X\right) \cap C\left([0,1]; D\left(A\right)\right),$$

avec $u(0) \in D(H)$ et satisfaisant (4)-(5). Ainsi que dans ce cas on dira qu'une solution stricte u a la régularité maximale si
$$u \in C^{2+\theta}\left([0,1]; X\right) \cap C\left([0,1]; D\left(A\right)\right),\ 0 < \theta < 1.$$

Cette régularité maximale de la solution stricte sera en générale obtenue en supposant que $f(0)$, $f(1)$ vérifient des conditions de compatibilité relatives à l'équation (4).

Ce mémoire comporte trois chapitres et est organisé comme suit.

Chapitre un est consacré à quelques rappels sur les outils mathématiques nécessaires pour la suite de ce travail. Ils concernent les opérateurs linéaires, les espaces fonctionnels, le calcul fonctionnel de Dunford et les semi-groupes....

Dans le **deuxième chapitre :** On se propose d'étudier le problème de Robin régi par une équation différentielle abstraite du second ordre dans le cadre commutatif, c'est-à-dire que les opérateurs A et H commutent en un certain sens (voir l'hypothèse (2.5)).

Cette étude se base sur la formule explicite de la solution, afin de construire cette représentation, on résout par la méthode de la réduction de l'ordre de Krein [6]. En fait, ici pour résoudre (4)-(5), on se donne un peu plus de régularité sur f (f est höldérienne). On espère récupérer ce "plus" sur la solution quand $f \in C^{\theta}([0,1], X)$, $0 < \theta < 1$. Grâce à la théorie des semi-groupes analytiques, on donnera la représentation de la solution et ensuite on étudiera sa régularité. On détaille ci-dessous les résultats obtenus.

Il s'agit d'étudier une équation différentielle du second ordre sur l'intervalle borné $[0,1]$ suivante :

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{6}$$

avec les conditions aux limites de type Sturm Liouville abstrait

$$u'(0) - Hu(0) = d_0, \ u(1) = u_1, \tag{7}$$

où A est un opérateur linéaires fermés de domaine $D(A)$ non nécessairement dense dans X, $(X, \|.\|)$ étant un espace de Banach complexe et H est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(H)$, f est une fonction définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans X et on suppose toujours l'hypothèse d'ellipticité :

$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \ [0,+\infty[\subset \rho(A) \text{ et} \\ \exists C > 0 : \forall \lambda \geq 0, \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < C/(1+\lambda). \end{cases} \tag{8}$$

D'autres hypothèses (inclusion de domaines, commutativité au sens des résolvantes ...) permettront d'activer la formule de représentation de la solution et nécessaires pour assurer la convergence des intégrales (majoration de résolvante ...), alors les hypothèses supplémentaires qui sevent à établir les théorèmes sont les suivantes :

$$\begin{cases} i) \ Q - H \text{ est fermable,} \\ ii) \ 0 \in \rho(\overline{Q - H}), \\ iii) \ Q^{-1}\overline{(Q - H)}^{-1} = \overline{(Q - H)}^{-1} Q^{-1}, \\ v) \ \overline{(Q - H)}^{-1} \left((D(Q), X)_{1-\theta;\infty} \right) \subset D(Q) \cap D(H), \\ vi) \ Q\overline{(Q - H)}^{-1} \left((D(Q), X)_{1-\theta;\infty} \right) \subset (D(Q), X)_{1-\theta;\infty}, \end{cases} \tag{9}$$

Notation 0.1 *On a*

$$D_Q(\theta, p) = (D(A), X)_{1-\theta/2,p}.$$

et on fera de plus les hypothèse suivant :

$$0 \in \rho(\Pi),$$

où

$$\Pi = I + 2\left(I - e^{2Q}\right)^{-1} Qe^{2Q}\overline{(Q-H)}^{-1}. \tag{10}$$

Pour construire la formule de représentation de la solution dans le cas abstrait on s'inspire de la résolution de l'équation (6) quand l'opérateur A est un réel négatif : on utilise la méthode de la variation de la constante pour obtenir la fonction u définie par :

$$u(x) = e^{xQ}\xi_0 + e^{(1-x)Q}\xi_1 + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)ds + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}f(s)ds, \tag{11}$$

est calculé en exploitant les conditions aux limites (7). La théorie des semi-groupes nous permet de considérer (11) comme formule de représentation de la solution dans le cas abstrait et donnée formellement par.

$$\begin{aligned} u(x) \;=\; & e^{xQ}\left[\Lambda^{-1}d_0 + (Q+H)\Lambda^{-1}e^{Q}u_1\right] \\ & +\frac{1}{2}e^{xQ}(Q+H)\Lambda^{-1}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(s)\,ds \\ & -\frac{1}{2}e^{xQ}(Q+H)\Lambda^{-1}e^{Q}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)\,ds \\ & +e^{(1-x)Q}\left[\left(I-(Q+H)\Lambda^{-1}e^{2Q}\right)u_1 - \Lambda^{-1}e^{Q}d_0\right] \\ & -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q}(Q+H)\Lambda^{-1}e^{Q}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(s)\,ds \\ & -\frac{1}{2}e^{(1-x)Q}\left(I-(Q+H)\Lambda^{-1}e^{2Q}\right)Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)\,ds \\ & +\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)\,ds + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}f(s)\,ds. \end{aligned} \tag{12}$$

Il s'agit de montrer que la solution u donnée par (12) est la solution stricte du problème (6)-(7). Rappelons que u est une solution stricte dans cadre hölderien du problème (6)-(7) si

$$u \in C^2([0,1], X) \cap C([0,1], D(A)),$$

avec $u(0) \in D(H)$ et qui satisfait le Problème (6)-(7). On veut montrer également la propriété de régularité maximale de la solution u, c'est-à-dire

$$u'',\ Au \in C^{\theta}([0,1], X), \qquad 0 < \theta < 1.$$

L'étude de la régularité de cette représentation assurera l'existence d'une solution stricte de (6)-(7), quant à l'unicité, elle est donnée par les théorèmes suivantes :

Theorème 0.3 *Sous les hypothèses (8)∽(10). soit*

$$f \in C^{\theta}([0,1]; X),\ \theta \in]0,1[.$$

Alors, les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *Le Problème (6)-(7) admet une unique solution stricte donnée par (12).*
2. $u(0) \in D(H)$ *et*

$$\begin{cases} u_1 \in D(Q^2) = D(A), \\ \left(\overline{Q-H}\right)^{-1} d_0 \in D(Q) \cap D(H), \\ Q\left(\overline{Q-H}\right)^{-1} (d_0 - Q^{-1}f(0)) \in D(Q), \\ Q^2\left(\overline{Q-H}\right)^{-1} (d_0 - Q^{-1}f(0)) + f(0) \in \overline{D(Q)}, \\ Q^2u_1 + f(1) \in \overline{D(Q)}. \end{cases}$$

Theorème 0.4 *Sous les hypothèses (8)∽(10). soit*

$$f \in C^{\theta}\left([0,1]\,; X\right), \ \theta \in \left]0,1\right[.$$

Alors, les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *Le Problème (6)-(7) admet une unique solution stricte ayant la propriété de la régularité maximale*
$$u'', \ Au \in C^{\theta}\left([0,1]\,; X\right), \ \theta \in \left]0,1\right[.$$
2. $u(0) \in D(H)$ *et*

$$\begin{cases} u_1 \in D(Q^2) = D(A), \\ \left(\overline{Q-H}\right)^{-1} d_0 \in D(Q) \cap D(H), \\ Q\left(\overline{Q-H}\right)^{-1} (d_0 - Q^{-1}f(0)) \in D(Q), \\ Q^2\left(\overline{Q-H}\right)^{-1} (d_0 - Q^{-1}f(0)) + f(0) \in \overline{D(Q)}, \\ Q^2u_1 + f(1) \in (D(Q), X)_{1-\theta,\infty}. \end{cases}$$

Dans le **troisième chapitre :** On donne un exemple modèle auquel cette théorie s'applique.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre on donne quelques définitions, théorèmes, et notions utilisées dans ce travail.

Nous considérons X un espace de Banach complexe.

1.1 Les opérateurs

Soient $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ et $(Z, \|.\|_Z)$ trois espaces vectoriels normés complexes.

Définition 1.1 *Un opérateur linéaire de X dans Y est une application linéaire A définie d'un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$ à valeurs dans Y, i.e pour tout $x, y \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :*

i) $A(x+y) = Ax + Ay$.

ii) $A(\lambda x) = \lambda Ax$.

On appelle domaine de A, et on le note $D(A)$ le sous espace vectoriel des éléments x de E tels que Ax ait un sens.

On appelle image de A notée $R(A)$, le sous espace vectoriel $A(D(A))$.

Remarque 1.1 *On note que, par abus, on écrit toujours $A(x) = Ax$ por tout $x \in D(A)$.*

Définition 1.2 *Soient $A : D(A) \subset X \to Y$ et $B : D(B) \to Z$ deux opérateurs linéaires. On peut définir l'opérateur BA par*

$$\begin{cases} D(BA) = \{x \in D(A), & Ax \in D(B)\} \\ (BA)x = B(Ax), & x \in D(BA) \end{cases}$$

Si A est injectif, on peut définir l'inverse de A, noté A^{-1}, par :

$$\begin{array}{rcl} A^{-1} : A(D(A)) & \to & D(A) \\ y & \to & A^{-1}y = x. \end{array}$$

Définition 1.3 *Soient $(A, D(A)), (B, D(B))$ deux opérateurs linéaires de X dans Y. On dit que B est une extension ou un prolongement de A et on note $A \subset B$ si*

$$\begin{cases} D(A) \subset D(B) \\ \forall x \in D(A), \ Ax = Bx. \end{cases}$$

1.1.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.4 *On dit qu'un opérateur A définit de X dans Y est borné si*

$$D(A) = X \quad et \quad \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|A\xi\| < \infty$$

et on écrit $A \in \mathcal{L}(X)$.

Définition 1.5 *A est dit fermable si et seulement s'il admet une extention fermée, ce qui équivaut à dire que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $Ax_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$ alors $y = 0$.*

les convergences des suites x_n et Ax_n sont au sens de la norme de l'espace X.

Proposition 1.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ et $B : D(B) \subset X \to X$ un opérateur linéaire fermé tels que $\operatorname{Im}(A) \subset D(B)$. Alors $BA \in \mathcal{L}(X)$.*

Proposition 1.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(X)$. Si $\|A\| < 1$ alors $(I - A)$ est inversible dans $\mathcal{L}(X)$ et $(I - A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$.*

1.1.2 Opérateurs linéaires fermés

Définition 1.6 *Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to Y$ est dit fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \in D(A)$ telle que*

$$\begin{cases} x_n \to x \\ Ax_n \to y \end{cases}$$

on a $x \in D(A)$ et $Ax = y$.

Définition 1.7 *On appelle* ensemble résolvant de A *l'ensemble*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X)\}$$

Un élément de $\rho(A)$ est appelé valeur résolvante de A.

1. Si $\lambda \in \rho(A)$ on définit $R_\lambda(A)$ la résolvante de A au point λ par
$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

2. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ est appelé le spectre de A et un élément de $\sigma(A)$ est appelé valeur spectrale de A.

Proposition 1.3 *Soit $A : D(A) \subset X \to Y$ un opérateur linéaire.*

1. Si A est un opérateur fermé alors pour tout $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ l'opérateur $A + B : D(A) \subset X \to Y$ est fermé.

1.1.3 Opérateurs sectoriels

Définition 1.8 *Soit* $0 < \omega \leq \pi$. *On définit le secteur suivant*

$$S_\omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \pi - \omega\}.$$

– Un opérateur linéaire fermé A sur X est dit sectoriel d'angle ω si

$$\rho(A) \supset S_\omega,$$

et

$$\sup_{\lambda \in S_\omega} \left\| \lambda (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty.$$

1.2 Les semi- groupes d'opérateurs linéaires

1.2.1 Semi -groupes fortement continu

Définition 1.9 *Soit* $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ *une famille d'opérateurs linéaires dans* X. *On dit que cette famille forme un semi-groupe dans* X *si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $G(0) = I = I_X$
2. $\forall s, t \in \mathbb{R}^+, G(t+s) = G(t) G(s)$.

Lorsque la famille $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est défini pour $t \in \mathbb{R}$, et que la deuxième propriété est vérifié pour tout s, t de $\mathbb{R}$ on dira qu'on a un groupe.

Définition 1.10 *On dit qu'un semi-groupe* $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ *est fortement continu si et seulement si pour tout* $x \in X$, *l'application* $t \to G(t) x$ *de* $\mathbb{R}^+$ *dans* X *est continue, c'est-à-dire pour tout* $x \in X$

$$\lim_{t \to 0^+} \|G(t) x - x\|_X = 0.$$

On dit aussi que $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ *est un* C_0 *semi-groupe.*

1.2.2 Générateur inféritisémal d'un semi-groupe

Définition 1.11 *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $\{G(t)\}_{t \geq 0}$, *l'opérateur* A *définit par*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ \varphi \in X : \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{G(h)\varphi - \varphi}{h} \text{ existe} \right\} \\ A\varphi = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{G(h)\varphi - \varphi}{h}, \qquad \varphi \in D(A). \end{cases}$$

$D(A)$ *est non vide* $(0 \in D(A))$ *et est bien un sous espace vectoriel de* X. A *est linéaire de* $D(A)$ *dans* X.

1.2.3 Semi-groupes analytiques

On définit, pour tout $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$, le secteur

$$\Sigma_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \alpha\}$$

Définition 1.12 *Soit* $0 < \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$. *Une famille* $\{G(z)\}_{z\in\Sigma_\alpha}$ *d'éléments de* $\mathcal{L}(X)$ *forme un semi-groupe analytique de type* α *dans* X *si elle vérifie les conditions suivantes :*

1. $G(0) = I$,

2. $\forall\ z_1, z_2 \in \Sigma_\alpha$, tel que $z_1 + z_2 \in \Sigma_\alpha$, $G(z_1 + z_2) = G(z_1)\, G(z_2)$,

3. $\forall \varepsilon \succ 0$, $\forall x \in X$, $\displaystyle\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\Sigma_\alpha}} G(z)\, x = x$,

4. l'application $z \to G(z)$ est holomorphe sur Σ_α.

Le théorème suivant est un résultat de Balakrishnan [1]. Il donne une propriété importante utilisée par la suite.

Theorème 1.1 *Soit* A *un opérateur linéaire fermé à domaine dense* $D(A)$ *dans* X *tel que*

$$]0, +\infty[\ \subset \rho(A) \ \ \textit{et}\ \exists M > 0,\ \forall\lambda > 0 : \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\lambda}.$$

Alors il existe un secteur Σ_δ, $0 \leq \delta \leq \dfrac{\pi}{2}$, *tel que*

$$\Sigma_\delta \subset \rho(A) \ \ \textit{et}\ \forall\lambda \in \Sigma_\delta : \left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{|\lambda|}$$

De plus, l'opérateur $(-A)^{\frac{1}{2}}$ *est bien défini et il existe un secteur* $\Sigma_{\alpha+\pi\backslash 2}$ *avec* $0 \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$, *tel que*

$$\Sigma_{\alpha+\pi\backslash 2} \subset \rho\left(-(-A)^{\frac{1}{2}}\right)$$

et $-(-A)^{\frac{1}{2}}$ *génère un semi-groupe analytique.*

1.2.4 Les espaces de Hölder

Définition 1.13 *Soient* X *un espace de Banach complexe et* $C([0,1]; X)$ *l'espace des fonctions continues sur* $[0,1]$ *à valeurs dans* X *muni de la norme*

$$\|f\|_{C([0,1];X])} = \max_{t\in[0,1]} \|f(t)\|_X\,.$$

On considère pour $0 < \alpha < 1$, *l'espace*

$$C^\alpha([0,1], X) = \left\{ f \in C([0,1], X) : \sup_{\substack{t,s\in[0,1]\\ t\neq s}} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t-s|^\alpha} < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^\alpha([0,1],X)} = \|f\|_{C([0,1],X)} + \sup_{\substack{t,s\in[0,1]\\ t\neq s}} \frac{\|f(t) - f(s)\|_X}{|t-s|^\alpha}.$$

Cet espace est un espace de Banach appelé espace Höldérien d'exposant α.

1.2.5 Espace d'interpolation

Soient $(X_0, \|.\|_0)$ et $(X_1, \|.\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continument dans un espace vectoriel topologique séparé Ⱡ.

En posant

$$\begin{aligned} \|x\|_{X_0\cap X_1} &: = \max\left\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\right\} \qquad \text{si } x\in X_0\cap X_1 \\ \|x\|_{X_0+X_1} &: = \inf_{\substack{x_0\in X_0, x_1\in X_1 \\ x_0+x_1=x}} \left(\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}\right) \qquad \text{si } x\in X_0+X_1. \end{aligned}$$

Il est connu que les espaces $\left(X_0\cap X_1, \|.\|_{X_0\cap X_1}\right)$ et $\left(X_0+X_1, \|.\|_{X_0+X_1}\right)$ sont des espaces de Banach. De plus on a

$$X_0\cap X_1 \subset X_0, X_1 \subset X_0+X_1$$

avec des injections continues. Pour plus de détails voir J. L. Lions et J. Peetre [8].

Définition 1.14 *Pour $p\in[1,+\infty[$ et $\theta\in]0,1[$, on définit l'espace intermédiaire noté $(X_0,X_1)_{\theta,p}$ entre $X_0\cap X_1$ et X_0+X_1 par*

$$x\in(X_0,X_1)_{\theta,p} \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall t>0,\ \exists u_0(t)\in X_0, \exists u_1(t)\in X_1 \text{ tel que} \\ x=u_0(t)+u_1(t) \\ t^{-\theta}u_0\in L_*^p(\mathbb{R}_+,X_0),\ t^{1-\theta}u_1\in L_*^p(\mathbb{R}_+,X_1) \end{cases}$$

où $L_*^p(\mathbb{R}_+,X_i)$ est l'espace des fonctions fortement mesurables $u_i:\mathbb{R}_+\longrightarrow X_i$ telles que

$$\|u_i\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+,X_i)} = \left(\int_0^{+\infty}\|u_i(t)\|_{X_i}^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

pour $p\in[1,+\infty[$ et par

$$\|u_i\|_{L_*^\infty(\mathbb{R}_+,X_i)} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} ess\,\|u_i(t)\|_{X_i},$$

si $p=\infty$.

Alors, $(X_0,X_1)_{\theta,p}$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|x\|_{\theta,p} = \inf_{\substack{u_i\in X_i, i=0,1 \\ x=u_0(t)+u_1(t),\forall t>0}} \left(\left\|t^{-\theta}u_0\right\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+,X_0)} + \left\|t^{1-\theta}u_1\right\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+,X_1)}\right)$$

De plus, on a

$$X_0\cap X_1\subset (X_0,X_1)_{\theta,p}\subset X_0+X_1$$

avec des injections continues.

Remarque 1.2 *Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)\subset X$. On note*

$$D_A(\theta,p) = (D(A),X)_{1-\theta;p}$$

où $p\in[1,+\infty]$, $\theta\in]0,1[$. De plus, on a

$$(X,D(A))_{1+\theta,\infty} = \left\{\varphi\in D(A) : A\varphi\in(X,D(A))_{\theta,\infty}\right\}$$

*(voir Triebel [**?**], p 25. et 76).*

Lorsque A vérifie certaines propriétés spectrales, on peut caractériser explicitement l'espaces $D_A(\theta, p)$, par exemple ;

• Supposons que $\mathbb{R}_+ \subset \rho(A)$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \lambda > 0, \left\| (A - \lambda I)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{\lambda}$$

alors

$$D_A(\theta, p) = \left\{ \varphi \in X : t^\theta A (A - tI)^{-1} \varphi \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X) \right\}$$

si $p \in [1, +\infty]$, $\theta \in]0, 1[$ (voir Grisvard [7]), et si $p = \infty$, on a

$$D_A(\theta, \infty) = \left\{ x \in X : \sup_{t>0} \left\| t^\theta A (A - tI)^{-1} x \right\|_X < \infty \right\}$$

• Si A génère un semi-groupe fortement continu borné dans X, alors

$$D_A(\theta, p) = \left\{ \varphi \in X, t^{-\theta} \left(e^{tA} - I \right) \varphi \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X) \right\}$$

(voir Lions [9]).

• Si A génère un semi-groupe analytique borné dans X alors

$$D_A(\theta, p) = \left\{ \varphi \in X, t^{1-\theta} A e^{tA} \varphi \in L_*^p(\mathbb{R}_+, X) \right\}.$$

Proposition 1.4 *Soit L un opérateur générateur d'un semi-groupe analytique généralisé $\left(e^{xL}\right)_{x \geqslant 0}$.*

1. *Soit $\varphi \in X$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*
   (a) $e^{\cdot L} \varphi \in C([0, 1] ; X)$.
   (b) $\varphi \in \overline{D(L)}$.
2. *Soit $\theta \in]0, 1[$, $g \in C^\theta([0, 1] ; X)$, $\varphi \in X$. Posons*

$$S(x) = e^{xL} \varphi + \int_0^x e^{(x-s)L} g(s)\, ds, \quad x \in [0, 1].$$

   Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes
   (a) $S \in C^1([0, 1] ; X) \cap C([0, 1] ; D(L))$.
   (b) $\varphi \in D(L)$ et $g(0) + L\varphi \in \overline{D(L)}$.
   *(voir H. Triebel [**?**] p. 25 et 76).*

Proposition 1.5 *Soient $\theta \in]0, 1[$ et L un opérateur générateur d'un semi-groupe analytique généralisé $\left(e^{xL}\right)_{x \geqslant 0}$.*

1. *Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes*
   (a) $e^{\cdot L} \varphi \in C^\theta([0, 1] ; X)$.
   (b) $\varphi \in D_L(\theta, +\infty)$.
2. *Soit $\varphi \in X$, $\theta \in]0, 1[$ et $g \in C^\theta([0, 1] ; X)$. Posons*

$$v(x) = \int_0^x e^{(x-s)L} (g(s) - g(0))\, ds, \quad x \in [0, 1],$$

   alors

$$v \in C^{1+\theta}([0, 1] ; X) \cap C^\theta([0, 1] ; D(L)).$$

3. Soit $g \in C([0,1];X)$ *et* $\varphi \in X$. *Posons*

$$w(x) = e^{xL}\varphi + \int_0^x e^{(x-s)L} g(s)\, ds, \quad x \in [0,1].$$

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes
(a) $w \in C^{1+\theta}([0,1];X) \cap C^{\theta}([0,1];D(L))$.
(b) $g \in C^{\theta}([0,1];X)$, $\varphi \in D(L)$ *et* $g(0) + L\varphi \in D_L(\theta, +\infty)$.

4. Soit $g \in C^{\theta}([0,1];X)$. *Alors*

$$L \int_0^1 e^{sL}(g(s) - g(0))\, ds \in D_L(\theta, +\infty) = (D(L), X)_{1-\theta,\infty}.$$

1.3 Equation différentielle abstraite du premier ordre

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t); & t \in [0,\tau], \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

où A est un opérateur linéaire de X dans X un espace de Banach, $f \in C([0,\tau];X)$ et u_0 est une donnée dans X.

Définition 1.15 *On dira que u est une solution stricte du Problème (1.1) si*

$$u \in C^1([0,\tau], X) \cap C([0,\tau], D(A))$$

et u satisfait le Problème (1.1).

Définition 1.16 *On dira que u est une solution forte du Problème (1.1) s'il existe une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ *telle que :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} u \quad \text{et } u_n' - Au_n \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} f \quad \text{avec } u(0) = u_0.$$

Theorème 1.2 *Soient* $u_0 \in D(A)$ *et* $f \in C([0,\tau], X)$. *S'il existe une solution stricte u du Problème (1.1), alors u est unique et donnée par l'expression suivante :*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s) f(s) ds, t \in [0,\tau].$$

où A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continue $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Chapitre 2

Sur une classe d'équations elliptiques avec conditions aux limites de type Sturm-Liouville dans les espaces Hölder

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie les équations différentielles opérationnelles elliptiques du second ordre posés sur l'intervalle borné $[0,1]$, munies des conditions de Robin. L'existence et l'unicité de la solution classique sont prouvées sous des hypothèses naturelles de commutativité des coefficients opérateurs, c'est-à-dire que les opérateurs commutent au sens des résolvantes. L'étude se fait dans l'espace $C^{\theta}\left([0,1], X\right)$, $\theta \in \left]0,1\right[$. On montre aussi des propriétés de régularité maximale de la solution.

2.2 Position du problème

On considère l'équation différentielle opérationnelle du second ordre et de type elliptique suivante

$$u''(x) + Au(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{2.1}$$

avec les conditions aux limites de type Sturm Liouville abstrait

$$u'(0) - Hu(0) = d_0, \ u(1) = u_1, \tag{2.2}$$

où A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense dans X, $(X, \|.\|)$ étant un espace de Banach complexe et H est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(H)$, f est une fonction définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans X.On s'intéressera à l'existence et l'unicité d'une solution stricte du Problème (2.1)-(2.2), c'est-à-dire une fonction u telle que

$$u \in C^2([0,1], X) \cap C([0,1], D(A)),$$

avec $u(0) \in D(H)$ et qui satisfait le Problème (2.1)-(2.2). On veut montrer également la propriètè de régularité maximale de la solution u, c'est-à-dire

$$u'', \ Au \in C^{\theta}\left([0,1], X\right), \quad 0 < \theta < 1.$$

On a de plus, par convention d'écriture :

$$Au(x) = A(u(x)), \qquad x \in (0,1).$$

2.3 Les hypothèses

On suppose ici que

$$f \in C^{\theta}\left([0,1], X\right), \quad \theta \in \left]0,1\right[.$$

Les hypothèses sur les opérateurs A et H sont suivantes.

1.
$$\begin{cases} A \text{ est un opérateur linéaire fermé dans } X, \ [0,+\infty[\subset \rho(A) \text{ et} \\ \exists C > 0 : \forall \lambda \geq 0, \left\|(A-\lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} < C/(1+\lambda). \end{cases} \tag{2.3}$$

cette hypothése implique que $Q = -(-A)^{\frac{1}{2}}$est défini et est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique généralisé $\left\{e^{xQ}\right\}_{x\geq 0}$ non fortement continu en zéro car $D(A)$ n'est pas supposé dense dans X, c'est-à-dire $\overline{D(A)} \neq X$ voir Balakrishnan [1] et on a

$$e^{xQ} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} e^{\lambda x}(\lambda I - Q)^{-1} d\lambda \text{ si } x > 0, \\ I \text{ si } x = 0, \end{cases}$$

ou γ est une courbe de Jourdan infinie entourant le spectre de l'opérateur Q.

2. On suppose aussi que

$$Q - H \text{ est fermable et } \overline{Q-H} \text{ inversible dans } \mathcal{L}(X). \tag{2.4}$$

3. L'hypothèse de commutativité est la suivante :

$$Q^{-1}\overline{(Q-H)}^{-1} = \overline{(Q-H)}^{-1} Q^{-1}. \tag{2.5}$$

4. Ensuite, on suppose que

$$\begin{cases} i) \quad \overline{(Q-H)}^{-1}\left((D(Q), X)_{1-\theta;\infty}\right) \subset D(Q) \cap D(H), \\ ii) \quad Q\overline{(Q-H)}^{-1}\left((D(Q), X)_{1-\theta;\infty}\right) \subset (D(Q), X)_{1-\theta;\infty}. \end{cases} \tag{2.6}$$

On rappelle que pour un opérateur P dans X qui vérifie $\rho(P) \supset \left]0,+\infty\right[$ et

$$\exists C > 0, \forall \lambda > 0, \quad \left\|(P-\lambda I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant \frac{C}{\lambda},$$

nous définissons l'espace d'interpolation $D_P(\theta,+\infty)$ par

$$D_P(\theta,+\infty) = \left\{x \in X : \sup_{t>0} \left\|t^{\theta} P (P-tI)^{-1} x\right\| < +\infty\right\},$$

et par la propriété réitération, on a

$$D_P(\theta,+\infty) = (D(P), X)_{1-\theta;\infty}.$$

5. On suppose également, l'opérateur Π est inversible dans $\mathcal{L}(X)$, où

$$\Pi = I + 2\left(I - e^{2Q}\right)^{-1} Q e^{2Q} \overline{(Q-H)}^{-1}. \tag{2.7}$$

2.4 Conséquences des hypothèses

1. De l'hypothèse (2.3) l'opérateur A est inversible.
2. L'hypothèse (2.3) exprime l'ellipticité de l'équation (2.1).
3. Bien évidemment que l'existence d'une telle solution u nécessite que

$$u(0), \quad u(1) \in D(A),$$

   car $u \in C([0,1], D(A))$.
4. Sous l'hypothèse (2.5), il vient

$$\overline{(Q-H)}^{-1}(D(Q)) \subset D(Q). \tag{2.8}$$

5. Les hypothèses (2.5) et (2.7) impliquent que, Q^{-1} est commute avec l'opérateur Π, donc il est commute avec Π^{-1}.
6. On sait que

$$D(Q) \subset (D(Q), X)_{1-\theta;\infty},$$

   alors, grâçe à (i) de (2.6), il vient

$$\overline{(Q-H)}^{-1}(D(Q)) \subset D(Q) \cap D(H).$$

   De plus, sous l'hypothèses (2.3), (2.5) et (2.6), pour tout $\xi \in (D(Q), X)_{1-\theta;\infty}$ on a

$$\begin{aligned} & H\overline{(Q-H)}^{-1}\xi \\ = \;& (H-Q+Q)\overline{(Q-H)}^{-1}\xi \\ = \;& -(Q-H)\overline{(Q-H)}^{-1}\xi + Q\overline{(Q-H)}^{-1}\xi, \end{aligned}$$

   d'autr part, nous avons

$$(Q-H)\overline{(Q-H)}^{-1}\xi = \xi, \tag{2.9}$$

   donc

$$H\overline{(Q-H)}^{-1}\xi = -\xi + Q\overline{(Q-H)}^{-1}\xi,$$

   une fois encore grâçe à (ii) de (2.6), on obtient

$$Q\overline{(Q-H)}^{-1}\xi \in (D(Q), X)_{1-\theta;\infty},$$

   donc on déduit

$$H\overline{(Q-H)}^{-1}\xi \in (D(Q), X)_{1-\theta;\infty}. \tag{2.10}$$

2.5 Notation

i) Tout au long de l'étude, on pose

$$\begin{cases} \Lambda = Q - H + e^{2Q}(Q+H), \\ D(\Lambda) = D(Q) \cap D(H). \end{cases} \tag{2.11}$$

ii) On définie un opérateur L sur X par :

$$\begin{cases} D(L) = \left\{ \zeta \in X \text{ tel que } \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} \zeta \in D(Q+H) \right\}, \\ L\zeta = (Q+H) \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} \zeta. \end{cases} \tag{2.12}$$

2.6 Quelques résultats

Lemme 2.1 *Supposons que les hypothèses (2.3)$\backsim$(2.7) sont vérifiées, alors on a*

1. L'opérateur Λ est fermable,
2. $0 \in \rho(\overline{\Lambda})$
3. L'inverse de $\overline{\Lambda}$ est donné par :

$$\begin{cases} \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} = \left(\overline{Q-H}\right)^{-1} \Pi^{-1} \left(I - e^{2Q}\right)^{-1}, \\ \qquad\qquad \text{et} \\ \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} = \left(\overline{Q-H}\right)^{-1} + \left(\overline{Q-H}\right)^{-1} W, \end{cases}$$

où

$$W \in \mathcal{L}(X), \quad \left(\overline{Q-H}\right)^{-1} W = W \left(\overline{Q-H}\right)^{-1} \quad \text{avec } W(X) \subset \bigcap_{k=1}^{+\infty} D\left(Q^k\right).$$

Preuve. La notation (2.11) permet d'écrire Λ sous la forme

$$\begin{aligned} \Lambda &= Q - H + e^{2Q}(Q+H) \\ &= Q - H + e^{2Q}(Q + H - Q + Q) \\ &= \left(I - e^{2Q}\right)(Q-H) + 2Qe^{2Q}. \end{aligned}$$

Puisque Q est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique généralisé e^{2Q}, alors on a

$$e^{2Q} \in \mathcal{L}(X),$$

et ainsi que l'opérateur Q est fermé, donc grâçe la Proposition 1.1, il vient

$$Qe^{2Q} \in \mathcal{L}(X). \tag{2.13}$$

Maintenant, d'aprés la formule (2.13) et l'hypothèse (2.4), on peut déduire que l'opérateur Λ est fermable et on a

$$\overline{\Lambda} = \left(I - e^{2Q}\right)\overline{(Q-H)} + 2Qe^{2Q},$$

D'aprés A. Lunardi (voir [10], p. 59-60), l'opérateur $\left(I - e^{2Q}\right)$ est inversible et encore en utilisant l'hypothèse (2.4) , en factorisant, $\overline{\Lambda}$ peut s'écrire on

$$\begin{aligned}
\overline{\Lambda} &= \left(I - e^{2Q}\right)\overline{(Q-H)} + 2Qe^{2Q} \\
&= \left[\left(I - e^{2Q}\right) + 2Qe^{2Q}\overline{(Q-H)}^{-1}\right]\overline{(Q-H)} \\
&= \left(I - e^{2Q}\right)\left[I + 2\left(I - e^{2Q}\right)^{-1} Qe^{2Q}\overline{(Q-H)}^{-1}\right]\overline{(Q-H)},
\end{aligned}$$

Par conséquant, on utilise l'hypothèse (2.7), on trouve

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} &= \left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\left[I + 2\left(I - e^{2Q}\right)^{-1} Qe^{2Q}\overline{(Q-H)}^{-1}\right]^{-1}\left(I - e^{2Q}\right)^{-1} \qquad (2.14)\\
&= \left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\Pi^{-1}\left(I - e^{2Q}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Maintenant, posons

$$\left\{\begin{array}{l}
T = 2\left(I - e^{2Q}\right)^{-1} Qe^{2Q}\overline{(Q-H)}^{-1}, \\
\qquad \text{et} \\
S = -e^{2Q},
\end{array}\right. \qquad (2.15)$$

il est clair que

$$S \in \mathcal{L}(X).$$

De même, en utilisant une fois encore grâçe la Propostion 1.1, on obtient

$$T \in \mathcal{L}(X).$$

De plus puisque Q génère un semi-groupe analytique généralisé, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$e^{Q} \in L\left(X, D\left(Q^{n}\right)\right),$$

nous concluons

$$S(X) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(Q^k) \quad \text{et} \qquad T(X) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(Q^k). \qquad (2.16)$$

Remplaçons T et S dans la formule (2.14), on trouve

$$\begin{aligned}
&\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} \\
&= \left(\overline{Q-H}\right)^{-1}(I+T)^{-1}(I+S)^{-1} \\
&= \left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\left[(I+T-T)(I+T)^{-1}\right]\left[(I+S-S)(I+S)^{-1}\right] \qquad (2.17)\\
&= \left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\left[(I+T)(I+T)^{-1} - T(I+T)^{-1}\right]\left[(I+S)(I+S)^{-1} - S(I+S)^{-1}\right] \\
&= \left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\left[I - T(I+T)^{-1}\right]\left[I - S(I+S)^{-1}\right],
\end{aligned}$$

posons

$$\left\{\begin{array}{l}
U = -T(I+T)^{-1}, \\
\qquad \text{et} \\
V = -S(I+S)^{-1},
\end{array}\right.$$

bien évidemment

$$U, \;\; V \in \mathcal{L}(X),$$

ainsi (2.16) devient

$$\begin{cases} U(X) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(Q^k) \ , \\ \text{et} \\ V(X) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} D(Q^k). \end{cases}$$

Ce qui peut être écrit, en utilisant la relation (2.17) sous la forme suivante

$$\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} = \left(\overline{Q-H}\right)^{-1} (I+U)(I+V).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \left(\overline{Q-H}\right)^{-1} V &= \left(\overline{Q-H}\right)^{-1} \left(-S\,(I+S)^{-1}\right) \\ &= \left(\overline{Q-H}\right)^{-1} e^{2Q} \left(I-e^{2Q}\right)^{-1} \\ &= e^{2Q} \left(I-e^{2Q}\right)^{-1} \left(\overline{Q-H}\right)^{-1} \\ &= V \left(\overline{Q-H}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Similairement, on obtient

$$\left(\overline{Q-H}\right)^{-1} U = U \left(\overline{Q-H}\right)^{-1}.$$

■

Lemme 2.2 *Sous l'hypothèses (2.3)∽(2.7) on a*

$$\begin{cases} \left(I+L-e^{2Q}L\right) Q^{-1} \in \mathcal{L}(X), \\ \textit{et} \\ \left(-I+L+e^{2Q}L\right) Q^{-1} \in \mathcal{L}(X). \end{cases}$$

Ainsi que

$$\begin{cases} \left(I+\left(I-e^{2Q}\right) L\right) Q^{-1} = 2\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}, \\ \textit{et} \\ \left(-I+\left(I+e^{2Q}\right) L\right) Q^{-1} = -2\,(Q-H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} Q^{-1} + 2Q\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} Q^{-1}. \end{cases}$$

Preuve. Il s'ensuit de (2.12) que

$$LQ^{-1} = (Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} Q^{-1},$$

En vertu du point 3. du lemme 2.1, on a

$$\begin{aligned} & LQ^{-1} \\ = \; & (Q+H)\left(\overline{Q-H}\right)^{-1} \Pi^{-1} \left(I-e^{2Q}\right)^{-1} Q^{-1} \\ = \; & (2Q-Q+H)\left(\overline{Q-H}\right)^{-1} \Pi^{-1} \left(I-e^{2Q}\right)^{-1} Q^{-1} \\ = \; & [2Q-(Q-H)]\left(\overline{Q-H}\right)^{-1} \Pi^{-1} \left(I-e^{2Q}\right)^{-1} Q^{-1} \\ = \; & 2Q\left(\overline{Q-H}\right)^{-1} \Pi^{-1} \left(I-e^{2Q}\right)^{-1} Q^{-1} - (Q-H)\left(\overline{Q-H}\right)^{-1} \Pi^{-1} \left(I-e^{2Q}\right)^{-1} Q^{-1}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

On a, en utilisant (2.7),

$$\begin{aligned}\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}Q^{-1} &= \left[I+2\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}Qe^{2Q}\overline{(Q-H)}^{-1}\right]^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}Q^{-1}\\ &= \left[I+2\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}Qe^{2Q}\overline{(Q-H)}^{-1}\right]^{-1}Q^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1},\end{aligned}$$

de plus, en vertu du point 6. du Conséquence des hypothèses, on obtient

$$\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}Q^{-1}=Q^{-1}\left[I+2\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}Qe^{2Q}\overline{(Q-H)}^{-1}\right]^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}.$$

D'aprés la formule (2.18), il suffit ensuite d'écrire

$$\begin{aligned}&LQ^{-1} \qquad (2.19)\\ =\;& 2Q\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}-(Q-H)\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Il est clair que

$$\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}\in\mathcal{L}(X). \qquad (2.20)$$

Dans cette dernière équation on remarque que, pour tout $\zeta\in X$, on a

$$Q^{-1}\zeta\in D(Q)\subset\left(D\left(Q\right),X\right)_{1-\theta;\infty},$$

en vertu du point ii. du l'hypothèse 2.6, on a

$$Q\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}Q^{-1}\in\mathcal{L}(X), \qquad (2.21)$$

en appliquant $\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}$ et en vertu de (2.20)

$$2Q\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}\in\mathcal{L}(X). \qquad (2.22)$$

Ainsi que, nous avons

$$(Q-H)\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}Q^{-1}=Q\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}Q^{-1}-H\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}Q^{-1},$$

ensuite, en utilisant (2.10) et (2.21),

$$(Q-H)\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}Q^{-1}\in\mathcal{L}(X),$$

en appliquant $\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}$ et une fois encore en utilisant (2.20), il vient

$$(Q-H)\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}\in\mathcal{L}(X). \qquad (2.23)$$

En sommant les formules (2.22) et (2.23), il vient

$$LQ^{-1}\in\mathcal{L}(X). \qquad (2.24)$$

D'aprés A. Lunardi (voir [10], p. 59-60) et grâçe à (2.24), on trouve

$$\left(I+L-e^{2Q}L\right)Q^{-1}=Q^{-1}+\left(I-e^{2Q}\right)LQ^{-1},$$

est donc un opérateur borné défini sur X. Par conséquant, comme

$$\left(-I+L+e^{2Q}L\right)Q^{-1}=-Q^{-1}+LQ^{-1}+e^{2Q}LQ^{-1},$$

on peut déduire que

$$\left(-I+L+e^{2Q}L\right)Q^{-1}\in\mathcal{L}(X).$$

Enfin, on remarque que

$$\left(I+L-e^{2Q}L\right)Q^{-1}=Q^{-1}+\left(I-e^{2Q}\right)LQ^{-1},$$

il s'ensuit de (2.19) et l'hypothèse (2.5) que

$$\begin{aligned}
&\left(I+L-e^{2Q}L\right)Q^{-1}\\
=\;&Q^{-1}\\
&+\left(I-e^{2Q}\right)\left[2Q\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}-(Q-H)\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}\right]\\
=\;&Q^{-1}+2\left(I-e^{2Q}\right)Q\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}\\
&-\left(I-e^{2Q}\right)(Q-H)\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}\\
=\;&Q^{-1}+2\left(I-e^{2Q}\right)\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}\\
&-\left(I-e^{2Q}\right)(Q-H)\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

en utilisant (2.6), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(I+L-e^{2Q}L\right)Q^{-1}\\
=\;&Q^{-1}+2\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\Pi^{-1}-(Q-H)\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}Q^{-1}\Pi^{-1}
\end{aligned}$$

et d'aprés la formule (2.9), il vient

$$\begin{aligned}
&\left(I+L-e^{2Q}L\right)Q^{-1}\\
=\;&Q^{-1}+2\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\Pi^{-1}-Q^{-1}\Pi^{-1}\\
=\;&\left[Q^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)+2\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)-Q^{-1}\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)\right]\left(I-e^{2Q}\right)^{-1} \qquad (2.25)\\
=\;&\left[Q^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)\Pi+2\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)-Q^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)\right]\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}\\
=\;&\left[Q^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)\Pi\left(\overline{Q-H}\right)+2\left(I-e^{2Q}\right)-Q^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)\left(\overline{Q-H}\right)\right]\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Remplaçant Π par leur expressions (2.7), on obtient

$$\begin{aligned}
&Q^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)\Pi\left(\overline{Q-H}\right)+2\left(I-e^{2Q}\right)-Q^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)\left(\overline{Q-H}\right)\\
=\;&Q^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)\left[I+2\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}Qe^{2Q}\overline{(Q-H)}^{-1}\right]\left(\overline{Q-H}\right)+2\left(I-e^{2Q}\right)\\
&-Q^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)\left(\overline{Q-H}\right) \qquad (2.26)\\
=\;&Q^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)\left(\overline{Q-H}\right)+2e^{2Q}+2\left(I-e^{2Q}\right)\\
&-Q^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)\left(\overline{Q-H}\right)\\
=\;&2I.
\end{aligned}$$

De plus, en remplaçant (2.26) dans (2.25), on trouve

$$\left(I+L-e^{2Q}L\right)Q^{-1}=2\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\Pi^{-1}\left(I-e^{2Q}\right)^{-1},$$

alors, d'aprés le Lemme 2.1, point 3., il vient

$$\left(I+L-e^{2Q}L\right)Q^{-1}=2\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}.$$

De la même manière on obtient la deuxième formule. ■

Lemme 2.3 *Supposons que les hypothèses (2.3), (2.5) et (**??**) sont satisfaites. Soit* $n_1 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ *tel que*

$$\left\|(Q+H)\left(\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\right)^{n_1}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\leq 1. \tag{2.27}$$

Alors on a

$$0\in\rho(\Pi).$$

Preuve. Nous avons

$$\Pi=I+2\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}Qe^{2Q}\overline{(Q-H)}^{-1},$$

en utilisant (2.9), on peut écrire

$$\begin{aligned}
\Pi &= I+2\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}Qe^{2Q}\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\\
&= \left(I-e^{2Q}\right)^{-1}\left[I-e^{2Q}+2Qe^{2Q}\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\right]\\
&= \left(I-e^{2Q}\right)^{-1}\left[I-\left(e^{2Q}-2Qe^{2Q}\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\right)\right]\\
&= \left(I-e^{2Q}\right)^{-1}\left[I-\left(I-2Q\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\right)e^{2Q}\right]\\
&= \left(I-e^{2Q}\right)^{-1}\left[I-\left(-H\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}-Q\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\right)e^{2Q}\right]\\
&= \left(I-e^{2Q}\right)^{-1}\left[I+(Q+H)\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}e^{2Q}\right],
\end{aligned}$$

Posons

$$C=-(Q+H)\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}e^{2Q},$$

Le point (ii) de l'hypothèse (2.6) et la formule (2.10) montre que

$$C\in\mathcal{L}(X).$$

Maintenant, on obtient

$$\Pi=\left(I-e^{2Q}\right)^{-1}(I-C).$$

L'opérateur Π est inversible dans $\mathcal{L}(X)$ si et seulement si $I-C$ est inversible, donc il suffit de montrer que qu'il existe un opérateur linéaire borné P tel que, pour tout $x\in X$ on a

$$(I-C)Px=P(I-C)x=x.$$

On a Q et inversible et est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique généralisé $\left\{e^{xQ}\right\}_{x\geq 0}$. Alors, il existe des constantes $M\geq 1$ et $\delta>0$ tel que, pour tout $y>0$, on a d'après Pazy (Voir [11], page 74)

$$\left\|e^{yQ}\right\|_{\mathcal{L}(X)}\leq Me^{-\delta t},$$

ainsi que, il existe un entier naturelle non nule k, tel que

$$\left\| e^{2kn_1Q} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-2kn_1\delta} < 1.$$

En effet, d'aprés (2.27), il vient

$$\begin{aligned}
\left\| C^{kn_1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| \left[(Q+H) \left(\left(\overline{Q-H} \right)^{-1} \right) e^{2Q} \right]^{kn_1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \left\| \left[(Q+H) \left(\left(\overline{Q-H} \right)^{-1} \right) \right]^{kn_1} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \left\| e^{2kn_1Q} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&= \left\| \left[(Q+H) \left(\left(\overline{Q-H} \right)^{-1} \right) \right]^{n_1} \right\|_{\mathcal{L}(X)}^{k} \left\| e^{2kn_1Q} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq Me^{-2kn_1\delta} \\
&< 1,
\end{aligned}$$

ce qui implique que l'opérateur $\left(I - C^{kn_1} \right)$ est inversible. De plus, on a

$$\begin{aligned}
& (I-C) \left(I + C + C^2 + C^3 + ... + C^{kn_1 - 1} \right) \\
= \ & \left(I + C + C^2 + C^3 + ... + C^{kn_1 - 1} \right) - \left(C - C^2 - C^3 - ... - C^{kn_1} \right) \\
= \ & I - C^{kn_1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient l'égalité suivante

$$(I-C) \left(I + C + C^2 + C^3 + ... + C^{kn_1 - 1} \right) \left(I - C^{kn_1} \right)^{-1} = I.$$

Posons

$$P = \left(I + C + C^2 + C^3 + ... + C^{kn_1 - 1} \right) \left(I - C^{kn_1} \right)^{-1}, \tag{2.28}$$

on trouve

$$(I-C)\,P = I. \tag{2.29}$$

Puisque, pour tout $s \in \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ kn_1 - 1\}$, on a

$$\begin{aligned}
C^s \left(I - C^{kn_1} \right)^{-1} &= C^s \sum_{j=0}^{+\infty} C^{kn_1 j} \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} C^{(s + kn_1 j)} \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} C^{(kn_1 j + s)} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{+\infty} C^{kn_1 j} \right) C^s \\
&= \left(I - C^{kn_1} \right)^{-1} C^s,
\end{aligned}$$

De (2.28), on en déduit la commutativité suivante :

$$P\,(I-C) = I. \tag{2.30}$$

donc l'opérateur$(I-C)$ est inversible avec

$$(I-C)P = P(I-C) = I.$$

■

2.7 Formule de représentation de la solution

Pour résoudre le problème (2.1)-(2.2), nous utiliserons la méthode de la réduction d'ordre, appelé aussi méthode de réduction de S. G. Krein (voir[6]). Cette méthode utilise les puissances fractionnaires d'opérateurs et le calcul fonctionnel sur la représentation explicite de la solution obtenue grâce aux hypothèses. cette méthode est basée sur un raisonnement heuristique pour obtenir en fin de compte deux problèmes de Cauchy, l'un directe et l'autre inverse et son avantage est que si le problème admet une solution alors elle est nécessairement unique.

Maintenant, on fait le raisonnement heuristique suivant. Supposons que le Problème (2.1)-(2.2) admet une solution stricte u, c'est-à-dire

$$u \in C^2([0,1], X) \cap C([0,1], D(A)), \tag{2.31}$$

et qui satisfait le Problème (2.1)-(2.2). Donc, on pose pour presque tout $x \in [0,1]$

$$\begin{cases} v(x) = -Q^{-1}u'(x), \\ y(x) = \frac{1}{2}(u(x) - v(x)), \\ z(x) = \frac{1}{2}(u(x) + v(x)). \end{cases} \tag{2.32}$$

Il est clair que cette dernière équation sommée avec deuxième permet de poser

$$u(x) = y(x) + z(x).$$

De la deuxième équation du système (2.32) et par la dérivabilité, on tire

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2}\left(u'(x) - v'(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(u'(x) + Q^{-1}u''(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-Qv(x) + Q^{-1}(-Au(x) + f(x))\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-Qv(x) - AQ^{-1}u(x) + Q^{-1}f(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-Qv(x) + Q^{-1}Q^2u(x) + Q^{-1}f(x)\right) \\ &= Q\frac{1}{2}(-v(x) + u(x)) + \frac{1}{2}Q^{-1}f(x) \\ &= Qy(x) + \frac{1}{2}Q^{-1}f(x), \end{aligned}$$

Nous obtenons alors le problème de Cauchy direct suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = Qy(x) + \frac{1}{2}Q^{-1}f(x), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{2.33}$$

où

$$y_0 = y(0) = \frac{1}{2}(u(0) - v(0)) = \frac{1}{2}\left(u(0) + Q^{-1}u'(0)\right).$$

En utilisant les conditions aux limites (2.2), il vient

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{2}\left(u(0) + Q^{-1}[d_0 + Hu(0)]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(u(0) + Q^{-1}[d_0 + Hu(0)]\right). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Il est clair que $y_0 \in D(Q)$. Similairement nous avons

$$\begin{aligned} z'(x) &= \frac{1}{2}\left(u'(x) + v'(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-Qv(x) - Q^{-1}u''(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-Qv(x) + Q^{-1}Au(x) - Q^{-1}f(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-Qv(x) - Q^{-1}Q^2u(x) - Q^{-1}f(x)\right) \\ &= -Q\frac{1}{2}(v(x) + u(x)) - \frac{1}{2}Q^{-1}f(x) \\ &= -Qz(x) - \frac{1}{2}Q^{-1}f(x). \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi que le problème de Cauchy rétrograte suivant :

$$\begin{cases} z'(x) = -Qz(x) - \frac{1}{2}Q^{-1}f(x) \\ z(1) = z_1, \end{cases} \tag{2.35}$$

où

$$z_1 = z(1) = \frac{1}{2}\left(u_1 - Q^{-1}u'(1)\right).$$

et donc la résolution du Problème (2.1)-(2.2) est équivalente à celle des deux systèmes (2.33) et (2.35) qui sont des problèmes de Cauchy y_0, $z_1 \in D(Q)$ et $f \in C^\theta([0,1], X)$. Par conséquent, pour tout $x \in [0,1]$, le Problème (2.1) admet une solution stricte donnée formellement par

$$y(x) = e^{xQ}y_0 + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)ds = e^{xQ}y_0 + I_x(f),$$

où

$$I_x(f) = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}f(s)ds.$$

Concernant le Problème (2.35), en utilisant le changement de variable $x = 1 - t$, on obtient alors

$$\begin{cases} z'(1-t) = -Qz(1-t) - \frac{1}{2}Q^{-1}f(1-t), \quad t \in [0,1] \\ z(1) = z_1. \end{cases} \tag{2.36}$$

En posant $\widetilde{z}(.) = z(1-.)$ et $\widetilde{f}(.) = f(1-.)$, le problème de Cauchy (2.35) devient

$$\begin{cases} \widetilde{z}'(t) = -Q\widetilde{z}(t) - \frac{1}{2}Q^{-1}\widetilde{f}(t) \\ \widetilde{z}(0) = \widetilde{z}_0 = z_1. \end{cases} \tag{2.37}$$

Donc la solution de (2.35) est donnée par la formule de représentation

$$\widetilde{z}(t) = e^{-t\sqrt{-A}}y_1 - \frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-s)\sqrt{-A}}\,(-A)^{-\frac{1}{2}}\,\widetilde{f}(s)ds.$$

$$\widetilde{z}(t) = e^{tQ}z_1 - \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^t e^{(t-s)Q}\widetilde{f}(s)ds.$$

En remplaçant $\widetilde{z}(t)$ par $z(1-t)$ et $\widetilde{f}(s)$ par $f(1-s)$ on obtient :

$$z(1-t) = e^{-t\sqrt{-A}}z_1 - \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^t e^{(t-s)Q}f(1-s)ds,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{(1-x)Q}z_1 - \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^{1-x} e^{(1-x-t)Q}f(1-t)dt \\ &= e^{(1-x)Q}z_1 + \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}f(s)ds \\ &= e^{(1-x)Q}z_1 + J_x(f), \end{aligned}$$

où

$$J_x(f) = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}f(s)ds.$$

Finalement, vu que $u(x) = y(x) + z(x)$, la représentation de la solution du Problème (2.1)-(2.2) est donnée formellement par

$$\begin{aligned} u(x) &= y(x) + z(x) \\ &= e^{xQ}y_0 + e^{(1-x)Q}z_1 + I_x(f) + J_x(f). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Reste à calculer y_0 et z_1 pour trouver la représentation finale de la solution du Problème (2.1)-(2.2). Pour obtenir la représentation finale de u, il suffit de trouver y_0 et z_1 et cela, en tenant compte des données d_0, u_1, f, H et A. Tout d'abord, en utilisant la formule (2.38) on a

$$\begin{aligned} u(0) &= y_0 + e^Q z_1 + I_0(f) + J_0(f) \\ &= y_0 + e^Q z_1 + J_0(f), \end{aligned} \tag{2.39}$$

en appliquant $\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}$ à $u(0)$, on trouve

$$\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}u(0) = \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}y_0 + \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}e^Q z_1 + \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}J_0(f). \tag{2.40}$$

vu le Lemme 2.1, on peut appliquer l'opérateur H à formule (2.40) et on déduit

$$H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}u(0) = H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}y_0 + H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}e^Q z_1 + H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}J_0(f). \tag{2.41}$$

Maintenant, en dérivant la fonction u, on obtient pour tout $x \in [0,1]$

$$u'(x) = Qe^{xQ}y_0 - Qe^{(1-x)Q}z_1 + QI_x(f) - QJ_x(f).$$

D'autre par, d'aprés la relation (2.31), il vient

$$u(0) \in D(A) \subset D(Q),$$

en utilisant (2.34), on peut écrire

$$y_0 \in D(Q),$$

Ainsi, on obtient l'inclusion suivante

$$J_0(f) = \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(s)ds \in D(Q),$$

et par conséquent

$$u'(0) = Qy_0 - Qe^{Q}z_1 - QJ_0(f), \tag{2.42}$$

encore une fois, en appliquant $\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}$ à $u'(0)$, on a

$$\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}u'(0) = \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}Qy_0 - \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}Qe^{Q}z_1 - \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}QJ_0(f), \tag{2.43}$$

en vertu (2.41) et (2.43), nous avons le système suivant

$$\begin{cases} H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}u(0) = H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}y_0 + H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}e^{Q}z_1 + H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}J_0(f), \\ \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}u'(0) = \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}Qy_0 - \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}Qe^{Q}z_1 - \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}QJ_0(f). \end{cases}$$

D'autre part, en utilisant les conditions aux limites (2.2), on a

$$\begin{aligned} \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}d_0 &= \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}\left(u'(0) - Hu(0)\right) \\ &= \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}u'(0) - H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}u(0), \end{aligned}$$

en vertu la formule (2.39), on trouve

$$\begin{aligned} &\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}d_0 \\ &= \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}u'(0) - H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}\left(y_0 + e^{Q}z_1 + J_0(f)\right) \\ &= \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}u'(0) - H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}y_0 - H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}e^{Q}z_1 - H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}J_0(f), \end{aligned}$$

et par suite, en utilisant (2.42), on obtient

$$\begin{aligned} &\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}d_0 \\ &= \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}\left[Qy_0 - Qe^{Q}z_1 - QJ_0(f)\right] - H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}y_0 - H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}e^{Q}z_1 - H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}J_0(f) \\ &= \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}Qy_0 - \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}Qe^{Q}z_1 - \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}QJ_0(f) - H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}y_0 - H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}e^{Q}z_1 - H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}J_0(f) \\ &= \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}Qy_0 - \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}Qe^{Q}z_1 - \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}QJ_0(f) - H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}y_0 - H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}e^{Q}z_1 - H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}J_0(f) \\ &= (Q-H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}y_0 - e^{Q}(Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}z_1 - (Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}J_0(f), \end{aligned}$$

d'autre part, vu la relation (2.38) on a

$$u_1 = y\,(1) + z_1,$$

d'où

$$\begin{aligned} z_1 &= u_1 - y\,(1) \\ &= u_1 - e^Q y_0 - I_1(f), \end{aligned} \tag{2.44}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} &\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 \\ = \;& (Q-H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} y_0 - e^Q (Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}\left[u_1 - e^Q y_0 - I_1(f)\right] \\ & -(Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} J_0(f) \\ = \;& (Q-H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} y_0 - e^Q (Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} u_1 + e^Q (Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} e^Q y_0 \\ & +e^Q (Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} I_1(f) - (Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} J_0(f) \\ = \;& y_0 - (Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}\left[e^Q u_1 - e^Q I_1(f) + J_0(f)\right], \end{aligned}$$

en déduit on aboutit à

$$y_0 = \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 + (Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}\left[e^Q u_1 - e^Q I_1(f) + J_0(f)\right],$$

en remplaçant y_0 par leur exepression dans la formule (2.44), on obtient

$$\begin{aligned} z_1 &= u_1 \\ & \quad -e^Q(\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 + (Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}\left(e^Q u_1 - e^Q I_1(f) + J_0(f)\right)) - I_1(f) \\ &= u_1 - I_1(f) - e^Q\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 - e^Q (Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}\left(e^Q u_1 - e^Q I_1(f) + J_0(f)\right). \end{aligned}$$

On déduit que la solution u est donnée formellement par :

$$
\begin{aligned}
u\left(x\right) \;=\;& e^{xQ}\left(\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}d_0+\frac{1}{2}Q^{-2}f(0)-\frac{1}{2}LQ^{-2}f(0)\right)\\
&+\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}\left(f\left(s\right)-f(0)\right)ds-\frac{1}{2}Q^{-2}f(0)\\
&+\frac{1}{2}e^{xQ}LQ^{-1}\int_0^1 e^{sQ}\left(f\left(s\right)-f(0)\right)ds+e^{(1-x)Q}\left(u_1+Q^{-2}f(1)\right)\\
&-\frac{1}{2}Q^{-2}f(0)Q^{-1}\int_x^1 e^{(s-x)Q}\left(f\left(s\right)-f(1)\right)ds-\frac{1}{2}Q^{-2}f(1) \qquad (2.45)\\
&-\frac{1}{2}e^{(1-x)Q}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}\left(f\left(s\right)-f(1)\right)ds\\
&+e^{xQ}e^{Q}L\left[u_1-\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f\left(s\right)ds+\frac{1}{2}Q^{-2}f(0)\right]\\
&-e^{(1-x)Q}e^{2Q}L\left[u_1-\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f\left(s\right)ds\right]\\
&-e^{(1-x)Q}e^{Q}\left(\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}d_0+\frac{1}{2}LQ^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f\left(s\right)ds+\frac{1}{2}Q^{-2}f(1)\right).
\end{aligned}
$$

et d'aprés simplications, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}d_0+\frac{1}{2}Q^{-2}f(0)-\frac{1}{2}LQ^{-2}f(0)\\
=\;&\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}d_0-H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}Q^{-2}f(0)+\frac{1}{2}e^{2Q}LQ^{-2}f(0).
\end{aligned}
$$

Maintenant, on pose

$$
S_1(x,g)=\frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^x e^{(x-s)Q}\left(g\left(s\right)-g(0)\right)ds,
$$

et

$$
S_2(x,g)=\frac{1}{2}e^{xQ}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}\left(g\left(s\right)-g(0)\right)ds,
$$

on peut réarrange les termes de la solution u pour obtenir la décomposion suivant :

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{xQ}\left(\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}d_0 - H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}Q^{-2}f(0)\right) \\ &\quad + e^{(1-x)Q}\left(u_1 + Q^{-2}f(1)\right) \\ &\quad + S_1(x,f) + S_1(1-x, f(1-.)) \\ &\quad + LS_2(x,f) - S_2(1-x, f(1-.)) \\ &\quad - \frac{1}{2}Q^{-2}f(0) - \frac{1}{2}Q^{-2}f(1) + R(x,f,d_0,u_1), \end{aligned} \tag{2.46}$$

tel que

$$\begin{aligned} & R(x,f,d_0,u_1) \\ = \; & e^{xQ}e^{Q}L\left[u_1 - \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)\,ds + \frac{1}{2}Q^{-2}f(0)\right] \\ & - e^{(1-x)Q}e^{2Q}L\left[u_1 - \frac{1}{2}Q^{-1}\int_0^1 e^{(1-s)Q}f(s)\,ds\right] \\ & - e^{(1-x)Q}e^{Q}\left(\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}d_0 + \frac{1}{2}LQ^{-1}\int_0^1 e^{sQ}f(s)\,ds + \frac{1}{2}Q^{-2}f(1)\right). \end{aligned}$$

2.8 Principaux résultats

Le résultat fondamental de cette partie est donné par le Théorème suivante :

Theorème 2.1 *Sous les hypothéses (2.3)∽(2.7). soit*

$$f \in C^{\theta}\left([0,1];X\right),\ \theta \in \left]0,1\right[.$$

Alors, les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1. *Le Problème (2.1)-(2.2) admet une unique solution stricte donnée par (2.45).*
2. *$u(0) \in D(H)$ et*

$$\begin{cases} u_1 \in D(Q^2) = D(A), \\ \left(\overline{Q-H}\right)^{-1}d_0 \in D(Q) \cap D(H), \\ Q\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\left(d_0 - Q^{-1}f(0)\right) \in D(Q), \\ Q^2\left(\overline{Q-H}\right)^{-1}\left(d_0 - Q^{-1}f(0)\right) + f(0) \in \overline{D(Q)}, \\ Q^2u_1 + f(1) \in \overline{D(Q)}. \end{cases} \tag{2.47}$$

Preuve. Supposons que les relations (2.47) est satisfaite et on montre que u est une solution stricte du Problème (2.1)-(2.2), c'est-à-dire

$$u \in C^2([0,1], X) \cap C([0,1], D(A)),$$

et presque tout $x \in [0,1]$

$$u''(x) + Au(x) = f(x).$$

On sait que

$$A = -Q^2,$$

alors, en appliquant l'opérateur A à (2.46), on trouve

$$\begin{aligned} Au(x) &= -Q^2 e^{xQ}\left(\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 - H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} Q^{-2} f(0)\right) \\ &\quad -Q^2 e^{(1-x)Q}\left(u_1 + Q^{-2} f(1)\right) \\ &\quad -Q^2 S_1(x,f) - Q^2 S_1(1-x, f(1-.)) \\ &\quad -Q^2 L S_2(x,f) + Q^2 S_2(1-x, f(1-.)) \\ &\quad +\frac{1}{2} f(0) + \frac{1}{2} f(1) - Q^2 R(x, f, d_0, u_1). \end{aligned} \tag{2.48}$$

Puisque, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$e^Q \in \mathcal{L}(X, D(Q^n)),$$

il vient

$$Q^2 R(x, f, d_0, u_1) \in C^\infty\left([0,1]\,; X\right).$$

En vertu de 1 et 4 de proposition 1.5, on a

$$Q^2 S_2(1-x, f(1-.)) \in C^\theta\left([0,1]\,; X\right),\ \theta \in \left]0,1\right[.$$

ainsi que, on a

$$\begin{aligned} & Q^2 S_1(x,f) \\ = \ & \frac{1}{2} Q \int_0^x e^{(x-s)Q}\left(g\left(s\right) - g(0)\right) ds \in C^\theta\left([0,1]\,; X\right),\ \theta \in \left]0,1\right[, \end{aligned}$$

de même, la fonction $Q^2 S_1(1-., f(1-.))$ appartient à $C^\theta\left([0,1]\,;X\right)$, $\theta \in \left]0,1\right[$. De plus, on a

$$\begin{aligned} Q^2 S_2(x,f) &= Q^2\left(\frac{1}{2} e^x Q^{-1} \int_0^1 e^{sQ}\left(g\left(s\right) - f(0)\right) ds\right) \\ &= \frac{1}{2} e^x Q \int_0^1 e^{sQ}\left(g\left(s\right) - f(0)\right) ds, \end{aligned}$$

en vertu du point 4. du Propostion 1.5, on a

$$Q \int_0^1 e^{sQ}\left(g\left(s\right) - f(0)\right) ds \in \left(D\left(Q\right), X\right)_{1-\theta,\infty},$$

et grâce au piont (i). du hypothèse (2.6), il vient

$$\overline{(Q-H)}^{-1}\left(Q \int_0^1 e^{sQ}\left(g\left(s\right) - f(0)\right) ds\right) \in D(Q) \cap D(H),$$

ensuite, en utilisant la formule (2.9), nous avons

$$\Psi = (Q+H)\overline{(Q-H)}^{-1}\left(Q\int_0^1 e^{sQ}\left(g\left(s\right)-f(0)\right)ds\right) \in \left(D\left(Q\right),X\right)_{1-\theta,\infty}.$$

Que l'on peut écrire sous la forme (voir Triebel [12], p. 25, 26)

$$\begin{aligned}
& Q^2(Q+H)\overline{(Q-H)}^{-1}S_2(x,f) \\
= \ & \frac{1}{2}Q^2(Q+H)\overline{(Q-H)}^{-1}\left(e^{x}Q^{-1}\int_0^1 e^{sQ}\left(g\left(s\right)-f(0)\right)ds\right) \\
= \ & \frac{1}{2}e^{xQ}\Psi \in C^{\theta}\left(\left[0,1\right];X\right),\ \theta\in\left]0,1\right[.
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le Lemme 2.1, on trouve

$$\begin{aligned}
& \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}d_0 - H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}Q^{-2}f(0) \\
= \ & \overline{(Q-H)}^{-1}d_0 + Q^{-2}f(0) - \overline{(Q-H)}^{-1}Q^{-1}f(0) \\
& +\overline{(Q-H)}^{-1}Wd_0 - H\overline{(Q-H)}^{-1}WQ^{-2}f(0),
\end{aligned}$$

où $W \in \mathcal{L}\left(X\right)$, alors d'aprés la formule (2.48), on a

$$\begin{aligned}
& Au(x) \\
= \ & -e^{xQ}\left(Q\left[Q\overline{(Q-H)}^{-1}d_0 - \overline{(Q-H)}^{-1}f(0)\right]+f(0)\right) \\
& -e^{(1-x)Q}\left(Q^2u_1+f(1)\right) \\
& -Q^2e^{xQ}\left(\overline{(Q-H)}^{-1}Wd_0 - H\overline{(Q-H)}^{-1}WQ^{-2}f(0)\right) \\
& -Q^2S_1(x,f)-Q^2S_1(1-x,f(1-.)) \\
& -Q^2LS_2(x,f)+Q^2S_2(1-x,f(1-.)) \\
& +\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(1)-Q^2R(x,f,d_0,u_1),
\end{aligned}$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
& Au(x) \\
= \ & -e^{xQ}\left(Q\left[Q\overline{(Q-H)}^{-1}d_0 - \overline{(Q-H)}^{-1}f(0)\right]+f(0)\right) \\
& -e^{(1-x)Q}\left(Q^2u_1+f(1)\right)+\Phi(x,d_0,f),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
& \Phi(x,d_0,f) \\
= \ & -Q^2e^{xQ}\left(\overline{(Q-H)}^{-1}Wd_0 - H\overline{(Q-H)}^{-1}WQ^{-2}f(0)\right) \\
& -Q^2S_1(x,f)-Q^2S_1(1-x,f(1-.)) \\
& -Q^2LS_2(x,f)+Q^2S_2(1-x,f(1-.)) \\
& +\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(1)-Q^2R(x,f,d_0,u_1) \in C^{\theta}\left(\left[0,1\right];X\right),\ \theta\in\left]0,1\right[.
\end{aligned}$$

Finallement, on obtient

$$Au \in C^{\theta}\left([0,1];X\right),\ \theta \in \left]0,1\right[.$$

Montrons maintenant que la fonction u, donnée par la formule de représentation (2.46), est une solution du Problème (2.1)-(2.2), en utilisant (2.39), on trouve

$$\begin{aligned}
& u(0) \\
= \ & y_0 + e^{Q}z_1 + J_0(f) \\
= \ & \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 + (Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)) + e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) \\
& -e^{2Q}\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 - e^{2Q}(Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)) + J_0(f) \\
= \ & (I-e^{2Q})\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 + ((Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} + I - e^{2Q}(Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1})e^{Q}(u_1 - I_1(f)) \\
& +((Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} + I - e^{2Q}(Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1})J_0(f),
\end{aligned}$$

et comme

$$L = (Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1},$$

on obtient

$$u(0) = (I-e^{2Q})\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 + \left(I + L - e^{2Q}L\right)\left(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)\right),$$

d'aprés lemme 2.1 et (2.47), on trouve

$$\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 = (\overline{Q-H})^{-1}d_0 + (\overline{Q-H})^{-1}Wd_0 \in D(H).$$

Donc

$$\begin{cases} \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} Qe^{Q}(u_1 - I_1(f)) \in D(Q) \cap D(H), \\ \left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} QJ_0(f) \in D(Q) \cap D(H). \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
& u'(0) - Hu(0) \\
= \ & Qy_0 - Qe^{Q}z_1 - J_0(f) - Hu(0) \\
= \ & Qy_0 - Qe^{Q}z_1 - J_0(f) \\
& -H[(I-e^{2Q})\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 + \left(I + L - e^{2Q}L\right)\left(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)\right)].
\end{aligned}$$

en remplaçant y_0 et $z_1$par leurs expressions, on obtient

$$\begin{aligned}
& u'(0) - Hu(0) \\
= \ & Q\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 + Q(Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}\left(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)\right) \\
& +Qe^{2Q}\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 + Qe^{2Q}(Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}\left(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)\right) \\
& -Q\left(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)\right) \\
& -H(I-e^{2Q})\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 - 2H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} Q\left(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)\right),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
& u'(0) - Hu(0) \\
= \ & (Q + Qe^{2Q} - H(I-e^{2Q}))\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 \\
& +Q\left(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)\right)[(Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} + e^{2Q}(Q+H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} - 2H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}] \\
& -Q\left(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)\right),
\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
& u'(0) - Hu(0) \\
= \;& (Q + Qe^{2Q} - H(I - e^{2Q}))\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 \\
& + [(Q + H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} + e^{2Q}(Q + H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} - 2H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} - I]Q\left(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)\right) \\
= \;& (Q - H + (Q + H)e^{2Q})\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 \\
& + \left(L + e^{2Q}L - I - 2H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}\right)\left(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)\right).
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisanat lemme 2.2 et (2.11) on obtient

$$\begin{aligned}
& u'(0) - Hu(0) \\
= \;& (\Lambda)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 + \left(2H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} - 2H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}\right)\left(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)\right) \\
= \;& d_0.
\end{aligned}$$

■

pour u_1 on a d'aprés (2.38) on obtient

$$u(1) = e^{Q}y_0 + z_1 + I_1(f),$$

on remplaçant y_0 et z_1 par leurs expression on trouve

$$\begin{aligned}
u(1) &= e^{Q}y_0 + z_1 + I_1(f) \\
&= e^{Q}\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 + e^{Q}(Q + H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}[e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)] \\
&\quad + u_1 - I_1(f) - e^{Q}\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1} d_0 \\
&\quad - e^{Q}(Q + H)\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}\left(e^{Q}u_1 - e^{Q}I_1(f) + J_0(f)\right) + I_1(f) \\
&= u_1.
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Exemples

Dans le carré $I = [0,1] \times [0,1]$, on considère le problème aux limites de type elliptique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in [0,1]^2, \\ u(x,0) = u(x,1) = 0, \quad x \in [0,1], \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,0) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,1) = 0, \quad x \in [0,1], \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,y) = d_0(y), \quad y \in [0,1], \\ u(1,y) = u_1(y), \quad y \in [0,1], \end{cases} \tag{3.1}$$

où

$$X = C([0,1]) \qquad \text{et} \qquad f \in C([0,1], X).$$

On réécrit ce problème sous forme opérationnelle (2.1)-(2.2) en utilisant les notations vectorielles usuelles suivantes :

$$u(x,y) = u(x)(y), \qquad f(x,y) = f(x)(y),$$

alors u, f deviennent des fonctions vectorielles de la variable x à valeurs dans X :

$$\begin{array}{rcl} u(x) : [0,1] & \to & C([0,1]) \\ y & \to & u(x)(y) \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} f(x) : [0,1] & \to & C([0,1]) \\ y & \to & f(x)(y) \end{array},$$

c'set-à-dire

$$u, \ f \in C([0,1]; C[0,1]) = C([0,1] \times [0,1]).$$

D'autre part, pour tout x, $y \in (0,1)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in [0,1]^2,$$

équivaut à

$$(u''(x))(y) + Au(x)(y) = f(x)(y), \qquad (x,y) \in [0,1]^2,$$

avec les conditions aux limites de type Sturm Liouville abstrait suivantes :

$$u'(0)(y) - Hu(0)(y) = d_0(y), \ u(1)(y) = u_1(y), \quad y \in [0,1],$$

où l'opérateur A défini par :

$$\begin{cases} D(A)=\{\varphi\in C^4([0,1]):\ \varphi''(0)=\varphi''(1)=\varphi(0)=\varphi(1)=0\}, \\ A\varphi(y)=-\varphi^{(4)}(y). \end{cases} \tag{3.2}$$

et

$$\begin{cases} D(H)=\{\varphi\in C^2(]\,[0,1]):\varphi(0)=\varphi(1)=0\}, \\ (H\varphi)(y)=\varphi''(y),\ y\in[0,1]. \end{cases} \tag{3.3}$$

Alors Le problème (3.1) devient Le problème (2.1)-(2.2) où la variable y est cachée. Notons que le domaine de l'opérateur A n'est pas dense car

$$\overline{D(A)}=\{\varphi\in C([0,1]):\varphi(0)=\varphi(1)=0\}\neq X.$$

A l'aide des formules (3.2) et (3.3), les opérateurs A et H sont linénaires fermés et inversibles dans $\mathcal{L}(X)$ et par un calcule direct on peut montrer que l'opérateur A vérifie l'hypothèse (2.3). Par conséquant, toutes les hypothèses sont vérifiées, on peut appliquer le Théorème suivant :

Theorème 3.1 *Pour tout*

$$f\in C^\theta([0,1]),\theta\in\,]0,1[$$

et $f(0)\in D_A(\theta/2,\infty)$*. Soit*

$$\begin{cases} d_0\in C^2([0,1]), \\ d_0(0)=d_0(1)=0, \\ \sqrt{-A}d_0\in D_A(\theta/2,\infty). \end{cases}$$

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes

1. *Le Problème (3.1) admet une unique solution stricte* u.
2. $$\begin{cases} u_1\in C^4([0,1]),\quad u_1(0)=u_1(1)=u_1''(0)=u_1''(1)=0, \\ u_0\in C^2([0,1]),\quad u_0(0)=u_0(1)=0, \\ u(x,0)=u_0,\quad x\in[0,1], \end{cases}$$

   et

   $$\begin{cases} H\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}f(0,.)+A\left(\overline{\Lambda}\right)^{-1}d_0(.)\in C([0,1]), \\ f(1,.)-u_1^{(4)}(.)\in C([0,1]), \\ f(1,.)-u_1^{(4)}(.)=f(1.1)-u_1^{(4)}(.)=0. \end{cases}$$

Bibliographie

[1] A.V. Balakrishnan . : *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them. Pacific. J .Math., 19 (1964), pp. 419-437.*

[2] P.L. Butzer et H. Berners. : Semisroups of operators and Approximation, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[3] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, A. Medeghri. : *Abstract differential equation of elliptic type with general Robin boundary conditions in Holder speces. Applicable Analysis. 2011, 1-23.*

[4] M. Cheggag, A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, A. Medeghri. : *Liouville probblems for an abstract differential equation of elliptic type in Holder spaces. Applicable Analysis, 2012, vol. 91, no. 8,pp. 1453-1475. DOI. 10.1080/00036811.2011.635653.*

[5] A. Favini, R. Labbas, S. Maingot, H. Tanabe and A. Yagi. :*Necessary and Sufficient Conditions in the Study of Maximal Regularity of Elliptic Differential Equations in Hölder Spaces,* Discrete and Continuous Dynamical Systems, 22 (2008), 973-987.

[6] S. G. Krein : *Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Moscou, 1967.

[7] P. Grisvard, commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications, J. Math. Pure Appl. (9) 45 (1966), p.143-290.

[8] J. L. Lions and J. Peerte, *Sur une classe d'espaces d'interpolation, Inst. Hautes Etude Sci. Publ. Math., 19 (1964). 5-68.*

[9] J. L. Lions, théorèmes de trace et d'interpolation I et II, Ann. Sc. Norm super. Pisa, Sci. Fis. Mat. (3) 13 (1959),p.389'403 ; et 14 (1960), p. 317-331.

[10] A. Lunardi : *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, Basel, 1995.

[11] A. Pazy. : *Semigroups of linear operators and applications to partial deffirential equations, Springer- Verlag, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.*

[12] H. Triebel, "Interpolation theory, Functions Spaces, Differential Operators," North-Holland Publishing Co.,Amsterdam, New York, 1978.