REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ABDELHAMID IBN BADIS MOSTAGANEM

Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de Master

=−=−=−=−=−=−=−=−=−o ◯ o−=−=−=−=−=−=−=−=−=

Option : Analyse Fonctionnelle

Intitulé

Oscillation des Solutions des Équations Différentielles Linéaires à Coefficients D'ordre Itératif Fini .

Présenté par : **Abdelli Mahdjouba** et **Benotsmane Faiza**

Soutenu le : 05/2016

devant le jury composé de :

Dr HAMOUDA Saada	**Président**	**Pr**	**U. MOSTAGANEM.**
Dr AZIZ HAMANI Karima	**Examinatrice**	**MCA**	**U. MOSTAGANEM.**
Dr BELAÏDI Benharrat	**Encadreur**	**Pr**	**U. MOSTAGANEM.**

Année Universitaire 2015-2016

Table des matières

Remerciements

Nos remerciements vont tout premièrement, à ALLAH le tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience durant toutes ces années d'études. Nous adressons nos sincères remerciements et reconnaissances à notre encadreur Monsieur B. Belaïdi, Professeur à l'université Abdelhamid Ibn Badis, Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique. Sa disponibilité, et son savoir-faire, nous ont permis de mener à bien ce travail.

Nous exprimons notre profond respect à Monsieur HAMOUDA Saada Professeur à l'université de Mostaganem, qui nous a fait l'honneur de présider ce jury. Madame AZIZ HAMANI Karima Maître Conférences à l'université de Mostaganem, qui a accepté d'étudier notre travail en qualité examinatrice.

La réalisation de ce mémoire doit beaucoup au formidable soutien moral de nos familles, nous voudrions remercier tout particulièrement nos parents pour leur soutien et leurs encouragements tout au long de ces années.

Enfin un grand merci à nos amis et tous nos collègues de la promotion 2ème année master mathématique (2015-2016) pour leur aide, appuis et encouragements incéssants, ainsi qu'à toute personne qui a contribué, directement ou indirectement, à la réalisation de ce mémoire

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire nous présentons, quelques résultats sur l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients d'ordre itératif fini sous forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + A_1 f' + A_0 f = 0$$

$$f^{(k)} + A_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + A_0 f = F,$$

Comme nous le verrons plus loin ce problème présente un très grand intérêt.

INTRODUCTION

La théorie de Nevanlinna est un outil incontournable dans la théorie des fonctions, en particulier dans l'étude des propriétés des solutions des équations différentielles complexes, notamment la croissance et l'oscillation des solutions. En effet depuis 1925, l'année où R. Navanlinna a publie les résultats de ses travaux sur la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes, les chercheurs ne cessent de publier dans la même thématique et plusieurs problèmes ont été étudies et résolus. Des liens étroits avec d'autres domaines sont mis en évidence en particulier avec la théorie analytique des équations différentielles. Pour une introduction à la théorie des équations différentielles dans le plan complexe avec la théorie de Nevanlinna voir [13] .

La recherche active dans ce domaine a été lancée par H. Wittich et ses étudiants dans les années 1950 et 1960 concernant la croissance des solutions des équations différentielles linéaires

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \cdots + A_1 f' + A_0 f = 0 \tag{0.1}$$

$$f^{(k)} + A_{k-1} f^{(k-1)} + \cdots + A_0 f = F. \tag{0.2}$$

On s'intéresse à l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielle linéaires non homogènes ou homogènes d'ordre supérieur à coefficients fonctions méromorphes. Pour cela, on va introduire des conditions sur l'ordre des coefficients.
Nous obtenons plusieurs résultats lorsque les coefficients dans (0.1) *ou* (0.2) *sont des fonctions entières ou méromorphes d'ordre fini* (voir [1 , 2 , 3 , 10 , 11 , 12]) .
Ce mémoire se compose d'une introduction et deux chapitres.
Dans le premier chapitre on va citer quelques notations, définitions et résultats dont on aura besoin dans le deuxième chapitre, on peut considérer ce chapitre comme une introduction à la théorie de Nevanlinna, on va aussi citer quelques théorèmes et définitions concernant la distribution des valeurs des fonctions analytiques dans le disque unité.

Tandis que dans le deuxième chapitre on va se baser sur l'oscillation des solutions d'équation différentielles linéaire d'ordre itératif fini et nous obtenons quelques résultats et nous donnons les théorèmes et leurs preuves avec plus détails.
Enfin, nous donnons une conclusion générale sur l'oscillation des solutions des équations différentielle linéaires à coefficients d'ordre itératif fini.

Chapitre 1

Quelque élément de la théorie de R.Nevanlinna

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques définitions et notations avec les résultats fondamentaux qui sont utilisés dans le chapitre qui suit ; notations de la théorie des fonctions méromorphes Nevanlinna (voir [10, 13]). Afin de décrire la croissance de l'ordre de fonctions entières ou des fonctions méromorphes plus précisément, nous introduisons quelques notations concernant l'ordre itératif fini.

1.1 Formule de Jensen

Théorème 1.1.1 [10, 13] *Soit f une fonction méromorphe telle que $f(0) \not\equiv 0, \infty$,*

$(a_1,\, a_2,\, . \, ..)$, $(resp.b_1,\, b_2, \cdots)$ *ses zéros (resp. ses pôles) chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Alors*

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \sum_{|b_j|<r} \log\frac{r}{|b_j|} - \sum_{|a_j|<r} \log\frac{r}{|a_j|} \tag{1.1}$$

Preuve. On démontrer le théorème lorsque f n'admet ni zéros ni pôles sur le cercle $|z| = r$. Cosidérons la fonction

$$g(z) = f(z) \prod_{|a_j|<r} \frac{r^2 - \overline{a}_j z}{r(z - a_j)} / \prod_{|b_j|<r} \frac{r^2 - \overline{b}_j z}{r(z - b_j)}. \tag{1.2}$$

On a $g \neq 0, \infty$,

dans le disque $|z| < r$ et $ln\,|g(z)|$ est une fonction harmonique.

D'aprés la formule de la moyenne

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \log\left|g\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi. \tag{1.3}$$

D'autre part,

$$log\,|g(0)| = \frac{|f(0)| \prod\limits_{|a_j|<r} \frac{r}{|a_j|}}{\prod\limits_{|b_j|<r} \frac{r}{|b_j|}}, \tag{1.4}$$

donc

$$ln\,|g(0)| = \ln|f(0)| + \sum_{|a_j|<r} \ln\frac{r}{|a_j|} - \sum_{|b_j|<r} \ln\frac{r}{|b_j|}.$$

Pour $z = re^{i\varphi}$, on a □

1.2 Fonction caractéristique de R. Nevanlinna

Soit f une fonction méromorphe non constante. Pour tout nombre complexe a, on désigne par $n(t,a,f)$ le nombre de racines de l'équation $f(z) = a$ situées dans le disque $|z| \leq t$, chaque racine étant comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité et par $\overline{n}(t,a,f)$ le nombre des racines distinctes de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq t$. On désigne par $n(t,\infty,f)$ le nombre des pôles de la fonction f dans le disque $|z| \leq t$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité et par $\overline{n}(t,\infty,f)$ le nombre des pôles distincts de f dans le disque $|z| \leq t$

$$N(r,a,f) = \int_{0}^{r} \frac{[n(t,a,f) - n(0,a,f)]}{t} dt + n(0,a,f)\log r \quad (a \neq \infty),$$

$$\overline{N}(r,a,f) = \int_{0}^{r} \frac{[\overline{n}(t,a,f) - \overline{n}(0,a,f)]}{t} dt + \overline{n}(0,a,f)\log r \qquad (a \neq \infty),$$

$$\overline{N}(r,\infty,f) = \overline{N}(r,f) = \int_{0}^{r} \frac{[\overline{n}(t,\infty,f) - \overline{n}(0,\infty,f)]}{t} dt + \overline{n}(0,\infty,f)\log r,$$

$$m(r,a,f) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta \quad (a \neq \infty) \ ,$$

et

$$m(r,\infty,f) = m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta,$$

$N(r,a,f)$ *(respectivement* $\overline{N}(r,a,f)$*) est appelée fonction a-points (respectivement a-points distincts) de la fonction* f *dans le disque* $|z| \leq r$. *Elle caractérise la densité des zéros de l'équation* $f(z) = a$ *dans le disque* $|z| \leq r$ *et* $m(r,a,f)$ *est dite fonction de proximité de la fonction* f *au point* a. *Elle exprime la déviation en moyenne de la fonction* f *au point* a.

Lemme 1.2.1 ([13]) *Soit* f *une fonction méromorphe avec a-points* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ *dans le disque* $|z| \leq r$ *tels que* $0 \leq |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \cdots \leq |\alpha_n| \leq r$. *Alors*

$$\int_0^r \frac{n(t,a,f)}{t} dt = \int_0^r \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt = \sum_{|\alpha_j| \leq r} \log \frac{r}{|\alpha_j|}.$$

Preuve. *Posons* $|\alpha_j| = r_j \ (1 \leq j \leq n)$.

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha_j|\le r} \log \frac{r}{|\alpha_j|} &= \sum_{j=1}^{n} \log \frac{r}{r_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (\log r - \log r_j) \\
&= n \log r - \sum_{j=1}^{n} \log r_j \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} j (\log r_{j+1} - \log r_j) + n (\log r - \log r_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} [(j+1) \log r_{j+1} - j \log r_j] - \sum_{j=1}^{n-1} \log r_{j+1} + n \log r - n \log r_n \\
&= nlogr_n - \sum_{j=1}^{n} \log r \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} j \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{dt}{t} + \int_{r_n}^{r} \frac{ndt}{t} \\
&= \int_{0}^{r} \frac{n(t,a,f)}{t} dt \\
&= \int_{0}^{r} \frac{n(t,a,f) - n(0,a,f)}{t} dt.
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 1.2.1 *Soit* $f_1(z) = e^z$ *et* $f_2(z) = e^{az}$ $(a \in \mathbb{C})$ *. Nous avons* $f_1(z)$ *et* $f_2(z)$ *sont des fonctions entières, alors ils n'ont pas des pôles. D'où*

$$n(r, \infty, f_1) = n(r, \infty, f_2) = 0,$$

et

$$N(r, f_1) = N(r, f_2) = 0.$$

Définition 1.2.1 ([10, 13]) *Pour tout rèel* $x \ge 0$, *on définit*

$$\log^+ x = \max(\log x, 0) = \begin{cases} \log x & x > 1 \\ 0 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Lemme 1.2.2 ([13]) *On a les propriétés suivantes :*

a) $\log x \leq \log^+ x \qquad (x \geq 0)$.

b) $\log^+ x \leq \log^+ y \qquad (0 < x \leq y)$.

c) $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x} \qquad (x \geq 0)$.

d) $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x} \qquad (x > 0)$.

e) $\log^+ \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \log^+ x_i$.

f) $\log^+ \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right) \leq \sum_{j=1}^{n} \log^+ x_j + \log n$.

Proposition 1.2.1 ([13]) *Soit f une fonction méromorphe et $a \in \mathbb{C}$ tels que*

$$f(z) - a = \sum_{j=m}^{\infty} c_j z^j, c_m \neq 0,\ m \in \mathbb{Z},$$

est le développement de Laurent de $f(z) - a$ à l'origine. Alors on a

$$\log |c_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(re^{i\varphi}\right) \right| d\varphi + N\left(r, \infty, f\right) - N\left(r, \infty, \frac{1}{f}\right).$$

Preuve. *Considérons la fonction $h(z) = f(z) z^{-m}$,*

on a $h(0) \neq 0, \infty$, et

$m = n(0, 0, f) - n(0, \infty, f)$.

En effet, si $m > 0$, alors

$n(0, 0, f) = m$ *et*

$n(0, \infty, f) = 0$

si $m < 0$, alors

$n(0, 0, f) = 0$ *et*

$n(0, \infty, f) = -m$

si $m = 0$

$n(0, 0, f) = n(0, \infty, f) = 0$.

Donc f et h possèdent les mêmes zéros et les mêmes pôles dans $0 < |z| < r$,

*d'après le théorème 1.1.1 et le lemme 1.2.*1

$$
\begin{aligned}
&log\,|c_m| = \log|h(0)| \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|h\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \sum_{|b_k|<r} \log\left(\tfrac{r}{|b_k|}\right) - \sum_{|a_j|<r} \log\left(\tfrac{r}{|a_j|}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\varphi}\right) r^{-m}\right| d\varphi + \int_0^r \tfrac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t} dt - \int_0^r \tfrac{n(t,0,f)-n(0,0,f)}{t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + -m\log r + \int_0^r \tfrac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t} dt - \int_0^r \tfrac{n(t,0,f)-n(0,0,f)}{t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + -\left[n(0,0,f) - n(0,\infty,f)\right]\log r + \int_0^r \tfrac{n(t,\infty,f)-n(0,\infty,f)}{t} dt - \int_0^r \tfrac{n(t,0,f)-n(0,0,f)}{t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + N(r,f) - N\left(r,\tfrac{1}{f}\right).
\end{aligned}
$$

□

Théorème 1.2.1 ([13]) ***(premier théorème fondamental de R.Nevanlinna)***

Soit f une fonction méromorphe avec le développement de Laurent $f-a$ $(a\in\mathbb{C})$ à l'origine

$$f(z) - a = \sum_{j=m}^{+\infty} c_j z^j,\ c_m \neq 0,\ m \in z,\ z \in \mathbb{C}.$$

Alors

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r,f) - \ln|c_m| + \varphi(r,a),$$

où

$|\varphi(r,a)| \leq \ln^+|a| + \ln 2.$

Preuve. *Montrons le théoème pour $a = 0$.*

D'après la proposition 1.2.1 et le lemme 1.2.2 (c), on a

$$
\begin{aligned}
\ln|c_m| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + N(r,f) - N\left(r,\tfrac{1}{f}\right) \\
&= m(r,f) - m(r,0,f) + N(r,f) - N\left(r,\tfrac{1}{f}\right) \\
&= m\left(r,\tfrac{1}{f}\right) + N\left(r,\tfrac{1}{f}\right) \\
&= m(r,f) + N(r,f) - \ln|c_m| \\
&= T(r,f) - \ln|c_m|. \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

Montrons le cas général $a \neq 0$. *Posons* $h = f - a$. *Alors*

$$N\left(r, \frac{1}{h}\right) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$$

$$N(r,h) = N(r, f-a) = N(r,f),$$

on a

$$ln^+|h| = \ln^+|f-a| \leq \ln^+|f| + \ln^+|a| + \ln 2 \tag{1.6}$$

$$ln^+|f| = \ln^+|h+a| \leq \ln^+|h| + \ln^+|a| + \ln 2 \tag{1.7}$$

En intégrant (1.6) et (1.7) on aura :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ln^+\left|h\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi &\leq \frac{1}{2\pi}\int \ln^+\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\ln^+|a| + \ln 2) \\
m(r,h) &\leq m(r,f) + \ln^+|a| + \ln 2 \\
m(r,f) &\leq m(r,h) + \ln^+|a| + \ln 2
\end{aligned}$$

Posons

$$\varphi(r,a) = m(r,h) - m(r,f)$$

$$\begin{aligned}
-(\ln^+|a| + \ln 2) &\leq \varphi(r,a) = m(r,h) - m(r,f) \\
&\leq \ln^+|a| + \ln 2 \\
&\Leftrightarrow |\varphi(r,a)| \leq \ln^+|a| + \ln 2
\end{aligned}$$

D'après (1.5) on a

$$\begin{aligned}
T(r, \frac{1}{f-a}) &= T\left(r, \frac{1}{h}\right) = m\left(r, \frac{1}{h}\right) + N\left(r, \frac{1}{h}\right) \\
&= m(r,f) + N(r,f) - \ln|c_m| \\
&= T(r,f) - \ln|c_m| + \varphi(r,a)
\end{aligned}$$

□

Lemme 1.2.3 ([10]) *Pour tout* $a \in \mathbb{C}$, *on a*

$$\log^+|a| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|a - e^{i\theta}\right| d\theta.$$

Preuve. *On applique la formule de Jensen pour la fonction*

$$g(z) = a - z$$

avec $r = 1$, *on obtient*

$$\log|a| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|g\left(e^{i\theta}\right)\right| d\theta - \log\frac{1}{|a|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|a - e^{i\theta}\right| d\theta + \log|a|.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|a - e^{i\theta}\right| d\theta = 0 = \log^+|a|.$$

Si $|a| \geq 1$, *alors* f *n'a pas de zéros dans le disque* $|z| < 1$. *Donc,*

$$\log^+|a| = \log|a| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|a - e^{i\theta}\right| d\theta.$$

$\square$

Définition 1.2.2 ([13]) ***(fonction caractèristique)***

Soit f *une fonction méromorphe. On définit la fonction caractéristique de Nevanlinna par*

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f),$$

où $0 < r < +\infty$.

Cette fonction joue un rôle très important dans la théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes.

Exemple 1.2.2 *Pour la fonction* $f(z) = e^z$, *on a* $N(r, f) \equiv 0$. *D'autre part,*

$$\begin{aligned} m(r, \infty, f) &= m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|e^{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\right| d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|e^{r\cos\varphi}|\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi d\varphi \\ &= \frac{r}{2\pi} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = \frac{r}{\pi}\left[\sin\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r}{\pi}. \end{aligned}$$

Donc, $T(r, f) = \frac{r}{\pi}$.

Théorème 1.2.2 ***(Cartan***, [10]) *Soit f une fonction méromorphe dans $|z| < R$ alors*

$$T(r,f) = \int_0^{2\pi} N\left(r, e^{i\theta}, f\right) d\theta + \log^+ |f(0)|, \quad (0 < r < R).$$

Preuve. On applique la formule de Jensen pour la fonction $f(z) - e^{i\theta}$, alors

$$\log\left|f(0) - e^{i\theta}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right) - e^{i\theta}\right| d\varphi + N\left(r, f, e^{i\theta}\right) - N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right) - e^{i\theta}\right| d\varphi + N(r,f) - N\left(r, e^{i\theta}, f\right).$$

En intégrant par rapport à θ de 0 à 2π

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(0) - e^{i\theta}\right| d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right) - e^{i\theta}\right| d\varphi\right] d\theta \\ &\quad + N(r,f) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, e^{i\theta}, f\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right) - e^{i\theta}\right| d\theta\right] d\varphi \\ &\quad + N(r,f) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, e^{i\theta}, f\right) d\theta.\end{aligned}$$

D'après le lemme 1.2.3

$$\begin{aligned}\log^+ |f(0)| &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right) - e^{i\theta}\right| d\theta\right] d\varphi + N(r,f) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, e^{i\theta}, f\right) d\theta \\ &= m(r,f) + N(r,f) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, e^{i\theta}, f\right) d\theta \\ &= T(r,f) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N\left(r, e^{i\theta}, f\right) d\theta\end{aligned}$$

□

Proposition 1.2.2 ([13]) *Soient $f, f_1, f_2, \cdots, f_n$ $(n \geq 1)$ des fonctions meromorphes et a, b, c, et d des constantes complexes telles que $ad - bc \neq 0$. Alors*

1. $T\left(r, \prod_{j=1}^{n} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} T(r, f_j)$.

2. $T\left(r, \sum_{j=1}^{n} f_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} T(r, f_j) + \log n$.

3. $T(r, f^n) = nT(r,f)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

4. $T\left(r, \frac{af+b}{cf+d}\right) = T(r,f) + O(1)$ $r \to +\infty$, $f \neq \frac{-d}{c}$.

1.3 Principale estimation de la dérivée logarithmique

Théorème 1.3.1 ([13]) *Soit f une fonction méromorphe transcendante. Alors*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = S\left(r, f\right),$$

où $S\left(r, f\right) = O\left(\log T\left(r, f\right) + \log r\right)$ *à l'extérieur d'un ensemble* $E \subset [0, +\infty)$ *de mesure linéaire finie. Si f est d'ordre fini, alors*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O\left(\log r\right).$$

Corollaire 1.3.1 ([13]) *Soit f une fonction méromorphe transcendante et $k \geq 1$ est un nombre entièr. Alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S\left(r, f\right),$$

où $S\left(r, f\right) = O\left(\log T\left(r, f\right) + \log r\right)$ *à l'extérieur d'un ensemble* $E \subset [0, +\infty)$ *de mesure linéaire finie. Si f est d'ordre fini alors*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O\left(\log r\right).$$

1.4 Ordre d'une fonction méromorphe

Définition 1.4.1 ([10, 13]) *Soit f est une fonction méromorphe. On définit l'ordre de f par*

$$\sigma\left(f\right) = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\log T\left(r, f\right)}{\log r}. \tag{1.8}$$

Si

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\log T\left(r, f\right)}{\log r} = +\infty,$$

on dit que la fonction f est d'ordre infini.

Exemple 1.4.1 *Pour la fonction $f\left(z\right) = \exp\left(z\right)$, on a $T\left(r, f\right) = \frac{r}{\pi}$. D'où $\sigma\left(f\right) = 1$.*

Exemple 1.4.2 *Pour la fonction $f\left(z\right) = \exp\exp\left(z\right)$, on a $T\left(r, f\right) \sim \frac{\exp(r)}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{2}}}$, $r \to +\infty$. D'où $\sigma\left(f\right) = +\infty$*

1.5 Mesure linéaire et mesure logarithmique

Définition 1.5.1 ([11]) *On définit la mesure linéaire d'une ensemble* $E \subset [0, +\infty)$ *par*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t)\, dt,$$

où χ_E *est la fonction caractéristique de l'ensemble* E.

Définition 1.5.2 ([11]) *La mesure logarithmique d'un ensemble* $H \subset [1, +\infty)$ *est définie par*

$$lm(H) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_H(t)}{t} dt,$$

où χ_H *est la fonction caractéristique de l'ensemble* H.

Exemple 1.5.1 *La mesure linéare de l'ensemble* $E = [1, 5] \cup [6, 8] \subset [1, +\infty)$ *est*

$$m(E) = \int_0^{+\infty} \chi_E(t) = \int_1^5 dt + \int_6^8 dt = 6$$

Exemple 1.5.2 *La mesure logarithmique de l'ensemble* $F = [1, e] \subset [1, +\infty)$

$$lm(F) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_F(t)}{t} dt = \int_1^e \frac{dt}{t} = 1$$

1.6 La croissance et la distribution des valeurs d'une fonction entière ou méromorphe

1.6.1 L'ordre de croissance d'une fonction

Définition 1.6.1 *Soit* f *une fonction entière. Alors l'ordre et l'hyper-ordre de* f *sont définis respectivement par*

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log M(r, f)}{\log r},$$

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log M(r, f)}{\log r},$$

où $M(r, f) = \max\{|f(z)|, |z| = r\}$.

Si f est une fonction méromorphe, alors l'ordre et l'hyper-ordre de f sont définis par voir ([13])

$$\sigma(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

$$\sigma_2(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log T(r,f)}{\log r}.$$

Exemple 1.6.1 *La fonction $f(z) = \exp\{\exp z^n\}$ est d'ordre $\sigma(f) = \infty$ et d'hyper ordre $\sigma_2(f) = n$.*

La fonction $f(z) = \exp\left\{\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\right\}$ est d'ordre $\sigma(f) = \infty$ et de hyper ordre $\sigma_2(f) = \frac{1}{2}$.

Remarque 1.6.1 *Si f est d'ordre fini alors l'hyper ordre de cette fonction est nulle.*

1.6.2 La notion d'ordre p- itératif d'une fonction

Si l'ordre d'une fonction entière ou méromorphe est infini, on définit l'hyper ordre de cette fonction.

Pour la définition de l'ordre p- itératif d'une fonction méromorphe, on a besoin de définir les expressions suivantes : pour tout $r \in \mathbb{R}$, on pose $\exp_1 r := \exp r$ et $\exp_{p+1} r := \exp\left(\exp_p r\right)$, $p \in \mathbb{N}$. De la même façon on définit $\log_1 r := \log r$ et $\log_{p+1} r := \log\left(\log_p r\right)$, $p \in \mathbb{N}$ et ceci pour r suffisamment grand

Définition 1.6.2 [13] *Soit f une fonction méromorphe. Alors l'ordre $p-$itératif est défini par*

$$\sigma_p(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p T(r,f)}{\log r} \qquad (p \in \mathbb{N}). \tag{1.9}$$

Si f est une fonction entière, alors l'ordre $p-$ itératif est défini par

$$\sigma_p(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p T(r,f)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{p+1} M(r,f)}{\log r} \qquad (p \in \mathbb{N}). \tag{1.10}$$

Exemple 1.6.2 *Pour la fonction $f(z) = \exp_q(z)$, $q \in \mathbb{N}$ on a*

$$\sigma_p(f) = \begin{cases} +\infty & si\ p < q \\ 1 & si\ p = q \\ 0 & si\ p > q \end{cases}$$

Théorème 1.6.1 *Soit* f,g *deux fonctions méromorphes. Alors*

1. $\sigma(f+g) \leq \max\{\sigma(f);\sigma(g)\}$.

2. $\sigma(fg) \leq \max\{\sigma(f);\sigma(g)\}$.

3. *Si* $\sigma(f) < \sigma(g)$ *alors* $\sigma(f+g) = \sigma(fg) = \sigma(g)$.

Définition 1.6.3 *Soit* f *une fonction méromorphe. Alors l'indice de croissance de l'ordre est défini par*

$$i(f) = \begin{cases} 0 & \textit{pour } f \textit{ rationelle} \\ \min\{p \in \mathbb{N} : \ \sigma_p(f) < \infty\} & \textit{pour } f \textit{ trancsendante avec } \sigma_p(f) < \infty \textit{ existes,} \\ \infty & \textit{pour } f \textit{ avec } \sigma_p(f) = \infty \textit{ pour tout } p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Définition 1.6.4 *Soit* f *une fonction méromorphe. Alors l'ordre inférieur* $p-$ *itératif est défini par*

$$\mu_p(f) = \underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\log_p T(r,f)}{\log r} \qquad (p \in \mathbb{N}). \tag{1.11}$$

1.6.3 Exposant de convergence des zéros d'une fonction mèromorphe

Définition 1.6.5 *Soit* f *une fonction méromorphe. On définit l'exposant* $p-$*itératif de convergence des zéros de la fonction* f *par*

$$\lambda_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

On définit l'exposant $p-$*itératif de convergence des zéros distincts de la fonction* f *par*

$$\overline{\lambda}_p(f) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log_p \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

Définition 1.6.6 *Soit* f *une fonction méromorphe. Alors l'exposant* $p-$*itératif de convergence des* $a-$ *points de la fonction* f *noté* $\lambda_p(f,a)$ *est défini par*

$$\lambda_p(f,a) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p n(r,a,f)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p N(r,a,f)}{\log r} \qquad (p \in \mathbb{N}). \tag{1.12}$$

Si $a = 0$, alors on obtient l'exposant $p-$itératif de convergence des zéros de la fonction f

$$\lambda_p(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p n\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r} \qquad (p \in \mathbb{N}). \tag{1.13}$$

On définit l'exposant $p-$itératif de convergence des $a-$ points des zéros distincts de la fonction f par

$$\overline{\lambda_p}(f, a) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p \overline{n}(r, a, f)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p \overline{N}(r, a, f)}{\log r} \qquad (p \in \mathbb{N}). \tag{1.14}$$

Si $a = \infty$, on définit l'exposant $p-$itératif de convergence des pôles distincts d'une fonction méromorphe f est défini par

$$\overline{\lambda_p}\left(\frac{1}{f}\right) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p n(r, f)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p N(r, f)}{\log r} \qquad p \in (\mathbb{N}). \tag{1.15}$$

Exemple 1.6.3 *L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction $f(z) = e^{e^z} + 2$ sont égaux respectivement à ∞ et 1.*

Exemple 1.6.4 *L'exposant et l'hyper exposant de convergence des zéros distincts de la fonction $f(z) = e^{e^z} + e^z$ sont égaux respectivement à ∞ et 1.*

Exemple 1.6.5 *L'exposant et l'hyper exposant de convergence des points fixes de la fonction $f(z) = \cos(e^z)$ sont égaux respectivement à ∞ et 1.*

1.7 L'indice central d'une fonction entière

Définition 1.7.1 *[13,11] Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction entière et soit $0 \leq r < +\infty$. Notons par $\mu(r) = \max\{|a_n| r^n;\ n = 0, 1, \ \cdots\}$ le terme maximal de f. L'indice central de la fonction f est défini par*

$$v_f(r) = \max\{m; \mu(r) = |a_m| r^m \text{ et } m = m(r)\}$$

Exemple 1.7.1 *Pour le polynôme $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 z^0$, $a_n \neq 0$, pour r suffisamment grand, on a*

$$\mu(r) = |a_n| r^n$$

et

$$v_p(r) = n.$$

1.8 Lemmes préliminaires

Lemme 1.8.1 *Si $f(z)$ est une fonction entière d'ordre σ et d'indice central $v_f(r)$, alors*

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log v_f(r)}{\log r}.$$

Lemme 1.8.2 *[13] Soit $g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $h : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ deux fonctions monotones croissantes telles que*

i. *$g(r) \leq h(r)$ à l'extérieur d'un ensemble E_2 de mesure linéaire finie. Alors, pour tout $\alpha>1$ il existe $r_0 > 0$ tel que $g(r) \leq h(\alpha r)$ pour tout $r > r_0$.*

ii. *$g(r) \leq h(r)$ à l'extérieur d'un ensemble E_2 de mesure logarithmique finie. Alors, pour toute $\alpha > 1$, il existe $r_0 > 0$ tel que $g(r) \leq h(r^\alpha)$ Pour tout $r > r_0$.*

Preuve. *pour (i) : depuis E est de mesure logarithmique finie, clairement E peut contenir au plus un nombre fini d'intervalles disjoints de la forme $[r, \alpha r]$ pour $r \geq 1$, il en résulte que il existe une $r_0 > 0$, tel que pour tout $r > r_0$, l'intervalle $[r, \alpha r]$ doit contenir un point t où $t \in E \cup [0,1]$. Alors $g(r) \leq g(t) \leq h(t) \leq h(\alpha r)$. Ou bien on noté $\sigma := \int_E dr$, et on choi $r_0 = \sigma/(\alpha - 1)$. Pour tout $r > r_0$, l'intervalle $[r, \alpha r]$ contient le complément de E. En fait,*

$$\int_r^{\alpha r} dt = r(\alpha - 1) > r_0(\alpha - 1) = \sigma.$$

par conséquent, on prendre $t \in [r, \alpha r] \setminus E$, nous obtenons

$$g(r) \leq g(t) \leq h(t) \leq h(\alpha r).$$

Pour (ii) : on notons $\lambda = \int\limits_E dr/r < \infty$, et choisi $r_0 = \exp(\lambda/(\alpha - 1))$ pour tout $r > r_0$, d'intervalle $[r, r^\alpha]$ rencontre le complément de E. Comme dans la preuve précédent $\int\limits_r^{r^\alpha} \frac{dt}{t} = \log r^\alpha - \log r = (\alpha - 1)\log r > (\alpha - 1)\log r_0 = \lambda$. Par conséquent, prend maintenant $t \in [r, r^\alpha] \setminus E$, nous obtenons

$$g(r) \leq g(t) \leq h(t) \leq h(r^\alpha).$$

$\square$

Lemme 1.8.3 ([6]) *Soit f une fonction méromorphe, soit $\alpha > 1$ et $\varepsilon > 0$ donné. Alors il existe une constante $B > 0$ et un ensemble $E_1 \subset [0, \infty)$ de mesure linéaire finie tel que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_1$, on a*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq B\left[T(\alpha r, f)\, r^{\varepsilon} \log T(\alpha r, f)\right]^{k} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Lemme 1.8.4 ([12], [8]) *Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière, $\mu(r)$ est le terme maximal, i.e :*

$$\mu(r) = \max\left\{|a_n| r^n; n = 0, 1, \cdots\right\},$$

et soit $\nu_f(r)$ l'indice central de f. On a les assertions suivantes

(i) si $|a_0| \neq 0$, alors

$$\log \mu(r) = \log|a_0| + \int_0^r \frac{\nu_f(t)}{t} dt, \tag{1.16}$$

(ii) pour $r < R$, nous avons

$$M(r, f) < \mu(r)\left\{\nu_f(R) + \frac{R}{R - r}\right\}. \tag{1.17}$$

Lemme 1.8.5 *[11, 12, 13] Soit $f(z)$ une fonction transcendante, et soit z un point vérifiant $|z| = r$ où $|f(z)| = M(r, f)$. Alors pour toute $|z|$ à l'extérieur d'un ensemble E_3 de r de mesure logarithmique finie, nous avons*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{v_f(r)}{z}\right)^n (1 + o(1)) \quad (n \in \mathbb{N}, r \notin E_3), \tag{1.18}$$

où $v_f(r)$ est l'indice central de f.

Lemme 1.8.6 *[3,15] Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre itératif fini satisfaisant $\sigma_p(f) = \sigma_3$, $\mu_q(f) = \mu$, $0 < q \leq p < \infty$, et soit $v_f(r)$ l'indice central de f. Alors nous avons*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p v_f(r)}{\log r} = \sigma_3, \tag{1.19}$$

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_q v_f(r)}{\log r} = \mu. \tag{1.20}$$

Lemme 1.8.7 *[15] Soit $f(z)=\frac{g(z)}{d(z)}$, où $g(z)$, $d(z)$ sont des fonctions entières d'ordre itératif fini satisfaisant $i(d)<p$ où $\sigma_p(d)<\mu_p(g)\leq\sigma_p(g)<\infty$, $p\in\mathbb{N}$. Soit z un point avec $|z|=r$ où $|g(z)|=M(r,g)$ et $v_g(r)$ désigne l'indice central de g. Alors on a l'estimation*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{v_g(r)}{z}\right)^n(1+o(1))\quad(n\in\mathbb{N}). \tag{1.21}$$

pour tout $|z|=r$ à l'extérieur d'un ensemble E_4 de r mesure logarithmique finie.

Preuve. *Utilisant la relations de recurence, on peut montrer facilement cela*

$$f^{(n)}=\frac{g^{(n)}}{d}+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{g^{(j)}}{d}.\sum_{(j_1\ldots j_n)}c_{jj_1\ldots j_n}\left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1}\ldots\left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}, \tag{1.22}$$

où $c_{jj_1\ldots j_n}$ est des constantes, et $j+j_1+2j_2+\ldots+nj_n=n$. D'où

$$\frac{f^{(n)}}{f}=\frac{g^{(n)}}{g}+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{g^{(j)}}{g}\sum_{(j_1\ldots j_n)}c_{jj_1\ldots j_n}\left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1}\ldots\left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}. \tag{1.23}$$

De lemme 1.8.5, nous avons

$$\frac{g^{(j)}(z)}{g(z)}=\left(\frac{v_g(r)}{z}\right)^j(1+o(1))\qquad\qquad(j=1,\ldots,n). \tag{1.24}$$

Où $|z|=r$, $|g(z)|=M(r,g)$, $r\notin E_2, lmE_2<\infty$. (1.23) *et (1.24)*

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)}=\left(\frac{v_g(r)}{z}\right)^n\left[(1+o(1))+\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{v_g(r)}{z}\right)^{j-n}(1+o(1))\times\sum_{(j_1\ldots j_n)}c_{jj_1\ldots j_n}\left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1}\ldots\left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}\right].$$

De puis que $i(d)<p$ ou $\sigma_p(d)=\beta<\sigma_3$, pour tout donné $\varepsilon\,(0<2\varepsilon<\sigma_3-\beta)$ et pour r suffisamment grand, nous avons

$$T(2r,d)\leq\exp_{p-1}\left\{(2r)^{\beta+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}.$$

De lemme 1.8.3, il existe un ensemble $E_1\subset[1,\infty)$ avec $mE_1<\infty$ tel que pour tout z satisfaire $|z|=r\notin E_1$et pour r suffisamment grand, nous avons

$$\left|\frac{d^{(m)}(z)}{d(z)}\right|\leq B\,|T(2r,d)|^j\leq exp_{p-1}\left\{r^{\beta+\varepsilon}\right\}=o(1)\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_3-\varepsilon}\right\},$$

pour $m=1,\ldots,n$. De lemme 1.8.6 et $\mu_p(g)=\mu_p(f)=\sigma_3>\beta$, il suit que $v_g(r)>$ $\exp_{p-1}\{r^{\sigma_3-\varepsilon}\}$ pour r suffisamment grand. Donc

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{v_g(r)}{z}\right)^{j-n}\left(\frac{d'}{d}\right)^{j_1}\ldots\left(\frac{d^{(n)}}{d}\right)^{j_n}\right|\\&\leq\exp\left\{-\exp_{p-2}\left\{r^{\sigma_3-\varepsilon}\right\}\right\}.\exp_{p-1}\left\{r^{\beta+\varepsilon}\right\}\to0\,(r\to\infty)\end{aligned}$$

Ensemble $E_3 = E_1 \cup E_2$ *et note* $lmE_3 < \infty$, *à un point* z *avec* $|z| = r \notin E_3, |g(z)| = M(r, g)$, *nous concluons que (1.21) tient.* □

Lemme 1.8.8 [(16, 17)] *Soit* $f(z)$ *est une fonction entière d'ordre itératif fini satisfaisant* $i(f) = p+1$, $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_2$, $\mu_{q+1}(f) = \mu, 0 < q \le p < \infty$, *et soit* $\nu_f(r)$ *est l'indice central de* f. *Alors on a*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{p+1} \nu_f(r)}{\log r} = \sigma_3, \tag{1.25}$$

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{q+1} \nu_f(r)}{\log r} = \mu. \tag{1.26}$$

Preuve. *Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. *Sans perte de généralisation, nous pouvons supposer que* $|a_0| \neq 0$ *de (1.16), on a*

$$\log \mu(2r) = \log|a_0| + \int_0^{2r} \frac{\nu_f(r)}{t} dt \ge \log|a_0| + \nu_f(r) \log 2. \tag{1.27}$$

Par l'inégalité de Cauchy, C'est facile de voir $\mu(2r) \le M(2r, f)$, *alors*

$$\nu_f(r) \log 2 \le \log M(2r, f) + c_1, \tag{1.28}$$

avec $c_1 > 0$ *est un constant. Par 1.10 et (1.28) nous obtenons*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{p+1} \nu_f(r)}{\log r} \le \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{p+2} M(r, f)}{\log r} = \sigma_2, \tag{1.29}$$

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{q+1} \nu_f(r)}{\log r} \le \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{q+2} M(r, f)}{\log r} = \mu. \tag{1.30}$$

D'autre part, de (1.17), on a

$$M(r, f) < \mu(r) \{\nu_f(2r) + 2\} = \left|a_{\nu_f(r)}\right| r^{\nu_f(r)} \{\nu_f(2r) + 2\}, \tag{1.31}$$

depuis $\{|a_n|\}$ *est une suite bornée de (1.31), on a*

$$\log_{p+2} M(r, f) \le \log_{p+1} \nu_f(2r) \left[1 + \frac{\log_{p+2} \nu_f(2r)}{\log_{p+1} \nu_f(2r)}\right] + \log_{p+2} r + c_2, \tag{1.32}$$

avec $c_2 > 0$ *est un constant. Alors*

$$\sigma_2 = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{p+2} M(r, f)}{\log r} \le \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{p+1} \nu_f(2r)}{\log 2r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{p+1} \nu_f(r)}{\log r}, \tag{1.33}$$

$$\mu = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{q+2} M(r, f)}{\log r} \le \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{q+1} \nu_f(2r)}{\log 2r} = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_{q} \nu_f(r)}{\log r}. \tag{1.34}$$

De (1.29), (1.30), (1.33) et (1.34), nous obtenons les conclusions (1.25) et (1.26). □

Lemme 1.8.9 *[12] Soient $A_0(z)$, $A_1(z)$,..., $A_{k-1}(z)$ des coefficients entières dans l'équation*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z)f = 0,$$

et au moins un d'entre eux est une fonction transcendante. Si $A_s(z)$ $(0 \leq s \leq k-1)$ est le premier coefficient (selon la suite A_0, A_1, ..., A_{k-1}) satisfaisant $\underline{\lim}_{r\to\infty} \sum_{j=s+1}^{n} m(r, A_j) \diagup m(r, A_s) < 1$ $(r \notin E_5)$, où $E_5 \subset (1, +\infty)$ est un ensemble d'avoir mesure linéaire finie, alors l'équation

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z)f = 0,$$

possède au plus s solutions entières linéairement indépendantes satisfaisant

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log T(r, f)}{m(r, A_p)} = 0 \qquad (r \notin E_5).$$

Lemme 1.8.10 *[18,7,8,9] Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre itératif fini avec*

$$i(f) = p, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Alors, il existe des fonctions entières $\beta(z)$ et $D(z)$ de telle sorte que

$$f(z) = \beta(z)e^{D(z)},$$

$$\sigma_p(f) = \max\{\sigma_p(\beta), \sigma_p(e^{D(z)})\}$$

et

$$\sigma_p(\beta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log_p N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\log r}.$$

En outre, pour tout $\varepsilon > 0$ donné,

$$\log|\beta(z)| \geq -\exp\left\{r^{\sigma_p\beta(z)+\varepsilon}\right\} \quad (r \notin E_6), \tag{1.35}$$

où E_6 est un ensemble de r de mesure linéaire finie.

Lemme 1.8.11 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre itératif fini avec $i(f) = p$, $p \in N$. Alors, il existe des fonctions entières $\pi_1(z)$, $\pi_1(z)$ et $D(z)$ de telle sorte que*

$$f(z) = \frac{\pi_1(z)\, e^{D(z)}}{\pi_2(z)} \tag{1.36}$$

et

$$\sigma_p(f) = \max\{\sigma_p(\pi_1), \sigma_p(\pi_2), \sigma_p(e^{D(z)})\}. \tag{1.37}$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on a

$$\exp\{-\exp_{p-1}\{r^{\sigma_p(f)+\varepsilon}\}\} \leq |f(z)| \leq \exp_p\{r^{\sigma_p(f)+\varepsilon}\}(r \notin E_7), \tag{1.38}$$

où E_7 est un ensemble de r de mesure linéaire finie.

Preuve. *Par le lemme 1.8.10, il est facile de voir que (1.36) et (1.37) influence. Pose $f(z) = \frac{\pi_1(z)e^{D(z)}}{\pi_2(z)}$, où $\pi_1(z)$,$\pi_2(z)$ sont les produits canoniques formés avec les zéros et les pôles de $f(z)$ respectivement. Depuis $max\{\sigma_p(\pi_1), \sigma_p(\pi_2), \sigma_p(e^{D(z)})\} = \sigma_p(f)$ et par le lemme 1.8.10, suffisamment grand pour $|z| = r$, nous avons*

$$|\pi_1(z)| \leq \exp_p\left\{r^{\sigma_p(\pi_1)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\} \leq \exp_p\left\{r^{\sigma(f)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}, \left|e^{D(z)}\right| \leq \exp_p\left\{r^{\sigma_p(f)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\} \tag{1.39}$$

$$|\pi_2(z)| \leq \exp_p\left\{r^{\sigma_p(\pi_2)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\} \leq \exp_p\left\{r^{\sigma_p(f)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}, \tag{1.40}$$

$$|\pi_1(z)| \geq \exp_p\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(\pi_1)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}\right\} \geq \exp_p\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(f)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}\right\} \qquad (r \notin E_7) \tag{1.41}$$

$$|\pi_2(z)| \geq \exp_p\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(\pi_2)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}\right\} \geq \exp_p\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(f)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}\right\} \qquad (r \notin E_7) \tag{1.42}$$

avec E_7 est un ensemble de r de mesure linéaire finie. Depuis $\sigma_{p-1}(D) = \sigma_p\left(e^{D(z)}\right) \leq \sigma_p(f)$ et $\left|e^{D(z)}\right| \geq e^{-|D(z)|}$, pour suffisamment grand $|z| = r$, on a

$$\left|e^{D(z)}\right| \geq e^{-|D(z)|} \geq \exp\left\{-\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_p(f)+\frac{\varepsilon}{2}}\right\}\right\}. \tag{1.43}$$

Par (1.39)-(1.43), nous pouvons obtenir facilement. □

Remarque 1.8.1 *Le Lemme 1.8.11 est une amélioration du Lemme 1.8.10 et généralise le résultat dans* [4, *p.* 84, *Lemme* 4].

Lemme 1.8.12 *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre itératif infini satisfaisant $i(f) = p$. Alors il existe un ensemble $E_8 \subset (1, +\infty)$ de mesure logarithmique finie, tel que pour tout $r \in E_8$, on a*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log_p T(r,f)}{\log r} = \sigma_p(f). \tag{1.44}$$

Preuve. Par définition 1.6.2, il existe une suite $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers ∞ et satisfaire $\left(1+\frac{1}{n}\right) r_n < r_{n+1}$ tel que

$$\lim_{r_n\to\infty} \frac{\log T\left(r_n, f\right)}{\log r_n} = \sigma_p\left(f\right). \tag{1.45}$$

Il existe un $n_1$tel que pour $n \geq n_1$ et pour tout $r \in \left[r_n, \left(1+\frac{1}{n}\right) r_n\right]$, on a

$$\frac{\log_p T\left(r_n, f\right)}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right) r_n} \leq \frac{\log_p T\left(r, f\right)}{\log r} \leq \frac{\log_p T\left(\left(1+\frac{1}{n}\right) r_n, f\right)}{\log r_n}. \tag{1.46}$$

Ensemble $E_8 = \underset{n=n_1}{\cup} \left[r_n, \left(1+\frac{1}{n}\right) r_n\right]$, pour tout $r \in E_8$, par (1.46), on a

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log_p T\left(r, f\right)}{\log r} = \lim_{r\to\infty} \frac{\log_p T\left(r_n, f\right)}{\log r_n} = \sigma_p\left(f\right),$$

et

$$m_l E_8 = \sum_{n=n_1}^{\infty} \int_{r_n}^{\left(1+\frac{1}{n}\right) r_n} \frac{dt}{t} = \sum_{n=n_1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \infty.$$

$\square$

Chapitre 2

Oscillation des solutions des équations différentielles linéaires à coefficients fonctions d'ordre itératif fini

2.1 Introduction

Nous avons étudié dans notre mémoire quelques propriétés d'oscillation complexes des équations différentielles linéaire d'ordre itératif de la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z)f = 0, \tag{2.1}$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z)f = F(z), \tag{2.2}$$

et on a obtenu de nombreux résultats lorsque les coefficients dans (2.1) ou (2.2) sont des fonctions entières ou méromorphe d'ordre fini (voir [1, 2,3, 10, 11, 12]). Lorsque les coefficients dans (2.1) ou (2.2) sont fonctions entières d'ordre itératif finie, nous avons les résultats suivant.

2.2 principaux résultats

Théorème 2.2.1 *[14] Soit $A_0(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières. Si*

$$i(A_j) \leq p \qquad (j = 0, \cdots, k-1,\ p \in N),$$

alors toutes les solutions de (2.1) vérifient

$$\sigma_{p+1}(f) \leq \max\{\sigma_p(A_j),\ j = 0,\ \cdots,\ k-1\}.$$

Théorème 2.2.2 *[14] Soit $A_0(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières et soit $i(A_0) = p$, $p \in N$. Si $i(A_j) < p$ où $\sigma_p(A_j) < \sigma_p(A_0)$ pour tout $j = 1, \cdots, k-1$, alors*

$$i(f) = p + 1$$

et

$$\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0),$$

pour toutes les solutions non-triviales de (2.1).

Théorème 2.2.3 *[1] soit $A_0(z), \cdots, A_{k-1}(z)$, des fonctions entières, et soit $i\,(A_0) = p$, $(p \in N)$. Supposons que*

$$\max\{\rho_p(A_j) : j = 1, 2, \cdots, K-1\} \leq \sigma_p(A_0)(> 0)$$

et

$$\max\{\tau_p(A_j) : \sigma_p\,(A_j) = \sigma_p\,(A_0)\} < \tau_p\,(A_0) = \tau\,(0 < \tau < +\infty)\,.$$

Alors, chaque solution $f \not\equiv 0$ de (2,1) satisfait $i(f) = p + 1$ et $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)$.

*Lorsque les coefficients dans (2.1) ou (2.2) sont des fonctions méromor*phes d'ordre itératif fini, nous avons aussi les résultats suivants.

Théorème 2.2.4 [3, 15] *Soit $A_0(z), \cdots,\ A_{k-1}(z),\ F \not\equiv 0$, des fonctions méromorphes. Si $f(z)$ est une solution méromorphe de (2.2) satisfaisant l'une des conditions suivantes :*

(i) $\max\{i(F) = q,\ i(A_j)(j = 0, \cdots,\ k-1)\} < i(f) = p + 1\ (p \in \mathbb{N})$,

(ii) $b = \max\{\sigma_{p+1}(F),\ \sigma_{p+1}(A_j)(j = 0,\ \cdots,\ k-1)\} < \sigma_{p+1}(f)$,

alors $\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f)$.

Théorème 2.2.5 *[15] Soit $A_j(z)(j = 0,\ \cdots,\ k-1)$ des fonctions méromorphes d'ordre itératif fini satisfaisant $\beta = \max\left\{\sigma_p\,(A_j)\,, \lambda_p\left(\frac{1}{A_s}\right), j \neq 0\right\} < \sigma_p\,(A_0)\,, (p \in \mathbb{N})\,,$ ou $i(A_j) < p$ pour $j \neq 0$. Si $f \not\equiv 0$ est une solution méromorphe de (2.1), alors*

$$\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_p(A_0).$$

Théorème 2.2.6 *[15] Soit* $A_j(z)$ $(j = 0, \cdots, k-1)$ *des fonctions méromorphes d'ordre itératif fini satisfaisant* $\max\{\sigma_p(Aj), \lambda_p\left(\frac{1}{A_s}\right), j \neq s\} < \mu_p(A_s) \leq \sigma_p(A_s) < \infty$, $s \in \{0, 1, \cdots, k-1\}(p \in \mathbb{N})$, *où* $i(A_j) < p$ *pour* $j \neq s$. *Si* $f \not\equiv 0$ *est une solution méromorphe de (2.1) satisfaisant*

$$\frac{N(r,f)}{\overline{N}(r,f)} < M,$$

alors $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_s)$.

Dans ce chapitre, nous avons étudiée la croissance des solutions des équations différentielles linéaires des équations (2.1) et (2.2) avec des coefficients fonctions entières ou méromorphes d'ordre itératif fini. Sous certaines conditions sur les coefficients on obtient les résultats suivants qui améliorent et étendent les résultats ci-dessus.

Théorème 2.2.7 *Soient* $A_0(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières d'ordre itératif fini satisfaisant*

$$i(A_0) = p, \sigma_p(A_0) = \sigma_1$$

et

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) \diagup m(r, A_0) < 1,$$

alors chaque solution $f(z)$ *non-triviale de* (2.1) *satisfait* $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0) = \sigma_1$.

Corollaire 2.2.1 *Soit* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières d'ordre itératif fini satisfaisant*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) \diagup m(r, A_0) < 1$$

et A_0 *est fonction transendante avec* $\sigma(A_0) < \infty$. *Alors toute solution* $f(z)$ *non triviale de* (2.1) *satisfait* $\sigma_2(f) = \sigma(A_0)$.

Théorème 2.2.8 *Soit* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions entières d'ordre itératif fini satisfaisant*

$$\max\{\sigma_p(A_j), \ j \neq 0\} \leq \mu_p(A_0) = \sigma_p(A_0),$$

et

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) \diagup m(r, A_0) < 1 \,(r \notin E_1),$$

où E_1 est un ensemble de r de mesure linéaire finie. Alors chaque solution $f(z)$ non triviale de (2.1) satisfait $\sigma_{p+1}(f) = \mu_p(A_0) = \sigma_p(A_0)$.

Remarque 2.2.1 *Dans les théorèmes 2.2.2-2.2.3 et le théorème 2.2.7, les auteurs ont étudié la croissance de la solution de (2.1) dans le même cas où le coefficient $A_0(z)$ dans (2.1) domine les autres coefficients $A_j(z)\,(j = 1, \cdots, k-1)$ et ont obtenu la même conclusion $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0)\,(p \in N)$. On note que la condition*

$$\max\{\sigma_p(A_j), j = 1, \cdots, k-1\} < \sigma_p(A_0),$$

dans le Théorème 2.2.2 est plus fort que la condition

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) / m(r, A_0) < 1$$

dans Théorème 2.2.7. Donc, le Théorème 2.2.7 est une amélioration du Théorème 2.2.2 et le Corollaire 2.2.1 est une amélioration du résultat dans [8, p.121, Théoreme 4]. Si dans le Théorème 2.2.7, nous remplaçons la condition

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) / m(r, A_0) < 1$$

par la condition

$$\underline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) / m(r, A_0) < 1$$

et $\mu_p(A_0) = \sigma_p(A_0)$, alors nous pouvons obtenir la même conclusion comme du Théorème 2.2.7, par conséquent le Théorème 2.2.8 généralise le Théorème 2.2.7.

Théorème 2.2.9 *Soit $A_0(z)$, $A_1(z)$,..., $A_{k-1}(z)$, $F(z) \not\equiv 0$ des fonctions méromorphes. Si $f(z)$ est une solution méromorphe de l'équation (2,2) satisfaisant*

$$i(f) = p + 1, \ \sigma_{p+1}(f) = \sigma_2$$

et

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \left[\sum_{j=0}^{k-1} T(r, A_j) + T(r, F) \right] \diagup T(r, f) < 1,$$

alors

$$\overline{\lambda}_{p+1}(f) = \lambda_{p+1}(f) = \sigma_{p+1}(f) = \sigma_2.$$

Remarque 2.2.2 *Le Théorème 2.2.9 est une amélioration du Théorème 2.2.10 puisque les conditions dans Théorème 2.2.10 sont plus fortes que la condition dans le Théorème 2.2.9. Pouvons-nous obtenir la même conclusion lorsque le coefficients dans (2.1) sont des fonctions méromorphes ? Le Théorème 2.2.10 ci-dessous nous donne une réponse affirmative.*

Théorème 2.2.10 *Soit* $A_0(z), A_1(z),..., A_{k-1}(z)$ *des fonctions méromorphes d'ordre d'itératif fini satisfaisant*

$$i(A_0) = p, \delta(\infty, A_0) = \underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{m(r, A_0)}{T(r, A_0)} > 0$$

et

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) \diagup m(r, A_0) < 1.$$

Alors chaque solution $f(z)$ *non triviale de (2.1) satisfait*

$$\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_p(A_0).$$

Théorème 2.2.11 *Soit* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z), F(z)$ *des fonctions méromorphes d'ordre itératif fini satisfaisant* $\max\{\delta_p(Aj), \delta_p(F), \lambda_p\left(\frac{1}{A_s}\right), j \neq s\} < \mu_p(A_s) \leq \delta_p(A_s)$ *ou* $i(A_j) < p$ $(j \neq s)$. *Si* $f(z)$ *est une solution méromorphe de (2.2) satisfaisant*

$$\frac{N(r, f)}{\overline{\overline{N(r, f)}}} \leq \exp_{p-1}\left\{r^b\right\} \ \left(b < \mu_p(A_s)\right),$$

alors $\delta_{P+1}(f) \leq \delta_P(A_s)$.

Corollaire 2.2.2 *Soit* $A_0(z), A_1(z), \cdots, A_{k-1}(z)$ *des fonctions méromorphes d'ordre itératif fini satisfaisant*

$$\max\{\delta_p(Aj), \delta_p(F), \lambda_p\left(\frac{1}{A_0}\right), j \neq 0\} < \mu_p(A_0) \leq \delta_p(A_s) < \infty.$$

Si $f(z) \not\equiv 0$ *est une solution méromorphe de (2,1) satisfaisant*

$$\frac{N(r, f)}{\overline{\overline{N(r, f)}}} \leq \exp_{p-1}\left\{r^b\right\} \qquad \left(b < \mu_p(A_0)\right),$$

alors

$$\delta_{P+1}(f) = \delta_p(A_0).$$

Remarque 2.2.3 *Théorème 2.2.10 est un supplément du Théorème 2.2.5. Le Théorème 2.2.11 est une extension du Théorème 2.2.6 puisque le Théorème 2.2.6 est un cas particulier du Théorème 2.2.11 avec* $F(z) \equiv 0$.

2.3 Preuves des principaux résultats

2.3.1 Preuve du théorème 2.2.7

Nous divisons la preuve en deux parties :

i) $\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_1$.

ii) $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_1$.

Pour (i) : par (2.1), nous obtenons

$$-A_0 = \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} + A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)} + \cdots + A_1\frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{2.3}$$

Par le lemme de la dérivée logarithmique et (2.3), nous avons

$$m(r, A_0) \leq \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + O\{\log(rT(r,f))\}\ (r \notin E), \tag{2.4}$$

où E est un ensemble de r de mesure linéaire finie pas nécessairement le même dans tous les cas. Supposons que :

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j)/m(r, A_0) = \alpha < \beta_1 < 1,$$

alors pour r suffisamment grand, nous avons

$$\sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) < \beta_1 m(r, A_0). \tag{2.5}$$

Par (2.4) et (2.5), nous avons

$$(1-\beta_1)\, m(r, A_0) \leq O\{\log(rT(r,f))\}\ \ (r \notin E). \tag{2.6}$$

Par $\sigma_p(A_0) = \sigma_1$ et le Lemme 1.8.12 il existe un ensemble $E_8 \subset [1, +\infty)$ de mesure logarithmique infinie telle que
pour z satisfaisait $|z| = r \in E_8 \setminus E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$(1-\beta_1)\exp_{p-1}\left\{r^{\sigma_1-\epsilon}\right\} \leq (1-\beta_1)\, m(r, A_0) \leq O\{\log(rT(r,f))\}. \tag{2.7}$$

De (2.7) on a $\sigma_{p+1}(f) \geq \sigma_p(A_0) = \sigma_1$.

Pour(ii) : Par (2.1) nous obtenons

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| \leq |A_{k-1}| \left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_1| \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| + |A_0|. \tag{2.8}$$

Par le Lemme 1.8.5 et (2.8), pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin E_3$ et $|f(z)| = M(r,f)$, on a

$$\left|\left(\frac{v_f(r)}{z}\right)^k (1+o(1))\right| \leq (|A_{k-1}| + |A_{k-2}| + \cdots + |A_0|) \left|\left(\frac{v_f(r)}{z}\right)^{k-1} (1+o(1))\right| (r \notin E_3), \tag{2.9}$$

où E_3 est un ensemble de r mesure linéaire logarithmique finie. Par (2.5) et $\sigma_p(A_0) = \sigma_1$, il est facile de voir que $\sigma_p(A_j) \leq \sigma_1$ $j = 1, \cdots, k-1$. D'après le Lemme 1.8.11 et (2.9), il existe un ensemble $E_7 \subset (1, +\infty)$, de mesure logarithmique finie telle que pour tout z satisfaisant $|z| = r \notin (E_3 \cup E_7)$, nous avons

$$\left|\left(\frac{v_f(r)}{z}\right)^k (1+\sigma(1))\right| \leq k \exp_p\left\{r^{\sigma_1+\epsilon}\right\} \left|\left(\frac{v_f(r)}{z}\right)^{k-1} (1+\sigma(1))\right|. \tag{2.10}$$

Par le Lemme 1.8.2, et le Lemme 1.8.6 et (2.10), nous avons $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_1$. De (i) et (ii), on obtient que chaque solution non triviale $f(z)$ de (2.1) satisfait $\sigma_{p+1}(f) = \sigma_p(A_0) = \sigma_1$.

2.3.2 Preuve du Théorème 2.2.8

D'après le Lemme 1.8.9, on obtient que toutes les solutions linéairement indépendantes f de (2.1) satisfait $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\log T(r,f)}{m(r,A_0)} > 0 \quad (r \notin E_1)$. Cela signifie que chaque solution $f \not\equiv 0$ de (2.1) satisfait $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\log T(r,f)}{m(r,A_0)} > 0\,(r \notin E_1)$, alors il existe $\delta > 0$ et une séquence $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ tendant vers ∞ telle que pour $r_n \notin E_1$ suffisamment grand et pour chaque solution $f \not\equiv 0$ de (2.1), nous avons

$$\log T(r_n, f) > \delta m(r_n, A_0). \tag{2.11}$$

Comme $\mu_p(A_0) = \sigma_p(A_0)$ et (2.11) *nous avons*

$$\sigma_{p+1}(f) \geq \mu_p(A_0) = \sigma_p(A_0). \tag{2.12}$$

D'autre part, d'après le Théorème 2.2.1, nous avons que toute solution $f \not\equiv 0$ de (2.1) satisfait

$$\sigma_{p+1}(f) \leq \max\{\sigma_p(A_j), j = 0, \cdots, k-1\} = \sigma_p(A_0). \tag{2.13}$$

Par (2.12) et (2.13), nous avons $\sigma_{p+1}(f) = \mu_p(A_0) = \sigma_p(A_0)$.

2.3.3 Preuve du Théorème 2.2.9

De (2.2), nous obtenons

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{F}\left(\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}+A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}+\cdots+A_1\frac{f'(z)}{f(z)}+A_0\right). \tag{2.14}$$

Il est facile de voir que si f a un zéro à z_0 d'ordre α $(> k)$, et $A_0,\ldots, A_{k-1}$ sont analytiques en z_0, alors F doit avoir un zéro en z_0 d'ordre $\alpha-k$, d'où

$$n\left(r,\frac{1}{f}\right)\leq k\overline{n}\left(r,\frac{1}{f}\right)+n\left(r,\frac{1}{F}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}n\left(r,A_j\right), \tag{2.15}$$

$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)\leq k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{F}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}N\left(r,A_j\right). \tag{2.16}$$

*Par le lemme de la dérivée logarith*mique *et (2.14), nous avons*

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leq m\left(r,\frac{1}{F}\right)+\sum_{j=0}^{k-1}m\left(r,A_j\right)+O\left\{\log\left(rT\left(r,f\right)\right)\right\}\quad(r\notin E). \tag{2.17}$$

Par (2.16) et (2.17), nous obtenons

$$T\left(r,\frac{1}{f}\right)\leq T\left(r,\frac{1}{f}\right)+O\left(1\right)\leq k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+T\left(r,F\right)+\sum_{j=0}^{k-1}T\left(r,A_j\right)+O\left\{\log\left(rT\left(r,f\right)\right)\right\}\quad(r\notin E). \tag{2.18}$$

Supposons que

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\sum_{j=0}^{k-1}T\left(r,A_j\right)+T\left(r,F\right)}{T\left(r,f\right)}=\delta<c<1. \tag{2.19}$$

D'après (2.19), pour r suffisamment grand et $\varepsilon\left(0<\varepsilon<c-\delta\right)$ donné, nous avons

$$\sum_{j=0}^{k-1}T\left(r,A_j\right)+T\left(r,F\right)\leq\left(\delta+\varepsilon\right)T\left(r,f\right)<cT\left(r,f\right). \tag{2.20}$$

En substituant (2.20) dans (2.18), nous obtenons

$$T\left(r,f\right)\leq k\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+cT\left(r,f\right)+\varepsilon T\left(r,f\right),\left(r\notin E\right). \tag{2.21}$$

Par (2.21), nous obtenons

$$T\left(r,f\right)\leq\frac{k}{1-c-\varepsilon}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)\leq\frac{2k}{1-c}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)\left(r\notin E\right), \tag{2.22}$$

Par le Lemme 1.8.2 et *(2.22), nous avons $\overline{\lambda}_{p+1}\left(f\right)\geq\sigma_{p+1}\left(f\right)=\sigma_2$. Par conséquent*

$$\overline{\lambda}_{p+1}\left(f\right)=\lambda_{p+1}\left(f\right)=\sigma_{p+1}\left(f\right)=\sigma_2.$$

2.3.4 Preuve du théorème 2.2.10

On suppose que $f = \frac{g(z)}{d(z)}$ *est une solution méromorphe non triviale de (2.1), par (2.3)-(2.4) dans la démonstration du Théorème 2.2.7, il existe une constante* $\beta_1 < 1$ *telle que pour* r *suffisamment grand, nous avons*

$$(1-\beta_1)m(r, A_0) \leq O\left\{\log\left(rT\left(r, f\right)\right)\right\} \ \left(r \notin E\right). \tag{2.23}$$

Comme $i(A_0) = p$, *alors par le Lemme 1.8.12, nous avons*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log T\left(r, A_0\right)}{\log r} = \sigma_p\left(A_0\right) \quad \left(r \notin E_8\right), \tag{2.24}$$

où E_8 *est un ensemble de* r *infinie mesure* linéair*e logarithmique. Comme* $\delta(\infty, A_0) = \underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\log m(r,A_0)}{T(r,A_0)} > 0$, *alors nous avons*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log m\left(r, A_0\right)}{\log r} = \sigma_p\left(A_0\right) \quad \left(r \in E_8\right). \tag{2.25}$$

Par (2.23) et (2.25), nous obtenons $\delta_{p+1}\left(f\right) \geq \delta_p(A_0)$.

2.3.5 Preuve du Théorème 2.2.11

On suppose que $f = \frac{g(z)}{d(z)}$ *est une solution méromorphe de (2.2). De la relation (2.2), nous obtenons*

$$-A_s = \frac{f^{(k)}}{f^{(s)}} + \cdots + A_{s+1}\frac{f^{(s+1)}}{f^{(s)}} + A_{s-1}\frac{f^{(s-1)}}{f^{(s)}} + \cdots + A_0\frac{f}{f^{(s)}} - \frac{F}{f^{(s)}}\ . \tag{2.26}$$

Par (2.26), nous avons

$$T(r, A_s) \leq MT(r, f) + T\left(r, F\right) + \sum_{j\neq s} T\left(r, A_j\right) + O\{log(rT(r, f)\}, (r \notin E) \tag{2.27}$$

où $M > 0$ *est une constante, qui n'est pas nécessairement la même dans chaque cas. Par* $\mu_p\left(A_s\right) > \max\{\delta_p(A_j)\left(j \neq s\right), \delta_p\left(F\right)\}$ *et de (2.27), nous obtenons* $\mu_p\left(f\right) \geq \mu_p(A_s)$. *Étant donné que les pôles de* f *sont obtenus des pôles de* A_j $(j = 0, \cdots, k-1)$ *et* F, *alors nous avons*

$$\overline{\lambda}_p\left(\frac{1}{f}\right) = \overline{\lambda}_p\left(d\right) \leq \max\left\{\lambda_p\left(\frac{1}{A_j}\right), \lambda_p\left(\frac{1}{F}\right), (j = 0, \cdots, k-1)\right\} < \mu_p\left(A_s\right), \tag{2.28}$$

et par

$$\frac{N(r,f)}{\overline{N}(r,f)} < \exp_{p-1}\left\{r^{b}\right\},$$

où $b < \mu_p(A_s)$, *nous avons* $N(r,f) < \overline{N}(r,f)\exp_{p-1}\left\{r^{b}\right\}$. *D'où*

$$\lambda_p(d) = \lambda_p\left(\frac{1}{f}\right) \leq \max\left\{\overline{\lambda}_p\left(\frac{1}{f}\right), b\right\} < \mu_p(A_s). \tag{2.29}$$

Par (2.29) et $\mu_p(f) \geq \mu_p(A_s)$, *nous avons* $\mu_p(g) = \mu_p(f) \geq \mu_p(A_s)$. *Par (2.2) de plus, nous avons*

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right| = |A_{k-1}|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_s|\left|\frac{f^{(s)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_0| + \left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| \quad . \tag{2.30}$$

D'après le Lemme 1.8.8, il existe un ensemble E_4 *ayant une mesure logarithmique finie telle que pour tout* z *satisfaisant* $|z| = r \notin E_4$ *et* $|g(z)| = M(r,g)$, *on a*

$$\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{v_g(r)}{z}\right)^{j}(1+0(1)) \qquad (j = 1, \cdots, k). \tag{2.31}$$

Pour tout z *satisfaisant* $|z| = r \notin E_4$ *et* $|g(z)| = M(r,g) > 1$, *nous avons*

$$\left|\frac{F(z)}{f(z)}\right| = \left|\frac{F(z).d(z)}{g(z)}\right| \leq M\exp_p\left\{r^{\delta_p(A_s)}\right\}. \tag{2.32}$$

D'après le Lemme 1.8.11, il existe un ensemble E_7 *ayant une mesure linéaire finie telle que pour tout* z *satisfaisant* $|z| = r \notin E_7$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$ *donné, on a*

$$|A_j(z)| \leq exp_p\{r^{\sigma_p(A_s)+\varepsilon}\} \quad (j = 0, \cdots, k-1) \tag{2.33}$$

En substituant (2.31)-(2.33) dans (2.30), nous obtenons

$$\left(\frac{v_f(r)}{z}\right)^{k}(1+o(1)) \leq k\left(\frac{v_f(r)}{z}\right)^{k-1}(1+o(1))\exp_p\left\{r^{\sigma_p(A_s)+\varepsilon}\right\}. \tag{2.34}$$

Comme $\varepsilon > 0$ *est arbitraire, par (2.34) et le Lemme 1.8.6, nous avons* $\sigma_{p+1}(f) \leq \sigma_p(A_s)$.

CONCLUSION

L'objectif de ce mémoire étant l'étude de la croissance et l'oscillation des solutions des équations linéaires à coefficients fonctions entières et méromorphes de la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z)f = 0,$$

et

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z)f = F(z).$$

Une question naturelle : Est-il possible d'obtenir des résultats similaires lorsque les coefficients sont des fonctions entières ou méromorphes d'ordre $[p, q]$ *?*

Bibliographie

[1] **B.Belaïdi,** Growth and oscillations to linear differential equations with entire cofficients having the same order, Electron.J.Diff.Eqns.No.70, (2009), 1-10.

[2] **L.G. Bernal**, On growth k-order of solutions of a complex homogeneous linear differential equations, proc. Amer. Math. Soc. 101(1987), 317-322

[3] **T. B. Cao, Z. X. Chen**, **X. M. Zheng** and **J. Tu**, On the iterated order of meromorphic solutions of higher order linear differential equations, Ann. Differential Equations 21(2005), No.2, 111-122.

[4] **Z. X. Chen**, On the hyper order of solutions of some seconde order linear differential equations, Acta Math. Sinica ser. B 18(2002), 79-88.

[5] **Z.X Chen** and **C. C. Yang**, Quantitative estimations on the zeros and growths of entire solutions of linesr differential equations, Complex Variables and Elliptic Equations 42 (2000) 119-133.

[6] **G. Gundersen**, Estimates for the logarithmic derivate of a meromorphic function, plus similar estimates, J. London Math. Soc. 37(2), 88-104 (1988).

[7] **G. Jank** and **L. Volkmann**, Untersuchungen gamer und rneromorpher funktionen unendlicher ordnung,Arch. Math. 39 (1982), 32-45.

[8] **J. Jank** and **L. Volkmann**, Einfiihrung in die Theoric der ganzen und rneromorphen funktionenmit Anwendungen auf Differential gleichungen, Basel-Boston-Stuttgart, 1985.

[9] **G. Jank** and **H. Wallner**, iJhcr das Wachsturn gewisser klassen kanonischer produktc, Arch. Marh.28 (1977), 274-280.

[10] **W. K. Hayman**, Meromorphic Functions,Clarendon Press, Oxford,1964.

[11] **W. K. Hayman**, The local growth of power series : A survery of the Wiman-Valiron method, Canad.

[12] **Y. Z. He and X. Z. Xiao**, Algebroid Functions and Ordinary Differential Equations, Science Press, Beijing, 1988 (in Chinese).

[13] **I. Laine,** Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin, 1993.

[14] **L.Kinnunen**, linear differential equations with solutions of finite iterated order, Southeast Asian Bull. Math. (4) 22(1998), 385-405.

[15] **J. Tu** and **Z. X. Chen**, Growth of solution of complex differential equations with meromorphique coefficients of finit iterated order, Southeast Asian Bull. Math. 33(2009), 153-164.

[16] **J. Tu**, **Z. X. Chen** and **X. M. Zheng**, Growth of solutions of complex differential equations with coefficient of finite iterated order, Electron. J. Diff. Eqns. No.54, (2006), 1-8.

[17] **C. C. Yang** and **H. X. Yi**, The Uniquenesse Theory of Meromorphic Functions, Science Press, Kluwer Academe Publishers, Beijing-New York, 2003.

[18] **J. H. Zheng** and **C. C. Yan,** Estimate on the number of fix-points of composite entire functions, Complex Variables and Elliptic Equations 24 (1994), 301-309.